Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Teorema de Pitágoras : história, demonstrações e aplicações

por

Anesio Amancio de Araujo

Brasília, 2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

At

Araujo, Anesio Amancio de
Teorema de Pitágoras:histórias, demostrações e aplicações / Anesio Amancio de Araujo; orientador Helder de Carvalho Matos. -- Brasília, 2016.
43 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2016.

1. aplicações. 2. demonstrações. 3. história. 4. Teorema de Pitágoras. I. Matos, Helder de Carvalho, orient. II. Título.

Anesio Amancio de Araujo

Teorema de Pitágoras : história, demonstrações e aplicações

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de

Mestre

Orientador: Prof. Dr. Helder de Carvalho Matos

Brasília
2016

Universidade de Brasília

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Teorema de Pitágoras: história, demonstrações e aplicações

por

Anésio Amâncio de Araújo *

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do "Programa" de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 13 de maio de 2016.

Comissão Examinadora:

Helder de C. Matos

Prof. Dr. Helder de Carvalho Matos – MAT/UnB (Orientador)

Raimundo de Araújo Bastos Júnior

Prof. Dr. Raimundo de Araújo Bastos Júnior – MAT/UnB (Membro)

Eudes Antônio

Prof. Dr. Eudes Antônio da Costa –UFT (Membro)

* O autor foi bolsista CAPES durante a elaboração desta dissertação

Dedicatória

À minha esposa Marlene, pelo apoio e compreensão nas minhas ausências. Aos meus filhos Thiago, Vítor e Luíza, por compreenderem a importância deste momento e pelo carinho nas horas difíceis. Aos meus pais Rosa e Nonote por acreditarem na minha capacidade. Aos meus irmãos Zezé, Toninho, Delso, Dilso e Niso pela preservação da harmonia da família. A todos os meus amigos, especialmente, Paulinho, Alzira e João.

Agradecimentos

A Deus por iluminar meus pensamentos, fortalecer-me nas dificuldades, abençoar minha vida e permitir, generosamente, a realização de meus projetos. À minha família, que com carinho e compreensão me incentivou e apoiou, compreendendo todas as dificuldades e ausências necessárias para a realização deste trabalho. A todos os colegas do PROFMAT-UnB (Turma de 2014) pela parceria e apoio nos estudos. Aos professores do PROFMAT-UnB, por acreditarem no projeto e pela dedicação à nossa turma. Especialmente, ao meu orientador, Professor Helder de Carvalho Matos, que foi muito além do papel de professor, grande amigo e incentivador, obrigado por acreditar em mim. Aos funcionários da Escola Estadual Virgílio de Melo Franco, em Unaí-MG, especialmente, à vice-diretora Maria Evangelista e à Professora Maura. Aos alunos do 1º Ano E (Ensino Médio), turma de 2015, desta mesma escola, por participarem do projeto. À CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

Este trabalho trata do Teorema de Pitágoras, um conteúdo de grande importância na Educação Básica. Com o passar dos tempos foi bastante explorado por muitos artistas e admiradores desta ciência. Com ênfase na formação de professores atuantes nesta disciplina, apresenta a história de Pitágoras e algumas demonstrações de seu teorema, as quais foram retiradas do acervo reunido por Elisha Scott Loomis em uma publicação datada de 1940 e, ainda, algumas aplicações que foram dirigidas a um grupo de alunos de uma escola do Ensino Médio.

Palavras-chave: Aplicações, demonstrações, história, Teorema de Pitágoras

Abstract

This work approaches the Pythagorean Theorem, a matter of great importance on Basic Education. Throughout the years, it has been widely explored by many artists and admirers of this science. Emphasizing the formation of the teachers who work with this discipline, it presents the Pythagoras's history and some demonstrations of his theorem, which were extracted from the collection united by Elisha Scott Loomis in a publication from 1940. Furthermore, it showcases applications that have been addressed to a group a High School students.

Keywords: Applications, demonstrations, history, Pythagorean Theorem.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

No ensino da Matemática, acumulamos várias experiências, muitas delas são bem sucedidas e outras nem tanto, de modo que devemos entender que muito ainda deve ser feito pela educação. Dentre as inúmeras ações a serem desenvolvidas, a que mais se destaca é a formação do professor, neste contexto destaca-se o PROFMAT, cujo objetivo maior é a melhoria contínua da educação básica no Brasil.

Embasado neste objetivo, optamos por desenvolver um trabalho sobre um assunto tão relevante e de suma importância no ensino fundamental e médio, porém muito pouco explorado dentro de um extenso conjunto de conteúdos com ele relacionados. É notável, também, a dificuldade apresentada pelos alunos em relação ao aprendizado, a utilização do Teorema de Pitágoras como ferramenta nas resoluções de exercícios e também nas aplicações práticas cotidianas. Para que nós, enquanto professores de Matemática, possamos diminuir ou até mesmo acabar com estas dificuldades encontradas pelos alunos torna-se necessário um criterioso conhecimento sobre o assunto, de maneira clara e objetiva. Por isso apresentamos um trabalho que envolve um contexto histórico, sugestões de demonstrações e aplicações em atividades teóricas, bem como, práticas tornando o aprendizado mais atraente, assim, despertando o interesse destes alunos.

É quase impossível descrever conteúdos matemáticos sem associá-lo à sua história. É atribuído ao matemático grego Euclides (330 a.C. – 260 a.C.) esta forma organizada de descrever a Geometria. Em sua obra "Os Elementos" ele reuniu todos os conhecimentos de Geometria e Aritmética, até então conhecidos, organizando-os logicamente e sistematizando-os em treze volumes.

O Teorema de Pitágoras é estudado, reconhecido e admirado por matemáticos por ser um dos mais belos e aplicáveis teoremas, que tem em seu enunciado: " Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos". Tal proposição é conhecida como a proposição 47, do primeiro livro de "Os Elementos" de Euclides. [7]

Tal teorema foi demonstrado pela primeira vez há cerca de 2500 anos e leva o nome de um importante matemático e filósofo grego do século IV a.C. que nasceu em 569 a.C. Sua imagem é cercada de lendas e mitos, porém não são conhecidos escritos originais sobre sua vida e obra.

É de suma importância ressaltar o valor desse teorema que sempre chamou a atenção de intelectuais ao longo da história, assim, muitas de suas diferentes maneiras de demonstrá-lo foram reunidas na publicação feita por Elisha Scott Loomis [9], professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos). No ano de 1927, ele reuniu 230 demonstrações, em uma segunda publicação, em 1940, este número subiu para 370 demonstrações.

Em seu livro, Loomis previu, ainda, que muitas outras provas além das selecionadas por ele serão objetos de estudos e descobertas de vários outros pesquisadores baseados nas inúmeras possibilidades algébricas e geométricas implícitas neste teorema.

Consta, em seu livro, a tradução de parte da monografia de Wipper Júri, com publicação datada de 1880, que relata em minúcias o famoso teorema. De acordo com a publicação, a demonstração desta proposição deve-se a Euclides que a adaptou em "Os Elementos". Já o método demonstrado por Pitágoras ainda é desconhecido para nós, talvez o próprio Pitágoras tenha descoberto esta característica do triângulo retângulo ou aprendeu com os sacerdotes do Egito, pode ter, também, aprendido com os babilônios. Pitágoras dizia ter aprendido com os padres egípcios as características do triângulo retângulo no qual uma perna equivale a 3 (designada Osíris), a segunda perna igual a 4 (designada Ísis) e a terceira perna igual a 5 (designada Hórus), por esta razão o referido triângulo é chamado de egípcio ou de Pitágoras.

Tais características, além dos além dos religiosos egípcios, eram conhecidas por estudiosos chineses. Destes últimos, diz-se que grandes honras foram dadas a Tschou-gun, por volta de 1100 a.C., pelo notável conhecimento do triângulo retângulo, usando o Teorema de Pitágoras, conseguiu fazer um mapa das estrelas, foi o inventor da bússola e determinou o comprimento do meridiano (hoje conhecido como Meridiano de Greenwich) e o comprimento da linha imaginária do equador. George Cantor, outro respeitável Matemático, faz referências a Tschou-gun e Schau-gao, diz que os dois comentam tais descobertas na forma de diálogo em um livro entitulado Tschaoui pi, a alta de Tschao. Neste livro, também, os lados do triângulo são chamados de pernas como em outros idiomas, por exemplo, alemão, russo, grego e latim.

Por tal fascínio, resolvemos desenvolver este trabalho, contando a história de Pitágoras de Samos, apresentando algumas demonstrações e mostrando algumas aplicações do Teorema em experiência realizada na Escola Estadual Virgílio de Melo Franco (Unaí-MG) com os 34 alunos do 1º Ano E (Ensino Médio), turma de 2015. Esta experiência contou com aulas teóricas, aulas práticas e avaliações (diagnóstica, aprendizagem e aplicação do conteúdo). Os resultados serão apresentados no Capítulo 3 deste trabalho.

Capítulo 1

A História de Pitágoras

Em seu livro, Loomis [9] apresenta uma pequena biografia de Pitágoras. De acordo com seus relatos, Pitágoras nasceu na ilha de Samos, daí o nome com o qual ficou conhecido em sua época "Pitágoras de Samos". O pai de Pitágoras, Mnessarch obteve a cidadania por serviços prestados aos moradores de Samos durante um período de grandes dificuldades e fome. Sempre acompanhado de sua esposa Fitha, Mnessarch sempre viajava com interesses comerciais. No ano de 569 a.C. ele foi para Tiro, nessa mesma ilha, onde Pitágoras nasceu. Já com dezoito anos de idade, Pitágoras foi para o lado esquerdo da ilha de Samos, que era governada pelo tirano Polícrates, daí foi para a ilha de Lesbos, onde foi muito bem recebido por um de seus tios.

Por um período de dois anos recebeu a instrução de Ferekid, Anaksimander e Thales, este último era muito respeitado, também, como filósofo. Com eles, Pitágoras estudou Cosmologia, Física e Matemática.

Com Thales, sabe-se que passou a conhecer o ano solar do Egito, que permitia calcular os eclipses solares e lunares, bem como determinar a altura de uma pirâmide por meio de sua sombra. A Thales, também são atribuídas as descobertas a respeito de projeções geométricas de grande importância para a evolução dos estudos em Geometria, como a característica do ângulo que está inscrito em uma circunferência, as relações deste com seu diâmetro, assim como, as características dos ângulos da base de um triângulo isósceles e, consequentemente, equilátero.

Anaksimander conhecia a determinação da posição do sol. Foi a primeira pessoa a ensinar Geografia e foi capaz de desenhar mapas sobre folhas de cobre. Curiosamente, é creditado a Anaksimander ser o primeiro escritor de prosa, seu trabalho erudito era escrito no verso destas folhas.

Em suas andanças, no ano de 547 a.C., Pitágoras esteve no Egito, na cidade de Sidon, onde estudou no Colégio Sacerdotal Fenício, que foi fundamental para sua preparação intelectual. Polícrates, o tirano, assumiu ter perdoado Pitágoras por ter deixado seus domínios sem sua permissão e, em carta dirigida a Amasis, faraó do

Egito, rendeu muitos elogios ao jovem estudioso. Pessoalmente, então, encaminhou Pitágoras a Memphis. O rigoroso método de ensino era passado de forma convincente e contundente, estabelecendo os deveres dos jovens colocados pelos anciãos da cidade, ocupando-lhes o tempo, para que não ficassem sem orientação e conselhos, voltando a atenção para o cumprimento das leis e da pureza das tradições das famílias, focando na fé com suas orações voltadas para as mães de família, bem como para as crianças, para que crescessem fortes e saudáveis.

Durante vinte e um anos Pitágoras permaneceu no Egito, neste período, não apenas conseguiu sondar e absorver todos os conhecimentos egípcios, mas, também, se tornou participante das maiores honrarias em seu elenco. No ano de 527 a.C., Amasis veio a falecer. No ano seguinte, 526 a.C., durante o reinado de Psammenit, filho de Amasis, o Egito foi invadido por soldados persas e o rei Kambis desferiu toda a sua ira contra o clero e os intelectuais. A grande maioria de seus membros foram aprisionados, dentre eles estava Pitágoras. Ali, no centro do mundo conhecido na época, conviveu com comerciantes indianos, chineses e outros povos. Conviveram durante doze anos e Pitágoras aproveitou a oportunidade para ampliar seus conhecimentos.

Um evento singular garantiu a Pitágoras sua liberdade, tirou proveito disso e voltou para sua terra natal, já com 56 anos de idade. Em uma breve passagem pela ilha de Delos, encontrou seu professor, Ferekid, o que o motivou a permanecer por lá durante um ano e meio, com o objetivo de se familiarizar com a condição religiosa, científica e social da população.

Em 510 a.C., ocorre o retorno de Pitágoras a Kroton. Agora, com um discurso cativante, e por essa razão, suas orações passaram a trazer mudanças na moral e nos costumes dos moradores de Kroton. Pitágoras passou a ser admirado por uma multidão de ouvintes, dentre eles estavam jovens e os homens mais dignos da cidade, a plateia era formada por cerca de seiscentas pessoas. Matronas e donzelas se reuniam em ensinamentos e entretenimentos noturnos, entre elas estava a bela Theana, jovem e talentosa, que veio a se tornar esposa de seu professor, então com 60 anos de idade.

Como o número de ouvintes era cada vez maior, passou a ser dividido de acordo com os discípulos, assim formaram uma escola, no sentido mais amplo da palavra. O primeiro grupo formado recebia um ensino rigoroso do próprio Pitágoras, com conceitos científicos e sucessões lógicas dos principais conceitos de Matemática, além das mais altas abstrações da Filosofia. Ao mesmo tempo, seus membros aprenderam a considerar que o conhecimento fragmentado era mais prejudicial do que a ignorância.

Em 490 a.C., no auge da Escola Pitagórica, alguns de seus membros foram expulsos e considerados indignos à frente do Partido Democrático em Kroton, a escola foi arrombada e invadida, o imóvel foi tomado pelo governo e Pitágoras foi exilado.

Nos dezesseis anos seguintes, Pitágoras viveu em Tarento. Quando, em 474 a.C., o Partido Democrático ganhou o poder, Pitágoras, aos noventa e cinco anos de idade, teve que se retirar daquele local, indo para Metapontus, onde viveu, miseravelmente, por mais quatro anos. A casa que serviu para continuar servindo como escola foi queimada, muitos de seus discípulos foram torturados até a morte e Pitágoras, com dificuldades para se locomover, não conseguiu escapar das chamas, morreu aos noventa e nove anos.

De acordo com a História, a Escola Pitagórica tinha como lema "TUDO É NÚMERO", o que deixa evidente a forte influência mesopotâmica. Tal teorema ($a^2 = b^2 + c^2$) leva o nome de Pitágoras, mesmo já sendo conhecido dos babilônios há mais de um milênio de seu nascimento, pois foram os pitagóricos os primeiros estudiosos a demonstrá-lo, isto justifica a denominação de "Teorema de Pitágoras", como é conhecido até hoje.

Desde então, grande número de intelectuais na área de Matemática e em outras áreas, como Física, Artes e até mesmo pessoas que não são ligadas à educação formal têm se dedicado em encontrar novas maneiras de demonstrar esse teorema. Em seu trabalho, o Professor Loomis divide as demonstrações em dois grupos principais: as provas algébricas, com cento e nove maneiras distintas, baseadas nas relações métricas do triângulo retângulo e, mais, duzentas e cinquenta e cinco provas geométricas, baseadas em comparações de áreas. Cita, também, que são possíveis as demonstrações quaterniônicas, tomando como base as operações com vetores e, ainda, as demonstrações dinâmicas, com base nos conceito da Física.

Dentre os nomes que aparecem fazendo estas demonstrações ao longo da história, iremos destacar aqui dois nomes: James Abram Garfield, que foi presidente dos Estados Unidos da América durante um período de, apenas, quatro meses. Ele, um general que foi assassinado em 1891, era fascinado pela Matemática e deixou sua contribuição com demonstração que ficou conhecida como "demonstração do presidente". O outro nome é o de Leonardo da Vinci, grande gênio criador de duas fabulosas obras de arte, Mona Lisa e A Última Ceia. Deixou também suas contribuições como cientista, matemático, escultor, engenheiro, inventor, anatomista, pintor, botânico, arquiteto, poeta e músico. Da Vinci também deixou uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

A igualdade fundamental da trigonometria ($\mathrm{sen}^2\mathrm{x} + \cos^2\mathrm{x} = 1$) nada mais é do que um caso particular do Teorema de Pitágoras. Por meio desta igualdade derivam-se várias outras, daí a importância de se conhecer, com segurança, este conteúdo. Além disso, Loomis destaca que existem inúmeras maneiras algébricas e geométricas que não foram citadas em seu livro.

Por estas razões, não é possível trilhar a História da Matemática sem que seja dado um destaque especial ao Teorema de Pitágoras. Assim, proporcionaremos ao leitor uma visão mais aprofundada do assunto para que ele possa ver as aplicações, dedicando a devida atenção na construção do seu conhecimento.

Capítulo 2

Demonstrações

Antes de apresentarmos algumas das várias demonstrações do Teorema de Pitágoras, devemos formalizar certas definições, corolários, axiomas e teoremas que irão nos auxiliar na compreensão das demonstrações que se sucederão. Para tais proposições consultamos alguns livros da coleção do PROFMAT [8] [11] [10] e Gerônimo e Franco [5].

De acordo com Gerônimo e Franco, os axiomas ou postulados são afirmações sem necessidade de demonstrações, por serem evidentes por si mesmas. As definições são conceitos apresentados para simplificar a linguagem matemática ou para identificar um novo objeto matemático. Já os teoremas são os resultados que são a partir de uma cadeia dedutiva de afirmações. Corolários são consequências imediatas de um teorema e que merecem ser evidenciados.

2.1 Definições, teoremas e corolários

Definição 2.1 *Num semiplano, chamamos de* <u>*ângulo*</u> *a figura formada por duas semirretas com a mesma origem, tal que uma das semirretas está sobre a reta que determina o semiplano. As semirretas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, de vértice do ângulo. Um ângulo formado por duas semirretas distintas de uma mesma reta é chamado de ângulo raso. É usual denotar o ângulo por* $A\hat{O}B$ *ou* $B\hat{O}A$*. Ao utilizar esta notação, a letra indicativa do vértice deve sempre aparecer com acento circunflexo entre as outras duas letras que representam os pontos das semirretas que formam o ângulo. Quando nenhum outro ângulo é exibido tem o mesmo vértice, pode-se denotar por* $\hat{O}$*, utilizando apenas a letra do vértice com acento circunflexo para designar o ângulo.*

Definição 2.2 *Dado um ângulo* $\hat{A}$*, o número a que se refere este axioma é chamado medida, em graus, do ângulo* $\hat{A}$ *e será denotado por* $m(\hat{A})$*.*

Corolário 2.1 *Dado um número real* $0 \leq \alpha \leq 180°$*, apenas um ângulo* $A\hat{O}B$ *medindo* α*, pode ser colocado em um semiplano determinado pela reta que contém a semirreta* S_{OA}*.*

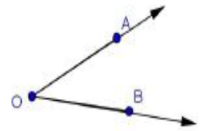

Figura 2.1: Ângulo

Definição 2.3 *Um ângulo, cuja medida é 90° chama-se ângulo reto. Quando duas retas se intercectam, formando ângulos retos, dizemos que estas retas são perpendiculares.*

Definição 2.4 *Dois ângulos são ditos complementares se a soma de suas medidas è 90°. Neste caso, cada um é o complemento do outro.*

Definição 2.5 *Dois ângulos são ditos suplementares se a soma de suas medidas è 180°. O suplemento de um ângulo é o ângulo de mesmo vértice, com um dos lados em comum e o outro lado é a semirreta obtida pelo prolongamento do outro lado.*

Definição 2.6 *Denominamos triângulo à região do plano delimitada por três pontos não colineares. Sendo A, B e C tais pontos, diremos que A, B e C são os vértices do triângulo ABC. Dizemos que os segmentos AB, AC e BC, ou seus comprimentos, são os lados do triângulo e escrevemos, em geral,* $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ *e* $\overline{BC} = a$ *para denotar os comprimentos dos lados do triângulo ABC.*

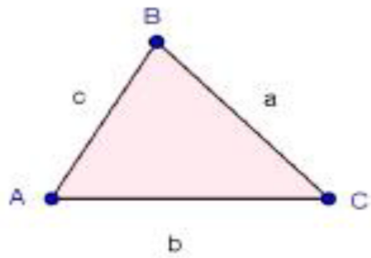

Figura 2.2: Triângulo

Definição 2.7 *Dois triângulos, ABC e DEF, são ditos congruentes, se caso existir uma função bijetora* $f : \{A,B,C\} \longrightarrow \{D,E,F\}$, *que leva os vértices de um, aos vértices do outro, de tal modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes, ou seja:*

(i) $m(\hat{A}) = m(f(\hat{A}))$;

(ii) $\overline{AB} = \overline{f(A)f(B)}$;

(iii) $m(\hat{B}) = m(f(\hat{B}))$;

(iv) $\overline{AC} = \overline{f(A)f(C)}$;

(v) $m(\hat{C}) = m(f(\hat{C}))$;

(vi) $\overline{BC} = \overline{f(B)f(C)}$.

Escreveremos ABC $\equiv$ DEF, para indicar que os triângulos ABC e DEF são congruentes. Explicitaremos, a seguir, os casos de congruência de triângulos por meio de seus respectivos teoremas.

Teorema 2.1 *(Caso LAL) Dados dois triângulos ABC e DEF, se* $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ *e* $\hat{A} \equiv \hat{D}$*, então* $ABC \equiv DEF$.

Teorema 2.2 *(Caso ALA) Dados dois triângulos ABC e EFG, se* $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, $\hat{A} \equiv \hat{E}$ *e* $\hat{B} \equiv \hat{F}$*, então* $ABC \equiv EFG$.

Teorema 2.3 *(Caso LLL) Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.*

Observação 2.1 *Existe o quarto caso de congruência de triângulos, um pouco menos badalado, porém é um teorema comprovado que é o caso lado-ângulo-ângulo oposto* (LAA_O).

Definição 2.8 *Quanto aos ângulos, os triângulos podem ser classificados em:* ***acutângulo*** *se possui os três ângulos agudos,* ***triângulo retângulo*** *se possui um ângulo reto, neste caso, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa e os outros dois lados são os catetos. Se o triângulo possui um ângulo obtuso, ele recebe o nome de* ***obtusângulo***.

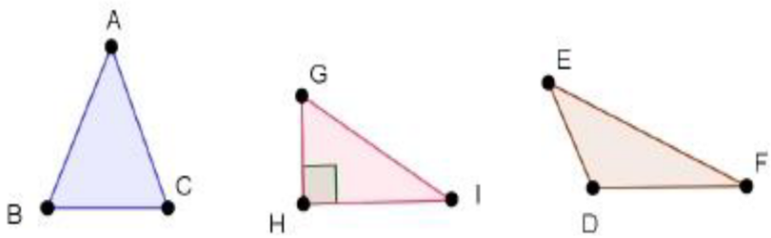

Figura 2.3: Triângulo: acutângulo, retângulo e obtusângulo.

Definição 2.9 *Duas retas distintas de um plano são paralelas (símbolo //), quando não têm pontos em comum.*

Definição 2.10 *Consideremos duas retas paralelas r e s, cortadas por uma transversal t, nos pontos P e Q, respectivamente. Sejam A, B, C, D, E e F, conforme a figura a seguir.*

Os pares de ângulos (A$\hat{\text{P}}$F, E$\hat{\text{Q}}$B) e (C$\hat{\text{P}}$F e E$\hat{\text{Q}}$D) são denominados ângulos **alternos internos** e são congruentes.

Os pares de ângulos ($A\hat{P}F$, $E\hat{Q}D$) e ($C\hat{P}F$, $E\hat{Q}B$) são denominados ângulos **colaterais internos** e são suplementares.
Os pares de ângulos ($E\hat{P}A$, $E\hat{Q}D$), ($E\hat{P}C$, $E\hat{Q}B$), ($C\hat{P}F$, $B\hat{Q}F$) e ($A\hat{P}F$, $D\hat{Q}F$) são denominados ângulos **correspondentes** e, por isso, os ângulos de cada um destes pares são congruentes.
Os pares de ângulos ($E\hat{P}C$, $A\hat{P}F$), ($E\hat{P}A$, $C\hat{P}F$), ($E\hat{Q}D$, $B\hat{Q}F$) e ($E\hat{Q}B$, $D\hat{Q}F$) são congruentes, pois são opostos pelo vértice.

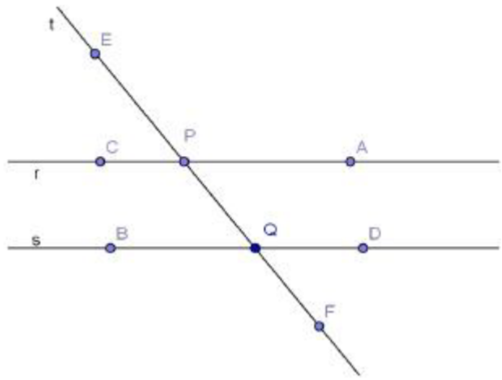

Figura 2.4: Ângulos alternos, colaterais e correspondentes.

Teorema 2.4 *Em todo triângulo, a soma das medidas dos seus ângulos internos é 180°.*

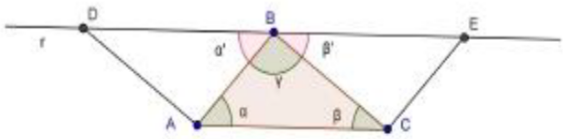

Figura 2.5: Soma dos ângulos internos do triângulo.

De acordo com a ilustração da figura acima e com a definição 2.10, temos:

1. $\alpha = \alpha'$ (são alternos internos)

2. $\beta = \beta'$ (são alternos internos)

3. $\alpha' + \gamma + \beta' = 180°$ (são suplementares)

4. Logo de (1), (2) e (3) segue que $\alpha + \gamma + \beta = 180°$

Definição 2.11 *Dois lados de um quadrilátero são ditos opostos, se eles não se intercectam.*
Dois ângulos são opostos, se eles não têm um lado do quadrilátero em comum.
Dois lados são consecutivos se possuem uma extremidade em comum.
Dois ângulos são consecutivos se possuem um lado em comum.
Uma diagonal de um quadrilátero é um segmento ligando dois vértices de ângulos opostos.
Um trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos.
Os lados de um trapézio são chamados de bases e os outros dois são chamados de laterais.
Um trapézio é dito isósceles se suas laterais são congruentes.
Quando um trapézio possui um ângulo reto é chamado de trapézio retângulo.
A altura de um trapézio é qualquer segmento com extremidades nas bases e perpendicular a elas.
Quando os pares de lados opostos de um trapézio são paralelos o denominaremos paralelogramo.

Teorema 2.5 *Se um paralelogramo e um triângulo tiverem a mesma base e estiverem nas mesmas paralelas (isto é, seus vértices pertencerem às mesmas paralelas), então a área do paralelogramo é igual ao dobro da área do triângulo.*

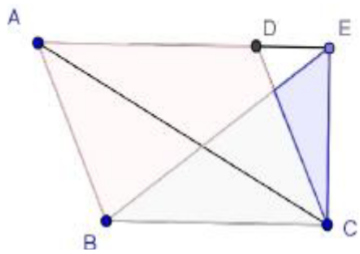

Figura 2.6: Comparação das áreas do paralelogramo e do triângulo (proposição 41 do livro "Os Elementos"de Euclides.

Definição 2.12 *Dois triângulos ABC e DEF, são ditos semelhantes, e usamos o símbolo (∼), se existir uma função bijetiva f:{A,B,C} ⟶ {D,E,F}, que associa os vértices de um com os vértices do outro, de tal modo que os ângulos correspondentes formem uma sequência proporcional, ou seja,* $m(\hat{A}) = m(\widehat{D})$, $m(\hat{B}) = m(\widehat{E})$ *e* $m(\hat{C}) = m(\widehat{F})$, *assim temos:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

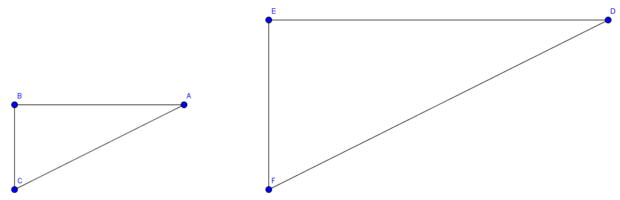

Figura 2.7: Semelhança de triângulos.

Observação 2.2 *Podemos, ainda, afirmar que dois triângulos congruentes são, também, semelhantes pois, pela própria definição de congruência de triângulos, sempre existirá uma correspondência biunívoca onde os ângulos correspondentes são congruentes. Como os lados correspondentes são congruentes, então a sequência formada é proporcional e tem razão de semelhança igual a 1.*

Por meio de três corolários podemos formalizar três casos de semelhança de triângulos. Vamos a eles:

Corolário 2.2 *Dada uma correspondência entre dois triângulos, se os ângulos correspondentes são congruentes, a correspondência é uma semelhança.*

Corolário 2.3 *Se existe uma correspondência entre dois triângulos tal que dois pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.*

Corolário 2.4 *Dada uma correspondência entre dois triângulos, se dois pares de lados são proporcionais o ângulo que eles determinam são congruentes, então a correspondência é uma semelhança.*

De posse destas definições, corolários e teoremas podemos selecionar algumas das inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras, das classificadas por Loomis, aqui apresentamos um simbólico grupo das demonstrações algébricas e geométricas, uma vez que este trabalho tem foco na Educação Básica.

2.2 Demonstrações Algébricas

2.2.1 Usando razão de semelhança

Demonstração 1

Seja ABC, um triângulo retângulo em A. Tracemos AH perpendicular a BC. Por conveniência, vamos denotar $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ e $\overline{CH}$ por a, b, c, h, n e m, respectivamente. Temos AH perpendicular a BC, logo o triângulo ABH é retângulo em H, o ângulo de vértice B é comum aos triângulos ABC e ABH, pelo corolário 2.4, temos que ABH e ABC são semelhantes. O triângulo ACH é, também, retângulo em

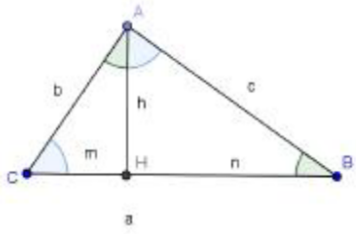

Figura 2.8: Razão de semelhança.

H. Analogamente podemos verificar que os triângulos ACH e ABC são semelhantes, pois o ângulo C é comum a estes dois triângulos. Da razão de semelhança temos as seguintes relações entre seus lados:

$\frac{b}{m} = \frac{a}{b}$ e $\frac{c}{n} = \frac{a}{c}$ ou seja, $m = \frac{b^2}{a}$ e $n = \frac{c^2}{a}$

Somando as duas igualdades, temos: $m + n = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}$

Como $m + n = a$, então $a = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a}$

Multiplicando os dois membros por$a$, encontramos $a^2 = b^2 + c^2$

Demonstração 2

Consideremos ABC um triângulo retângulo em A. Vamos prolongar o segmento BA até um certo ponto D, de modo que CD seja perpendicular a BC no ponto C.

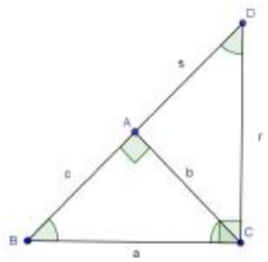

Figura 2.9: Razão de semelhança (2)

Denotemos, por conveniência, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ por $a,\ b,\ c,\ r$ e s.

Afirmação 1- Os triângulos ABC e BCD são retângulos nos vértices A e C, respectivamente e, o ângulo de vértice B é comum aos dois. Logo, pelo corolário 2.3, são semelhantes. Daí resulta:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{c+s} = \frac{b}{r}$$

Afirmação 2- Os triângulos ACD e BCD são retângulos nos vértices A e C, respectivamente e, o ângulo de vértice D é comum a ambos. Daí, pelo corolário 2.3, são semelhantes. Disto segue que:

$$\frac{r}{c+s} = \frac{b}{a} = \frac{s}{r}$$

Afirmação 3- Os triângulos ABC e ACD são retângulos, ambos no vértice A. O ângulo de vértice C do triângulo ABC e o ângulo de vértice C do triângulo ACD são complementares, denominemos estes ângulos por β e $(90° - \beta)$, respectivamente, e denominemos o ângulo de vértice B do triângulo ABC por α. Logo, pelo teorema 2.4 da soma dos ângulos internos do triângulo, temos que $90° + \alpha + 90° - \beta = 180°$ se, e somente se, $\alpha = \beta$ e, portanto, o ângulo de vértice C, do triângulo ACD e o ângulo de vértice B, do triângulo ABC são congruentes. Logo, pelo corolário 2.3, são semelhantes. Assim resulta:

$$\frac{a}{r} = \frac{c}{b} = \frac{b}{s}$$

A partir das relações estabelecidas nas três afirmações acima, podemos escrever as seguintes igualdades:

1. $\frac{c}{a} = \frac{b}{r}$
2. $\frac{c}{b} = \frac{b}{s}$
3. $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$
4. $\frac{c}{a} = \frac{a}{c+s}$
5. $\frac{c}{b} = \frac{a}{r}$
6. $\frac{a}{b} = \frac{c+s}{r}$
7. $\frac{b}{r} = \frac{a}{c+s}$
8. $\frac{b}{s} = \frac{a}{r}$
9. $\frac{r}{c+s} = \frac{s}{r}$

Devemos observar que os pares de equações (1) e (5), (3) e (8) e, ainda, (6) e (7) são equivalentes entre si. Assim, podemos dizer que existem seis equações distintas. Utilizaremos estas seis equações, duas a duas ou três a três, de modo a encontrar a relação que é o objeto do nosso estudo: $a^2 = b^2 + c^2$. Pela solução de Legendre [1], utilizando apenas uma das seis equações apresentadas, não é possível encontrar a relação procurada. Afirmou, também, que somente uma combinação de duas das equações resulta no teorema, segundo ele, é a mais curta das provas do Teorema de Pitágoras. Utilizando três equações são possíveis 20 soluções distintas, segundo Legendre. Desconsiderando equações dependentes, podemos fazer 13 combinações que resultam em 44 provas da relação $a^2 = b^2 + c^2$. Veremos, a seguir, algumas delas.

Utilizando duas equações (demonstração mais curta, segundo Legendre)

Esta demonstração resulta da combinação das equações (2) e (4).

Da equação (2): $\frac{c}{b} = \frac{b}{s}$, então $b^2 = cs$

Da equação (4): $\frac{c}{a} = \frac{a}{c + s}$, então $a^2 = c\,(c + s) = c^2 + cs$

Substituindo o resultado de (2) em (4), temos: $a^2 = b^2 + c^2$.

Utilizando três equações

(a) Combinação das equações (1), (3) e (6)

Da equação (3): $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$, que equivale a $\frac{s}{r} = \frac{b}{a}$

Da equação (6): $\frac{a}{b} = \frac{c + s}{r}$, que pode ser escrita como $\frac{a}{b} = \frac{c}{r} + \frac{s}{r}$

Da equação (1): $\frac{c}{a} = \frac{b}{r}$, dividindo os dois membros por b, temos $\frac{c}{ab} = \frac{1}{r}$

Fazendo as devidas substituições: $\frac{a}{b} = \frac{c}{r} + \frac{s}{r}$, , é o mesmo que $\frac{a}{b} = \frac{c}{r} + \frac{s}{r}$, que pode ser visto como $\frac{a}{b} = c\frac{1}{r} + \frac{b}{a}$, segue que $\frac{a}{b} = c\frac{c}{ab} + \frac{b}{a}$, multiplicando por ab temos $a^2 = b^2 + c^2$.

(b) Combinação das equações (2), (5) e (6).

[1] Adrien-Marie Legendre (1752-1833) matemático francês que realizou várias obras em Teoria dos Números destacando seu livro "Elementos de Geometria"(Élements de Géométrie, 1794)

Da equação (5): $\frac{c}{b} = \frac{a}{r}$, que equivale a $r = \frac{ab}{c}$

Da equação (6): $\frac{a}{b} = \frac{c\,+\,s}{r}$, é o mesmo que $ar = bc + bs$

Substituindo o resultado (5) em (6): $a\left(\frac{ab}{c}\right) = bc + bs$

Multiplicando por $\frac{c}{b}$, temos: $a^2 \ = c^2 + \ cs$

Da equação (2): $\frac{c}{b} = \ \frac{b}{s}$, então $b^2 = cs$, daí segue que $a^2 = \ b^2 + \ c^2$

(c) Combinação das equações (1), (2) e (9).

Da equação (9): $\frac{r}{c\,+\,s} \ = \ \frac{s}{r}$, então $r^2 = cs + \ s^2$

Da equação (1): $\frac{c}{a} = \ \frac{b}{r}$, assim $r = \frac{ba}{c}$, elevando ao quadrado fica: $r^2 = \ \frac{b^2a^2}{c^2}$

Da equação (2): $\frac{c}{b} = \ \frac{b}{s}$, então $s = \ \frac{b^2}{c}$

Fazendo as devidas substituições de (1) em (9) e (2) em (9): $\frac{b^2a^2}{c^2} = c\frac{b^2}{c} + \ \frac{b^4}{c^2}$

Multiplicando os dois membros por $\frac{c^2}{b^2}$, encontramos $a^2 = \ b^2 + \ c^2$

(d) Combinação das equações (1), (2) e (7)

Da equação (1) : $\frac{c}{a} = \ \frac{b}{r}$, então $b^2 = cs$

Da equação (7): $\frac{b}{r} = \ \frac{a}{c\,+\,s}$

Substituindo (1) em (7), temos: $\frac{c}{a} = \ \frac{a}{c\,+\,s}$, é o mesmo que $a^2 = \ c^2 + \ cs$

Da demonstração com duas equações temos que $b^2 = \ cs$. Assim $a^2 = \ b^2 + c^2$.

2.3 Demonstrações Geométricas

2.3.1 Demonstração do livro didático [4]

Vamos considerar o triângulo ABC, retângulo no vértice A. Sobre os lados do quadrado DEFG, cuja medida do lado é a, colocamos quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo ABC, obtendo um quadrado HIJK, cujo lado mede $b + c$.

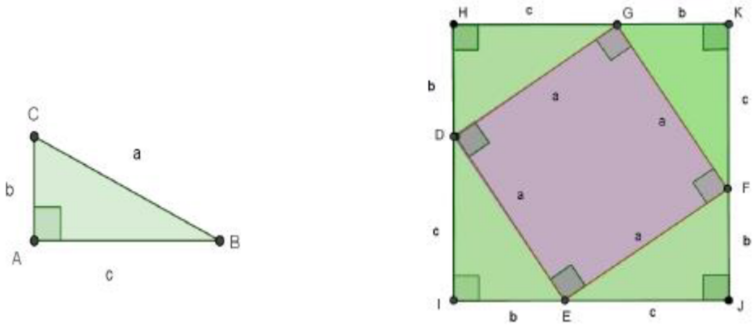

Figura 2.10: Demostração do Livro didático.

Devemos observar que a área do quadrado pode ser obtida de duas maneiras distintas:

1. Adicionando a área do quadrado DEFG e a área dos triângulos: $a^2 + \ 4\frac{bc}{2} = a^2 + \ 2bc$.

2. Elevando ao quadrado a medida de seu lado: $(b + c)^2 = \ b^2 + \ 2bc + \ c^2$.

3. Igualando os resultados de (1) e (2), temos: $a^2 + \ 2bc = \ b^2 + \ 2bc + \ c^2$.

4. Cancelando $2bc$ nos dois membros da equação: $a^2 = \ b^2 + \ c^2$.

2.3.2 Demonstração de Euclides

Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A. Sobre o cateto AC, construímos o quadrado ACHI, sobre o cateto AB, construímos o quadrado ABGF e sobre a hipotenusa BC, construímos o quadrado BCED. Vamos traçar AJ paralelo a CE, marcar K na interseção com BC e J na interseção com DE, assim obtemos JK = BC =BD. Ligando o vértice G ao vértice C e o vértice D ao vértice A, temos BC = BD e o ângulo CBG = ABD = 90° + α.

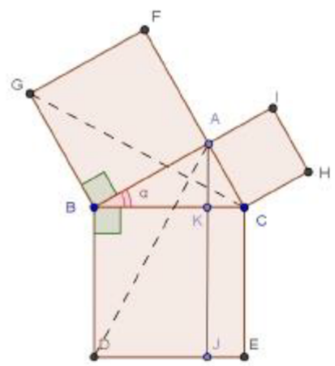

Figura 2.11: Demostração de Euclides

Pelo caso (LAL), os triângulos BCG e ABD são congruentes. Como BG é base de BCG e lado de BAFG, AB é a altura de BCG e também é lado de BAFG, pelo teorema 1.5, temos que a área do triângulo BCG é igual à metade da área de BAFG. Por outro lado, tomando BD como base de ABD e lado de BDJK, BK é a altura de ABD e também é lado de BDJK. Pelo mesmo teorema 2.5, temos que a área do triângulo ABD é igual à metade da área de BDJK. Como os triângulos BCG e ABD são congruentes, temos $\frac{1}{2}$área$\,(BAFG) = \frac{1}{2}$área$(BDJK)$. Temos então a seguinte igualdade, área$\,(BAFG) =$ área$(BDJK)$ e, analogamente, área$\,(ACHI) =$ área$(CEJK)$, o que nos dá área$\,(BAFG)$ + área$(ACHI) =$ área$(BCED)$.

2.3.3 Demonstração de Leonardo da Vinci

Dado um triângulo ABC, retângulo em A. Construímos sobre o lado BC, o quadrado BCJH. Sobre o lado AB, construímos o quadrado ABGF. Sobre o lado BC, construímos o quadrado ACDE. Sobre o lado HJ, construímos um triângulo HIJ, congruente a ABC, com um giro de 180°. Construímos o triângulo FAE, como BÂC e FÂE são opostos pelo vértice e, AF = AB e AE = AC, pelo caso (LAL) concluímos que FAE é congruente a ABC. Tracemos então, os segmentos AI e DG.
Desta forma temos os quadriláteros DEFG, BCDG, ABHI e ACJI congruentes entre si pois, podemos verificar que, FE = BC = BH = CJ; FG = BG = AB = IJ e DE = CD = HI = AC. Conforme mostra a figura a seguir:

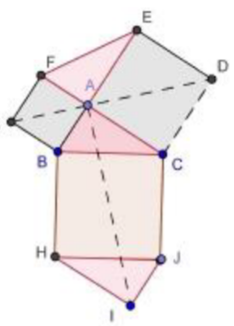

Figura 2.12: Demostração de Leonardo da Vinci.

Logo, os Hexágonos BCDEFG e ABHIJC têm a mesma área. Diante de tais fatos, vamos à demonstração:
Sejam: $A_1 =$ área$\,(BCDEFG)$ e $A_2 =$ área$\,(ABHIJC)$. Como:

$$A_1 = \text{área}\,(BCD) + \text{área}\,(ACDE) + \text{área}\,(ABFG) + \text{área}\,(AEF)$$

$$A_2 = \text{área}\,(HIJ) + \text{área}\,(BCJH) + \text{área}(ABC)$$

Lembrando que $área\,(ABC) = área\,(HIJ) = área\,(AEF)$, retiramos os dois triângulos de A_1 e A_2 e concluímos que $área\,(ACDE) + área\,(ABFG) = área\,(BCJH)$.

2.3.4 Demonstração do presidente

Sejam dois triângulos ABC e BDE congruentes e retângulos nos vértices A e D, respectivamente. Sejam, ainda, colineares os pontos A, B e D, assim $\overline{CB} = \overline{BE}$ que denotaremos por$a$, $\overline{AC} = \overline{BD}$ que denotaremos por b e $\overline{AB} = \overline{DE}$ que denotaremos por c. Tracemos, também, o segmento CE. Conforme a figura a seguir:

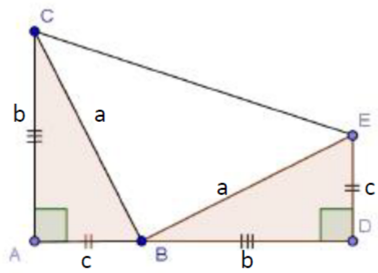

Figura 2.13: Demostração do presidente.

A área do trapézio de bases $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$ é dada por: $A = \frac{(b\ +\ c).(b\ +\ c)}{2} = \frac{b^2+2bc+c^2}{2}$.
Por outro lado, a mesma área é dada pela soma da área dos três triângulos: $A = \frac{b.c}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b.c}{2}$.
Igualando os dois resultados e multiplicando por 2, temos: $b^2 + c^2 = a^2$.

2.3.5 Demonstração lúdica (quebra-cabeça)

De maneira lúdica podemos demonstrar o Teorema de Pitágoras construindo um "quebra-cabeça". Consideremos o triângulo ABC, retângulo em A. Sobre o cateto AC, construímos o quadrado ACDE. Sobre o cateto AB, construímos o quadrado ABGF. Sobre a hipotenusa BC, construímos o quadrado BCIH. Prolonguemos o segmento IC até o segmento EA e marquemos o ponto J na interseção. Prolonguemos o segmento HB até o segmento FG e marquemos o ponto K na interseção. Tracemos o segmento KL de tal modo que KL seja perpendicular a FG e L seja a interseção de AF e FG. Conforme as figuras abaixo:
Desta forma obteremos os polígonos: CDEJ, CJA, ABKL, BGK e LFK. O objetivo da atividade é encaixar os cinco polígonos dentro do polígono BCIH, provando assim o Teorema de Pitágoras.
Também indicamos aqui uma maneira lúdica de mostrar o Teorema de Pitágoras apresentando o vídeo do YouTube, no endereço
https://www.youtube.com/watch?v=bS-D0XeFMPQ.

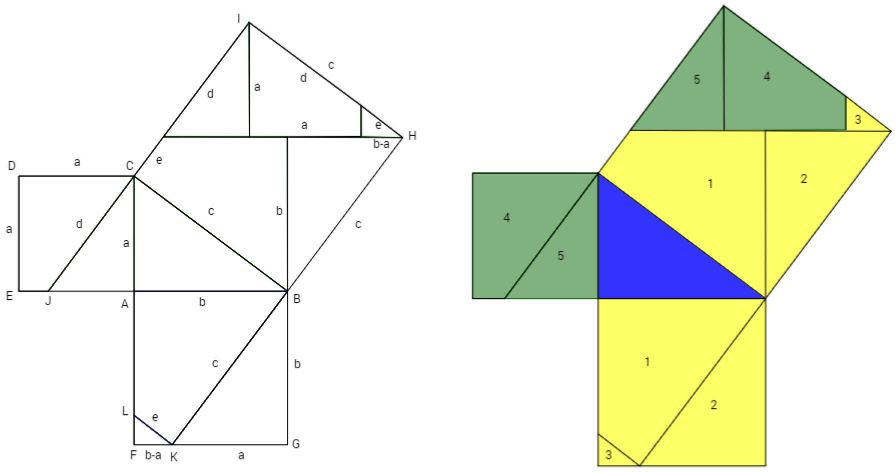

Figura 2.14: Demostração lúdica.

2.3.6 A equação pitagórica

Vamos considerar a equação pitagórica no conjunto dos números inteiros relativos ($\mathbb{Z}$), assim temos:

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

Veja que as únicas soluções que possuem uma coordenada nula são $(0, \quad b, \quad \pm b)$ e $(a, \quad 0, \quad \pm a)$, onde $a, \quad b \in \mathbb{Z}$. Estas serão ditas *soluções triviais*.

Podemos observar que, como os expoentes das variáveis são pares, basta encontras as soluções no conjunto dos números naturais. Devemos observar, ainda, que se o produto de dois números naturais, primos entre si, é um quadrado, então estes dois números são quadrados.

Um terno $(a, \ b, \ c)$ de números naturais é denominado *terno pitagórico* quando é solução da equação pitagórica, isto é, se $a^2 + b^2 = c^2$. Denotaremos *triângulo pita–górico primitivo* a um triângulo retângulo cujos lados são números naturais coprimos. O terno que representa os lados do triângulo pitagórico primitivo será denominado *terno pitagórico primitivo*.

Os ternos pitagóricos primitivos $(a, \ b, \ c)$ dão origem a todos os ternos pitagóricos. Logicamente, se $(p, \ q, \ r)$, onde $p, \ q, \ r \in \mathbb{N}$, é um terno pitagórico, então $(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}, \frac{r}{d})$, onde d é o *mdc* de $p, \ q$ e r, teremos um terno de números coprimos. Segue que toda solução não trivial da equação pitagórica é um múltiplo por um número natural de um terno pitagórico primitivo. Portanto, podemos voltar nossa atenção para Oe ternos pitagóricos primitivos.

Sendo a, b e c coprimos e satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$, eles devem ser, dois a dois, primos entre si. É fácil mostrar que dois deles são ímpares, não podendo ser a e b, logo têm paridades distintas e, como consequência, c é ímpar. Sem perda de generalidade, podemos admitir que a e c sejam ímpares e b seja par.

A relação $a^2 + b^2 = c^2$ pode ser escrita como $c^2 - a^2 = b^2$. Dividindo a equação por 4 e fatorando os dois membros, temos:

$$(\frac{c+a}{2})(\frac{c-a}{2}) = (\frac{b}{2})^2$$

Como a e c são ímpares, cada fator do primeiro membro é um número natural. O termo do segundo membro é um número natural quadrado perfeito, logo pode ser escrito como um produto de números naturais quadrados perfeitos primos entre si. Então, sejam y, $x \in \mathbb{N}$, com $y > x$, $(y, x) = 1$ e paridades distintas, podemos escrever:

$$(\frac{c+a}{2})(\frac{c-a}{2}) = (\frac{b}{2})^2$$

$$(\frac{b}{2})^2 = y^2x^2$$

$$(\frac{c+a}{2})(\frac{c-a}{2}) = y^2x^2$$

$\frac{c+a}{2} = y^2$ e $\frac{c-a}{2} = x^2$
Conclui- se que $a = y^2 - x^2$, $b = 2xy$ e $c = y^2 + x^2$.
Reciprocamente, dados dois números naturais y e x, com $y > x$, $(y, x) = 1$ e paridades distintas, considerando $a = y^2 - x^2$, $b = 2xy$ e $c = y^2 + x^2$, temos que (a, b, c) é uma solução primitiva da equação pitagórica. Devemos lembrar que o terno primitivo é composto por números coprimos.
Suponha que $y^2 - x^2 = r^2 - s^2$, $2xy = 2rs$ e $y^2 + x^2 = r^2 + s^2$, é fácil perceber que $y = r$ e $x = s$. Portanto, uma solução (a, b, c) determina univocamente y e x do seguinte modo:

1. Se b é par, a fração simplificada equivalente à fração $\frac{a+c}{b}$ é $\frac{y}{x}$.

2. Se a é par, a fração simplificada equivalente à fração $\frac{b+c}{a}$ é $\frac{y}{x}$.

Um exemplo numérico, para encontrarmos y e x para a solução $(5, 12, 13)$, é só calcular:

$$\frac{5+13}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Verificamos que $y = 3$ e $x = 2$. Assim, podemos enunciar o resultado obtido.
Teorema:
As soluções em $\mathbb{N}$ da equação pitagórica $X^2 + Y^2 = Z^2$ expressam-se de modo único, a menos da ordem de x e y, como $X = k\,(x^2 - y^2)$, $Y = 2kxy$ e $Z = k\,(x^2 + y^2)$, onde $k, x, y \in \mathbb{N}$, com $y > x$, com x e y coprimos e com paridades distintas.
Reciprocamente, todo terno (a, b, c), como acima, é um terno pitagórico.

2.3.7 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

Teorema 2.6 *(Recíproca do Teorema de Pitágoras) Se em um triângulo ABC, o quadrado da medida do lado BC é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, então o ângulo oposto ao lado BC é reto.*

Demonstração Sejam a, b e c, respectivamente, as medidas dos lados BC, AC e AB do triângulo ABC. Vamos considerar duas semirretas perpendiculares entre si, que se intercectam no ponto O. Sejam, ainda, um ponto P em uma das semirretas e um ponto Q na outra semirreta tais que, $\overline{OP} = b$ e $\overline{OQ} = c$. Pelo Teorema de Pitágoras $(\overline{PQ})^2 = b^2 + c^2$. Porém, no triângulo ABC temos, por hipótese, $a^2 = b^2 + c^2$. Podemos concluir que o triângulo ABC é congruente ao triângulo OPQ, pelo caso LLL. Do fato que o ângulo QÔP é reto, conclui-se que o ângulo BÂC também é reto. Logo, o triângulo ABC é retângulo.

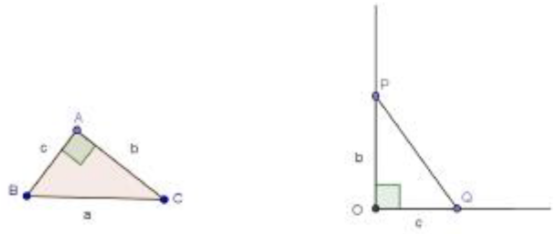

Figura 2.15: Recíproca do Teorema de Pitágoras (1)

Demonstração Sejam a, b e c, respectivamente, as medidas dos lados BC, AC e AB do triângulo ABC. Suponhamos que $\hat{A} \neq 90°$. Devemos estudar dois casos distintos.

(i) Suponhamos que $\hat{A} < 90°$ e $b \leq c$, sem perda de generalidade. Então um ponto D, projeção de C sobre a reta que contém o lado AB, está localizado entre os pontos A e B. Sejam CD $= h$ e AD $= r$. Como ACD é retângulo, temos $b^2 = h^2 + r^2$. O triângulo BCD também é retângulo. Assim:

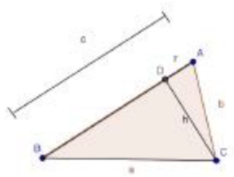

Figura 2.16: Recíproca deo Teorema de Pitágoras (2) caso (i).

Recíproca do Teorema de Pitágoras caso (i)

$$a^2 = h^2 + (c - r)^2$$

$$a^2 = b^2 - r^2 + c^2 - 2cr + r^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cr$$

Ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, absurdo pela hipótese inicial.

(ii) Suponhamos que $\hat{A} > 90°$. Assim, o ponto D, projeção de C sobre a reta que contém o lado AB, está localizado fora do segmento AB. Como o triângulo ACD é retângulo, temos $b^2 = h^2 + r^2$. O triângulo BCD também é retângulo. Assim:

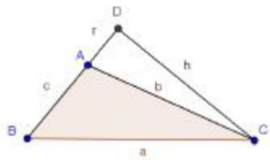

Figura 2.17: Recíproca do Teorema de Pitágoras (2) caso (ii).

$$a^2 = h^2 + (c+r)^2$$

$$a^2 = b^2 - r^2 + c^2 + 2cr + r^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cr$$

Ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, absurdo pela hipótese inicial.
Demonstramos, desta forma, que em um triângulo ABC, de lados a, b e c, vale: se $\hat{A} < 90°$, então $a^2 < b^2 + c^2$ e se $\hat{A} > 90°$, então $a^2 > b^2 + c^2$. Assim, a condição $a^2 = b^2 + c^2$ implica, necessariamente que â = 90°. Portanto, o triângulo ABC é retângulo.

Capítulo 3

Aplicações

O Teorema de Pitágoras possui inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento que facilitam a atuação profissional do homem como logística, engenharia, arquitetura, urbanismo, topografia, entre outras. Por isso, deve-se dar muita atenção a este assunto.

Na Matemática do ensino fundamental e médio, é parte integrante do estudo da Geometria e Trigonometria. Na Física, principalmente, no estudo de grandezas vetoriais é necessário lançar mão da Geometria Plana e Espacial para determinar o módulo, direção e sentido dos vetores. Na Biologia, para determinar a força quando este se encontra em um plano inclinado, ou mesmo, para calcular a força de alavanca promovida pelos movimentos das articulações de um braço.

3.1 Experiência em sala de aula

Realizamos uma experiência com um grupo de 34 alunos do 1º Ano E, turma de 2015, da Escola Estadual Virgílio de Melo Franco, na cidade de Unaí-MG, com duração de 7 tempos de aula de 50 minutos cada, onde foram abordados os conteúdos: equações do 2º grau, Teorema de Thales, semelhança de triângulos, Teorema de Pitágoras e razões trigonométricas.

Os principais objetivos propostos em tal experiência foram:

(i) identificar, em um triângulo retângulo dado, a hipotenusa, os catetos, a altura relativa à hipotenusa e as projeções dos catetos na hipotenusa;

(ii) identificar, no triângulo retângulo dado, três triângulos retângulos semelhantes;

(iii) enfatizar as principais relações métricas no triângulo retângulo;

(iv) resolver exercícios envolvendo os conteúdos aplicados na experiência;

(v) trabalhar com as aplicações do Teorema de Pitágoras nos diversos campos da Ciência.

Geralmente, o aluno do 9º Ano do Ensino Fundamental e do 1º Ano do Ensino Médio, não consegue enxergar a aplicação do Teorema de Pitágoras fora do seu contexto. No caso da turma participante nesta experiência, que era formada por alunos oriundos de diversas escolas de Ensino fundamental, a grande maioria afirmou desconhecer o assunto, o qual deveria ser abordado no 9º Ano do Ensino Fundamental. Por este motivo, a pedido da professora titular, realizamos uma sondagem oral ao invés da avaliação diagnóstica, para evitar um possível constrangimento ou mesmo o desinteresse dos alunos. Ainda motivou o desvio do assunto da primeira aula, convergindo para a equação do 2º grau, pois era um tema desconhecido para muitos alunos.

Para a realização das atividades programadas foram utilizados como recursos materiais o quadro branco, marcador de quadro branco (pincel), esquadro, régua e papel paraná.

3.2 Metodologia

A experiência foi desenvolvida com a participação de 34 alunos do 1º Ano E, turma de 2015, da Escola Estadual Virgílio de Melo Franco (Unaí-MG). Foram realizados 4 encontros, divididos em 7 tempos de 50 minutos cada, distribuídos assim: 2 tempos no dia 09/11/2015, 2 tempos no dia 11/11/2015, 2 tempos no dia 17/11/2015 e 1 tempo no dia 23/11/2015, perfazendo uma carga horária total de 5 horas e 50 minutos.

As 6 primeiras aulas foram utilizadas para fazer a sondagem do conhecimento dos alunos, aplicar a teoria associada a exercícios envolvendo equações do 2º grau, Teorema de Thales, semelhança de triângulos, Teorema de Pitágoras e razões trigonométricas e, ainda, aplicar a atividade lúdica (quebra-cabeça) apresentada no capítulo 2 deste trabalho. Na última aula, os alunos foram submetidos a uma avaliação do conhecimento adquirido.

A participação dos alunos, com questionamentos e desenvolvimento das atividades, foi exemplar, exceto por três deles que alegaram não ajudar em nada nas suas respectivas promoções para o 2º Ano do Ensino Médio, uma vez que se declararam reprovados em várias disciplinas.

3.3 Avaliação

Os alunos foram submetidos a um teste de conhecimentos composto por 4 questões abertas, com o tempo determinado de 45 minutos. O objetivo principal era verificar a capacidade adquirida pelos alunos em aplicar o Teorema de Pitágoras em questões contextualizadas. A seguir serão apresentadas tais questões com o gabarito (será apresentada uma solução por questão, em cada item podem existir diferentes soluções que levam ao mesmo resultado).

QUESTÃO 1

A base de um triângulo isósceles mede 10 cm. Determine a altura relativa à base desse triângulo sabendo que os lados congruentes medem 13 cm cada.
Solução:
É fato que o vértice oposto à base tem sua projeção no ponto médio. Assim temos dois triângulos retângulos congruentes, com hipotenusa medindo 13 cm e um dos catetos medindo 5 cm. Resta determinar a medida do outro cateto que é igual à altura do triângulo isósceles. De acordo com o Teorema de Pitágoras, temos:

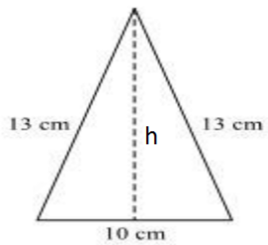

Figura 3.1: Exercício 1

$13^2 = h^2 + 5^2$
$h^2 = 169 - 25$
$h^2 = 144$
$h = 12$
Resposta: A altura do triângulo dado é 12 cm.

QUESTÃO 2

Para verificar se um terreno está no esquadro (expressão usada para indicar que todos os ângulos de um terreno medem 90°), João e Maria usaram uma trena. Fizeram as medidas construindo triângulos nos cantos do terreno, uma medida em cada lado do referido canto e a terceira medida era obtida pela distância entre os pontos marcados. Fizeram as medidas em TRÊS cantos do terreno, as medidas encontradas foram relacionadas nos itens abaixo. Em cada item, determine se o ângulo do terreno é reto, agudo ou obtuso.

(a) 9 m, 12 m e 16 m

(b) 3 m, 4 m e 5 m

(c) 8 m, 10 m e 12 m

Solução:
Para resolver este problema devemos escolher o maior dos lados e elevá-lo ao quadrado, em seguida, somamos os quadrados dos dois lados menores. Comparamos os dois resultados, se o primeiro resultado for maior que o segundo, o ângulo será obtuso, se o primeiro resultado for menor que o segundo, o ângulo será agudo e se o primeiro resultado for igual ao segundo, o ângulo será reto (Teorema de Pitágoras). Então temos:

(a) $16^2 = 256$ e $9^2 + 12^2 = 225$. Conclui-se que o ângulo é obtuso.

(b) $5^2 = 25$ e $3^2 + 4^2 = 25$. Conclui-se que o ângulo é reto.

(c) $12^2 = 144$ e $8^2 + 10^2 = 181$. Conclui-se que 0 ângulo é agudo.

QUESTÃO 3

Utilizando o Teorema de Pitágoras em um quadrado de lado l, pode-se verificar a existência dos números irracionais calculando a medida da diagonal desse quadrado.

(a) Mostre a veracidade dessa afirmação.

Solução:
Se a medida do lado do quadrado for um número irracional, não há o que provar. Se a medida do lado do quadrado for um número racional (positivo, pois a medida de um segmento é sempre positiva), temos:

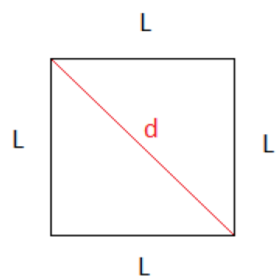

Figura 3.2: Exercício 3 (a)

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\,\sqrt{2}$$

Como l é racional positivo, podemos afirmar que $l\,\sqrt{2}$ é irracional.
Convém mostrar aqui que $\sqrt{2}$ é irracional. Então vamos à prova.
Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional, então pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ com mdc (p,q) = 1, temos:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \implies \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \implies 2 = \frac{p^2}{q^2} \implies 2q^2 = p^2 \;(\textit{então } p \text{ é } \textit{par})$$

$$\textit{Então},\; p = 2k \implies (2k)^2 = 2q^2 \implies 4k^2 = 2q^2 \implies 2k^2 = q^2 \;(q^2 \text{ é } \textit{par},\; \textit{daí } q \text{ é } \textit{par})$$

$$\textit{Absurdo, pois por hipótese } mdc\,(p,q) = 1.$$

(b) Faça o mesmo para calcular a diagonal do cubo de aresta l.

Solução:
Se a medida da aresta do cubo for um número irracional, não há o que provar. Se a medida da aresta do cubo for um número racional (positivo, pois a medida de um segmento é sempre positiva), usamos a solução do item (a) para determinarmos a diagonal da base e construirmos um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é a diagonal do cubo, um dos catetos é uma aresta do cubo e o outro cateto é a diagonal da base do cubo. Então, temos:

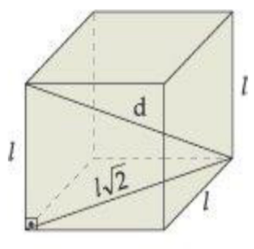

Figura 3.3: Exercício 3 (b)

$$d^2 = \left(l\sqrt{2}\right)^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2 + l^2$$

$$d^2 = 3l^2$$

$$d = \sqrt{3l^2}$$

$$d = l\ \sqrt{3}$$

Como l é racional positivo, podemos afirmar que $l\sqrt{3}$ é irracional.
Assim como no item (a), convém mostrar aqui que $\sqrt{3}$ é irracional. Então vamos à prova.
Suponha que $\sqrt{3}$ seja racional, então pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$ com mdc (p,q) = 1, temos:

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \implies \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \implies 3 = \frac{p^2}{q^2} \implies 3q^2 = p^2 \ \ (\textit{então } p \text{ é } \textit{múltiplo de } 3)$$

$$\textit{Então},\ p = 3k \implies (3k)^2 = 3q^2 \implies 9k^2 = 3q^2 \implies 3k^2 = q^2$$

$$\left(q^2 \text{ é } \textit{múltiplo de } 3,\ \textit{daí } q \text{ é } \textit{múltiplo de } 3\right).$$

$$\textit{Absurdo, pois por hipótese mdc}\,(p, q) = 1.$$

(c) Utilize o mesmo procedimento para calcular a diagonal do paralelepípedo retângulo de medidas a, b e c (observação: esse resultado nem sempre prova a existência dos números irracionais).

Solução:
Se alguma das medidas das arestas do paralelepípedo for um número irracional, não há o que mostrar. Se todas as arestas tiverem como medidas números racionais, temos:

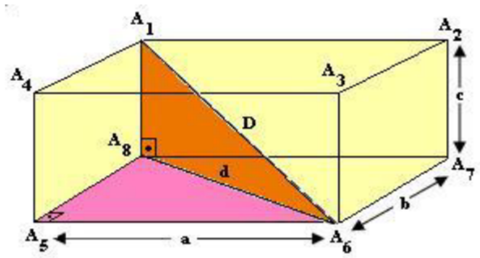

Figura 3.4: Exercício 3 (b)

Consideremos d, a diagonal da base e D, a diagonal do paralelepípedo. Então:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$D^2 = d^2 + c^2$$

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Na maioria dos casos este resultado é um número irracional. Existem exceções como é o caso das arestas a, b e c medirem, respectivamente, 3, 4 e 12, assim a diagonal da base mede 5 e a diagonal do cubo mede 13, ou seja, são todos racionais. Outros exemplos são os paralelepípedos com medidas iguais ao dobro, triplo, etc. dessas medidas.

QUESTÃO 4

As medidas dos raios de três círculos, dadas em cm, são números naturais consecutivos e, com segmentos de retas iguais às suas medidas constroi-se um triângulo retângulo.

(a) Calcule a medida desses raios.

Solução:
Se as medidas são números naturais consecutivos, então podemos defini-las como sendo, da menor para a maior, como x, $x+1$ e $x+2$. Essas medidas formam um triângulo retângulo, assim:

$$(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2$$

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x + 1 + x^2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$x = 3$ ou $x = -2$
Como x é número natural o valor de $x = -2$ não convém, então os raios medem $x = 3$, $x + 1 = 4$ e $x + 2 = 5$. Com as medidas dadas em cm.

(b) Mostre que a área do círculo maior é igual à soma das áreas dos dois círculos menores. (Não e necessário substituir o valor de π)

Solução:
Denotemos a área do círculo maior por S_A e, dos dois menores por S_B e S_C , então:

$$S_A = S_B + S_c$$

$$\pi \ . \ 5^2 = \ \pi \ . \ 4^2 + \ \pi \ . \ 3^2$$

$$25\pi \ = \ 16\pi + 9\pi$$

$$25\pi = 25\pi$$

O que sugere que o Teorema de Pitágoras vale para todas as áreas de figuras semelhantes, desde que tenham um segmento correspondente nas três figuras cujas medidas construam um triângulo retângulo.

3.4 Resultados

Os resultados da avaliação feita pelos alunos serão mostrados por meio de uma tabela contendo a apreciação do nível atingido por eles em cada questão. Uma vez que as questões eram abertas, a nota atribuída será apresentada na forma de porcentagem e, em cada cela, será colocado o número de alunos que atingiu aquela porcentagem.

Devemos nos lembrar, ainda, que três alunos se recusaram a fazer o teste, as notas destes foram computadas como zero.

Questão	0%	20%	40%	60%	80%	100%
01	3	0	2	23	4	2
02	3	1	5	8	6	11
03	5	12	7	6	4	0
04	4	3	8	10	8	1

Podemos observar que, na questão 3, os alunos tiveram maiores dificuldades por não estarem habituados com exercícios envolvendo demonstrações. Nas outras questões, o resultado foi considerado satisfatório devido ao pouco tempo a que dispusemos e a bagagem trazida pelos alunos. Após, a correção extra classe, o teste foi devolvido aos alunos e foi feita uma correção em sala, para que estes não ficassem com dúvidas a respeito das questões dadas. Ao final, os alunos devolveram os testes corrigidos para que arquivássemos. Este tempo da correção não foi computado nos sete tempos referidos no início deste capítulo.

Capítulo 4

Considerações Finais

O Teorema de Pitágoras é parte importante na resolução de problemas, tanto na Geometria, como em outras partes da Matemática, Física, Biologia e em várias atividades profissionais. Porém, pouca importância se tem dado a seu estudo prático e à sua história.

Neste trabalho descrevemos uma breve história de Pitágoras, um pequeno conjunto de demonstrações e algumas aplicações, estas realizadas em sala de aula. A intenção foi de valorizar o assunto e mostrar, brevemente, como ele se encaixa em várias ciências e que não se encontra isolado dentro da geometria.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) é conteúdo obrigatório, no currículo escolar, para os alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental. Por este motivo sugerimos, no capítulo 2 deste trabalho, algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras. Recomendamos aos professores que utilizem, pelo menos, duas delas para enfatizar a sua importância. Recomendamos, também, aos professores do 1º Ano do Ensino Médio, uma demonstração, utilizando o Teorema de Pitágoras, pra mostrar a relação fundamental da Trigonometria: $sen^2\alpha + \ cos^2\alpha = 1$.

Já, no terceiro capítulo, a experiência em sala de aula mostrou que muito há para se fazer, junto aos professores do 9º Ano do Ensino Fundamental e 1º Ano do Ensino Médio, para que dêem a devida importância a este teorema e outros conteúdos, incentivando seus alunos a darem uma atenção especial ao aprendizado em Matemática, vislumbrando que este é a base de grande parte do conhecimento para a vida acadêmica e profissional.

A esperança é que este trabalho possa contribuir para uma abordagem mais ampla a respeito do Teorema de Pitágoras e suas aplicações e verificar a possibilidade de dar alternativas para as práticas pedagógicas dos professores de Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] BENETTI, Bruno. *Matemática Acontece: volume único,* 1ª Ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

[2] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática 1º e 2º Ciclos do Ensino Fundamental*, v. 3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[3] (——) Secretaria de Estado da Educação: *Parâmetros Curriculares Nacionais– 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos da Matemática Elementar*, v. 9, 8ª Ed. São Paulo: Atual, 2005. ix, 15

[5] IMENES, Luiz Márcio. *Descobrindo o Teorema de Pitágoras. Coleção Vivendo a Matemática*. São Paulo: Scipione, 1988. 6

[6] KALEFF, A. et al. *Quebra – Cabeças Geométricos e Formas Planas*. Niteroi: Eduff, 1997.

[7] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras Histórias*. Rio de Janeiro: SBM, 1991. 1

[8] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais* , Coleção PROFMAT. Rio De Janeiro: SBM, 1º Edição, 2013. 6

[9] LOOMIS, Elisha Scott. *The Pythagorian Proposition, Classics in Mathematics Education Series*, Second Edition. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1940. 2, 3

[10] MOREIRA, Carlos G. T. A.; SALDANHA, Nicolau C.; MARTINEZ, Fabio B. *Tópicos De Teoria Dos Números* , Coleção PROFMAT. Rio De Janeiro: SBM, 1º Edição, 2012. 6

[11] MUNIZ NETO, Antônio C.. *Geometria* , Coleção PROFMAT. Rio De Janeiro: SBM, 1º Edição, 2013. 6

[12] SOUSA, Joamir Roberto de. *Matemática. Coleção Novo Olhar*, 1ª ed. São Paulo: FTD, 2010.

[13] https://www.youtube.com/watch?v=bS-D0XeFMPQ , acessado em 14 de abril de 2016.