Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Estratégias Para Elaboração De Problemas Matemáticos Para o Ensino Médio

Ligia Taciana Carneiro de Souza

Salvador - Bahia

Julho de 2016

Estratégias Para Elaboração De Problemas Matemáticos Para o Ensino Médio

Ligia Taciana Carneiro de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello.

Salvador - Bahia
JULHO DE 2016

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Souza, Ligia Taciana Carneiro de.
Estratégias para elaboração de problemas matemáticos para o ensino médio / Ligia Taciana Carneiro de Souza. - 2016.
84 f.: il.

Inclui apêndice.
Orientador: Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2016.

1. Matemática - Problemas, questões, exercícios. 2. Heurística. 3. Ensino médio. I. Mello, Vinícius Moreira. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 510
CDU - 51

Estratégias Para Elaboração De Problemas Matemáticos Para o Ensino Médio

Ligia Taciana Carneiro de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 04 de julho de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello (Orientador)
UFBA

Prof. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva
UFBA

Prof. Dr. Samuel Barbosa Feitosa
UFBA

À minha família

Agradecimentos

Ao Deus Pai, que com sua infinita sabedoria me guiou e amparou em todos os momentos desta jornada.

Aos meus pais e aos meus irmãos, meu alicerce, o meu amor maior, obrigada pelo incentivo e apoio incondicional. E a toda minha família pelo cuidado e carinho.

Aos amigos Tâmara, Daiane, Fabíola, Lázaro, Cristiano, Eduardo e Fabiano, sem vocês esta jornada não teria o mesmo brilho.

Aos professores que nos acompanharam e muito contribuíram para nosso crescimento ao longo deste curso, fica aqui um agradecimento especial ao meu orientador professor Vinícius Moreira Mello.

À turma de Estágio Supervisionado em Matemática IV semestre 2015.2, do IFBA *campus* Valença, obrigada de todo coração por terem doado o tempo e a atenção de vocês para este projeto.

E a todos os amigos que ao longo do curso estiveram ao meu lado me dando suporte intelectual e emocional, os meus sinceros agradecimentos.

"Um bom ensino da Matemática
forma melhores hábitos de pensamento
e habilita o indivíduo a usar melhor a
sua inteligência."
Irene de Albuquerque

Resumo

Partindo da premissa de que os problemas são os instrumentos pelos quais a Matemática sempre se desenvolveu e que resolvê-los é o que impulsiona não só o seu ensino, mas o desenvolvimento desta Ciência, o presente trabalho aborda a temática dos problemas matemáticos sob perspectiva da elaboração dos mesmos. Este material apresenta um resumo teórico sobre alguns aspectos da resolução de problemas onde buscou-se através do método heurístico organizado por George Polya e de estudos derivados da obra do autor expor alguns temas tais como a escrita matemática, os tipos de problemas, as etapas e estratégias de resolução e os elementos que caracterizam um bom problema matemático. Tópicos fundamentais que alicerçaram e instrumentalizaram uma oficina com estratégias para a elaboração de problemas matemáticos voltados para o Ensino Médio, o objeto central deste estudo, juntamente com o relato de sua aplicação em uma turma de licenciandos em Matemática.

Palavras-chave: Problemas Matemáticos, Elaboração de Problemas, Heurística.

Abstract

From the premise that the problems are instruments whereby Mathematics has always been developed and it solves them is what drives both the teaching and the development of this science, this paper addresses those problems, from the perspective of formulation of the same ones. Thus this work presents a theoretical review of some aspects of problem solving, in which it aims, from the heuristic method of George Polya and later studies derived from it, to discuss topics such as the mathematical writing, the types of problems, the steps and strategies of problem solving and the characteristics of a good mathematical problem. Fundamental issues that supported and operationalized a workshop with strategies for the formulation of mathematical problems directed to the high school, the central object of this study, along with the report of its application in a class of undergraduate students in Mathematics.

Keywords: Mathematical Problems; Problems Formulation; Heuristic.

Sumário

Introdução

A resolução de problemas é um instrumento eficaz para o ensino de Matemática, no entanto, pensar nesta estratégia normalmente implica em pensar nas etapas e nos métodos para chegar a solução.

George Poyla (2006, p. 76), em um de seus trabalhos sobre o assunto deixa claro que "a experiência matemática do estudante estará incompleta se ele nunca tiver uma oportunidade de resolver um problema *inventado por ele próprio*". Então, que caminhos percorrer para se formular bons problemas matemáticos?

Este é o objeto deste estudo, apresentar e aplicar estratégias que auxiliem no processo de elaboração de problemas. Outro fator pensado foi para qual público esta atividade estaria direcionada, e, diante da possibilidade de oferecer mais um recurso aos futuros profissionais de educação, visando contribuir para o desenvolvimento da habilidade de escrita em Matemática e instrumentalizá-los ainda mais para atuar com a metodologia de resolução de problemas, a opção foi pensar esta prática para um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, *campus* Valença.

Assim esta dissertação se delineia da seguinte maneira:

Inicialmente, descreve-se e forma breve a importância da resolução de problemas na História da humanidade e o caminho percorrido para se estruturar uma metodologia para resolução de problemas. Partindo dos indícios heurísticos dos povos antigos até a sistematização proposta por Polya.

Sequencialmente, buscou-se identificar e caracterizar os tipos de problema matemáticos, descrever as etapas do processo de resolução de problemas elaboradas por George Polya e apresentar algumas estratégias de resolução. Além disso, apresentou-se os elementos que compõem um "bom" problema matemático, os cuidados que se deve ter com a escrita matemática e as propostas que podem ser utilizadas para a realização de atividades que envolvem a produção de problemas.

Por fim, diante do que foi estudado, traz-se o produto obtido com a oficina de elaboração de problemas apresentada e executada para o público-alvo acima citado.

Capítulo 1

Breve histórico sobre resolução de problemas

"A Matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas."

Tatiana Roque e João B. P. de Carvalho

1.1 Problemas matemáticos no Oriente Antigo

A História mostra, através dos papiros, tabletes de argila e outros itens similares de registro, que os povos antigos já utilizavam problemas de natureza matemática:

> Alguns documentos que chegaram até nós mostram que, no começo do segundo milênio a.C., o nível de conhecimento dos egípcios já era bastante elevado. Dois destes documentos tornaram-se particularmente célebres e contêm, ambos, diversos problemas de Aritmética e Geometria com suas respectivas soluções. (GARBI, 2011, p. 13)

Grande parte destes problemas possuíam caráter prático, de maneira geral, serviam para mostrar o algoritmo, o modo de proceder ao se deparar com situações similares. Eram basicamente "receitas" transmitidas por escribas, e, destinadas a dirigir os problemas práticos enfrentados por uma sociedade agrária já muito estruturada, como: trocas, litígios, partilhas e rendas.

> Nenhum exemplo do que hoje chamamos demonstração pode ser encontrado na matemática oriental antiga. Em vez de um argumento encontra-se meramente a descrição de um processo. Instrui-se: "Faça assim e assim". Além disso, exceto possivelmente em alguns casos, essas instruções não eram dadas na forma de regras gerais, mas simplesmente aplicadas a sequências de casos específicos. Assim, se é para explicar a resolução de uma equação quadrática, não se encontram nem a dedução do processo usado nem a descrição geral do processo, mas ao invés disso nos são oferecidas várias equações específicas e somos informados, passo a passo, como proceder para resolver cada um dos exemplos. Por mais insatisfatório que o procedimento "faça assim e assim" possa nos parecer, não deveria causar estranheza, pois é em grande medida o procedimento que nós mesmos usamos no ensino de partes da matemática elementar no primeiro e segundo graus. (EVES, 2011, p. 58)

Foi no Oriente Antigo, considerado o berço das civilizações, que a Matemática encontrou seus primeiros registros mais estruturados, bem como, um campo vasto para seu desenvolvimento. Dentre estes povos, os que mais nos deixaram evidências foram os egípcios e principalmente os mesopotâmicos, já que seus materiais de escrita papiros e tabletes de argila, respectivamente, eram mais duráveis que os utilizados pelos chineses e indianos, que efetuavam seus registros em materiais como cascas de árvores e bambu. Estes documentos históricos, mostram que civilizações, como a egípcia e a babilônica, já utilizavam conhecimentos e técnicas elaboradas envolvendo frações, progressões aritméticas e geométricas, extração de raízes quadradas, além de problemas de caráter algébrico capazes de determinar raízes de equações lineares, quadráticas, cúbicas e biquadráticas. Muito destes resultados obtidos por tais povos, posteriormente foram significativos para resolução de problemas de cálculo extremamente complicados e decisivos para o desenvolvimento da Matemática.

Apesar de não conter um "rigor" matemático, verifica-se nestes registros históricos que tratam de temas matemáticos que, geralmente, os mesmos se alicerçam pautados num sentindo de ordem e método, os problemas eram dispostos de tal maneira que a soluções iam em uma ordem da mais simples à mais complexa, o que de certo modo confere a estes documentos um caráter científico.

Não haverá neste trabalho um aprofundamento sobre o estudo da resolução de problemas e muito menos sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático nestas civilizações, o objetivo é mostrar que a Matemática formal tal como vemos hoje, tem sua pedra fundamental calçada nas ferramentas utilizadas por estes povos para a resolução de seus problemas práticos.

1.1.1 Egito

> Temos notícia da Matemática egípcia por meio de um número limitado de papiros, como o de Rhind, escrito em hierático e datado de cerca de 1650 a.C. O nome se deve ao escocês Alexander Henry Rhind que o comprou, por volta de 1850, em Luxor, no Egito. Este documento também é chamado papiro de Ahmes o escriba egípcio que o copiou, e encontra-se no Museu Britânico. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 7)

Contendo 85 problemas e suas resoluções, o papiro Rhind é a principal e a mais rica fonte sobre a Matemática egípcia antiga. Segundo Boyer (1974), muitos destes problemas são aritméticos mas existem outros com caráter algébrico que não se referem a objetos concretos e nem exigem operações entre valores conhecidos, estes problemas provavelmente eram voltados para jovens estudantes, no geral, de natureza prática, mas também há alguns enigmas ou recreações matemáticas. O autor afirma que, quase todo o conhecimento revelado nos papiros é de natureza prática e quando houve aparentes elementos teóricos, tudo leva a crer que os mesmos serviam apenas para auxiliar e facilitar as técnicas de cálculo.

Através dos problemas trazidos nos registros, percebe-se que a civilização egípcia possuía uma grande habilidade com frações e geometria, também indica um conhecimento razoável para a resolução de equações algébricas e de operações aritméticas como elevar ao quadrado e extrair raízes quadradas, além disso, trazem ideias, ainda que confusas, sobre progressões aritméticas e geométricas.

Dos problemas contidos no papiro, um não apresenta uma interpretação muito clara:

> o Prob. 79 cita apenas " sete casas, 49 gatos, 342 ratos, 2014 espigas de trigo, 16 807 hectares". É presumível que o escriba estava tratando de um problema, talvez bem conhecido, em que cada uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas e grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de medidas de grão. (BOYER, 1974, p. 12)
>
> Facilmente se reconhecem os números como as cinco primeiras potências de 7, juntamente com sua soma. Devido a isso inicialmente pensou-se que o escriba talvez estivesse introduzindo a terminologia simbólica casas, gatos etc. para representar primeira potência, segunda potência e assim por diante.
>
> Em 1907, porém, o historiador Moritz Cantor deu uma interpretação mais interessante e mais plausível. Ele viu no problema um precursor de um popular problema da Idade Média e que figura no Liber abaci (1202) de Leonardo Fibonacci. Dentre os muitos problemas dessa obra há o seguinte: "Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada de Roma?"
>
> [...]

> Eis aí, então, um problema que parece ter se preservado em meio aos quebra-cabeças do folclore universal. Aparentemente já era antigo quando Ahmes o transcreveu; e era cerca de três milênios mais velho quando Fibonacci o incorporou, numa outra versão, ao seu Liber abaci. Quase oito séculos depois pode ser lido em língua inglesa, na forma de versos infantis. Não pode deixar de causar espanto que as características inusitadas dos antigos versos ingleses também tivessem ocorrido num problema egípcio de mais de 4000 anos. (EVES, p. 75-76)

Por ter se mantido em isolamento, a Matemática egípcia não se desenvolveu tanto quando a Matemática da Mesopotâmia ou Babilônia, que se localizava em uma região que era rota de grandes caravanas e conflitos. Fato que pode ser considerado controverso, pois há poucos documentos egípcios quando comparados aos babilônicos, e, esta conclusão é fundamentada pelos historiadores com base nos registros que resistiram ao tempo.

1.1.2 Mesopotâmia

Como já explicitado, o maior número de documentos das civilizações antigas foi deixado pelos mesopotâmicos, também conhecidos como babilônicos, uma vez que as tábuas ou tabletes de argila são menos vulneráveis aos estragos do tempo em relação as outras formas de registro utilizadas pelos demais povos. No entanto, sua escrita demorou para ser decifrada, acontecendo entre os séculos XIX e XX.

Dentre as tábuas matemáticas encontradas, haviam duas categorias, as tábuas numéricas e as de problemas. As tábuas numéricas tinham a função similar a das nossas tabuadas, eles a utilizavam para resolver operações como multiplicação, inversos multiplicativos, quadrados e cubos, exponenciais, dentre outros. Enquanto que nos tabletes de problemas, encontram-se problemas geométricos contextualizados em situações agrícolas e construção civil e militar, problemas de caráter algébrico, e, em grande maioria problemas referentes à Matemática Financeira, algo completamente explicável, já que a região sobrevivia principalmente do comércio.

> O desenvolvimento da matemática mesopotâmia teve o seu apogeu por volta de 1800 a.C. Ao contrário de outros povos, deram-se ao luxo de formular problemas matemáticos de características eminentemente especulativas. Na placa de argila 322 da Coleção Plimpton da Universidade de Columbia, Nova York, estudada por Neugebauer em 1945, temos uma tabela com 15 linhas por 4 colunas, sendo que 3 delas, após um ajuste nos cálculos, estão relacionadas entre si como as conhecidas ternas pitagóricas. Na linha 4, por exemplo, encontramos $a = 3, 31, 49$; $b = 3, 45, 0$ e $c = 5, 9, 1$ que satisfazem a relação $a^2 + b^2 = c^2$, em que a, b, c são lados de um triângulo retângulo. Assim, aproximadamente, mil anos antes de Pitágoras nascer, já era conhecido entre os rios Tigre e Eufrates o famoso teorema atribuído ao sábio grego. (PEDROSO, 1992, p. 29)

Estes povos demonstraram habilidade no desenvolvimento de processos algorítmicos como a extração de raiz quadrada, e, resolviam sem uso de fórmulas equações do primeiro e segundo graus, equações lineares com duas incógnitas, sistemas do segundo grau com duas incógnitas e equações biquadradas. Sua Matemática tem, como marca principal, o caráter algébrico, com problemas complexos, que mostram através dos procedimentos utilizados para sua resolução que se tratavam de problemas de álgebra não triviais.

Segundo Roque e Carvalho (2012) hoje, resolvemos problemas criando regras gerais que são aplicados em casos particulares, os mesopotâmicos, mesmo sem estar munidos de meios para uma generalização, utilizavam uma metodologia similar, só que apresentando exemplos típicos, empregando-os, em seguida, para resolver outros problemas.

> Podemos concluir, em suma, que os babilônios eram infatigáveis construtores de tábuas, calculistas extremamente hábeis e certamente mais fortes em álgebra do que em geometria. É impressionante a profundidade e a diversidade dos problemas considerados por eles. (EVES, 2011, p. 63)

1.2 Matemática dedutiva grega e a atividade de resolver problemas

A História mostra que Grécia era rica em filósofos e o desenvolvimento da sua Matemática se deve aos debates destes pensadores, que aprimoraram ao mais alto grau a arte da argumentação e deram as produções matemáticas babilônicas e egípcias um caráter mais sistemático e formal. Escolas filosóficas da Grécia antiga, como a de Mileto e a Pitagórica, transformaram a Matemática empírica em uma Ciência dedutiva. Assim, suas proposições saem do concreto e deixam de ser simples enunciados, passando a ser tratadas de forma universal, estabelecendo propriedades e buscando um refinamento e uma exigência lógica.

O desenvolvimento de uma sociedade cultural e sociopoliticamente avançada impulsionou os gregos ao pensamento dedutivo. Daí, a confrontação dos resultados que vinham dos babilônios e dos egípcios, e, a lógica desenvolvida por Aristóteles, explicam o desenvolvimento da Matemática grega e sua transformação em uma ciência dedutiva.

> Em um mundo no qual as opiniões se multiplicavam, era necessário selecionar os argumentos, estabelecer critérios para decidir quem tinha razão. Este novo tipo de pensamento, para Platão, devia se fundar em definições claras, que distinguem os seres inteligíveis de suas cópias no mundo sensível. Nos discursos de Sócrates está presente este modo de argumentação, chamado "dialética", que se servia das ideias para ultrapassar as opiniões. A distinção entre retórica e dialética irá marcar a educação do cidadão livre. Mais tarde, Aristóteles desenvolverá uma lógica, na qual os critérios de verdade estarão mais ligados à pura coerência, ao rigor da demonstração. Ou seja, em uma cadeia de conclusões, tudo deve decorrer daquilo que antes foi dito, sem que haja contradição no interior do raciocínio. Platão e Aristóteles se serviram da Matemática para constituir este novo ideal de pensamento. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 51)

Eves (2011) afirma que nesta atmosfera de racionalismo crescente a visão estática do Oriente antigo tornou-se insustentável, só o "como" não bastava, era necessário o "por quê".

> Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como "Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?" e "Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?". Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de como, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de por quê. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. Assim, a matemática, no sentido moderno da palavra, nasceu nessa atmosfera de racionalismo. (EVES, 2011, p. 94)

Pereira (2002) afirma que a atividade Platão e Sócrates trazem algumas contribuições para a prática da resolução de problemas, para o autor, a tarefa recai na questão filosófica de "pensar sobre o pensamento".

> Para Sócrates, o indivíduo já detém o conhecimento a ser usado para resolver o problema e, portanto, a atividade de resolver problemas não passa de mera 'recordação'; para exemplificar seu método, certa vez Sócrates fez um escravo demonstrar o Teorema de Pitágoras 'apenas' lhe fazendo algumas perguntas. (PEREIRA, 2002, p. 8)

Percebe-se então que, as indagações científicas estabelecidas pelos filósofos gregos em busca dos por quês matemáticos, pautados em critérios e argumentos, seriam os primeiros passos para a heurística da resolução de problemas.

1.2.1 Pappus

Pappus (300 d. C.), no início do Livro VII de sua *Coleção Matemática*, descreve um ramo de estudo denominado por ele de *analyimenos*, que Polya (2006) traduz como "Tesouro da Análise" ou "Heurística" e ainda como "A Arte de Resolver Problemas", um dos raros textos deixados pelos gregos sobre o assunto.

> é composto por uma série de obras de autores gregos anteriores, com o objetivo de disponibilizar procedimentos que pudessem ser úteis na resolução dos problemas geométricos, àqueles alunos que já haviam adquirido o domínio da geometria, através do estudo de seus elementos. (BALIEIRO, 2004, p. 66-67)

Pappus, descreve a atividade heurística como uma doutrina voltada para quem deseja adquirir a capacidade de resolver problemas matemáticos. No seu livro ele apresenta os procedimentos da análise e da síntese, uma espécie de atividade heurística desenvolvida pelos geômetras gregos para fazer a demonstração e encontrar soluções para os problemas geométricos.

> Fica explícito que os antigos geômetras utilizavam um procedimento heurístico para solucionar seus problemas matemáticos, isto é, um modelo matemático que utiliza a análise para encontrar a solução de um problema ou a demonstração de um teorema e, em seguida, a síntese para expor o que se encontrou para solucionar o problema ou a demonstração de um teorema; esses aspectos, analítico e sintético, permaneceram na matemática de Euclides de Alexandria e nos trabalhos desenvolvidos por outros geômetras gregos contemporâneos e posteriores. (BALIEIRO, 2004, p. 69-70)

1.3 Descartes

O filósofo, físico e matemático francês René Descartes (1596 -1650), trouxe ideias mais consistentes no que se refere a heurística da resolução de problemas. Segundo Polya (2006), Descartes planejou a publicação de um método universal para resolver problemas, mas a obra ficou inacabada.

> Para o nosso propósito, o importante em Descartes são suas ideias sobre 'pensamento produtivo' que tinham um papel importante no seu ambicioso projeto de construção de um método geral de resolução de problemas. Descartes chegou a escrever dois volumes (o segundo incompleto) – dentre três planejados - do ***Rules for the Direction of the Mind***, onde procurava expor em detalhes como, segundo seu método, seria possível resolver qualquer problema. Em resumo, Descartes vê o processo de resolução de problemas em três fases:
>
> - Reduzir todo problema algébrico a um problema contendo apenas equação(ões);
> - Reduzir todo problema matemático a um problema algébrico; e
> - Reduzir qualquer problema a um problema matemático. (PEREIRA, 2002, p. 9, grifo do autor)

Pode-se, em linhas gerais, sintetizar o método aplicado por ele basicamente em duas etapas: na primeira, Descartes propõe que o problema seja equacionado através de recursos algébricos, com a finalidade de reduzir ao máximo a dificuldade do problema; já a segunda etapa, consiste em resolver a equação obtida e provar o resultado encontrado.

Para Pereira (2002) o trabalho de Descartes tinha caráter irrealista por objetivar reduzir todo problema existente no mundo a um problema matemático mas, que apesar disto apresenta ideias de relevância sobre resolução de problemas que podem ser aplicadas ao ensino.

Na visão de Poyla (2006, p. 67) das obras de Descartes, as suas *Regras para a Direção do Espírito*, mesmo inacabadas, "contêm, com referência à solução de problemas, matéria mais substanciosa – e mais interessante – do que a sua obra mais conhecida, o *Discours de la Méthode*".

1.4 George Polya

Nascido em Budapeste, George Polya (1887-1985) atuou como professor de Matemática e pesquisador em Matemática na Suíça e posteriormente nos Estados Unidos. Apresentou estudos sobre uma diversidade de temas da Matemática, dentre eles, a sua contribuição para a heurística da resolução de problemas matemáticos, tida por alguns pesquisadores como a mais notável.

> Polya foi o primeiro matemático a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a matemática. Por isso, Polya representa uma referência no assunto, uma vez que suas ideias representam uma grande inovação em relação às ideias de resolução de problemas existentes até então (vide Descartes, Wallas, Skinner). Muitas de suas ideias são razoáveis até os dias atuais, servindo de alicerce para trabalhos de outros pesquisadores contemporâneos a Polya na área. (PEREIRA, 2002, p. 11)

Dentre as suas publicações sobre o tema, *How to solve it*, no Brasil, *A Arte de Resolver Problemas*, merece destaque por trazer um modelo ou proposta para resolução de problemas composto por quatro etapas: (a) compreensão do problema. (b) construção de uma estratégia de resolução, (c) execução da estratégia e, (d) revisão da solução. "Para explicar e discutir o processo heurístico e os elementos que dele fazem parte, Polya elabora um Pequeno Dicionário de Heurística com sessenta e sete artigos, dando o significado e fundamentos de cada um deles". (BALIEIRO, 2004, p. 139)

Polya, segundo Balieiro (2004), determinou uma linha divisória nas pesquisas sobre os procedimentos heurísticos envolvidos na Resolução de Problemas, influenciando o surgimento de novo um campo de pesquisa em Educação Matemática. Assim, as discussões sobre alguns aspectos dessa atividade heurística proposta pelo pesquisador, bem como de outras investigações derivadas da mesma, se fazem necessárias para alicerçar o que foi proposto para este estudo.

Capítulo 2

Sobre problemas matemáticos e o Ensino de Matemática

> ''A resolução de problemas foi e é a coluna vertebral da instrução matemática desde o papiro de 'Rhind'. "
>
> George Polya

Apesar dos documentos históricos atestarem que os problemas matemáticos já faziam parte dos "sistemas educacionais" dos povos antigos o interesse e a preocupação com a resolução de problemas e a forma como ela é apresentada e ensinada na escola é muito recente. Após o fracasso do movimento da Matemática Moderna,

> o National Council of Teachers of Mathematics - NCTM -, dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento "Agenda para Ação". Nele a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares. Essas ideias influenciaram as reformas que ocorreram em todo o mundo, a partir de então. (BRASIL, 1998, p. 20)

Abrantes (1989) afirma que a proposta de colocar a resolução de problemas como foco da Matemática passou a ser recomendada por prestigiadas personalidades e associações da Educação Matemática pelo mundo. Ainda segundo o autor, esse reconhecimento da importância da resolução de problemas – o "motor do desenvolvimento da Matemática" – dentro do processo de aprendizagem, faz com que esta atividade ganhe ainda mais notoriedade nos currículos da Matemática ensinada nas escolas. As obras de George Polya, sobre o tema, tornam-se então um marco de referência:

> Os trabalhos iniciais sobre resolução de problemas foram apontados por George Polya quando abordou os modos de como planejar e resolver problemas (Polya, 1979) e o descobrimento matemático (Polya, 1981) por meio da resolução de problemas. Os objetivos da resolução de problemas, segundo Polya são:
>
> - **Analisar os processos matemáticos estabelecidos pelos bons resolvedores de problemas matemáticos;**
> - **Melhorar habilidades de resolução de problemas nas aulas de Matemática, considerando para isso os processos estabelecidos para um bom resolvedor de problemas;**
> - **Propor uma metodologia de trabalho docente envolvendo a técnica de resolução de problemas nas aulas de Matemática.** (MENDES, 2009, p. 71-72, grifo do autor)

É praticamente consenso entre pesquisadores da área, a relevância do trabalho desenvolvido por Polya na heurística da resolução de problemas. Na sequência, serão levantados alguns tópicos do assunto, tanto sob a ótica de George Polya quanto sob a de algumas pesquisas que derivaram de sua obra, e, que são essenciais para o estudo proposto.

2.1 Classificação de problemas

Apresentar tipos de problemas torna-se uma tarefa delicada, diante da diversidade de classificações encontradas, visto que, "pode-se prestar a atenção à natureza do problema ou ao contexto no qual se resolve, ao componente sintático, às relações matemáticas ou a estrutura lógica, etc." (HUETE; BRAVO, 2006, p. 139). Diante de tal fato, e, como este não é o objetivo central do estudo, optou-se por apresentar apenas às qualificações sugeridas por Polya e Dante.

2.1.1 Classificação proposta por Polya

Polya (2006), utiliza a natureza do problema como critério de classificação[1], segundo o autor podemos ter:

O **problema rotineiro**:

> De modo geral, um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido. Ao apresentar um problema, o professor põe à frente do aluno uma resposta imediata e decisiva à indagação: *Conhece um problema correlato?* Desse modo, o aluno de nada mais precisa, além de um pouco de cuidado e paciência para seguir uma fórmula preestabelecida, sem ter a oportunidade de usar o seu discernimento nem as suas faculdades inventivas. (POLYA, 2006, p. 142)

[1]No Apêndice (p. 59-60), há exemplos de todos os tipos de problemas descritos nesta subseção.

O autor chama a atenção para o fato de que embora importantes no processo de aprendizagem, existe o risco de condicionar a atividade de ensino de Matemática a apenas este tipo de atividade, o que reduzirá a capacidade do aluno ao simples processo mecanização de operações matemáticas.

Problemas de determinação, Polya (2006) diz que o objetivo deste tipo de problema é encontrar um certo objeto, a incógnita – *quaesitum* – do problema. Estes problemas podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas.

Suas partes principais são a incógnita, os dados e a condicionante, para resolvê-lo é preciso conhecer com grande exatidão, estas partes principais. Pode-se tentar encontrar, calcular, obter, produzir, traçar construir todos os tipos imagináveis de objetos. São mais importantes para a Matemática Elementar.

Já os **problemas de demonstração**, apresentados pelo autor através de um comparativo com aos problemas de determinação, tem por objetivo mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou então que é falsa; se for um problema matemático comum, suas partes principais serão a hipótese e a conclusão do teorema que tiver de ser provado ou refutado,e, para resolvê-lo é preciso conhecer com grande exatidão as suas partes principais. São mais importantes na Matemática Superior.

E por fim, temos os **problemas práticos**, que para Polya (2006) apesar de diferentes dos problemas puramente matemáticos, em muitos aspectos se assemelham nos processos e na essência:

> Incógnitas, dados, condicionantes, conceitos preliminares necessários, tudo é mais complexo e menos nítido nos problemas práticos do que nos puramente matemáticos. Esta é uma diferença importante, talvez a principal, e ela certamente implica em outras; no entanto, a motivação fundamental e os processos solucionadores parecem ser os mesmos para problemas de ambos os tipos. (POLYA, 2006, p. 146)

Sobre a resolução de problemas práticos e matemáticos, o autor discorre que não é de todo verdadeira a crença de que os primeiros exigem mais experiência que os segundos, em ambos os casos, tudo irá depender da natureza do conhecimento necessário para resolvê-los.

> Ao resolver um problema matemático, partimos de conceitos muito claros, que estão razoavelmente ordenados em nossa mente. Ao resolver um problema prático, muitas vezes somos obrigados a partir de ideias algo nebulosas; aí, então, a clarificação dos conceitos pode tornar-se uma parte importante. Assim a ciência médica está hoje numa posição melhor para controlar doenças infecciosas do que estava antes de Pasteur, quando a própria noção de infecção era muito vaga. *Levou em conta todas as noções essenciais referentes ao problema?* Esta é uma boa pergunta para problemas de todos os tipos, porém sua aplicação varia muito, conforme a natureza das noções intervenientes.
>
> Num problema matemático perfeitamente formulado, todos os dados e todas as cláusulas da condicionante são essenciais e tem de ser levados em conta. Nos problemas práticos, temos uma grande multiplicidade de dados e de condicionantes; tomamos em consideração tantos quanto pudermos, mas somos forçados a desprezar alguns. (POLYA, 2006, p. 147)

2.1.2 Classificação proposta por Dante

Dante (2009), o outro pesquisador que será tomado como referência para o estudo, em sua classificação[2] contempla não só a natureza do problema, como o contexto em que o mesmo é resolvido e as relações matemáticas envolvidas para tal. De acordo com o autor temos:

Exercícios de reconhecimento: "Seu objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade, etc." (DANTE, 2009, p. 24)

Exercícios de algoritmos:

> São aqueles que podem ser resolvidos passo a passo. Geralmente no nível elementar, são exercícios que pedem a execução dos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais.
>
> Seu objetivo é treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores. (DANTE, 2009, p. 24)

Problemas-padrão:

> Sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige nenhuma estratégia. A solução do problema já está contida no próprio enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, identificando as operações ou algoritmos necessários para resolvê-lo. (DANTE, 2009, p. 25)

O autor subdivide os problemas-padrão em dois tipos: os problemas-padrão simples, aqueles que podem ser resolvidos com uma única operação, e; os problemas-padrão compostos, pois sua resolução implica na realização de duas ou mais operações.

[2]No Apêndice (p. 60-62), há exemplos de todos os tipos de problemas descritos nesta subseção.

Problemas-processo ou heurísticos:

> São problemas cuja solução envolve operações que não estão explicitamente no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvidos pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução. Por isso, tonam-se mais interessantes do que os problemas-padrão. (DANTE, 2009, p. 25)

Problemas de aplicação:

> São aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos. São também chamados de *situações-problema contextualizadas*.
>
> Por meio de conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações etc. Em geral os problemas exigem pesquisa e levantamento de dados. Podem ser apresentados em forma de projetos a serem desenvolvidos usando do conhecimentos e princípios de outras áreas que não a matemática, desde que a resposta se relacione a algo que desperte interesse. (DANTE, 2009, p. 27-28)

Problemas de quebra-cabeça:

> São problemas que envolvem e desafiam os alunos. Geralmente constituem a chamada matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque, alguma regularidade, que é a chave da solução. (DANTE, 2009, p. 28)

Percebe-se que a classificação proposta por Dante está voltada para a Matemática escolar, enquanto Polya os caracteriza de forma mais ampla. No entanto, as categorias apresentadas por Dante podem ser vistas como ramificações das que Polya expõe. Ou seja, os problemas chamados de rotineiros por Polya, são discriminados por Dante como exercícios de reconhecimento, exercícios de algoritmos e problemas-padrão, pois estas categorias de problemas tem como objetivo o treino de algoritmos e a fixação de conceitos básicos do conteúdo abordado. Já os tidos como problema de determinação para Polya, Dante os especifica como problemas-processo e problemas de quebra-cabeça, estes tipos de problema estimulam a criatividade, o espírito explorador e propiciam o desenvolvimento de competências e habilidades no que se refere a resolução de situações-problema. Temos ainda os problemas de aplicação, que seriam uma adaptação dos problemas práticos para a Matemática escolar. Quanto aos problemas de demonstração, Dante não os menciona em sua classificação, acredita-se que seja pelo fato de sua escrita estar destinada a resolução de problemas na Matemática escolar básica.

2.2 Etapas para a resolução de um problema

> O modelo proposto por Polya (1986), para resolução de problemas, tem inspirado muitos daqueles que buscam neste recurso um caminho para conduzir o processo de aprendizagem em matemática. O modelo prevê quatro etapas para a resolução de um problema: (a) compreensão do problema. (b) construção de uma estratégia de resolução, (c) execução da estratégia e, (d) revisão da solução. (GONTIJO, 2006, p. 7-8)

Para Dante (2009) "estas etapas não são rígidas, fixas e infalíveis," uma vez que resolver um problema nem sempre se limita a seguir instruções, se assim o fosse a atividade nada mais seria que um algoritmo. No entanto, o autor destaca que de forma geral estes estágios ajudam o solucionador a se orientar durante o processo.

2.2.1 Compreensão do problema

O entendimento do problema é essencial para o bom desenvolvimento do processo de resolução. Polya (2006) diz ser "tolice" responder algo que não tenha compreendido. O resolvedor ou solucionador deve estar atento e considerar todas as partes do problema a fim de identificar suas partes principais. O autor destaca que para isso é preciso responder questões como: "Qual a incógnita?", "Quais são os dados?" e "Qual é a condicionante?".

> *Por onde começar?* Comece de novo pelo enunciado do problema, quando este estiver tão claro e tão bem gravado em sua mente que poderá até perdê-lo de vista por um momento sem temor de perdê-lo por completo.
>
> *Que posso fazer?* Isole as partes principais do problema. A hipótese e a conclusão são as partes principais de um "problema de demonstração"; a incógnita, os dados e a condicionante são as partes principais de um "problema de determinação". Verifique as partes principais do seu problema, considere-as uma a uma, em seguida examine-as em várias combinações, relacionando cada detalhe com os outros detalhes e cada um destes com a totalidade do problema.
>
> *Qual a vantagem em assim proceder?* Deve-se preparar e clarificar os detalhes que mais tarde terão uma função a desempenhar. (POLYA, 2006, p. 29)

2.2.2 Estabelecimento de um plano (construção de uma estratégia de resolução)

Esta etapa consiste em conectar os dados e o que é pedido no problema afim de elaborar um plano para resolvê-lo. Polya (2006) destaca que se tem este plano quando se conhece quais os cálculos ou desenhos precisam ser executados para se chegar a incógnita, e, que "o caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso" (p. 7). Ainda afirma, que um bom começo para este trajeto é responder à pergunta: "Conhece um problema correlato?"

Sendo afirmativa a resposta, cabe escolher dentre as opções que surgirem as que aparentam ser realmente úteis. Não havendo tal possibilidade, se faz necessário uma busca de outros meios mais apropriados para se chegar a tal, o autor sugere desde a reformulação do problema, para um correlato que seja mais acessível, até trabalhar com parte da condicionante. Deixando o alerta para o risco de que atividades do gênero podem fazer o resolvedor se distanciar do problema original. Uma forma de verificar se isto ocorreu e até de voltar ao problema é se perguntar se utilizou todos os dados e toda a condicionante.

Sobre a procura deste plano, o autor tece o seguinte diálogo:

> *Por onde começar?* Comece pelo exame das partes principais do seu problema, quando estas estiverem nitidamente dispostas e claramente concebidas, graças ao seu trabalho anterior, e quando sua memória estiver receptiva.
>
> *Que posso fazer?* Considere um problema sob diversos pontos de vista e procure contatos com seus conhecimentos previamente adquiridos.
>
> Considere o seu problema por diferentes lados. Destaque as diferentes partes, examine os diversos detalhes, examine repetidamente os mesmos detalhes, mas de maneiras diferentes, combine-os diferentemente, aborde-os por diversos lados. Procure perceber algum significado novo em cada detalhe, alguma nova interpretação do conjunto.
>
> Procure contatos com os seus conhecimentos anteriormente adquiridos. Tente pensar naquilo que já serviu de auxílio em situações semelhantes. Tente conhecer alguma coisa de familiar no que examina e perceber algo de útil naquilo que reconhecer.
>
> *Que posso perceber?* Uma ideia proveitosa, talvez uma ideia decisiva que indique, num relance, o caminho para chegar ao fim desejado.
>
> *Como pode uma ideia ser proveitosa?* Ela lhe mostra todo o caminho ou parte dele: ela lhe sugere, com maior ou menor nitidez, como prosseguir. As ideias são mais ou menos completas. Já é uma sorte ter uma ideia qualquer.
>
> *Que posso fazer com uma ideia incompleta?* Deve-se levá-la em consideração. Se parecer vantajosa, deve examiná-la mais demoradamente. Se parecer confiável, deve verificar até onde ela o leva e considerar a situação. Esta se modificou graças a sua ideia proveitosa. Examine a nova situação por diversos lados e procure contatos com os seus conhecimentos anteriormente adquiridos.
>
> *Qual a vantagem em tornar a fazer isto?* É possível que tenha sorte e lhe surja uma ideia. Talvez a sua próxima ideia o leve diretamente à resolução. Talvez precise de mais algumas ideias proveitosas depois da próxima. Algumas delas talvez te levem por outro caminho. Não obstante, deve ser grato a todas as ideias novas, até às mais insignificantes, às nebulosas, às suplementares, que emprestam precisão às nebulosas ou tentam corrigir as menos felizes. Mesmo que, por algum tempo, não lhe ocorra qualquer nova ideia apreciável, deverá ficar agradecido se sua concepção do problema tornar-se mais completa ou mais coerente, mais homogênea ou mais equilibrada. (POLYA, 2006, p. 30)

2.2.3 Execução do plano

Após a execução da tarefa mais complexa do processo de resolução de problemas, que é a elaboração do plano, uma vez com este "roteiro" em mãos o que resta é executá-lo. Para tal, Polya (2006) recomenda paciência e atenção aos detalhes inseridos neste plano, é o que ele denomina de "verifique cada passo". O principal motivo deste cuidado é para evitar o erro, que pode ser acarretado caso algum pormenor seja omitido ou esquecido.

> *Por onde começar?* Comece da ideia feliz que o levou à resolução. Principie quando se sentir seguro de que dominou a conexão principal e confiante em que pode proporcionar os detalhes menores que faltam.
>
> *Que posso fazer?* Assegure o seu domínio. Realize detalhadamente todas as operações algébricas e geométricas que já se verificou serem viáveis. Verifique a correção de cada passo, pelo raciocínio formal ou pela intuição, ou de ambas as maneiras. Se o seu problema é muito complexo, pode distinguir passos "grandes" e "pequenos", constituindo-se cada grande passo de diversos pequenos. Verifique primeiro os grandes e passe depois para os pequenos.
>
> *Qual a vantagem em assim proceder?* Uma apresentação da resolução, na qual cada passo está correto fora de qualquer dúvida. (POLYA, 2006, p. 31)

2.2.4 Retrospecto

É comum acreditar que após a execução do plano e da obtenção da solução o processo de resolução do problema estará concluído. Agindo assim, o solucionador negligenciará uma etapa que possui um papel crucial para a consolidação da sua aprendizagem, e, que pode auxiliá-lo no aperfeiçoamento da sua habilidade de resolução de problemas.

A esta fase compete um retrospecto da resolução, uma oportunidade para rever e reexaminar o caminho que o levou à solução. Promovendo a oportunidade de detectar e reparar possíveis erros.

> *Por onde começar?* Pela resolução, completa e correta em todos os seus detalhes.
>
> *Que posso fazer?* Considere a resolução por diversos lados e busque contatos com seus conhecimentos adquiridos.
>
> Considere os detalhes da resolução e procure torná-los tão simples quanto possível; examine as partes mais amplas da resolução e procure abreviá-las; tente perceber toda a relação num relance. Procure modificar vantajosamente as partes maiores e menores da resolução, melhorá-la toda e inseri-la tão naturalmente quanto for possível, nos seus conhecimentos anteriormente adquiridos. Examine o método que o levou à resolução, para caracterizá-lo e utilizá-lo em outros problemas. Examine o resultado e procure utilizá-lo em outros problemas.
>
> *Qual a vantagem de assim proceder?* É possível que encontre uma outra resolução melhor, que descubra fatos novos e interessantes. De qualquer maneira, se adquirir o hábito de verificar e examinar desse modo as suas resoluções, obterá alguns conhecimentos bem ordenados e prontos a serem utilizados e assim desenvolverá a sua capacidade de resolver problemas. (POLYA, 2006, p. 31)

Pereira (2002) afirma, a revisão da solução é a etapa que Polya considera a mais importante, por propiciar uma depuração e uma abstração da solução do problema. A depuração ocorre no momento em que o solucionador verifica a argumentação utilizada e busca maneiras mais simples para resolver o problema, a abstração é proporcionada pela reflexão sobre o processo de resolução, seria uma espécie de busca pela essência do problema e do método utilizado. Apesar desta eminente contribuição para o processo de aprendizagem, o autor chama a atenção para o fato de que esta etapa costuma ser negligenciada pelos professores da Educação Básica.

2.2.5 Quadro resumo do esquema de Polya

O quadro apresentado abaixo é uma releitura apresentada por Dante (2009) do quadro estruturado por Polya. A escolha por esta versão se deu devido ao seu caráter didático para alunos do Ensino Básico.

Compreender o problema

(a) Você leu e compreendeu corretamente o problema?
(b) O que se pede no problema?
(c) Quais são os dados e as condições do problema?
(d) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
(e) É possível estimar uma resposta?

Elaborar um plano

(a) Qual é o seu plano para resolver o problema?
(b) Que estratégias você tentará desenvolver?
(c) Você lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?
(d) Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.
(e) Tente resolver o problema por partes.
(f) Há alguma outra estratégia?

Executar o plano

(a) Execute o plano elaborado, desenvolvendo-o passo a passo.
(b) Efetue todos os cálculos indicados no plano.
(c) Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

Fazer o retrospecto ou verificação

(a) Examine se a solução obtida está correta.
(b) Existe outra maneira de resolver o problema?
(c) É possível usar a estratégia empregada para resolver problemas semelhantes?

(DANTE, 2009, p. 34-35)

2.3 Algumas estratégias para resolução de problemas

No processo de resolução de problemas, o uso de determinadas estratégias podem ser de grande auxílio, porém é importante ter ciência de que não existe uma única estratégia considerada ideal e infalível para problemas que possuam características similares, bem como nem sempre um problema será resolvido ao aplicar única estratégia, muitas vezes se faz necessário uma combinação de várias delas.

Em seu estudo, Polya busca trazer aspectos gerais, independente do assunto abordado, na forma de tratar o problema. Para o autor solucionar problemas é uma atividade complexa, e, o programa que organizou busca por meio das indagações sugeridas (expostas no item 2.2.5) instrumentalizar uma série de operações mentais típicas e úteis neste processo heurístico.

> Ao tentarmos resolver um problema, consideramos um a um dos seus aspectos, resolvemos os mesmos incessantemente na nossa mente: a VARIAÇÃO DO PROBLEMA é essencial ao nosso trabalho. Podemos variar o problema pela DECOMPOSIÇÃO E RECOMBINAÇÃO dos seu elementos ou pela utilização dos recursos de GENERALIZAÇÃO, PARTICULARIZAÇÃO e ANALOGIA. A variação do problema pode nos levar a ELEMENTOS AUXILIARES ou à descoberta de um PROBLEMA AUXILIAR mais acessível. (POLYA, 2006, p. 101)

2.3.1 Estratégias apresentadas por Polya

No livro *How to solve it*, Polya, fortalece ao longo dos seus artigos que explorar os problemas sob diversos pontos de vista é a forma mais adequada para obter sucesso em sua resolução, é o que ele denomina de variação do problema. Ao longo do Pequeno Dicionário de Heurística o autor descreve, em alguns de seus artigos os modos típicos de variação de problemas considerados úteis como estratégias no processo heurístico de solucionar problemas.

O primeiro deles é a **analogia**, que o autor define como "uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto; objetos análogos coincidem em certas relações das suas respectivas partes." (POLYA, 2006, p. 33)

A ideia principal desta estratégia é descobrir um problema análogo ao que precisa ser resolvido, porém mais simples, onde se possa utilizar seu método de resolução, o seu resultado ou ambos, para solucionar o problema proposto. Sobre esta estratégia cabe o alerta:

> Em casos mais difíceis podem surgir complicações, em particular, pode ocorrer que a resolução do problema análogo não possa ser imediatamente utilizada ao nosso problema original. Neste caso, pode valer a pena reconsiderar a resolução, variá-la e modificá-la até que, depois de serem tentadas diversas formas de resolução, encontremos finalmente uma, susceptível de aplicação ao nosso problema. (POLYA, 2006, p. 37)

Outro meio para variação do problema, se dá pela **decomposição e recombinação** onde, após a compreensão do problema como um todo deve-se avaliar os seus detalhes e particularidades separadamente, a decomposição. Esse processo permitirá ao solucionador conhecer as partes que compõe o problema e as relações entre elas. Passada esta etapa, cabe então a recombinação destes elementos, preferencialmente reestruturando-os de modo a tornar o problema mais acessível.

Para esta estratégia o autor aborda os procedimentos adotados para os problemas de determinação e os problemas de demonstração separadamente.

Problemas de determinação:

> Uma vez compreendido todo o problema, o seu objetivo, o seu ponto principal, desejamos entrar nos detalhes. Por onde começar? Quase sempre, é razoável principiar pela consideração das partes principais, que são a incógnita, os dados e a condicionante. Em quase todos os casos, é aconselhável começar o exame detalhado do problema pelas indagações: *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?*
>
> Se desejarmos examinar outros detalhes, que devemos fazer? Muitas vezes é aconselhável examinar os dados um a um, *separar as diversas partes da condicionante* e examiná-las uma a uma.
>
> Se o nosso problema é mais difícil, é possível que tenhamos que decompô-lo ainda mais e de examinar detalhes ainda mais remotos. Desse modo, pode ser necessário *voltar à definição* de um certo termo, introduzir novos elementos constantes da definição e examinar os elementos assim introduzidos.
>
> Uma vez decomposto o problema, podemos tentar recombinar os seus elementos de maneira nova. Em particular, podemos tentar essa recombinação de modo a obtermos um problema novo e mais acessível, que possamos utilizar como problema auxiliar.
>
> As possibilidades de recombinação são, naturalmente, ilimitadas. Os problemas difíceis exigem combinações ocultas, excepcionais, originais e o engenho do solucionador revela-se na originalidade da combinação. Há porém, certos tipos de combinações úteis e relativamente simples, suficientes para os problemas menos complexos, que devemos conhecer bem e ensaiar primeiro, mesmo que depois sejamos obrigados a recorrer a meios menos óbvios.
>
> Há uma classificação formal na qual as combinações mais comuns e mais úteis ficam claramente colocadas. No preparo de um novo problema, a partir do problema proposto, podemos
>
> 1. manter a incógnita e mudar o restante (os dados e a condicionante); ou
> 2. manter os dados e mudar o restante (a incógnita e a condicionante); ou
> 3. manter a incógnita e os dados. (POLYA, 2006, p. 48)

Problemas de demonstração:

> Uma vez compreendido o problema como um todo, devemos, de maneira geral, examinar as partes principais, que são a hipótese e a conclusão do teorema que temos que demonstrar ou de refutar. Precisamos compreender perfeitamente tais pares. *Qual a hipótese? Qual a conclusão?* Se houver necessidade de descer a pontos mais específicos, podemos *separar as diversas partes da hipótese* e examiná-las uma a uma. Podemos então passar a outros detalhes decompondo mais e mais o problema.
>
> Depois de decomposto o problema, podemos tentar recombinar seus elementos de maneira nova. Em particular, podemos ensaiar a recombinação dos elementos em um outro teorema. A esse respeito, são três as possibilidades:

> 1. *Manter a conclusão* e mudar a hipótese. Tentamos primeiro relembrar um tal teorema: *Considere a conclusão. E procure pensar num teorema conhecido que tenha a mesma conclusão ou outra semelhante.* Se não conseguirmos relembrar tal teorema, procuremos inventar um: *É possível imaginar uma outra hipótese da qual se possa facilmente deduzir a conclusão?* Podemos mudar a hipótese pela omissão de alguma coisa, sem nada lhe acrescentar: *Mantenha apenas uma parte da hipótese e deixe a outra de lado. A conclusão continua válida?*
>
> 2. *Manter a hipótese e mudar* a conclusão: *É possível obter algo de útil da hipótese?*
>
> 3. *Manter tanto a hipótese quanto a condicionante.* Podemos estar mais inclinados a mudar ambas se não tivermos sucesso com a mudança de uma só delas. *É possível mudar a hipótese, ou a conclusão, ou ambas, se necessário, de modo que a nova hipótese e a nova conclusão fiquem mais próximas uma da outra?* (POLYA, 2006, p. 53-54)

Os **elementos auxiliares** são elementos incluídos no problema com objetivo de torná-lo mais familiar, ou seja, de facilitar a resolução.

> Há elementos auxiliares de vários tipos. Ao resolvermos um problema geométrico, podemos acrescentar novas linhas à figura, linhas auxiliares. Ao resolvermos um problema algébrico, podemos adotar uma *incógnita auxiliar*. *Teorema auxiliar* é aquele cuja demonstração empreendemos na esperança de facilitar a resolução do nosso problema original.(POLYA, 2006, p. 79)

A **generalização** "é a passagem da consideração de um elemento para a consideração de um conjunto que contém esse elemento; ou a passagem de consideração de um conjunto para um conjunto mais abrangente, que contém o conjunto restrito" (POLYA, 2006, p. 97). Este procedimento consiste na busca de uma regra geral que se aplique ao problema, pois algumas vezes o problema escrito na sua forma geral é mais simples de resolver que o seu caso particular, em outras, ele pode dar acesso a procedimentos que possam ser aplicados para resolver o problema original.

Em outros casos, optar pela **particularização** do problema é a estratégia mais viável, quando o problema proposto é incomum, podemos analisar um caso particular, mais restrito ou mais amplo para a resolução do problema mais genérico. Polya, chama atenção para a utilidade desta estratégia para, por exemplo, refutar um enunciado, quando apresenta-se uma particularização do problema que não o satisfaça, o contraexemplo. Ou, no caso de ausência de argumentos técnicos substanciais para confirmar o enunciado em questão, mostrar que ele se aplica até a casos extremos fazendo com que a evidência intuitiva de sua veracidade seja forte.

Por fim, temos a **volta às definições**, o autor descreve a estratégia como uma busca por transformar um enunciado que contém certos termos técnicos em outro isento de tais termos, concebendo novos elementos e novas relações ao problema, para tal, precisamos conhecer bem as definições utilizadas para aplicá-las neste processo. "Ao voltar as definições, o matemático procura assenhorear-se das reais relações de elementos matemáticos que estão por detrás dos termos técnicos." (POLYA, 2006, p. 60)

2.3.2 Algumas estratégias de resolução de problemas que podem ser ensinadas as escolas

O estudo de algoritmos ainda ocupa um papel de destaque no ensino de Matemática na Educação Básica, enquanto o enfoque dado a resolução de problemas tem caráter coadjuvante, um mero complemento visando apenas a aplicação e a manipulação dos algoritmos aprendidos. E,

> mesmo quando os problemas assumem um papel central num curso, é raro discutir-se a essência mesma do processo de resolução de problemas – as estratégias. Acreditamos que o currículo de matemática deveria basear-se mais em *estratégias* do que em *conteúdo*. Os alunos poderiam aprender primeiro muitas das estratégias de resolução de problemas envolvendo o conteúdo de uma área particular – digamos, matemática –, para só mais tarde então, tomar conhecimento de como estas estratégias se generalizam quando cruzam com outras áreas do conhecimento. (MUSSER, 2010, p. 188)

Pensar em um ensino em que a resolução de problemas substitua o método tradicional possibilita que o aluno desenvolva habilidades que vão além da manipulação de algoritmos permitindo o desenvolvimento do pensar matemático de forma mais dinâmica, motivadora e autônoma.

Dante (2009) e Schoenfeld (2010) defendem que ao dar ênfase ao ensino de resolução de problemas o papel do professor será o de guia deste processo, incentivando, motivando e quando necessário oferecendo sugestões, mas sem oferecer respostas diretas, apenas direções para que o aluno possa explorar, testar, analisar e tirar suas conclusões.

> Os professores devem se envolver com o *processo de resolução de problemas*, uma das facetas mais importantes da matemática. Bem poucos adultos já viram uma aplicação de fórmula quadrática ou de um teorema da geometria, por exemplo; o que eles podem e deveriam ter, como consequência de sua educação, é a habilidade para raciocinar cuidadosamente e para usar inteligente e eficientemente os recursos à sua disposição quando confrontados com problemas em suas próprias vidas. (SCHOENFELD, 2010, p. 22)

Os autores, acima citados, também compartilham a ideia de que este trabalho pode inicialmente ser feito em pequenos grupos "a discussão entre o grupo sobre diferentes ideias que surgem para resolver o problema propicia uma integração valiosa" (DANTE, 2009, p. 58). Seja individualmente ou em grupo outro fator importante neste processo é a socialização, onde se explique e se discuta as estratégias adotadas, expondo o máximo possível de formas diferentes de resolução, não desprezando, inclusive, a análise de situações que conduziram ao erro.

> Se realmente esperamos que os alunos levem a sério as estratégias de resolução de problemas, devemos convencê-los de que vão tirar proveito do estudo delas. Talvez o caminho mais fácil para isso seja estar munido no começo de um curso (ou de uma aula, em particular) de alguns problemas que demonstrem dramaticamente o impacto das heurísticas. (SCHOENFELD, 2010, p. 23)

O autor completa seu argumento dizendo que se há a aspiração do uso de uma estratégia de resolução de problemas pelo aluno, se faz necessário que ao ensino da mesma deva ser dado o mesmo grau de seriedade utilizado para o ensino de outras técnicas matemáticas. Para tal, recomenda que se apresente uma coleção de problemas preparada para tratar e exemplificar cada estratégia. Mas, no decorrer dessa atividade,deve-se ter o cuidado para não negligenciar o fato de que quando se trata da heurística da resolução de problemas, "não existe uma única estratégia, ideal e infalível" (DANTE, 2009, p. 58).

Sobre as estratégias que podem ser trabalhadas na Matemática escolar, descrever-se-á àquelas que Musser (2010) e Dante (2009) apresentam como as mais relevantes em seus respectivos trabalhos.

Temos **a busca por padrões ou regularidades** com a finalidade de generalizar o problema, consiste basicamente em "conjecturar uma solução geral que sirva para todos os casos, com base em alguns casos particulares iniciais, ou seja, fazer uma generalização." (DANTE, 2009, p. 59)

Esta estratégia é essencialmente experimental e útil em situações em que não se tem ideia de como proceder. A característica básica deste procedimento é a resolução de versões mais simples do problema original visando encontrar alguma regra geral que permita chegar à solução do mesmo. Percebe-se que, em linhas gerais, a busca por padrões deriva do processo de generalização proposto por Polya.

Algo importante dentro desta estratégia é que algumas vezes o padrão só fica em evidência quando os dados são ordenados de forma conveniente, inclusive esta organização pode ser decisiva para mostrar que o padrão apresentado é o correto.

Para Musser (2010) o método de **tentativa e erro** é um dos meios mais diretos para a resolução de problemas por envolver apenas a aplicação das operações mais adequadas às informações dadas. Esta estratégia pode ser aplicada de duas formas: a tentativa e erro sistemática, que Dante (2009) chama de tentativa e erro organizadas onde através de "chutes" dados de forma coerente e organizada se busca os termos que satisfazem as condições do problema; e, a tentativa e erro por inferência que se difere da primeira por levar em conta um conhecimento pertinente e por usá-lo para reduzir a procura.

Trabalhar em sentido inverso, fazer o caminho inverso e desconstruir a solução são denominações dadas a esta estratégia, que difere das demais por partir do resultado ou do objetivo que se quer alcançar e não dos dados. E através de proposições ou operações que desfazem as originais chegar a solução.

A princípio a ideia de desconstrução pode parecer confusa, mas sempre que se introduz uma incógnita e monta-se uma equação para encontrá-la, estamos utilizando este método. Porém a técnica aqui apresentada perpassa o âmbito da algebrização de problemas, pois em muitos problemas o artifício elimina totalmente ou simplifica os cálculos algébricos.

O método de **resolver primeiro um problema mais simples ou reduzir a unidade**, procede do método que Polya descreve como particularização.

> Esta estratégia pode envolver a resolução de um "caso particular" de um problema, ou um recuo temporário de um problema complicado para uma versão resumida. No último caso, a estratégia do problema mais simples muitas vezes vem acompanhada do emprego de um padrão. Com efeito, pode-se precisar de muitas estratégias, uma após a outra, para chegar a uma solução satisfatória. (MUSSER, 2010, p. 194)

Em síntese, resolve-se o problema com uma unidade mais simples, para na sequência aplicar o mesmo procedimento para a solução do problema principal.

Musser (2010) apresenta ainda a estratégia da **simulação**:

> Frequentemente, a solução de um problema compreende preparar e realizar um experimento, coletar dados e tomar uma decisão baseada numa análise dos dados. Como realizar o experimento talvez não seja prático, uma simulação pode se constituir numa estratégia de resolução de problemas adequada e poderosa. (p. 198)

Conforme mencionado anteriormente não existe uma estratégia infalível, e, as apresentadas neste estudo não esgotam o tema, o imprescindível ao trabalhar com a heurística da resolução de problemas no ensino de Matemática na Educação Básica, é deixar claro a possibilidade de mudar de estratégia quando a que se está utilizando não conduz para um resultado satisfatório.

Capítulo 3

Ideias que precedem à formulação de problemas matemáticos

> "Mesmo as boas ideias, quando expressas de forma incompreensível, perdem seu valor."
>
> Daniel Cordeiro de Morais Filho

É inquestionável a importância da adoção de problemas na organização metodológica do ensino de Matemática, mas nos estudos e pesquisas sobre problemas matemáticos percebe-se que o foco encontra-se na resolução dos mesmos, tendência que é abraçada tanto nas escolas como nos cursos de licenciatura, desassociando muitas vezes o processo de produção do processo de resolução.

De acordo com Gontijo (2006), English (1997), profissional que realizou pesquisas e análises sobre a elaboração de problemas com estudantes, afirma que a formulação deve ser um importante componente do currículo de Matemática. Esse pesquisador

> considera que a formulação de problemas envolve a geração de novos problemas e questões para explorar uma dada situação, assim como envolve a reformulação de um problema durante o seu processo de resolução. Para o autor, esta estratégia fornece aos professores importantes insights acerca de como os estudantes estão compreendendo os conceitos e os processos matemáticos, bem como suas percepções a respeito das atividades desenvolvidas, suas atitudes em relação à matemática e sobre sua capacidade criativa em matemática. (GONTIJO, 2006, p. 8-9)

Trabalhar com formulação incorre em pensar em uma série de fatores, que vão além do processo heurístico de resolução já descrito, este tipo de atividade envolve aspectos como criatividade, comunicação – a articulação da escrita em sua língua materna com à linguagem matemática –, qualidade do problema e uma série de outros elementos que serão apresentados em sequência.

3.1 Características de um bom problema

Antes de tratar da produção de problemas matemáticos cabe destacar que, ao se pensar em qualquer atividade pedagógica que envolva problemas o professor deve ter cuidado com a qualidade do problema que apresenta ao seu aluno, para que este seja capaz de resolver e elaborar bons problemas ele deve estar familiarizado com os mesmos. Dante (2009) aponta características que julga necessárias para que um problema matemático seja considerado bom:

1. O problema deve ser desafiador para o aluno, apresentar um problema-padrão que não impõe qualquer tipo de estímulo, em que a solução se resuma a mera aplicação de algoritmos desfavorece o desenvolvimento de habilidades essenciais para o crescimento cognitivo do aluno. O ideal é propor problemas que instiguem sua curiosidade, sua criatividade, e, principalmente que sejam motivadores.

2. O problema deve ser real para o aluno, submeter problemas muito artificiais distancia o aluno da proposta motivadora que envolve a atividade, correndo até o risco do problema ser ridicularizado, se os dados numéricos e informações fugirem muito do que ocorre na vida real.

3. Ser do interesse do aluno, ou seja, não basta apenas ser um problema condizente com sua realidade, ele deve estar adequado a idade, ao cotidiano e ter relevância para a turma em que será aplicado.

4. O elemento desconhecido, a incógnita, do problema ser de fato algo a ser descoberto, Dante (2009) ao definir problemas-padrão, por exemplo, diz que nesta categoria de problemas muitas vezes a resposta está dentro do enunciado, só restando ao aluno transcrevê-la para linguagem matemática. Se não há o que de fato investigar no problema ele perde sua essência.

5. Não implicar na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações, um bom problema deve fazer com que o solucionador passe por alguns processos de pensamento, como o levantamento de hipóteses e a elaboração e execução de uma ou mais estratégias de solução.

6. Ter o nível adequado de dificuldade, como mencionado, o problema deve ser desafiador para o aluno, mas compatível ao nível de escolaridade, impor problemas que estão além da sua capacidade cognitiva terá o efeito inverso ao que se espera da atividade de resolução de problemas, gerando aversão, desânimo e frustração em relação à Matemática.

Percebe-se que há um elo muito estreito entre estas características, em síntese, para ser desafiador o problema deve de fato buscar um elemento desconhecido e digno de investigação, para atingir este patamar ele deve ser real e do interesse do aluno respeitando sua faixa etária e escolar. Então, ao pensar em utilizar problemas no contexto escolar, o ato de selecioná-los delineia o perfil e a qualidade da atividade que será desenvolvida, por isso deve ser feita de forma cuidadosa levando em consideração os conceitos e procedimentos matemáticos que se quer que o aluno alcance, por ser uma atividade que demanda tempo e planejamento é sugerido ao professor que ao longo de sua vida docente construa um banco de questões que esteja em constante atualização para atender as demandas das gerações e grupos distintos a que atende.

3.1.1 Elaboração de problemas matemáticos

Pensados e conhecidos estes fatores, o que se deve observar ao elaborar um problema? Além do elemento criatividade, muito forte dentro desta tarefa, escrever um problema, assim como qualquer outra atividade de escrita, requer daquele que se propõe a fazê-la o cuidado de ser bem entendido, em se tratando de escrita matemática esta atenção deve ser ainda mais densa, afim de evitar ambiguidades.

> Ao escrever, você organiza suas ideias em um texto e espera serem entendidas por quem o leia. Há nessa atividade, no mínimo, duas pessoas: você e um leitor. Por isso nunca esqueça de seus leitores, do que na medida do possível, você pode fazer para tornar as coisas mais simples e inteligíveis para eles.
>
> Muitos acusam a Matemática de ser complicada e difícil. Cuidado para não torná-la mais inacessível para quem tem essa opinião. Seus leitores podem ter mais ou menos conhecimento do que você sobre aquilo que escreveu; geralmente em qualquer desses casos, você não estará por perto para esclarecer-lhes alguma passagem mal escrita ou mal explicada. (MORAIS, 2010, p. 13)

Dante (2009) discute brevemente como contornar fatores que dificultam um problema, no sentido do mesmo estar inadequado para o fim a que se propõe. Estas observações feitas pelo autor podem e devem ser consideradas também no ato da elaboração de um problema, pois ao criá-lo utilizando tais perspectivas permitirá que o elaborador lance um olhar crítico em relação a sua escrita permitindo-o, quando necessário, reorganizar de forma clara seus argumentos e o que deseja comunicar.

1. O primeiro cuidado que se deve ter é com a linguagem utilizada na redação dos problemas, o vocabulário deve ser apropriado para a faixa etária a que se destina e estar próximo de sua vivência, neste sentido cabe também o bom senso, deve-se evitar palavras vulgares e apresentar situações impróprias ou incorretas. É essencial trazer as informações de maneira clara, simples e objetiva para permitir um total entendimento do que está sendo pedido.

2. O tamanho e a estrutura das frases é outro fator que deve ser observado:

> Uma frase longa nada mais é do que duas ou mais frases curtas, não devidamente divididas! Lembremos que a respiração e os olhos, em coordenação com o cérebro, sempre pedem uma pausa após ler um certo número de palavras a fim de compreender a mensagem lida. (MORAIS, 2010, p. 22)

Problemas com frase muito longas podem induzir interpretações equivocadas e consequentemente conduzirá o resolvedor ao erro. Também condiz evitar redundâncias e excesso de detalhes.

3. Os termos específicos do vocabulário matemático devem ser utilizados, mas apenas aqueles que o público a que se destina consiga entender. É comum utilizar o estilo informal em algumas escritas matemáticas, principalmente quando se introduz algo novo ao aluno, para facilitar seu entendimento, porém o professor deve inserir processualmente a linguagem técnica apropriada.

4. O tamanho e a complexidade dos dados, problemas com números ou dados "excêntricos" fazem com que o foco do aluno se volte para eles e não para o que realmente importa, os processos envolvidos para resolução. Situações como essa podem gerar prejuízos ao processo de aprendizagem, pois se o algoritmo for complexo e os valores numéricos excessivos o problema tende a ser desmotivador, cansativo e facilmente conduzirá o aluno ao fracasso na execução da atividade.

5. O fator motivacional para resolver um problema muito dependerá da forma como esse é apresentado. Propor um problema cujo enunciado não seja criativo, e, retomando aos fatores que determinam um bom problema, que não pareça real ou desperte o interesse do aluno, não o envolverá.

> Assim como na "arte", é preciso formular um problema com a criatividade de um artista para que o resolvedor potencial:
>
> 1. seja motivado a resolver o problema;
>
> 2. entenda e retenha o conceito envolvido na solução do problema;
>
> 3. aprenda alguma coisa sobre a arte de resolver problemas. (BUTTS, 2010, p. 48)

6. A forma em que as informações, os dados e as condições são organizadas no problema, indicam o seu grau de dificuldade, se as informações aparecem de forma desorganizada no decorrer do texto, será mais difícil que sejam compreendidas. Outro fator a ser evitado é a inserção de dados inúteis à resolução do problema, eles podem confundir o processo heurístico.

7. O número de condições a serem satisfeitas e a complexidade das operações e estratégias a serem desenvolvidas, quanto mais condições e estratégias a executar maior é a exigência em torno do aluno, isso exige atenção e um plano mais elaborado. O professor deve estar atento para o nível de maturidade do seu aluno, problemas extremamente elaborados para um público que não está habituado a tal complexidade pode causar consequências irreversíveis que vão desde o sentimento de incapacidade até a aversão à Matemática.

Consideradas todas estas minúcias, cabe pensar na tarefa de criação de problemas, Smole e Diniz (2001) chamam a atenção para o fato de que inicialmente a formulação de problemas matemáticos é um “objeto estranho” para o aluno, ele certamente sentirá dificuldade em executar tal tarefa por estar condicionado apenas a resolver problemas. Um alerta pertinente dado pelas autoras é que antes de se depararem com uma atividade que envolva criação de problemas os alunos devem estar familiarizados com os seus diversos tipos de problema.

> Não se trata de resolver um grande número de problemas e, depois de torná-los bons resolvedores, iniciar as propostas de formulação, mas sim propiciar que tenham uma vivência anterior que lhes permita testar suas hipóteses, conhecer e desenvolver modelos que servirão como ponto de partida para formularem seus próprios problemas. (SMOLE; DINIZ, 2001, p. 153)

O desenvolvimento de atividades com esta finalidade devem acontecer de forma gradativa para que aos poucos e com as devidas intervenções os alunos “se apropriem das características de um problema matemático, desde que haja espaço para questionar os problemas produzidos e refletir sobre eles.” (SMOLE; DINIZ, 2001, p. 160)

Dentro das propostas para o trabalho pedagógico com a formulação de problemas, dentre os estudos feitos, percebeu-se a existência de dois eixos:

1. **A reformulação do problema dado**, para alunos que nunca trabalharam com este tipo de atividade, recomenda-se esta estratégia como pontapé inicial, pois o aluno será convidado a escrever um problema baseado em outro que ele já conhece. Dentro desta modalidade o professor pode explorar situações diversas como: propor a reescrita do enunciado, mas mantendo o objetivo do problema; fazer uma inversão do problema, ou seja, escrever um problema com operações que desfazem as originais; e, criar um problema semelhante.

   Para esta última situação, vale a seguinte observação:

> Cabe aqui deixar claro para o professor que ele deve organizar seu trabalho para que o aluno mostre em sua produção em que o problema formulado é parecido com o problema dado, pois observamos a aparição de diferentes interpretações de ser parecido: é parecido na história (personagens, cenários), na operação que se utiliza para resolvê-lo (estrutura matemática), na pergunta que é dada, nas ações desenvolvidas, etc.
>
> Muitas vezes, o professor propõe tal atividade querendo que o aluno faça um problema parecido no sentido que ele, professor, acha que deve ser parecido; contudo, nem sempre os alunos têm essa concepção, o que cria um impasse para ambos. Uma conversa, em geral, esclarece essas interpretações e dá margens para ótimas discussões em sala, podendo acontecer antes ou depois da proposta lançada, dependendo do objetivo que o professor estabeleceu para a atividade. (SMOLE; DINIZ, 2010, p. 158)

2. **Oferecendo um "objeto" ou "ferramenta"**, aqui a escrita é mais predisposta à criatividade, pois a depender do instrumento que é oferecido o ambiente de escrita é mais livre. Nesta categoria, o aluno é convidado a elaborar problemas a partir de: uma figura; uma frase ou palavra; uma pergunta; uma resposta; uma operação ou estratégia; um tema; um texto; etc.

Uma questão essencial é que para executar bem atividades como esta, em qualquer nível de ensino, o professor, deve estar preparado para tal. No entanto, o que se percebe, quanto ao uso de problemas em sala de aula, é uma falta de autonomia na maioria dos profissionais que atuam na área, geralmente ficam "presos" aos livros didáticos adotados pela escola por não se sentirem aptos para produzir seu próprio material, inclusive seus próprios problemas matemáticos.

Mandarino (2004) ao trabalhar com um grupo de professores a formulação de problemas aponta que a maioria dos professores participantes da pesquisa tinham o hábito de buscar problemas prontos e nunca tinham criado um problema, evidencia ainda a grande dificuldade dos professores em criar problemas, em especial os contextualizados.

Ao tratar da contextualização de problemas é importante que o professor se desvencilhe da concepção de que contexto se trata apenas do que faz parte do dia-a-dia do aluno:

> Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata. (BRASIL, 1998, p. 23)

É nesta perspectiva que ampliar-se-á a discussão desta temática com o desenvolvimento de uma atividade prática de produção de problemas com futuros professores de Matemática. A proposta foi baseada nas recomendações feitas pelos diversos pesquisadores estudados. Buscando antes de mais nada instrumentalizá-los com os conhecimentos à cerca do assunto para criar um ambiente que contribua para o desenvolvimento da habilidade da escrita em matemática, da análise crítica desta escrita, e, o estímulo a criatividade. A descrição deste processo, bem como, os frutos obtidos do mesmo serão o assunto do próximo capítulo.

Capítulo 4

Oficina de Formulação de Problemas: a proposta e o relato

> "Estudar matemática é resolver problemas. Consequentemente, cabe aos professores de matemática em todos os níveis, ensinar a arte de resolver problemas. O primeiro passo nesse processo é formular o problema adequadamente."
>
> Thomas Butts

4.1 Oficina de Formulação de Problemas: a proposta

Tendo como principal objetivo apresentar estratégias para a formulação de problemas matemáticos para o Ensino Médio, buscou-se elaborar uma oficina para os alunos regularmente matriculados na disciplina Estágio Supervisionado em Matemática IV, do curso de Licenciatura em Matemática, no *campus* Valença do Instituto Federal da Bahia.

Após definido o público-alvo, a finalidade da atividade e o meio, pensou-se no melhor caminho a seguir. Pautada nas etapas de resolução de problemas propostas por Polya e embasada por publicações de pesquisadores que defendem a atividade de formulação de problemas como uma ferramenta importante no processo de aprendizagem da Matemática, a oficina foi delineada em cinco momentos:

1. Apresentar e exemplificar as classificações dadas aos problemas matemáticos sob a ótica de Polya e Dante. Na sequência trabalhar com a metodologia de resolução de problemas propostas por Polya, com alguns dos problemas utilizados como exemplos na exposição inicial.

2. Expor as estratégias de resolução de problemas propostas por Dante e Musser, escolhidas por possuir uma configuração mais apropriada para o pretendido no trabalho, que é a Matemática escolar. Propor problemas para que os alunos tentem identificar qual a estratégia que ajuda a resolvê-lo e aplicá-la. Como atividade para aula seguinte cada aluno deverá tentar reescrever algum dos problemas trabalhados ou criar um problema semelhante.

3. Apresentação dos problemas elaborados pelos alunos, analisando e discutindo elementos da sua estrutura, a exemplo da linguagem, apresentação, vocabulário matemático, etc., reformulando-os se necessário e resolvendo-os quando possível. Como atividade para o próximo encontro, será proposta a criação de um problema com um dos elementos pré-selecionados, postos em uma ficha que será entregue aos alunos.

4. Apresentação individual dos problemas produzidos para que o resto da turma discuta a estrutura do enunciado, os resultados e as estratégias utilizadas. Dando seguimento, os alunos receberão três textos para que eles escrevam um problema utilizando um deles, quer com recortes do próprio texto ou usando a ideia central do mesmo para contextualizar o problema.

5. Aplicar os problemas elaborados na turma para que os avaliem.

A descrição completa das atividades desenvolvidas em cada uma das etapas, bem como os exemplos e materiais utilizados encontram-se no Apêndice. E, cabe salientar que dentre as possibilidades de formulação de problemas, as que foram escolhidas para esta oficina levaram em consideração o fato de que seu público-alvo era um grupo de formandos no curso de Licenciatura em Matemática, pensar esta atividade para uma turma do Ensino Básico exigiria algumas reformulações baseadas no perfil da turma.

4.2 Oficina de Formulação de Problemas: o relato

4.2.1 Primeiro Momento

A primeira atividade desenvolvida, teve caráter expositivo, inicialmente houve uma conversa com a turma, explicando o objetivo das atividades que aconteceriam nas próximas semanas e sensibilizando-a para a importância de compreender o processo de formulação de problemas para a sua formação docente. Na sequência, foram apresentadas as caracterizações dos problemas, com seus devidos exemplos.

Completando a atividade foram expostas as quatro fases de resolução de um problema propostas por Polya e solicitado que a turma resolvesse os problemas exemplos 2 e 9 (ver Apêndice p. 59-60 e p. 61-62) utilizando-as. O primeiro problema foi resolvido individualmente, ao observar a turma durante a realização da atividade, percebeu-se que ouve certa dificuldade em pensar em cada etapa separadamente, o que era até certo ponto esperado, por se tratar de uma turma de futuros licenciados em Matemática, com certa vivência e conhecimento da área, é provável que o olhar sobre os problemas se tornem mais diretos, e, os levem ao uso quase inconsciente do processo. Porém, o objetivo era fazer com que os mesmos dessem esta pausa e refletissem sobre estas etapas, pois as mesmas serão imprescindíveis no momento de se estruturar um problema.

Por tal motivo, o segundo problema foi resolvido em conjunto, buscando passar por todas as etapas, discutindo cada um dos tópicos propostos no esquema, a discussão fluiu proveitosamente.

4.2.2 Segundo Momento

Também começou com atividade expositiva, para explicar algumas estratégias de resolução de problemas. Na sequência, os alunos foram convidados a resolver alguns problemas (ver Apêndice p. 64-66), buscando identificar a estratégia utilizada.

O problema (a), causou confusão na escolha da estratégia, alguns alunos não conseguiram visualizar nenhuma e outros foram além, perceberam que na verdade o problema apresentava duas, inicialmente a ideia de resolver primeiro um problema mais simples e em sequência o perceber o padrão.

Com problema (b), apenas um, tentou resolver o problema encarando a superfície inteira, mas acabou percebendo que seria complicado, os demais identificaram que o ideal era reduzir a unidade, outro fator percebido foi a dificuldade que praticamente metade da turma sentiu para equacionar o problema.

As estratégias dos problemas (c), (d) e (e) foram identificadas facilmente e os alunos não apresentaram nenhuma dificuldade com a resolução dos mesmos.

4.2.3 Terceiro Momento

No terceiro encontro, antes de serem convidados a apresentar seus problemas, foram apontados os elementos que a turma deveria analisar no enunciado proposto, o intuito seria desenvolver um olhar crítico sobre o mesmo, para diferenciar um bom problema de um ruim. Também foi orientado que todos encarassem as possíveis críticas de forma positiva para o amadurecimento e enriquecimento da sua escrita matemática, já que esse era o objetivo da oficina. Cabe também destacar que as análises referentes a cada problema, aqui apresentadas são sínteses dos debates ocorridos em sala, outro fator que deve ser evidenciado é que o foco central da atividade foi o estudo da estrutura do enunciado, a resolução embora muitas vezes executada em sala ficou em segundo plano.

Outra observação a ser feita é que para a exposição dos problemas, numerou-se aleatoriamente os alunos e para cada etapa de elaboração, o problema apresentado identificará seu autor pelo seu respectivo número.

Aluno 1:

> Verbena ao planejar seu aniversário de 50 anos, contratou os serviços de uma empresa que fornece doces e salgados. A aniversariante solicitou da empresa para a festa do seu aniversário 9 tipos de doces e 8 tipos de salgados e explicou que gostaria que cada pessoa recebesse um recipiente com 4 tipos de doces escolhidos aleatoriamente entre os nove fabricados e 3 tipos de salgados também escolhidos aleatoriamente entre os 8 tipos existentes. Considerando os tipos de doces e salgados produzidos pela empresa para a festa de aniversário de Verbena, quantas são as diferentes possibilidades de preenchimento dos recipientes?

Análise: O aluno se inspirou no algoritmo do exemplo 9, e, turma gostou do contexto aplicado, bem como a complexidade do mesmo. No entanto, diante do que foi exposto no início da atividade perceberam que o enunciado era redundante e que poderia ser reestruturado, de forma que a linguagem ficasse mais direta e clara. Uma proposta de reescrita, produzida coletivamente:

> Verbena ao planejar seu aniversário de 50 anos, contratou os serviços de uma empresa que fornece doces e salgados. A aniversariante solicitou da empresa 9 tipos de doces e 8 tipos de salgados. Pediu também que cada convidado recebesse um recipiente com 4 tipos de doces e 3 tipos de salgados, ambos escolhidos aleatoriamente. Considerando os tipos de doces e salgados produzidos para essa festa, quantas são as diferentes possibilidades de preenchimento dos recipientes?

Aluno 2:

João possui um número de laranjas, que se dividir em grupos de 9 em 9 sobram 6, de 5 em 5 sobram 2. Ontem ele tinha a metade da quantidade de hoje, e se tivesse separado-as ontem de 2 em 2 ou de 3 em 3 sobraria apenas uma laranja. Quantas frutas ele possui hoje sabendo que ontem havia menos de 100 unidades?

Análise: O aluno, ao formular este problema pensou no uso de duas estratégias, percorrer o caminho inverso e tentativa e erro. Para a turma, o enunciado também não foi bem apresentado, acharam que expressões como "dividir em grupos de 9 em 9," já que se tratava de frutas, distancia o enunciado do real, sugeriram que dividir em cestas, montes ou caixotes seria mais apropriado. Sobre as informações dadas no problema, percebeu-se um erro na hora da resolução, nos grupos de nove, o resto deveria ser 5, pois com resto 6 proposto, não se chegou a um resultado que satisfizesse todas as condições. Outro detalhe percebido foi que para o resultado pretendido como solução o agrupamento em 3 não teria resto 1, então esta informação foi retirada do problema. Essa falha no enunciado, oportunizou a discussão sobre um fator relevante no processo de elaboração de problemas, pode-se retornar as etapas de resolução propostas por Polya e apontar que ao ter uma ideia do tipo de problema que se quer construir, tem-se que pensar em questões que variam desde o tipo de estratégia que quer aplicar, até a resposta que se deseja obter. Pensado estes fatores e construída a solução, aí volta-se para o enunciado, pensando em quais dados e condições serão ofertados, de forma clara e concisa, para que o resolvedor possa chegar ao resultado almejado.

Uma proposta de reformulação:

João possui um número de laranjas, e, ao arrumá-las em montes com 9 laranjas sobraram 5, ao redistribuí-las em montes com 5 laranjas sobraram 2. Se tivesse separado em montes de 2 sobraria apenas uma laranja. O número de laranjas que ele tinha ontem é metade da quantidade de hoje. Quantas frutas ele possui hoje, sabendo que ontem haviam menos de 100 unidades?

Aluno 3:

Dos símbolos abaixo, utilize 5 deles para representar a imagem[1]:

[1]Figuras elaboradas pelo autor, reproduzindo a apresentada pelo aluno.

Análise: O aluno procurou construir um problema de quebra-cabeça, baseado no problema (d), porém a turma apontou falhas no enunciado por haver duas peças iguais, e, que o problema não explicita que não pode haver repetições das peças, como também não há clareza sobre a possibilidade de rotação das mesmas, o que inviabilizaria o uso de algumas figuras. Mas consideraram o problema criativo, que cumpre a finalidade recreativa a que se propôs.

Aluno 4:

> Num zoológico a nova diretora decidiu criar novas atrações. Uma delas, um aquário. Para isso ela pretendia reutilizar um palco circular (de diâmetro $\sqrt{13}m$) como base e uma placa de vidro de $10m$ por $2m$ para fazer suas paredes. O aquário seria retangular. E, para ser armado o aquário precisa ter os cantos coincidindo com as bordas desde palco. Então, de que formas a placa de vidro pode ser cortada se esse aquário terá $2m$ de altura?

Análise: O aluno buscou a estratégia de tentativa e erro como similaridade com os problemas anteriormente trabalhados. Apesar do seu problema possuir bons elementos estruturais: frases curtas e claras, dados organizados (bem próximos aos consideradas ideais para um problema matemático), e, da sua preocupação no processo de formulação do mesmo, ao pensar no plano a ser executado, seu problemas apresenta falhas graves:

- a primeira delas é o fato do valor do diâmetro aparecer entre parênteses, é um dado relevante para o problema, apresentá-lo entre parênteses, dá ideia de que é uma informação dispensável.
- não há indicação de como deverá ser o uso desta placa, com sobras ou sem sobras, associadas a pergunta final "de que formas a placa de vidro pode ser cortada." Dando margem à diversas interpretações.
- a turma ainda levou em conta a possibilidade do problema explorar o volume máximo, mas os alunos perceberam que o problema atingiria um grau de complexidade inapropriado para o Ensino Médio;
- observou-se também o tempo verbal: "pretendia", "seria", aparenta que se desistiu da construção do aquário. E, qual o sentido de calcular algo que não se concretizará?

- por fim, para chegar as dimensões pensadas pelo autor do problema, $2m$ e $3m$, percebeu-se que as diagonais do aquário deveriam coincidir com o diâmetro do palco e fazendo o uso de toda a placa, e que estas informações deveriam constar no enunciado.

Aluno 5:

> Em um município com 78 000 habitantes, a cada 5 moradores, 3 são do sexo feminino. Uma fábrica se instala na cidade e contrata 546 homens acima de 18 anos. Sabendo que 30% da população do município são menores de idade, qual a porcentagem de homens contratados?
> a) 0,7%
> b) 1,7%
> c) 2%
> d) 2,5%
> e) 2,7%

Análise: A escrita do problema começou bem, porém no final houve um descuido e as informações não ficaram precisas. Na análise da turma, apesar do deslize na conclusão, o problema é interessante por não demandar uma aplicação direta dos dados, o que exige do resolvedor atenção na interpretação.

Eis, a reestruturação sugerida:

> Em um município com 78 000 habitantes, a cada 5 moradores, 3 são do sexo feminino. Uma fábrica se instala na cidade e contrata 546 homens acima de 18 anos. Sabendo que 30% da população do município é composta por menores de idade, qual a porcentagem de homens contratados, em relação aos homens maiores de idade?
> a) 0,7%
> b) 1,7%
> c) 2%
> d) 2,5%
> e) 2,7%

Aluno 6:

> O custo total de uma empresa no pagamento do aluguel de sua frota de veículos é de R$ 5400,00, sabendo que esta empresa tem um certo número

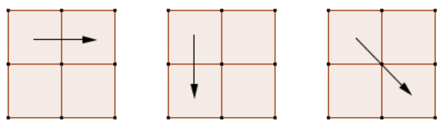
de sócios, e, 10 deles não pagaram sua parte dessa despesa, que deveria ser dividida igualmente entre o total de sócios. Dessa forma os sócios restantes pagaram R$ 45,00 a mais para cobrir o gasto. Qual o total de sócios desta empresa?

Análise: O que chama a atenção no problema é a linguagem utilizada em sua redação, a construção do texto faz com que a leitura não flua com facilidade, o que não o torna motivador. Mas a ideia do problema é interessante e permite o uso de mais de uma estratégia de resolução, a turma percebeu que o mesmo pode ser aplicado para o estudo de mais de um conteúdo: sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas, através do uso da estratégia de tentativa e erro organizados, e, equação do segundo grau. Uma reescrita sugerida foi:

O custo mensal de uma empresa no pagamento do aluguel de sua frota de veículos é de R$ 5 400,00, que é dividido igualmente entre todos os sócios. Este mês, 10 deles não pagaram sua parte na despesa, fazendo com que os sócios restantes pagassem R$ 45,00 a mais para cobrir o gasto. Quantos sócios essa empresa possui?

Aluno 7:

Em um tabuleiro quadrado 4x4 quer-se ir do quadrado esquerdo superior para o quadrado direito inferior. De quantas maneiras isso é possível? Sabendo que os movimentos permitidos são[2]:



Análise: Está bem estruturado e embora seja interessante, é um problema clássico, dentro da zona de conforto e provavelmente já visto em outra ocasião.

Alguns alunos encontraram dificuldade com a atividade, o que é perceptível pois dos onze alunos matriculados na turma, quatro deles não apresentaram o problema solicitado para esta etapa. E, entre os que fizeram, a maioria dos problemas apresentaram problemas estruturais. Fato que era esperado diante da falta de prática com este tipo de atividade, para todos foi a primeira experiência do tipo, mesmo para aqueles que já lecionam. Estes,

[2]Figura elaborada pelo autor, reproduzindo a apresentada pelo aluno.

em suas atividades, no máximo alteravam os dados de algum problema retirado dos livros didáticos, quando necessário.

Nesta primeira etapa de formulação de problema, o fato dos problemas semelhantes não estarem presos aos enunciados anteriores foi um aspecto positivo, no geral, a turma buscou ater-se à semelhança em relação as estratégias e operações matemáticas. Apesar de percebermos, diante das análises feitas com a turma, falhas estruturais nos problemas, principalmente no que tange à escrita, os produtos obtidos com esta experiência, foram problemas criativos cujo enunciados fugiram a "zona de conforto."

4.2.4 Quarto Momento

Para o quarto momento da oficina, foi distribuído uma ficha (ver Apêndice p. 68) com quatro itens:

(a) um gráfico

(b) um sólido geométrico

(c) uma resposta

(d) uma operação

E, sugerido que se escolhesse um dos itens para elaborar um problema. Para esta atividade, os alunos foram convidados a pensar nas etapas de resolução propostas por Polya, levando em consideração, as estratégias e algoritmos pretendidos para o problema, o número de condições a serem satisfeitas, a complexidade do problema.

Novamente foram 7 problemas apresentados nesta etapa, o fator positivo é que, três dos quatro alunos que não formularam problemas na atividade anterior fizeram desta vez. Dos quatro que não trouxeram, dois alegaram não ter tido tempo, um ter perdido a ficha e o outro que por ter faltado na aula anterior não sabia da existência da mesma. As discussões seguiram com a exposição dos problemas elaborados.

Aluno 1:

Para este problema o item escolhido foi o item (c), a resposta. O aluno comentou como ocorreu o processo de construção do seu enunciado, primeiramente estruturou o problema da seguinte maneira:

> Karina estava estudando para uma prova de matemática quando se deparou com o seguinte problema: Se organizarmos as idades das pessoas de uma família em ordem crescente, teremos uma progressão aritmética. Se somarmos

todas as idades, teremos como resultado 320 anos. Sabendo que essa família é formada por 10 pessoas. Qual a idade do membro mais novo desta família?

Na sequência o mesmo observou que faltava um dado para resolução do mesmo e o reescreveu:

> Karina estava estudando para uma prova de matemática quando se deparou com o seguinte problema: Se organizarmos as idades das pessoas de uma família em ordem crescente, teremos uma progressão aritmética de razão 6. Se somarmos todas as idades, teremos como resultado 320 anos. Sabendo que essa família é formada por 10 pessoas. Qual a idade do membro mais novo desta família?

Porém ele percebeu que com os dados fornecidos não se obteria a resposta pretendida, e só então utilizou o processo sugerido na aula, de pensar na estratégia e nos algoritmos envolvidos para depois elaborar a escrita, chegando ao seguinte enunciado:

> Karina estava estudando para uma prova de matemática quando se deparou com o seguinte problema: Se organizarmos as idades das pessoas de uma família em ordem crescente, teremos uma progressão aritmética de razão 6. Se somarmos todas as idades, teremos como resultado 310 anos. Sabendo que essa família é formada por 10 pessoas. Qual a idade do membro mais novo desta família?

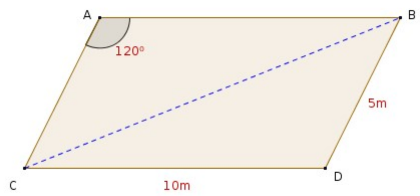
Ainda não satisfeito, resolveu dar mais complexidade ao problema, retirando o mesmo dado que ele não havia colocado na primeira versão, a razão da P.A., mas aí percebeu que o problema ficaria complicado e implicaria em um grau de intuição matemática que talvez o público-alvo não possuísse. Optando assim, pela terceira versão do problema.

Análise: A turma, achou desnecessária a primeira fala do problema "Karina estava estudando para uma prova de matemática quando se deparou com o seguinte problema" já que esta tentativa de contexto, se encerra aí, para eles ou se acrescentaria uma finalização utilizando essa ideia inicial ou se excluiria a mesma, já que o problema não depende disto. Modificada esta passagem, o problema na concepção dos alunos está dentro dos padrões que se espera para um problema matemático.

Aluno 2:

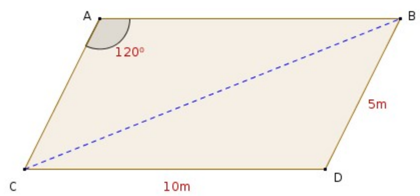
Utilizou o item (d) para elaborar seu problema:

> Um terreno tem formato de um paralelogramo como na figura[3] abaixo, o proprietário pretende passar uma cerca com cinco fileiras de arame farpado, passando pela diagonal maior e o perímetro do terreno. Quantos metros de arame farpado ele deve comprar?



Análise: O problema foi considerado bom, porém a escrita pode ser melhorada. Durante a discussão também foi sugerida uma variação do problema, com um grau de complexidade a mais, a ideia dada foi acrescentar a informação sobre a metragem de um rolo de arame e a pergunta final ser qual o total de rolos de arame necessários para fazer a cerca. Sobre o problema original uma sugestão de escrita foi:

> O proprietário de um terreno com formato de paralelogramo pretende passar uma cerca com cinco fileiras de arame. A cerca passará por todo o perímetro do terreno e também o dividirá ao meio, passando pela diagonal maior, conforme a planta abaixo. Quantos metros de arame serão gastos nesta cerca?



Aluno 3:

[3]Figura elaborada pelo autor, reproduzindo a apresentada pelo aluno.

Também utilizou o item (c) como base para seu problema:

> Joana tem três filhas: Maria, Alice e Amanda. Joana informou que Maria tem dois anos, Amanda 6 anos e Alice a média das idades de Maria e Amanda. Quantos anos tem Alice?

Análise: Embora o problema tenha boa estrutura nas frases e na redação, percebeu-se a ausência do tipo de média pretendido, segundo a turma poderia ser calculada a média geométrica, por exemplo. O problema também foi avaliado como pouco desafiador, por constituir numa aplicação direta e evidente de uma operação matemática.

Aluno 5:

O item (c) como referência para seu enunciado.

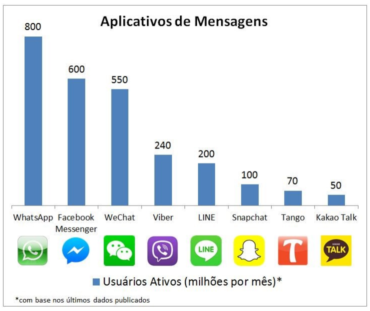
> Regiane tem o dobro da idade do seu irmão Igor. Sabendo que a dois anos atrás a idade de Regiane era o triplo da idade de seu irmão, determine a idade de Igor.

Análise: O problema possui uma bom formato, linguagem, tamanho e estrutura das frases adequado ao que se propõe, as informações também aparecem de forma coerente e concisas. Porém, percebe-se a falta de criatividade, é um formato de problema usual nos livros didáticos de Matemática.

Aluno 8:

Fez uso do item (a) o gráfico para a seguinte formulação:

> Uma pesquisa em relação aos aplicativos de mensagens está expressa no gráfico abaixo. O Google decidiu premiar um dos usuários destes aplicativos. Com base nestas informações, qual a possibilidade do ganhador ser usuário do WhatsApp?

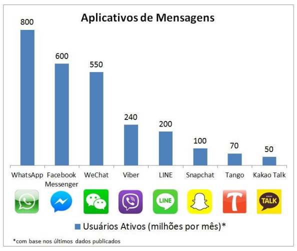


Análise: Com boa estrutura e grau de complexidade considerado intermediário, o que se destaca aqui é que o aluno em questão não se sentiu confortável com a atividade de elaboração de problemas no primeiro momento, e, nesta segunda experiência não só apresentou um, como expôs nele elementos pertinentes a um bom problema matemático, como a criatividade e a apresentação do problema. Quanto ao rigor matemático, peca apenas para o fato de que nem o problema e nem o gráfico, especificam que cada usuário utiliza apenas um aplicativo, a falta desta informação induz para que sim, mas se analisarmos no campo "ser real" sabe-se que é improvável.

Aluno 9:

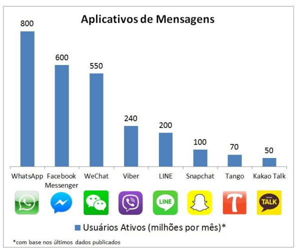
Utilizou o item (a) e apresentou o seguinte problema:

> Segundo o estudo publicado na tabela: "Aplicativos de mensagens," os usuários do KaKao Talk são equivalentes à qual percentagem do total de usuários do WhatsApp?



Análise: O problema também apresenta problemas estruturais na escrita e não foi considerado criativo e desafiador, pois para sua resolução só será necessária a aplicação direta de uma operação matemática simples. Uma releitura para o problema, sem alterar sua finalidade:

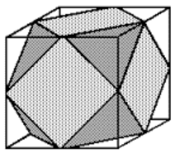
> Segundo o estudo publicado na tabela: "Aplicativos de mensagens," o número de usuários do KaKao Talk representa qual percentagem do total de usuários do WhatsApp?



Aluno 10:

Elaborou seu problema baseado no item (b), o sólido geométrico:

> Sabendo que uma torneira com vazão igual a $5l/s$ está enchendo o recipiente dentro do cubo de aresta igual a $1m$. Determine em quanto tempo o recipiente estará completamente cheio.



Análise: Com um bom grau de complexidade e várias operações envolvidas em sua resolução, o problema apresentou a maioria dos elementos para ser considerado bom na concepção dos alunos. Ainda segundo eles, pecou, na questão da vazão da torneira $5l/s$, é uma vazão que foge dos padrões usuais. Na interlocução da discussão, chamou-se a atenção para o fato da falta de informação sobre o local da secção do sólido e que os alunos assim como o formulador do problema foram levados a crer que era o ponto médio, mas alertou-se para ao cuidado com o rigor matemático, tal fato tem que ser apresentado, não pode ficar implícito, para não gerar interpretações ambíguas.

Neste segundo momento de produção, a criatividade novamente merece destaque, mesmo com elementos predefinidos os alunos que escolheram o mesmo item não apresentaram problemas que utilizassem a mesma estratégia e o mesmo contexto. Outro fator positivo, foi a percepção da eficácia de se apropriar das etapas de resolução de problemas, como uma ferramenta de apoio, para o processo de elaboração. Percebeu-se ainda algumas falhas estruturais mas em menor número se comparadas com as que apareceram na atividade anterior.

4.2.5 Quinto Momento

Para quinta e última etapa, pensou-se na criação de questões objetivas, baseado em textos jornalísticos ou literários, para tal, houve uma conversa com a turma sobre como os textos podem auxiliar de diversas formas na confecção e contextualização de um problema, método utilizado com frequência no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). A turma recebeu três textos (ver Apêndice p. 70-73), ambos com potencial matemático, para que manipulassem da forma mais conveniente, para a construção de um problema.

Nesta etapa foi solicitado também que estes problemas fossem entregues previamente para digitação. O objetivo era que a estrutura desses problemas fossem analisadas individualmente, com objetivo de verificar se a turma conseguiria identificar possíveis falhas estruturais nos problemas dos colegas. As análises apresentadas logo após cada problema é uma compilação dessas reflexões individuais.

Aluno 1:

A resolução da tela é uma das principais características que o consumidor deve levar em conta na hora de comprar uma TV - ou corre o risco de se frustrar ao assistir a filmes ou jogos de futebol.

Nova TV da Samsung com tela de 110 polegadas e resolução Ultra HD (Divulgação/VEJA)

A resolução HD permite que a TV exiba 1.280 colunas de pixels e 720 linhas, resultando em uma tela com quase 1 milhão de pontos para formar as imagens. No caso do Full HD, a imagem é formada por 1.920 colunas de pixels e 1.080 linhas, o que aumenta o número de pontos para pouco mais de 2 milhões. O Ultra HD ou também conhecida com 4K, apresenta 3.840 colunas de pixels por 2.160 linhas, o equivalente a quatro vezes a resolução Full HD. Caso as melhorias nas telas de tvs, se mantenham com a mesma proporção como as que aconteceram entre a HD até a Ultra HD. Quantos fatores primos teremos se fizermos a decomposição dos números de pixels de uma TV com resolução de 16K?

a) 4

b) 6

c) 5

d) 3

e) 9

Análise: Na análise individual, percebeu-se várias situações:

1. A maior parte se limitou apenas a tentar responder a questão.

2. Um dos alunos que não conseguiu responder alegou não ter conseguido interpretar a questão, mas não soube explicar o que faltou a linguagem do problema para que se tornasse clara para ele. Acrescentou ainda não ter conseguido associar os fatores primos à situação apresentada.

3. Outro aluno, explanou que a contextualização "se perde" diante do que foi pedido no problema, pecando no item "ser do interesse do aluno".

4. Dois alunos, acharam o problema interessante, com linguagem adequada, apresentando queixa apenas no tamanho e complexidade dos números, item abordado em discussões anteriores.

Aluno 2:

> Um estudo da fundação Oswaldo cruz, revelado pelo programa fantástico, da TV Globo, aponta que o Aedes aegypti tem certa dificuldade em transmitir o Zica. De cada 100 mosquitos infectados com o vírus, em média 20 conseguirão incubá-lo e transmiti-lo para outra pessoa – porque em apenas 20% dos casos o vírus consegue se reproduzir em quantidade suficiente para infectar a saliva do mosquito. Isso é metade da taxa de retransmissão do vírus da dengue (40 em cada 100 mosquitos infectados conseguem repassá-lo), e menos de um terço da taxa de transmissão do chikungunya (70 em cada 100 mosquitos infectados podem repassá-lo).
>
> São Paulo - Um estudo publicado no "Journal of Infection and Public Health" revelou que se acredita ser o primeiro caso de tripla infecção simultânea por **zika vírus, dengue e chikungunya** em um ser humano. Um grupo de infectologistas colombianos lideraram a pesquisa e relataram os resultados na publicação médica.
>
> Supondo que uma pessoa esteja numa localidade que possua em média 100 mosquitos, e ela tenha sido picada por três desses elementos, qual a probabilidade de ter sido picada por um mosquito transmissor da Dengue, do Zica e da Chikungunya?

Análise: Apesar da turma inteira apontar o problema como real, de "cunho investigativo" e com uma grande significância atual para a sociedade brasileira, apenas um aluno apresentou a solução do problema, o demais argumentaram que o enunciado do problema tem falhas na estruturação deixando-o confuso. Nas observações feitas sobre o enunciado, as falas se mantiveram em torno da dúvida se era para ser calculada a probabilidade de infecção simultânea ou individual.

Aluno 3:

AGIOTAGEM

um

dois três

o juro: o prazo

o pôr/o cento/o mês/o ágio

porcentagio.

dez

cem

mil

o lucro: o dízimo

o ágio/a moral/a monta em péssimo

empréstimo.

muito

nada

tudo

a quebra: a sobra

a monta/ o pé/o cento/a quota

h a j a n o t a

agiota.

(Mário Chaime)

Com base no texto resolva a expressão abaixo: Multiplique o numeral da linha 1 com a soma dos números da segunda linha. Depois de encontrar o resultado divida-o pelo numeral da linha 7.

Marque a alternativa que representa o resultado da expressão acima:

a) 0,5

b) 0,05

c) 500

d) 51

e) 5000

Análise: A turma elogiou a clareza do enunciado, e, sua apresentação precisa e coerente, apenas um aluno pontuou a confusão conceitual entre numeral e número no enunciado. Toda a turma achou que, embora criativo, o problema poderia ter explorado o conteúdo do texto, inclusive o próprio autor admitiu em sua análise que pecou neste quesito. No geral, a turma também considerou o grau de dificuldade elementar para o nível médio, incapaz de despertar o interesse e a curiosidade do aluno.

Aluno 4:

> Um estudo da Fundação Oswaldo Cruz, revelado ontem à noite pelo programa Fantástico, da TV Globo, aponta que o Aedes aegypti tem certa dificuldade em transmitir o zika. De cada 100 mosquitos infectados com o vírus, em média 20 conseguirão incubá-lo e transmiti-lo para outra pessoa – porque em apenas 20% dos casos o vírus consegue se reproduzir em quantidade suficiente para infectar a saliva do mosquito. Isso é metade da taxa de retransmissão do vírus da dengue (40 em cada 100 mosquitos infectados conseguem repassá-lo), e menos de um terço da taxa de retransmissão do chikungunya (70 em cada 100 mosquitos infectados podem repassá-lo).
>
> Super Interessante, 07 de março de 2016.
>
> Num determinado posto de saúde, registrou-se que 46% dos pacientes foram contaminados pelo vírus Dengue, 66% pela Chikungunya e 19% pela Zika. Considerando que 30% dos atendidos foram infectados por mais de um dos vírus transmitidos pelo Aedes Aegypti, 6% tiveram pelo menos Zika e chikungunya e 13% tiveram pelo menos zika e dengue, determine a porcentagem de pessoas infectadas pelos três vírus.
>
> a) 1%
> b) 2%
> c) 3%
> d) 4%
> e) 5%

Análise: O problema foi considerado de nível de complexidade apropriado, com linguagem clara, em que se entende o que se pede". Apenas um aluno alegou não ter compreendido perfeitamente o problema, mas não explicou em que o problema apresentou dificuldade para sua interpretação.

Aluno 7:

> Com base nas informações contidas no texto 1, considerando que os cientistas americanos utilizaram em seus estudos uma amostra de 4800 células-tronco, quantas tiveram seu desenvolvimento prejudicado?

Análise: A reclamação geral foi que o autor não fez o recorte do texto para o enunciado, deixando a leitura do problema densa e cansativa. Fazendo o devido recorte no texto, a turma considerou que a interpretação do problema representa um desafio maior que os cálculos utilizados para encontrar a incógnita pretendida.

Aluno 10:

A resolução da tela é uma das principais características que o consumidor deve levar em conta na hora de comprar uma TV. Atualmente, as resoluções HD, FULL HD e Ultra HD, são as principais do mercado. A descrição da resolução de cada TV é mostrada na figura abaixo.

João gostaria de comprar uma TV. Porém, o que João mais leva em conta no produto é a PPI (densidade de pixels por polegada), pois, quanto maior for da PPI, melhor será a qualidade de imagem reproduzida. Sabendo que para calcular a PPI de uma TV utilizamos a fórmula

$$PPI = \frac{\text{Quantidade de pixels na diagonal da TV}}{\text{polegadas da TV}}$$

qual das TV's abaixo é mais vantagem João comprar?

a) TV 32" Full HD

b) TV 21" HD

c) TV 60" Ultra HD

d) TV 29" Full HD

Análise: O nível da questão foi considerado elevado por alguns e excelente por outros, quanto à redação do problema, a maioria considerou clara, mas alguns disseram ser necessário fazer pequenas alterações apenas para deixar a estrutura do texto melhor. Além disso, um aluno afirma que não dá para resolver a questão apenas com as informações contidas no texto, segundo o mesmo, analisando apenas o problema não há como saber a quantidade de pixels da diagonal da TV.

Aluno 11:

Juliana contraiu um empréstimo com uma agiota, pra ser pago em oito parcelas mensais sendo a primeira parcela a vencer daqui há 1 mês. O histórico de pagamentos é descrito conforme a tabela abaixo. Supondo que foi adotado o regime de juros compostos sobre o saldo devedor, determine a taxa de juro mensal paga nesta transação.

Tempo (em meses)	Pagamentos	Dívida
1	R$ 218,23	R$ 904,80
2	R$ 218,23	R$ 795,15
3	R$ 218,23	R$ 692,33
4	R$ 218,23	R$ 557,18
5	R$ 218,23	R$ 405,81
6	R$ 218,23	R$ 236,28
7	R$ 218,23	R$ 46,40
8	R$ 52,00	R$ 0,02

A)1%
B)2%
C)5%
D)10%
E) 12%

Análise: Apesar de considerar o problema um clássico da Matemática Financeira, e que mesmo sem utilizá-lo diretamente, o autor aproveitou bem o contexto do texto. Houve divergência de opiniões sobre o enunciado, alguns consideraram que faltou informação para a resolução, como o valor do empréstimo, enquanto outros acharam que o problema está completo, queixando-se apenas alguns cálculos eram complicados de realizar sem o uso de calculadora.

Esta última etapa da oficina trouxe uma proposta mais complexa, que foi a utilização de textos como parâmetro para formular problemas, atividade que exigiu um uso maior da criatividade, o que se percebe diante dos problemas apresentados. Houveram falhas na estrutura em boa parte dos problemas apresentados, que vão desde a não identificação das fontes do dados recortados e utilizados nos enunciados, fato não mencionado em nenhuma das análises, até a escrita confusa e até dúbia de alguns problemas. Neste último ponto também vale destacar alguns erros envolvendo conceitos e conteúdos matemáticos. Apesar dos deslizes, surgiram boas ideias de problemas para os textos apresentados, o que demonstra que a turma deu um bom passo no sentido de transpor um texto, a priori, não matemático para um problema matemático.

Considerações Finais

Diante dos problemas elaborados no decorrer da oficina pôde-se perceber que, os fatores que causaram entraves foram a "deficiência" no uso de alguns conceitos matemáticos, e, principalmente, a redação dos enunciados, o que só constata que a atividade de escrita em Matemática deve receber mais ênfase dentro do cursos de formação, algo já pontuado por Mandarino (2004):

> É preciso cuidar melhor da capacidade de redigir na formação de professores de Matemática. É preciso também cuidar da discussão de características básicas de enunciados de problemas para que os professores não sejam meros reprodutores do que os livros didáticos apresentam e possam se sentir livres para criar seus próprios problemas mais adaptados a situações relacionadas com sua turma e a comunidade onde cada escola se situa. (p. 6)

A atividade de elaboração de problemas deve ocorrer ao longo do processo de formação, preferencialmente agregada às disciplinas do curso. Vivenciar este processo oferece à segurança necessária ao futuro professor para atuar de acordo com as atuais propostas, defendidas inclusive por documentos oficiais — a exemplo dos Parâmetros Curriculares Nacionais —, da Educação Matemática. Estas propostas exigem dos professores de Matemática, de forma direta ou indireta, a capacidade de formular problemas contextualizados, problemas que envolvam preferencialmente a realidade do aluno e ao mesmo tempo contemplem a aplicação dos conceitos exigidos no currículo, não só da Matemática como de outras áreas de conhecimento. E, o caminho mais viável para se chegar a este patamar é iniciado com a construção dos problemas matemáticos usuais.

O maior ganho com esta atividade foi despertar no aluno um olhar crítico sobre os problemas matemáticos, percebeu-se no decorrer da atividade um amadurecimento em relação à temática, a preocupação imediata pela busca da resolução cedeu espaço para o pensar sobre o problema, ponderar aspectos como a linguagem matemática, o nível de dificuldade, a capacidade de se expressar precisamente, etc. Em muitos casos, o próprio autor detectou falhas no enunciado criado e tentou reestruturá-lo. Para atingir este patamar de criticidade, acredita-se que o ato de fazer com que o aluno conhecesse e discutisse sobre as etapas e as estratégias para a resolução de problemas foram determinantes.

Os resultados obtidos com a oficina não esgotam o assunto, foi apenas um passo tímido, de um longo caminho a ser trilhado, pois assim como o ato de resolver problemas a atividade de elaboração exige um permanente exercício para se chegar ao aprimoramento.

Referências Bibliográficas

[1] ABRANTES, Paulo. **Um (bom) problema (não) é (só)...** In: Educação e Matemática, 8. Lisboa: APM, 1989 p. 7-10. Disponível em: http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/COORDENADORES/Materiais%20Coordenad/Textos/Abrantes%201989.pdf. Acesso em: 20 de outubro de 2015.

[2] BALIEIRO, Inocêncio F. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya - Quatro Episódios na História da Heurística**. 2004. 217 f. Tese (Doutorado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos Científicos) — Rio Claro, UNESP, 2004. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/tese_balieiro_heuristicas.pdf. Acesso em: 20 de fevereiro de 2016.

[3] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC/ SEF, 1998.

[5] BUTTS, Thomas. **Formulando Problemas Adequadamente**. In: KRULIK, S.; REYS, R. E.(Org). **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 32-48.

[6] DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e Resolução de Problemas de Matemática: Teoria e Prática.** São Paulo: Ática, 2009

[7] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[8] GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo matemático.** 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[9] GONTIJO, C. H. **Resolução e Formulação de Problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em Matemática.** In: Anais do SIPEMAT. Recife: Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 2006, 11p. Disponível em: `http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/SIPEMAT06/artigos/gontijo.pdf`. Acesso em: 8 de julho de 2015.

[10] HUETE, J. C. S; BRAVO, J. A. F. **O Ensino da Matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

[11] MANDARINO, Mônica C. F. **Os professores e a arte de formular problemas contextualizados.** II Bienal da SBM. Disponível em: `http://www.bienasbm.ufba.br/OF12.pdf`. Acesso em: 30 de julho de 2015.

[12] MENDES, Iran Abreu. **Matemática e Investigação em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na Aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[13] MORAIS, D. C. de, Filho. **Manual de Redação Matemática**. Campina Grande: 2010.

[14] MUSSER, G. L. **Estratégias de Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. In: KRULIK, S.; REYS, R. E.(Org). **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 188-201.

[15] PEDROSO, Hermes A. **História da Matemática**. São José do Rio Preto: Gráfica da UNESP, 1992.

[16] PEREIRA, A. L. **Problemas Matemáticos: caracterização, importância e estratégias de solução**. São Paulo: USP, 2002. Disponível em: `http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/Resolucao%20probs/mat450-2001242-seminario-8-resolucao_problemas.pdf`. Acesso em: 20 de julho de 2015.

[17] POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interferência, 2006.

[18] ROQUE, T. CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. SBM, 2012.

[19] SCHOENFELD, A. H. **Heurísticas na Sala de Aula**. In: KRULIK, S.; REYS, R. E.(Org). **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. Trad. Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 13-31.

[20] SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Ignez Diziz (org.). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.** Porto Alegre: Artmed, 2001.

APÊNDICE - Oficina

Primeiro Momento

Objetivo:

- Caracterizar os tipos de problemas matemáticos e descrever as etapas do processo de resolução de problemas elaboradas por George Polya.

Tempo estimado: 100 minutos

1. Tipos de Problemas

   Apresentar tipos de problemas torna-se uma tarefa delicada, diante das diversidade de classificações encontradas, visto que, "pode-se prestar a atenção à natureza do problema ou ao contexto no qual se resolve, ao componente sintático, às relações matemáticas ou a estrutura lógica, etc." (Huete e Bravo, 2006, p.139), para esta atividade, optou-se em apresentar à turma as classificações feitas por Polya (2006) e por Dante (2009).

   (a) Polya [4]

   Utiliza a natureza do problema como critério de classificação, segundo o autor podemos ter:

   - Problemas rotineiros: problemas em que as definições já foram previamente ensinadas e exemplificadas, e, que podem ser resolvidos pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes ou pelo seguimento de um exemplo muito batido.

     Exemplo 1. *Calcule a área de um círculo de raio 3 cm.*

   - Problemas de determinação: tem como objetivo encontrar um certo objeto, a incógnita (quaesitum) do problema. Estes problemas podem ser teóricos ou práticos, abstratos ou concretos, problemas sérios ou simples enigmas.
     Suas partes principais são a incógnita, os dados e a condicionante, para resolvê-lo é preciso conhecer com grande exatidão, estas partes principais. Pode-se tentar encontrar, calcular, obter, produzir, traçar construir todos os tipos imagináveis de objetos. São mais importantes para a Matemática Elementar.

     Exemplo 2. *(OBMEP- 2015) Dado um conjunto* $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$*, forma-se um subconjunto B, com a maior quantidade possível de elementos, tal que todo elemento de B é múltiplo ou divisor de qualquer outro elemento de B. Quantos elementos há no conjunto B?*
     A) 9
     B) 10
     C) 11
     D) 12

[4] As definições utilizadas para cada tipo de problema, foram retiradas do Capítulo 2, onde estão devidamente referenciadas.

E) 13

Incógnita: *Número de elementos do conjunto B.*

Dados: $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$ *e B possui a maior quantidade possível de elementos.*

Condicionante: *todo elemento de B é múltiplo ou divisor de qualquer outro elemento de B.*

- Problemas de demonstração: o objetivo é mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou então, que é falsa; se for um problema matemático comum, suas partes principais serão a hipótese e a conclusão do teorema que tiver de ser provado ou refutado, para resolvê-lo é preciso conhecer com grande exatidão, as suas partes principais, a hipótese e a conclusão. São mais importantes na Matemática Superior.

  Exemplo 3. *Prove que se duas retas se interceptam, então existirá um único plano que as contém.*

  Hipótese: *r e s são retas que se interceptam.*

  Tese: *r e s determinam um plano que as contém.*

- Problemas práticos: são diferentes, em diversos aspectos, dos problemas puramente matemáticos, muito embora os principais motivos e processos sejam essencialmente os mesmo em ambos os casos.

  Incógnitas, dados, condicionantes, conceitos preliminares necessários, tudo é mais complexo e menos nítido nos problemas práticos do que nos puramente matemáticos. Esta é uma diferença importante, talvez a principal, e ela certamente implica em outras; no entanto, a motivação fundamental e os processos solucionadores parecem ser os mesmos para problemas de ambos os tipos.

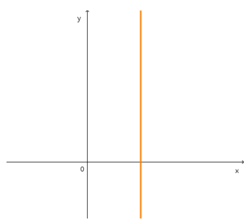
  Exemplo 4. *Calcular a altura da torre de internet do IFBA campus Valença.*

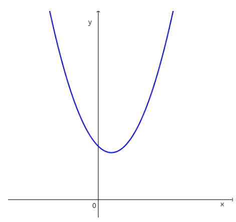
(b) Dante [5]

Fez esta classificação buscando contemplar não só a natureza do problema, como o contexto em que se resolve e as relações matemáticas envolvidas para tal. Para o autor temos:

- Exercícios de reconhecimento: seu objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito, um fato específico, uma definição, uma propriedade, etc.

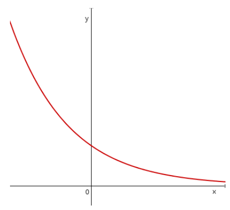
  Exemplo 5. *Identifique quais gráficos representam função:* [6]

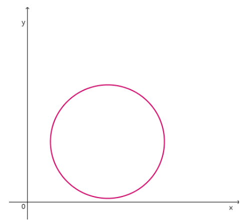




[5]As definições utilizadas para cada tipo de problema, foram retiradas do Capítulo 2, onde estão devidamente referenciadas.

[6]Figuras elaboradas pelo autor.





- Exercícios de algoritmos: são aqueles que podem ser resolvidos passo a passo. Geralmente no nível elementar, são exercícios que pedem a execução dos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais. Seu objetivo é treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores.

  Exemplo 6. *Efetue:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Problemas-padrão: são problemas que em sua resolução envolve a aplicação direta de um ou mais algoritmos anteriormente aprendidos e não exige nenhuma estratégia.
  - Problemas-padrão simples: são problemas que podem ser resolvidos com uma única operação.

    Exemplo 7. *Calcule a área de um quadrado cujo lado mede 4cm.*
  - Problemas-padrão composto: são problemas que podem ser resolvidos com duas ou mais operações

    Exemplo 8. *O sr. Reinaldo, por recomendação médica, resolveu andar todos os dias numa praça circular que há em frente a sua casa. Todos os dias ele dá exatamente 10 voltas em torno da praça, que tem 20 m de raio. Quantos metros o sr. Reinaldo anda por dia nesta praça?*

- Problemas-processo ou heurístico: são problemas cuja solução envolve operações que não estão explicitamente no enunciado. Em geral, não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, nem resolvido pela aplicação automática de algoritmos, pois exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação, uma estratégia que poderá levá-lo à solução. Por isso, tonam-se mais interessantes do que os problemas-padrão

  Exemplo 9. *(OBMEP – 2015) Em uma Olimpíada de Matemática, foram distribuídas várias medalhas de ouro, várias de prata e várias de bronze. Cada participante premiado pôde receber uma única medalha. Aldo, Beto, Carlos, Diogo e Elvis participaram dessa olimpíada e apenas dois deles foram premiados. De quantas formas diferentes pode ter acontecido essa premiação?* [7]

  a) 20
  b) 30
  c) 60
  d) 90

[7] Questão do nível 2, e, no Ensino Fundamental II, os algoritmos da Análise Combinatória não foram estudados, por tal motivo o problema se aplicado para este grupo de alunos se enquadra na classificação.

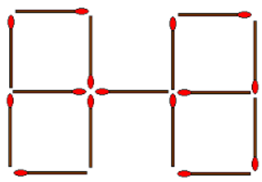
e) 120

- Problemas de aplicação: são aqueles que retratam situações reais do dia a dia e que exige o uso da Matemática para serem resolvidos. São também chamados de situação-problema contextualizada.

  Exemplo 10. *Usando o sistema de juros simples, uma pessoa aplica a quantia de R$ 4 000,00, a taxa de juros mensais de 2,5% durante 7 meses. Ao final do período da aplicação, ele retira a quantia de R$ 4 000,00 para a compra de uma Smart TV numa oferta "relâmpago", que fora da promoção custa R$ 5 000,00. O restante do dinheiro é aplicado a uma nova taxa de juros de 1,5% ao mês durante 2 meses em regime de juros simples. Analisando as operações financeiras ocorridas, seria melhor reaplicar todo dinheiro comprando a Smart TV fora da promoção ou a pessoa optou pela melhor opção?*

- Problemas de quebra-cabeça: são problemas que envolvem e desafiam os alunos. Geralmente constituem a chamada Matemática recreativa e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque, alguma regularidade, que é a chave da solução.

  Exemplo 11. *Mova somente dois palitos da figura abaixo para obter cinco quadrados:*[8]



2. Estágios da resolução de um problema

   Entre os autores estudados, há praticamente um concesso sobre a eficiência do processo proposto por Polya, para o autor, são quatro as etapas para a resolução de um problema.

   Compreender o problema

   (a) Você leu e compreendeu corretamente o problema?
   (b) O que se pede no problema?
   (c) Quais são os dados e as condições do problema?
   (d) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
   (e) É possível estimar uma resposta?

   Elaborar um plano

   (a) Qual é o seu plano para resolver o problema?
   (b) Que estratégias você tentará desenvolver?

[8]Fonte da figura: Portal Triribadas. Disponível em: `http://tiribadas.blogspot.com.br/2014/01/desafio-com-palitos-jogo-de-raciocinio.html`. Acesso em: 16 de novembro de 20015

(c) Você lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?

(d) Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.

(e) Tente resolver o problema por partes.

(f) Há alguma outra estratégia?

Executar o plano

(a) Execute o plano elaborado, desenvolvendo-o passo a passo.

(b) Efetue todos os cálculos indicados no plano.

(c) Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

Fazer o retrospecto ou verificação

(a) Examine se a solução obtida está correta.

(b) Existe outra maneira de resolver o problema?

(c) É possível usar a estratégia empregada para resolver problemas semelhantes?

3. Resolver os problemas exemplos 2 e 9, utilizando as etapas de resolução de problemas propostas por Polya.

Segundo Momento

Objetivos:

- Expor e aplicar algumas de estratégias de resolução de problemas.
- Reformular um problema dado ou criar um problema semelhante aos apresentados.

Tempo estimado: 100 minutos

1. Apresentar estratégias de resolução de problemas

   Embora Polya proponha algumas estratégias de resolução de problemas, as propostas por Dante[9] são mais diretas, não deixando de ter conexão com as ideias do primeiro.

   - Tentativa e erro organizados:

     Buscando os termos que satisfazem as condições do problema, através de "chutes," de forma coerente e organizada para encontrar a solução do problema.

   - Procurar padrões ou regularidades para generalizar:

     Consiste em conjecturar uma solução geral que sirva para todos os casos, com base em alguns casos particulares iniciais, ou seja, fazer uma generalização. A busca de padrões consiste em resolver inicialmente versões muito simplificadas do problema original, com a esperança de encontrar alguma regra de formação que permita enxergar a solução do problema.

   - Resolver primeiro um problema mais simples:

     Muitas vezes, para obtermos a solução de um problema precisamos responder o mesmo problema com número menores, com dados mais simples, para em seguida aplicar o mesmo método na solução do problema original.

   - Reduzir a unidade:

     Simplificar o cálculo a uma unidade mais simples que facilitem o cálculo.

   - Fazer o caminho inverso (Desconstruir a solução):

     Consiste me percorrer o caminho inverso, partindo do resultado e realizando as operações que desfazem as originais.

2. Apresentar problemas e identificar a estratégia que ajuda a resolvê-lo e aplicá-la.

   (a) Imagine o leitor que está perante um conjunto de 27 moedas de ouro e uma balança mecânica de braços iguais. Dispõe apenas deste material. É-lhe dito:

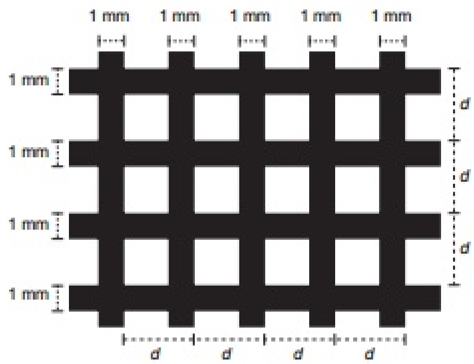
   – Há uma moeda falsa.

   – Que número mínimo de operações com a balança será necessário efetuar para se determinar com certeza qual é a moeda falsa?

[9] As referências das definições apresentadas abaixo encontram-se no Capítulo 2.

(b) (ENEM - 2015) Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de (d - 1) milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da religião coberta pelas fitas da mala, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento

A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é?

a) 2

b) 1

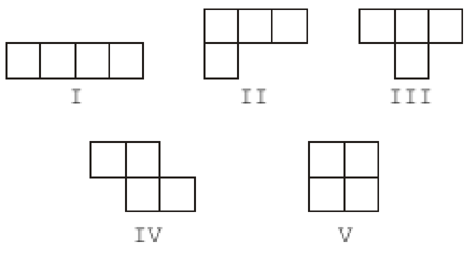
c) $\frac{11}{3}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{2}{3}$

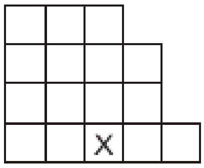
(c) Depois de 6 provas de matemática, Pacheco tem uma média de 7. O professor anuncia que a nota da disciplina vai ser computada contando apenas as cinco maiores notas. Pacheco então passa a ter média de 8. Qual foi a nota mais baixa de Pacheco?

(d) (OBMEP - 2006)



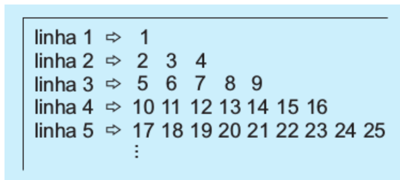
Paulo usou quatro peças diferentes dentre as cinco acima para montar a figura indicada. Em qual das peças está o quadradinho marcado com X?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V



(e) (OBMEP - 2015) Os números inteiros positivos foram escritos em sequência, como indicado na figura. Observe que na primeira linha foi escrito o número 1 e que nas seguintes há dois números a mais do que na linha anterior. Em qual linha foi escrito o número 2015?

a) 43
b) 44
c) 45
d) 46
e) 47



3. Tentar reescrever os problemas dados fazendo uma inversão ou criar um problema semelhante. (Atividade extraclasse)

Terceiro Momento

Objetivos:

- Apresentar as produções dos problemas solicitados na aula anterior, e, analisá-los de acordo com elementos predefinidos.
- Apresentar as características de um bom problema.
- Escrever problemas utilizando um objeto ou ferramenta dado.

Tempo estimado: 100 minutos

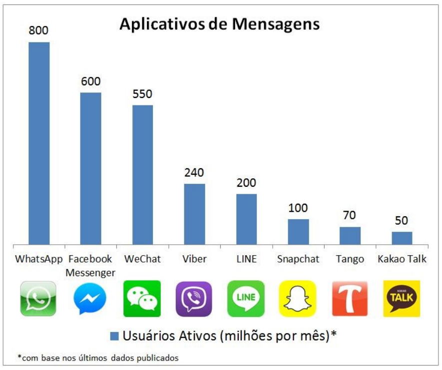
1. Apresentação dos problemas elaborados
    - Discutir sobre a estrutura dos mesmos, levando em consideração, fatores, como:
        - Linguagem usada na redação do problemas;
        - Tamanho e estrutura das frases;
        - Vocabulário matemático específico;
        - "Tamanho" e complexidade dos números;
        - Como apresentar o problema;
        - Ordem em que as informações (dados e condições) são dadas;
        - Número de condições a serem satisfeitas e sua complexidade;
        - Número e complexidade de operações e estratégias envolvidas.
2. Expor as características de um bom problema, segundo Dante:
    - Ser desafiador para o aluno
    - Ser real para o aluno
    - Ser do interesse do aluno
    - Ser o elemento desconhecido de um problema realmente desconhecido
    - Não consistir na aplicação evidente e direta de uma ou mais operações aritméticas
    - Ter um nível adequado de dificuldade
3. Atividade extraclasse[10]

[10] Material utilizado na próxima página

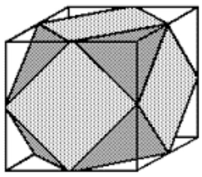
Proposta para o próximo encontro

Escreva um problema que utilize um dos itens abaixo:

(a) Gráfico[11]



(b) Sólido geométrico[12]



(c) Resposta para o problema: 4 anos

(d) Operação: Lei dos Cossenos

[11]Fonte da figura: Veja.com. Disponível em: `http://veja.abril.com.br/blog/inovacao/sem-categoria/os-maiores-aplicativos-de-mensagens-globais-ou-como-o-snapchat-chegou-a-valer-16-b` Acesso em: 12 de fevereiro de 2016

[12]Fonte: MATÉRIAS ESPECÍFICAS DOS CURSOS DE ADM E MA. Disponível em: `http://especificasmaterias.blogspot.com.br/2009/11/resposta-do-simulado-da-unifesp-2007.html`. Acesso em: 12 de fevereiro de 2016

Quarto Momento

Objetivos:

- Apresentar, analisar e resolver os problemas produzidos.
- Elaborar problema utilizando recorte de um texto ou notícia.

Tempo estimado: 100 minutos

1. A presentar os problemas elaborados para a turma e pedir que os mesmos resolvam.
    - Discutir a estrutura do problema, os resultados, as estratégias utilizadas.
2. Questões "padrão ENEM:" Selecionar matérias de jornais, revistas, recortes de textos, etc., e, pedir que modelem um problema partindo de um dos textos escolhidos.

Proposta para o próximo encontro

Escreva um problema utilizando recortes ou a ideia central um dos textos abaixo:

Texto 1: Ciência descobre como o zika age no cérebro dos bebês.[13]

Estudos nos EUA e no Brasil revelam que o vírus mata boa parte das células - e escraviza as demais.

A descoberta, que fortalece a ligação entre o vírus e a microcefalia, foi feita por um grupo de cientistas de três universidades americanas (Johns Hopkins, Flórida e Emory). O estudo, que acaba de ser publicado na revista Cell, usou células-tronco, ou seja, que têm a capacidade de se transformar em qualquer tipo de célula humana. Elas foram induzidas a se transformar em "células progenitoras neurais", que dão origem a neurônios. Em seguida, foram colocadas em contato com o vírus zika durante duas horas. Os cientistas esperaram três dias, e analisaram o resultado – que foi dramático.

Praticamente todas as células (90%) haviam sido infectadas pelo vírus. Um terço delas estava morta, e as demais tiveram o desenvolvimento prejudicado. Isso significa que, na prática, elas teriam dificuldade em evoluir e se transformar em neurônios – o que pode explicar a má-formação cerebral típica da microcefalia. Além disso, as células que sobreviveram se transformaram em multiplicadoras do zika, liberando cópias do vírus e reforçando a infecção.

O estudo também constatou que o zika não têm o mesmo efeito sobre células cerebrais já formadas – o que pode explicar porque ele não afeta o cérebro de adultos, que já está desenvolvido. Os autores do estudo americano ressaltam que ele não é uma prova definitiva de que o zika causa microcefalia; mas admitem que ele aponta nessa direção.

O efeito do zika sobre o cérebro foi comprovado por outro estudo, que foi realizado pela UFRJ em parceria com o Instituto D'Or de Pesquisa, do Rio de Janeiro, e também acaba de ser publicado. A experiência também usou células-tronco, que foram reprogramadas para se transformar em células cerebrais, e infectadas com o zika. Na pesquisa brasileira, 40% das células foram mortas ou tiveram o crescimento afetado pelo vírus.

Mas não há apenas más notícias envolvendo o zika. Um estudo da Fundação Oswaldo Cruz, revelado ontem à noite pelo programa Fantástico, da TV Globo, aponta que o Aedes aegypti tem certa dificuldade em transmitir o zika. De cada 100 mosquitos infectados com o vírus, em média 20 conseguirão incubá-lo e transmiti-lo para outra pessoa – porque em apenas 20% dos casos o vírus consegue se reproduzir em quantidade suficiente para infectar a saliva do mosquito. Isso é metade da taxa de retransmissão

[13]Fonte: Super Interessante, 7 de março de 2016. Disponível em: `http://super.abril.com.br/ciencia/ciencia-descobre-como-o-zika-age-no-cerebro-dos-bebes`. Acesso em: 7 de março de 2016

do vírus da dengue (40 em cada 100 mosquitos infectados conseguem repassá-lo), e menos de um terço da taxa de retransmissão do chikungunya (70 em cada 100 mosquitos infectados podem repassá-lo).

Texto 2: Entenda as diferenças entre as resoluções HD, Full HD e Ultra HD.[14]

Maioria dos televisores à venda no Brasil exibe imagens em Full HD; de olho na Copa do Mundo, fabricantes apostam em modelos de altíssima resolução.

Nova TV da Samsung com tela de 110 polegadas e resolução Ultra HD (Divulgação/VEJA)

A resolução da tela é uma das principais características que o consumidor deve levar em conta na hora de comprar uma TV – ou corre o risco de se frustrar ao assistir a filmes ou jogos de futebol. Ela indica a quantidade de linhas e colunas de pixels que compõem a imagem exibida na tela. Quanto maior o número de pontos por polegada de tela, melhor a qualidade da transmissão.

Atualmente, três resoluções de tela diferentes estão presentes nos modelos de TV à venda nas lojas. De acordo com a consultoria GfK, quase 40% das TVs vendidas no Brasil ao longo de 2013 ofereciam resolução HD. As TVs Full HD, que apresentam maior qualidade de imagem, lideraram as vendas no período, com 58,9% do total. As TVs mais avançadas, com resolução Ultra HD ou 4K, ainda representam menos de 1% das vendas no Brasil.

A resolução HD permite que a TV exiba 1.280 colunas de pixels e 720 linhas, resultando em uma tela com quase 1 milhão de pontos para formar as imagens. No caso do Full HD, a imagem é formada por 1.920 colunas de pixels e 1.080 linhas, o que aumenta o número de pontos para pouco mais de 2 milhões. O Ultra HD apresenta 3.840 colunas de pixels por 2.160 linhas, o equivalente a quatro vezes a resolução Full HD. Confira abaixo a comparação entre as três resoluções de tela:

Distância x tamanho – A diferença entre as resoluções é grande e perceptível aos espectadores, em especial no caso do HD e do Full HD. Durante os testes de TVs realizados pelo site de VEJA, os espaços entre os pixels da imagem ficaram visíveis em TVs muito grandes (60 e 70 polegadas) e resolução Full HD. O mesmo efeito foi notado em aparelhos menores (46 a 50 polegadas) com resolução HD. E quanto mais próximo o usuário está da tela, mais evidente é a limitação. Para evitar problemas com resolução de tela, o consumidor pode calcular com antecedência o tamanho ideal de TV , levando em conta a resolução de tela e a distância do espectador.

[14] Fonte: Veja.com, 13 de abril de 2014. Disponível em: `http://veja.abril.com.br/noticia/vida-digital/entenda-as-diferencas-entre-as-resolucoes-hd-full-hd-e-ultra-hd`. Acesso em: 7 de março de 2016

Segundo André Romanon, gerente sênior de TVs da Philips, é preciso primeiro medir a distância entre o sofá e a tela. Se o consumidor pensa em comprar uma TV com resolução HD, a medida, em metros, deve ser multiplicada por dezoito. No caso das TVs Full HD, multiplica-se a distância por 21. O resultado indica o tamanho máximo da tela - acima disso, o espectador verá espaços entre os pixels.

Dessa forma, se o consumidor tiver um espaço de 2,3 metros entre o sofá e a TV , terá duas opções: comprar uma TV de 40 polegadas com resolução HD ou uma TV Full HD de 48 polegadas.

Ultra HD – No caso da resolução Ultra HD, esqueça a matemática (e prepare o bolso): são tantos pixels na tela que é impossível notar qualquer imperfeição na imagem. Esses aparelhos chegaram ao mercado em 2012 em tamanhos grandes, como 84 polegadas. A partir do início de 2014, no entanto, fabricantes como LG e Samsung levaram a tecnologia para TVs com tamanho a partir de 42 polegadas.

"Alguns modelos com resolução Ultra HD em tamanhos menores estão chegando com preços um pouco mais acessíveis. A indústria e os consumidores já estão de olho nessa nova tecnologia", diz Camila dos Santos, analista do mercado de TVs da GfK no Brasil. "Além da maior resolução, o 4K e o 8K podem apresentar mais cores do que as TVs atuais, mais até que as telas dos cinemas", diz Yuzo Iano, professor de comunicação audiovisual da faculdade de engenharia elétrica e de computação da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

Conteúdo – Outro ponto a levar em conta na hora de definir a resolução da sua próxima TV é o tipo de conteúdo que será exibido. A resolução HD é suficiente para assistir à programação da TV digital aberta, canais a cabo ou via satélite e DVDs, que em geral oferecem conteúdo com resolução HD. Já no caso de discos de Blu-ray e alguns serviços sob demanda, como o Netflix e a iTunes Store, vale a pena considerar uma TV Full HD.

Quanto ao Ultra HD, a oferta de conteúdo é limitada – mas deve aumentar. Alguns estúdios já gravam novos filmes nesta resolução. A Sony e a Netflix, por exemplo, firmaram uma parceria no início deste ano para acelerar a oferta de conteúdo em Ultra HD por meio de streaming. "As principais fontes de sinal estão em HD ou Full HD. Para TVs com resolução Ultra HD, há uma tecnologia chamada upscaling, que aumenta articialmente o número de pixels, mas a experiência não é a mesma", diz Romanon, da Philips. Ou seja, embora o Ultra HD seja boa alternativa para quem vai comprar uma TV gigante neste ano, não vai ser dessa vez que os usuários vão aproveitar a resolução máxima do aparelho. Talvez na próxima Copa do Mundo.

Texto 3: : AGIOTAGEM.[15]

[15]Fonte: FLEMMING, Diva M. **Tendências em Educação Matemática**. Disponível em: `http:`

AGIOTAGEM

um

dois três

o juro: o prazo

o pôr/o cento/o mês/o ágio

porcentagio.

dez

cem

mil

o lucro: o dízimo

o ágio/a moral/a monta em péssimo

empréstimo.

muito

nada

tudo

a quebra: a sobra

a monta/ o pé/o cento/a quota

h a j a n o t a

agiota.

(Mário Chaime)

`//busca.unisul.br/pdf/89279_Diva.pdf`. Acesso em: 20 de julho de 2014

Quinto Momento

Objetivo:

- Avaliar a capacidade individual do aluno de reconhecer um bom problema, e, sua habilidade em detectar possíveis falhas na estrutura do mesmo.

Tempo estimado: 100 minutos

1. Entregar uma lista com os problemas produzidos pela turma e solicitar que cada aluno analise e responda, quando possível, os problemas dos colegas.