Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Introdução ao Cálculo: Uma proposta para o Ensino Médio

Márcio Andrade Queiroz

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2016

Introdução ao Cálculo: Uma proposta para o Ensino Médio

Márcio Andrade Queiroz

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Kleyber Mota Cunha.

Salvador - Bahia
Junho de 2016

Introdução ao Cálculo: Uma proposta para o Ensino Médio

Márcio Andrade Queiroz

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 16 de junho de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Kleyber Mota Cunha (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Joseph Nee Yartey
UFBA

Prof. Dr. Leandro Oliva Suguitani
UFBA

Dedico esse trabalho aos meus familiares, amigos, colegas de curso e em particular a minha esposa Tacila Cruz dos Santos Queiroz, pelo apoio e compreensão nos momentos mais difíceis dessa trajetória.

Agradecimentos

A Deus por me dar a oportunidade de fazer esse curso, além de força, coragem e disciplina necessárias para concluí-lo.

Aos meus pais, que sempre fizeram da educação a prioridade em nossa família, irmãos e irmã, fonte de inspiração e incentivo na busca do saber.

A minha esposa Tacila, grande incentivadora e ombro amigo nas horas de dificuldades no decorrer desses dois anos e meio.

Aos meus colegas de curso, pelos momentos desafiadores intelectualmente e de muita alegria no decorrer de todo o curso.

A todos os nossos mestres pela grande dedicação e incentivo e, em particular,um agradecimento especial ao professor Kleyber, que muito colaborou na construção deste trabalho.

"O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário"

Albert Einstein

Resumo

O presente trabalho é apresentado em cinco capítulos e uma introdução onde, na introdução, faremos uma breve apresentação dos seus objetivos e etapas seguidas.

No capítulo 01, apresentaremos o conceito de derivada como inclinação da reta tangente à curva num ponto P, método atribuído a Descartes, e introduziremos os conceitos de derivadas e antiderivadas simultaneamente, utilizando os pares Derivada-Antiderivada (DA).

No capítulo 02 apresentaremos o conceito de Integral, diretamente dos pares (DA) e do incremento em altura de uma curva antiderivada.

No capítulo 03, proporemos um modo alternativo para cálculo da área sob o gráfico de funções polinomiais, exibindo a função área e demonstrando sua unicidade, a partir de conceitos amplamente trabalhados no ensino médio tais como desigualdades e somatórios.

No capítulo 04 apresentaremos diversos problemas propostos, mostrando o caráter interdisciplinar do Cálculo e, no último capítulo, apresentaremos as considerações finais relativas ao trabalho e suas justificativas para uso no ensino médio.

Palavras chave: cálculo, derivada, integral.

Abstract

This work is presented in five chapters and one introduction where, in introduction, we will make a short presenting of their objectives and steps followed.

In chapter 01, we will introduce the concept of derivative as a slope of tangent to the curve at a point P (This method is attributed to Descartes)and introduce the concepts of derivatives and antiderivatives simultaneous using pairs Derived anti-derivative (DA).

In chapter 02, we introduces the concept of Integral, directly from pairs (DA) and the increase in height of an anti-derivative curve.

In Chapter 03, we proposes an alternative way to calculate the area under the graph of polynomial functions, displaying the are a function and demonstrating its uniqueness, from wide lyworked in high school concepts such as inequality and summations.

In chapter 04, we presents many problems posed, showing the interdisciplinary of calculus and, in the last chapter, we presents the final considerations relating to work and their justifications for use in high school.

Keywords: calculus, derivative, integral.

Sumário

Introdução

Notadamente reconhecido, o Cálculo é uma ferramenta essencial ao desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento tais como: Física, Química, Engenharias, Administração, Economia e outras.

Apesar de sua inegável importância, o Cálculo é considerado, pela maioria dos estudantes, como acessível apenas a alguns e tal perpeção se deve ao fato do Cálculo utilizar, em seu desenvolvimento, rigorosos conceitos e notações complexas como: derivadas e integrais definidas a partir do conceito de limite, diferenças sutis entre dx e Δx, dentre outras.

Este rigor conceitual é essencial aos Matemáticos que visam uma carreira acadêmica, desta forma,o presente trabalho não é destinado a eles, mas a estudantes do ensino médio.

O objetivo deste trabalho é reduzir a dificuldade no ensino-aprendizagem do Cálculo, apresentando uma proposta de introdução do mesmo no ensino médio para potencializar a Matemática ali estudada e, para isso, introduziremos os principais conceitos do Cálculo, usando uma forma direta de abordagem e simplificando suas notações.

No capítulo 01, apresentaremos o conceito de Derivada, a partir da ideia original de René Descartes (1596-1650), em seu "Método das Tangentes" (Cajori, 1985, pp.176-177; Coolidge, 1951; Suzuki, 2005; Range, 2011), ao invés de utilizar o método da reta secante como um limite. Introduziremos também, derivadas e antiderivadas simultaneamente, utilizando os pares Derivada-Antiderivada (DA) e recorreremos ao Geogebra 5.0.180.0-3D para obtermos pares (DA) que não possam ser calculados, de modo simples, através do método das Tangentes de Descartes.

No capítulo 02 apresentaremos o conceito de Integral, diretamente dos pares (DA) e do incremento em altura de uma curva antiderivada. A abordagem "Incremento em Altura", como definição de Integral tem sido defendida por P. Lin, na China, há mais de duas décadas. (Samuel S.P. Shen e Qun Lin). Definiremos a área sob a curva de um integrando pela integral, e, em seguida, explicaremos por que a definição é razoável, já que é uma inversão do conceito tradicional, que define uma integral através do cálculo da área sob a curva de um integrando.

Proporemos que, nesta introdução às ideias do Cálculo, sejam utilizadas notações simples e amigáveis tais como: $f'(x)$ para representar a derivada da função $f(x)$ e $I[f(x); a; b]$ para representar a integral da função $f(x)$ no intervalo de integração $[a, b]$.

Apesar de propor uma abordagem introdutória ao Cálculo, que seja acessível ao ensino médio, não perderemos de vista o rigor Matemático, necessário a qualquer trabalho acadêmico.

Ainda, nos capítulos 01 e 02, apresentaremos um breve histórico sobre o desenvolvimento das ideias ali propostas.

Os conceitos desenvolvidos nos capítulos 01 e 02 são atribuídos respectivamente, às ideias originais de Descartes e Wallis. (Ginsburget al. (1998)).

No capítulo 03, apresentaremos um modo alternativo para cálculo da área sob o gráfico de funções polinomiais, exibindo a função área e demonstrando sua unicidade, a partir de conceitos trabalhados no ensino médio tais como desigualdades e somatórios.

No capítulo 04, apresentaremos alguns problemas propostos e suas respectivas resoluções e, no capítulo 05 apresentaremos as considerações finais relativas ao trabalho e suas possibilidades de uso no ensino médio.

Capítulo 1

Inclinação e pares derivada-antiderivada

1.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo, faremos uma introdução ao conceito de Derivada, a partir de uma abordagem direta, apresentando sua definição sem o uso da teoria dos limites. A derivada de uma função $f(x)$, num ponto $P(x_0, y_0)$, será obtida a partir do cálculo da inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $P(x_0, y_0)$, método atribuído a René Descartes (1596-1650).

Apresentaremos também, de forma simultânea, Derivadas e Antiderivadas a partir dos pares Derivada-Antiderivada (DA). Para funções onde a obtenção do par (DA) não possa ser feita de forma conceitualmente simples, recorreremos a softwares de código aberto, disponíveis gratuitamente na internet. No presente trabalho recorreremos ao Geogebra 5.0.180.0-3D.

Formalmente, dada uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e um ponto $c \in (a, b)$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a c é igual a $L \in \mathbb{R}$, quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Dizemos que f é derivável no ponto $c \in (a, b)$ se o limite a seguir existir:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Note que a razão $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ é o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.

Quando fazemos x ficar tão perto quanto se queira de x_0, vemos que, geometricamente, $f'(x_0)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

O leitor pode notar a dificuldade de introduzir o conceito de derivada e calculá-la no ensino médio assim, utilizando o conceito de derivada descrito acima, introduziremos

Figura 1.1: René Descartes (1596-1650)

na próxima seção, uma maneira simples de calcular a reta tangente ao gráfico de uma função num dado ponto e, portanto, sua derivada.

1.2 Método das tangentes de Descartes: Um breve histórico

Um grande número de artigos e livros tem discutido o desenvolvimento histórico do Cálculo. Neste trabalho, focaremos em alguns que descrevem o princípio e a evolução do "Método das tangentes de Descartes", que é a maneira sistemática mais antiga de obter a inclinação de uma curva sem o uso da teoria dos limites.

O Método das tangentes de Descartes é geométrico e seu objetivo é construir, com régua e compasso, um círculo, com centro sobre o eixo Ox, tangente a uma curva num dado ponto P, (Cajori (1985), pgs. 176-177).

Graficamente, é mais fácil construir, com régua e compasso, um círculo tangente a uma curva num ponto P, do que uma reta tangente à mesma curva em P. O círculo tangente pode ser construído a partir de um raio variável e cujo centro se move sobre o eixo Ox de modo que o círculo intercepte a curva apenas num ponto, veja Figura 1.2. Em seguida, uma reta tangente, pode ser obtida, como a reta perpendicular à reta radial r, do círculo, no ponto de tangência.

O Método das tangentes de Descartes também pode ser descrito analiticamente. O círculo tangente será determinado por um dado ponto $P(x_0, y_0)$, da curva, o centro, um ponto móvel sobre o eixo Ox, $(a; 0)$ e seu raio R pela equação: $R^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - 0)^2$. Assim, a equação de círculo é :

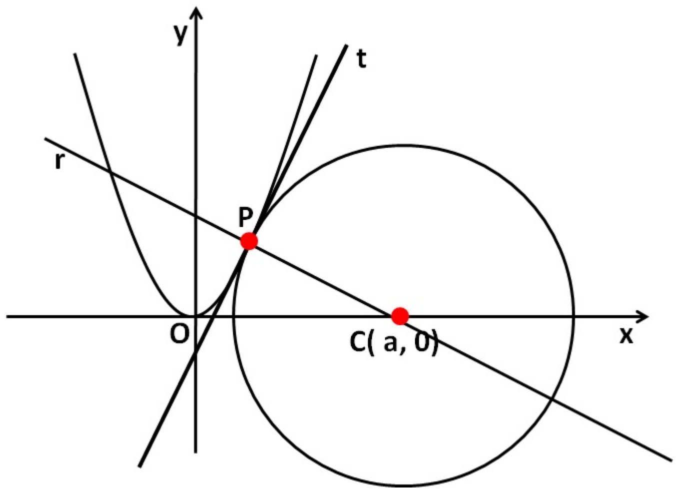

Figura 1.2: Círculo tangente à parábola $y = x^2$, no ponto P, reta radial r e reta tangente t

$$(x-a)^2 + (y-0)^2 = (x_0-a)^2 + (y_0-0)^2 \tag{1.1}$$

A condição de tangência exige que a Equação (1.1) e a equação da curva $y = f(x)$ tenham uma raiz dupla em $P(x_0; y_0)$, nos permitindo assim, determinar o valor de a, abscissa do centro do círculo tangente à curva no ponto $P(x_0; y_0)$ e, portanto, sua equação, ou seja, queremos que o sistema:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-0)^2 = (x_0-a)^2 + (y_0-0)^2 \\ y = f(x) \end{cases}$$

tenha uma única solução.

Encontrado o valor de a, temos que a reta r, que passa pelos pontos $(a, 0)$ e $P(x_0, y_0)$, tem coeficiente angular:

$$m_r = \frac{y_0}{x_0 - a}$$

A reta t, tangente ao círculo no ponto $P(x_0, y_0)$, é a tangente à curva no mesmo ponto $P(x_0; y_0)$ e, como esta é perpendicular à reta radial r, sua inclinação, é calculada por:

$$m_T = -\frac{1}{m_r} = \frac{a - x_0}{y_0}$$

Note que, no procedimento acima, o conceito de limite não é usado.

Exemplo 1.2.1. *Usando o método das tangentes de Descartes, encontre a inclinação da reta tangente à curva* $y = \sqrt{x}$, *no ponto* $P(1,1)$.

De fato, substituindo $y = \sqrt{x}$ *na equação (1.1), obtém-se:*

$$(x-a)^2 + x = (1-a)^2 + 1$$

Portanto:

$$x^2 - 2ax + a^2 + x - 2 + 2a - a^2 = 0$$

Que pode ser simplificada em:

$$x^2 + (1-2a)x + 2(a-1) = 0$$

Sabendo que $x = 1$ *é uma solução dessa equação, podemos escrever o primeiro membro na forma fatorada, como:*

$$(x-1).(x+2-2a) = 0$$

Mas, a condição de tangência, requer que as raízes da equação, x_1 *e* x_2, *sejam tais que* $x_1 = x_2 = 1$, *assim:*

$$1 + 2 - 2a = 0$$

Desta forma $a = \frac{3}{2}$.

A inclinação da reta radial é $m_r = \frac{1}{(1-\frac{3}{2})} = -2$, *e a inclinação da reta tangente é* $m_T = \frac{1}{2}$.

Embora, para o ensino médio, o método das tangentes de Descartes tenha, às vezes, seu cálculo complicado, seu conceito é simples, claro e inequívoco, pois não envolve a ideia de pequenos incrementos de uma variável independente (desenvolvido por Fermat, também na década de 1630), e, portanto, não envolvendo o conceito de limite ou infinitésimo.

1.3 Outro método para calcular derivada

A equação fundamental de uma reta não vertical, de inclinação m, que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$, equação (1.2), foi primeiramente introduzida por Gaspard Monge (1746-1818), em um artigo publicado em 1784.

$$y - y_0 = m.(x - x_0) \tag{1.2}$$

Figura 1.3: Gaspard Monge

Utilizaremos a equação fundamental da reta para apresentar outro método geométrico para o cálculo de derivadas.

Dada uma função $y = f(x)$, queremos calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto $P(x_0, y_0)$, onde $y_0 = f(x_0)$.

Sabemos que toda reta que passa por $P(x_0, y_0)$ tem equação:

$$y - y_0 = m.(x - x_0)$$

O objetivo aqui é encontrar o valor de m, ou seja, sua inclinação.

Sabemos que, como a reta é tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, y_0)$, devemos encontrar o valor de m, para que o sistema:

$$\begin{cases} y - y_0 = m.(x - x_0) \\ y = f(x) \end{cases}$$

possua uma única solução. A desvantagem deste método é que, nem sempre, o sistema acima é de fácil resolução.

Aplicaremos esse método para algumas funções:

Exemplo 1.3.1. *Cálculo da derivada da função $f(x) = x^2$ no ponto $P(x_0, y_0)$*

A reta tangente à parábola $y = x^2$, Figura 1.4, no ponto $P(x_0, y_0)$, pode ser representada por uma equação do tipo:

$$y - y_0 = m.(x - x_0) \tag{1.3}$$

onde: $y_0 = {x_0}^2$ e m é a inclinação da reta tangente à parábola no ponto P.

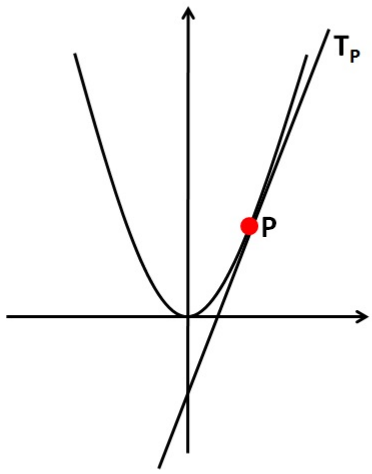

Figura 1.4

A reta tangente (1.3) e a parábola

$$y = x^2 \tag{1.4}$$

tem o ponto P em comum, veja Figura 1.4, onde x_0 é uma raiz dupla, uma vez que a reta é tangente à parábola.

Substituindo (1.4) em (1.3), temos:

$$x^2 - x_0^2 = m.(x - x_0)$$

Assim:

$$(x - x_0).(x + x_0) = m.(x - x_0)$$

Logo:

$$(x - x_0).(x + x_0 - m) = 0$$

As duas soluções, x_1 e x_2, dessa equação são:

$$x_1 - x_0 = 0$$

E:

$$x_2 + x_0 - m = 0$$

Como x_0 é raiz dupla, temos que:

$$x_1 = x_2 = x_0$$

Portanto:

$$x_0 + x_0 - m = 0 \Rightarrow m = 2.x_0$$

Afirmamos que a inclinação da curva $y = x^2$, em x_0 é $2x_0$ e, de uma forma geral, em x é $2x$.

Como visto acima, a inclinação de uma curva $y = f(x)$ pode variar de ponto a ponto, assim, ela é uma função que mede taxa de variação da função $y = f(x)$, sendo denominada "função derivada" e denotada, comumente por $y = f'(x)$. Quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in D(f)$, dizemos que a função f é derivável.

Exemplo 1.3.2. *Função Constante: $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.*

Se $f(x) = c$ é constante, então $y = c$ representa uma reta horizontal cuja inclinação é 0 para qualquer x. Daí $(c)' = 0$.

Exemplo 1.3.3. *Função Afim: $f(x) = mx + n$, com $m \neq 0$.*

Se $f(x)$ é uma função afim, então $y = mx+n$ representa uma reta cuja inclinação é m, para qualquer x, portanto $(mx + n)' = m$.

Exemplo 1.3.4. *Função: $f(x) = x^3$*

Se $f(x) = x^3$, para obtermos a inclinação da reta tangente à curva $y = x^3$, no ponto $P(x_0, y_0)$, devemos resolver as seguintes equações simultâneas:

$$y - y_0 = m.(x - x_0) \tag{1.5}$$

$$y = x^3 \tag{1.6}$$

Substituindo (1.6) em (1.5), temos:

$$x^3 - {x_0}^3 = m.(x - x_0)$$

Fatorando a equação acima, encontramos:

$$(x - x_0).(x^2 + x.x_0 + x_0^2) = m.(x - x_0)$$

Portanto:

$$(x - x_0).(x^2 + x.x_0 + x_0^2 - m) = 0$$

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação acima e, sabendo-se que x_0 é raiz tripla da equação, pois $P(x_0, y_0)$ é ponto de tangência, temos $x_1 = x_2 = x_3 = x_0$, o que nos leva a:

$$m = 3x_0^2.$$

A abordagem acima pode ser aplicada a qualquer função de potência x^n, onde n é um número inteiro positivo. Dá para mostrar que a função derivada de $f(x) = x^n$ é a função:

$$f'(x) = n.x^{(n-1)}$$

Esta fórmula é válida para qualquer número real n, com exceção de $n = 0$. Por exemplo, $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$. Demonstrar esta afirmação usando o método descrito acima não é simples mas, felizmente o cálculo de derivadas pode ser feito usando softwares de código aberto. Dentre os diversos softwares, disponíveis para fazer esse tipo de cálculo, podemos citar o Geogebra 5.0.180.0-3D.

Definição 1.3.1. *Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável e $y = f'(x)$ a função derivada de f. Dizemos que $y = f(x)$ é a função Antiderivada de $y = f'(x)$ e chamamos o par $(f'(x), f(x))$ de par Derivada-Antiderivada (DA).*

Exemplo 1.3.5. *São exemplos de pares DA:*

$$(0, c),\ (1, x),\ (2x, x^2)\ e\ (3x^2, x^3)$$

Usando o software Geogebra 5.0.180.0-3D, veja Figura 1.5, podemos facilmente encontrar os pares DA para funções comumente usadas, como:

(i) *Função exponencial:* $(\exp^x, \exp^x)$;

(ii) *Função logaritmo natural:* $(\frac{1}{x}, \ln x)$;

(iii) *Função seno:* $(\cos x, \sin x)$

(iv) *Função cosseno:* $(-\sin x, \cos x)$

(v) *Função tangente:* $(\tan^2(x + 1), \tan x)$

1.4 Outras Interpretações de Derivadas

Fisicamente a derivada pode ser entendida como uma velocidade e biologicamente como uma taxa de crescimento. De forma geral, em qualquer campo científico e da vida cotidiana, utilizaremos a Derivada como uma taxa de variação.

Exemplo 1.4.1. *Um carro, em movimento retilíneo e uniforme (MRU), sendo dirigido a uma velocidade constante de $v = 80$ Km/h, por um período de três horas, percorrerá uma distância total, S, dada por:*

$$S(t) = v.t$$

Assim:

$$S(3) = 80.3 = 240Km$$

O par ordenado $(v; v.t)$ ou $(v; s)$ é um par de DA para um tempo t em geral.

Exemplo 1.4.2. *Um objeto em Queda Livre tem sua distância de queda igual a:*

$$S = \frac{gt^2}{2}$$

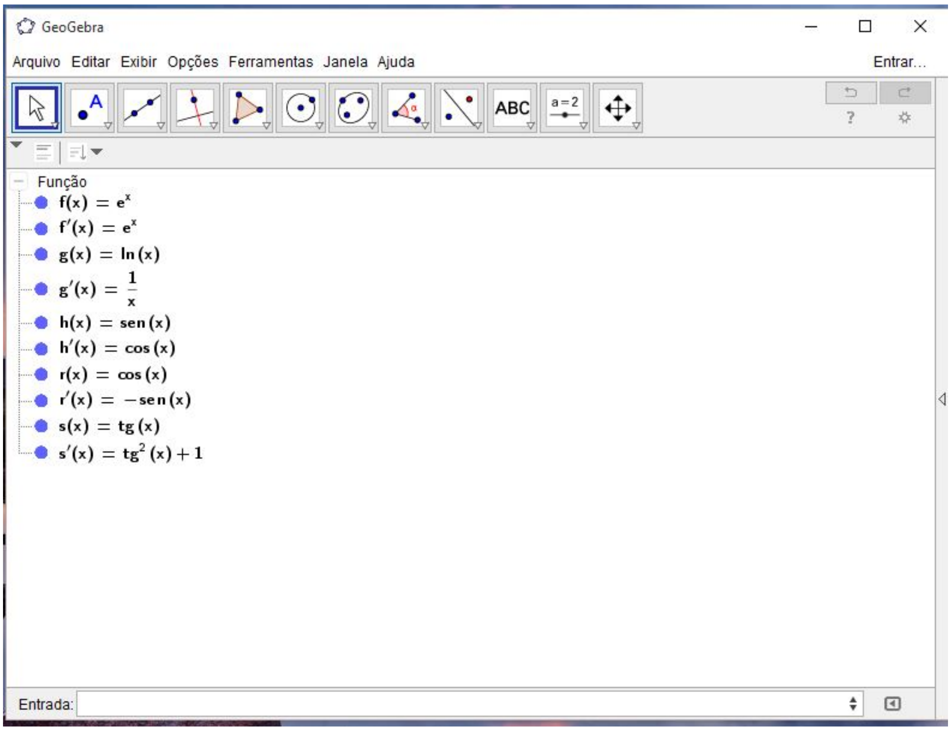

Figura 1.5: Cálculo do par DA de algumas funções, no Geogebra 5.0.180.0-3D

E sua velocidade de queda é:

$$v = g.t$$

Onde $g = 9,8m/s$ *é a aceleração gravitacional da Terra. Assim* $S'(t) = gt$ *e* $(gt, \frac{gt^2}{2})$ *é um par DA.*

Em geral, o significado de uma derivada é a taxa de variação da função $f(x)$ em relação a variável independente x, que pode ser tanto tempo ou localização espacial.

Capítulo 2

Incremento de Altura e o Conceito de Integral

2.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo,introduziremos o conceito de Integral, como o incremento da altura de uma curva antiderivada, a partir do uso direto dos pares (DA).

A abordagem da Integral, como um incremento em altura de uma curva antiderivada, tem sido defendida por P. Lin, na China, há mais de duas décadas(Samuel S.P. Shen eQunLin).

Definimos a área sob a curva de um integrando pela integral, e, em seguida, explicamos por que a definição é razoável. Note que esta é uma inversão da forma tradicional, já que define-se uma Integral através do cálculo da área sob a curva de um integrando. Usaremos a seguinte notação, para representar simbolicamente a Integral de f(x) definida no intervalo $[a, b]$:

$$I[f(x), a, b]$$

2.2 Incremento de altura e Integral

Ao representarmos graficamente uma curva, não nos preocupamos unicamente com a sua taxa de variação, inclinação, mas também, dentre outros aspectos, com os altos e baixos da curva, isto é, o incremento em altura na curva de um ponto para outro.

Ao dirigirmos em uma estrada íngreme, intuimos que a inclinação e o incremento em altura da estrada estão relacionados, aqui, apresentaremos esta relação. A inclinação já foi definida como derivada, no capítulo anterior, e neste, o incremento em altura será definido como uma Integral. Para uma função $y = f(x)$, o incremento de $A = (a; f(a))$

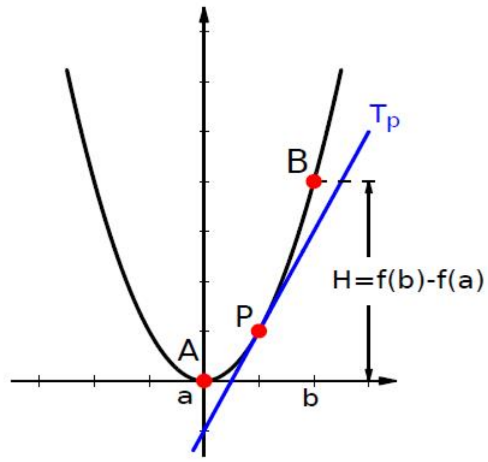

Figura 2.1

para $B = (b; f(b))$ é $f(b) - f(a)$, como mostrado na Figura 2.1. Outra notação para o incremento é:

$$f(b) - f(a) = f(x)\Big|_a^b$$

Este incremento em altura é utilizado para descrever a definição de integral a seguir:

Definição 2.2.1. *(Definição de integral como incremento em altura de uma curva): O incremento $f(b)-f(a)$, da função $y = f(x)$, de $A = (a, f(a))$ para $B = (b, f(b))$ é definida como a integral da função derivada $f'(x)$ no intervalo $[a; b]$ e é denotada por:*

$$I[f'(x), a, b] = f(b) - f(a)$$

Aqui, $f'(x)$ é chamado de integrando e $[a, b]$ é denominado intervalo de integração.

Exemplo 2.2.1. *Sejam $f(x) = x$, $f'(x) = 1$, e $[a; b] = [0; 2]$, temos:*

$$I[f'(x); a; b] = I[1; 0; 2] = x\Big|_0^2 = 2 - 0 = 2$$

A área entre $y = 1$ e $y = 0$, no intervalo de $[0, 2]$ é também igual a 2u.a. (ver Figura 2.2 para $f'(x) = 1$, $a = 0$ e $b = 1$).

Exemplo 2.2.2. *Ao integramos a velocidade v(t),obteremos a distância, $I[v(t); a; b]$, percorrida do $t = a$ até $t = b$. Se $v(t)$ é uma constante e igual a $v = 80km/h$, com $a = 8$ horas e $b = 11$ horas, então:*

$$I[80, 8, 11] = 80t|_8^1 1 = 80.(11 - 8) = 240Km$$

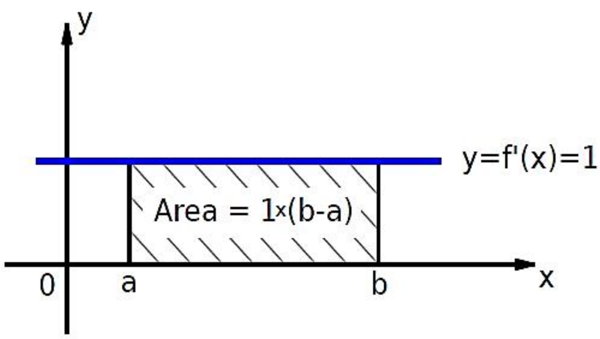

Figura 2.2: A área de um retângulo sob uma reta horizontal.

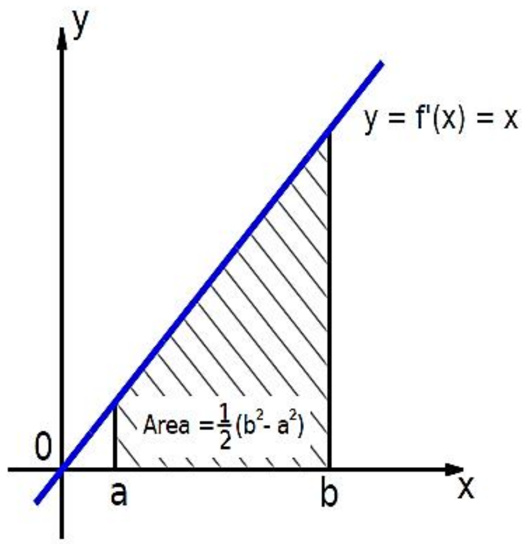

Figura 2.3

Que é a distância total percorrida das 8 às 11 horas. Aqui $80t$ *é uma antiderivada de 80. Se traçarmos o gráfico de* v *em função de* t*, 240 é igual à área do retângulo delimitado por:*

$v = 80$; $v = 0$; $t = 8$ *e* $t = 11$*, ver Figura 2.2, para* $f'(x) = 80$*,* $a = 8$ *,e* $b = 11$*.*

Exemplo 2.2.3. *Seja* $f(x) = \frac{1}{2}x^2$*,* $f'(x) = x$*, e* $[a; b] = [0; 1]$*, temos:*

$$I[f'(x); a; b] = I[x; 0; 1] = \frac{1}{2}.(1^2 - 0^2) = \frac{1}{2}$$

A área sob o integrando $y = x$ *e acima do eixo* $0x$ *em* $[0; 1]$ *é* $\frac{1}{2}$*. (ver Figura 2.3 para* $a = 0$ *e* $b = 1$*).*

Exemplo 2.2.4. *No problema de Queda Livre, a velocidade é uma função linear do tempo,* $v = gt$ *e a integral* $I[gt; 0; x]$ *é a distância percorrida desde o tempo zero ao tempo* x*. A* *região limitada por $v = gt$; $v = 0$; $t = 0$ e $t = x$ é um triângulo com base igual a x, altura gx e área $\frac{1}{2}xgx = \frac{1}{2}gx^2$.*

$$I[gt; 0; x] = \frac{1}{2}gx^2$$

Neste exemplo, escolhemos usar x como um valor arbitrário à direita, assim x pode ser um número tal como 1, 2, ou qualquer outro.

Nos exemplos de (2.2.1) a (2.2.4), a área sob a curva é igual a uma integral. Essa inferência de área igual a uma integral é geralmente verdade. Usaremos a integral $I[f'(x); a; b]$ como definição da área da região delimitada por $y = f'(x)$, o eixo $0x$, $x = a$ e $x = b$. A próxima seção justificará essa definição.

Quando se conhece o par DA, o cálculo de uma integral se resume ao cálculo da expressão $f(b) - f(a)$. Se o par DA não for conhecido, usaremos o Geogebra 5.0.180.0-3D, ou software equivalente, para encontrar a antiderivada ou para avaliar diretamente $I[f'(x); a; b]$. Existem muitos softwares livres e aplicativos online grátis para smartfones que calculam integrais.

A definição da integral de uma função pode ser representada por:

$$I[g(t); a; b] = G(b)–G(a)$$

Onde $G(t)$ é uma antiderivada de $g(t)$. Outra forma de representação é:

$$I[G'(u); a; b] = G(b)–G(a)$$

Nas duas expressões acima, t e u são as variáveis de integração. O valor da integral independe da escolha da variável de integração, assim, podemos usar qualquer símbolo para representar essa variável. Em aplicações práticas, se a variável independente é o tempo, tal como quando a velocidade é uma função de tempo, t é frequentemente utilizado como a variável independente.

Ainda de acordo com a definição de integral, a integral de $f'(t)$ no intervalo $[a; x]$ é:

$$I[f'(t); a; x] = f(x) - f(a)$$

Calculando a derivada, em relação a x, em ambos os lados da equação, temos:

$$(I[f'(t); a; x])' = (f(x) - f(a))' \tag{2.1}$$

Mas $(f(a))' = 0$, pois $f(a)$ é constante em relação a x, tendo assim uma derivada igual a zero.

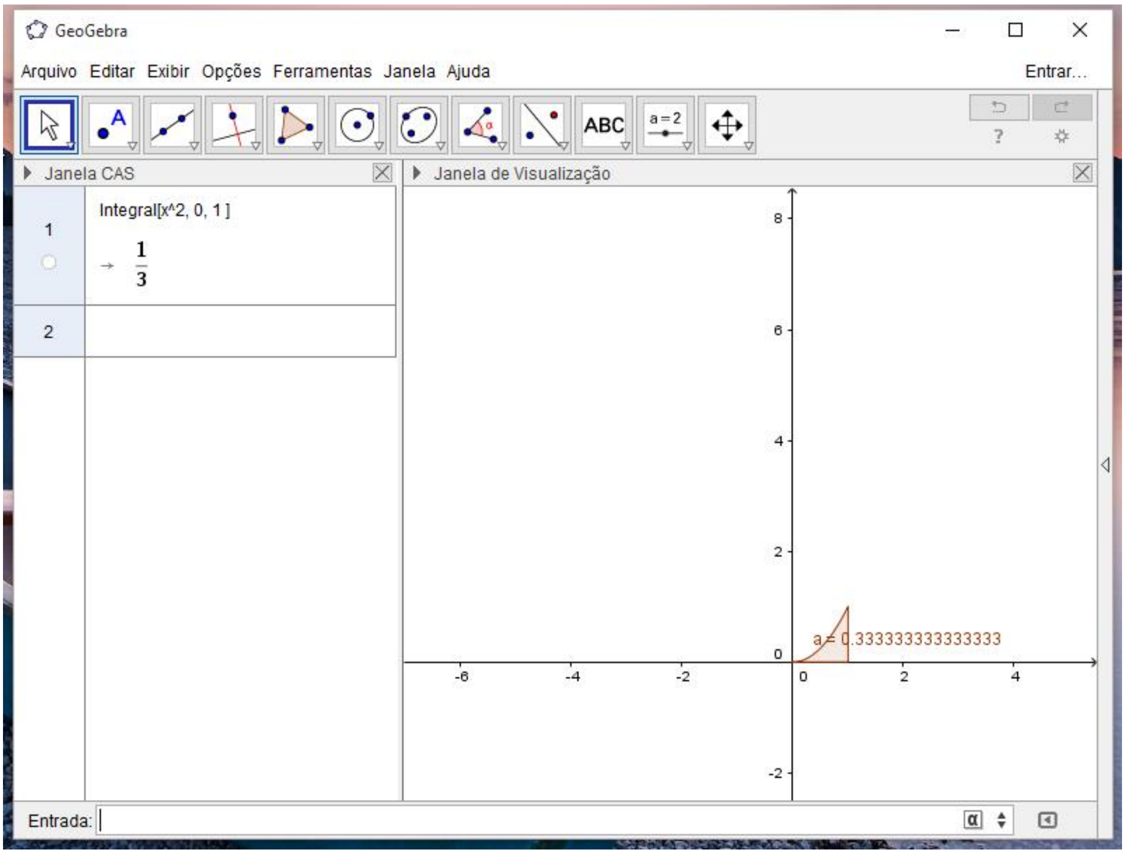

Figura 2.4

A equação (2.1) é muitas vezes chamada de Segunda Parte do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), enquanto que a definição de uma Integral é, na verdade, muitas vezes referida como a Primeira parte do TFC. A segunda parte do TFC nos diz que uma antiderivada pode ser explicitamente expressa por uma Integral, deste modo o TFC conecta a inclinação ao incremento em altura, aumentando nosso senso intuitivo de que o incremento em altura em um intervalo está intimamente relacionado com a inclinação da nossa curva, isto é, a nossa função em estudo.

Exemplo 2.2.5.

$$I[x^2; 0; 1] = (\frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 1/3$$

Pois $(x^2; \frac{x^3}{3})$ *é um par de DA e a área limitada pelas curvas* $y = x^2$*;* $y = 0$ *e* $x = 1$*, obtida através do Geogebra 5.0.180.0-3D, é* $\frac{1}{3}$ *(ver Figura 2.4).*

2.3 Cálculo de área e teorema do valor médio (TVM)

A área delimitada por $y = f'(x)$ e $y = 0$ em $[a; b]$, é simplesmente a medida da área de um retângulo equivalente de comprimento $L = b–a$ e uma largura W (ver

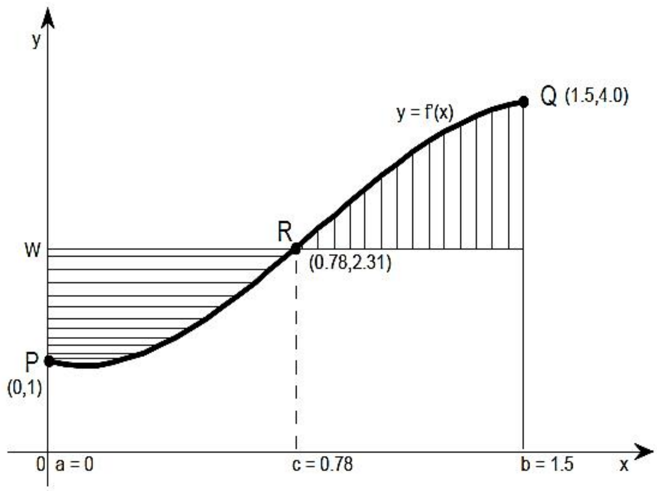

Figura 2.5: Uma Área Interpretada como Integral

Figura 2.5). Isto é, a área hachurada acima de $y = W$ (região verticalmente listrada) é equivalente à área hachurada entre a curva e $y = W$ (região horizontalmente listrada).Matematicamente, temos:

$$I[f'(x); a; b] = L \times W = (b - a).W$$

Isso é verdade, desde que tenhamos:

$$W = \frac{(I[f'(x), a, b])}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Definição 2.3.1. *(Definição de W como valor médio de $f'(x)$ no intervalo $[a; b]$): Seja um retângulo de comprimento $L = b–a$ e largura W, cuja área é equivalente à determinada por $f'(x)$, $y = 0$, $x = a$ e $x = b$. Definiremos W como o valor médio de $f'(x)$, no intervalo $[a, b]$ e denotaremos por:*

$$W = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Assim W é a inclinação da reta secante que liga os pontos A e B, ver Figura 2.6.

Teorema 2.3.1. *TVM Existe c, em $[a; b]$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, se $f'(x)$ está definida para cada x em $[a; b]$.*

Geometricamente, o TVM significa que existe pelo menos um ponto c cuja reta tangente é paralela à reta secante AB. Claro que, isso vale se $y = f(x)$ for uma reta, caso em que c pode ser qualquer ponto em $[a; b]$.

Uma abordagem rigorosa exigiria, para o TVM, uma demonstração para a afirmação acima, o que está fora do âmbito deste trabalho introdutório, já que este é destinado a estudantes do ensino médio.

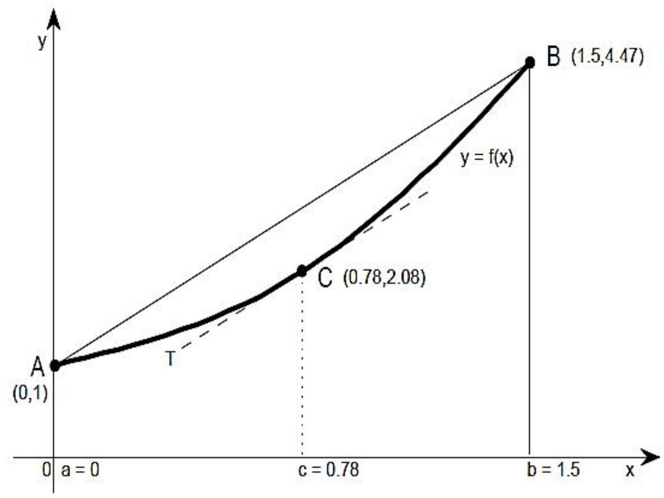

Figura 2.6: Ilustração do Teorema do Valor Médio

Portanto, a integral $I[f'(t);a;x] = f(x) - f(a)$ é o incremento da antiderivada a partir de a até x, e é também a área da região entre a função derivada e $y = 0$ no intervalo $[a;x]$, isto é, a região limitada por $y = f'(t)$; $y = 0$; $t = a$ e $t = x$.

A definição de uma Integral, a partir de uma área, é uma soma de retângulos de larguras tão pequenas quanto se queira, sob a condição de que cada largura tenda a zero. Para os estudantes do ensino médio, a condição de cada largura tender a zero, que é um conceito de limite, aumenta a complexidade e confusão para a definição tradicional de Integral. No ensino médio, a definição de Integral, como o aumento da altura da função antiderivada é mais simples de ser compreendida. A área só é considerada como uma interpretação geométrica adicional, de acordo com o teorema do valor médio. Sob este interpretação da área, temos o seguinte exemplo:

(Note que na Figura 2.6 Há uma reta tangente paralela a reta secante que liga os pontos A e B)

Exemplo 2.3.1. *$I[\sqrt{4-x^2};0;2]$ é a área de um quarto de círculo de raio $r = 2u.c.$, portanto, igual a $\pi u.a.$, desde $y = \sqrt{4-x^2}$ represente um quarto de círculo no primeiro quadrante.*

Calcular a inclinação, pelo método de fatoração, usado para funções polinomiais, é muito trabalhoso em certas situações. Tal procedimento não pode mesmo ser usado para funções transcendentais como $y = \operatorname{sen} x$. O TVM oferece outra maneira de calcular a inclinação da curva, usando a inclinação de uma reta secante.

No TVM, se B tende a A, então o valor médio $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, no TFC, se aproxima da inclinação em A, uma vez que c aproxima de a, já que $c \in [a,b]$. Formalmente, temos:

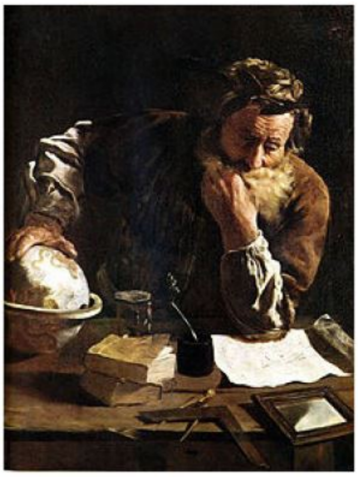

Figura 2.7: Arquimedes

Figura 2.8: Cavalieri

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$$

Isto também pode ser considerado uma definição de derivada e é usada para calcular a derivada em muitos casos.

2.4 Cálculo de Área: Um breve Histórico

Pierre de Fermat utilizou uma sequência de retângulos para calcular a área sob uma parábola. Seus retângulos têm largura variável, lhe permitindo assim, usar a soma de uma série geométrica. Este método de cálculo de área pode ser rastreado até Arquimedes.

O Método da exaustão de Arquimedes (287-212 aC) permitiu-lhe calcular a área sob uma parábola. Bonaventura Cavalieri (1589-1647) usou retângulos de igual largura para calcular a área sob um triângulo e sob uma parábola.

Por volta de 1655-1656, John Wallis (1616-1703) derivou fórmulas algébricas que representam as áreas sob a curva de funções simples, tais como $y = kt$ e $y = kt^2$, entre 0 e x (Ginsburg et al., 1998). Considerando o trabalho já realizado pelas tangentes (ou seja, inclinações ou derivadas) naquele tempo, e considerando o conceito do par DA, nós podemos concluir que Wallis já havia explicitamente demonstrado, antes de Newton, a relação entre a inclinação e a área a partir de exemplos, ou seja, o TFC. (Samuel S.P. Shen e Qun Lin)

Isaac Newton (1642-1727) frequentou o Trinity College, em Cambridge em 1660 e rapidamente tornou-se mestre da Geometria de Descartes. Ele aprendeu muito da Matemática com seu professor e amigo Isaac Barrow (1630-1677), que conhecia o método de tangentes tanto de Descartes quanto de Fermat e também sabia calcular áreas sob algumas funções simples. O Método das Fluxões de Newton, destinava-se a resolver dois

Figura 2.9: John Wallis

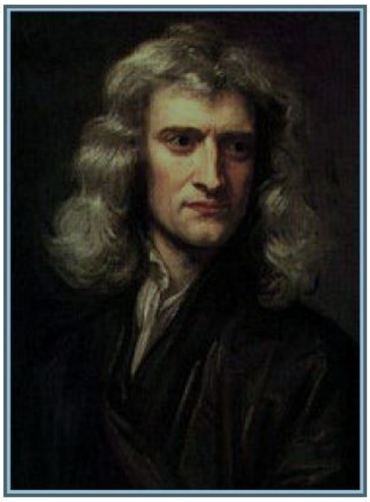

Figura 2.10: Newton

Figura 2.11: Leibniz

problemas fundamentais da Mecânica, que são equivalentes a dois problemas geométricos: a inclinação e o incremento da altura de uma curva. A solução para estes dois problemas também levou ao TFC. (Samuel S.P. Shen e Qun Lin).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) produziu um profundo trabalho, semelhante ao de Newton, que resumia o método de tangentes e o método de área. Sua abordagem é repassada em salas de aula de hoje, incluindo suas notações de derivação e integração.

Newton e Leibniz resumiram o trabalho de matemáticos anteriores e desenvolveram a diferenciação e integração usando os métodos dos infinitésimos e os limites. Depois disso, o Cálculo se tornou uma ferramenta muito útil em Engenharia, Ciências Naturais, e muitos outros campos do conhecimento.

Além dos matemáticos mencionados anteriormente, existiram muitos outros que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo, incluindo Blaise Pascal (1623-1662), Christian Huygens (1629-1695) e Leonhard Euler (1707-1783). A Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) foi creditado o desenvolvimento rigoroso do cálculo a partir da definição de limites. Karl Weierstrass (1815-1897) corrigiu erros de Cauchy e introduziu as letras delta-epsilon que usamos atualmente em Análise Matemática. (Samuel S.P. Shen e Qun Lin).

Capítulo 3

Cálculo da área delimitada pelo gráfico de uma função polinomial $y = f(x)$, usando desigualdades e somatórios

3.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo apresentaremos, de forma sistemática e rigorosa, uma alternativa para o cálculo da área delimitada por uma função polinomial $y = f(x)$, $x = 0$ e $x = a$ ($a > 0$), sem o uso de integrais e pares (DA) usando, para isso, conceitos trabalhados no ensino médio tais como desigualdades e somatórios. Exibiremos a função área $A(x)$ e, provaremos sua unicidade em cada caso analisado. Tal método, além de permitir o cálculo da área, em certos casos, serve como alternativa ao cálculo de derivadas, conforme veremos mais tarde.

3.2 Área delimitada pelo gráfico da parábola $y = x^2$ e pelas retas $x = 0$ e $x = a$

Nesta seção, calcularemos a área embaixo do gráfico da função $y = x^2$, no intervalo $[0, x]$, com $x > 0$. Ao exibir uma função área $A(x)$, provaremos sua existência e, em seguida, demonstraremos a sua unicidade. Para tanto, admitiremos que a área de uma região plana delimitada por uma curva fechada simples é um número positivo (positividade), a área da união de duas regiões que não se sobrepõem, é a soma das suas áreas (aditividade), a área de um retângulo é o produto do comprimento da sua base por sua altura e regiões congruentes tem a mesma área.

Além destes, utilizaremos o resultado obtido na proposição abaixo:

Proposição 3.2.1. *Sejam dois números reais não negativos x' e x. Se $x' > x$, então*

$$(x'-x).x^2 < \frac{x'^3}{3} - \frac{x^3}{3} < (x'-x).(x')^2$$

Demonstração. Como $x' > x$, isto é: $x' – x > 0$, então:

$$3.x^2 < x^2 + x.x' + (x')^2 < 3(x')^2$$

Multiplicando os membros da inequação acima por $(x' – x)$, obtemos:

$$3x^2.(x'-x) < (x^2 + x.x' + (x')^2).(x'-x) < 3(x')^2.(x'-x)$$

Mas:

$$(x')^3 - x^3 = (x'-x).(x^2 + x.x' + (x')^2)$$

Assim:

$$3.x^2.(x'-x) < (x')^3 - x^3 < 3(x')^2.(x'-x)$$

Portanto:

$$(x'-x).x^2 < \frac{x'^3}{3} - \frac{x^3}{3} < (x'-x).(x')^2$$

□

3.2.1 Existência da função área $A(x)$

Seja $A(x)$ a área embaixo da parábola $y = x^2$, no intervalo $[0, x]$, e $A(x')$ a área em $[0, x']$, com $x' > x$. Então a área no intervalo $[x, x']$ é $A(x') – A(x)$ (aditividade).

Observe, na Figura 3.1, que esta área é maior do que a área do retângulo de base $(x' – x)$ e altura x^2, e menor do que a área do retângulo de base $(x' – x)$ e altura $(x')^2$ (aditividade e positividade).

Consequentemente,

$$(x'-x).x^2 < A(x') – A(x) < (x' – x).(x')^2 \tag{3.1}$$

Esta desigualdade é verdadeira para todo $0 \leq x < x'$.

Note, pela Proposição 3.2.1, que a função $A(x) = \frac{x^3}{3}$ satisfaz a inequação dupla (3.1), para todo $0 \leq x < x'$, assim não precisamos provar a existência de tal função. Provaremos, a seguir, a sua unicidade.

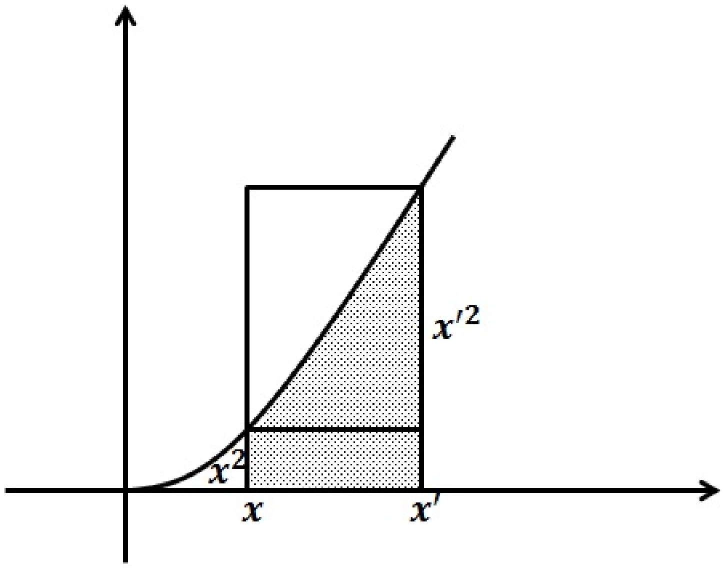

Figura 3.1

3.2.2 Unicidade da função área $A(x)$

Teorema 3.2.1. *Sejam $f(x) = x^2$ uma função definida no intervalo $[a, b]$ e $A(x)$ a área embaixo do gráfico de $y = f(x)$ no intervalo de $[0, x]$. Se:*

- $A(0) = 0$ *e*
- $(x'–x).x^2 < A(x')–A(x) < (x'–x).(x')^2$

Para todos $0 \leq x < x' \leq b$, $A(x)$ é unicamente definida.

Princípio de Arquimedes. *Sendo $x > 0$ e y são dois números reais quaisquer, então, existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$.*

Demonstração. Vamos assumir, por absurdo, que existe uma função diferente $\bar{A}(x)$, satisfazendo (3.1),com $\bar{A}(x) = 0$, de modo que para algum $c \in (a, b]$, $\bar{A}(c) \neq A(c)$.

Tome: $x_k = \frac{k.c}{n}$ onde n é um número inteiro positivo e $k = 0, 1, 2, ..., n$. Então:

$$(x_k - x_{k-1}).x_{k-1}^2 < A(x_k) - A(x_{k-1}) < (x_k - x_{k-1}).x_k^2 \ ; \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Mas:

$$x_k - x_{k-1} = \left(\frac{k.c}{n}\right) - \left(\frac{(k-1).c}{n}\right)$$

Logo:

$$x_k - x_{k-1} = \frac{c}{n}$$

Portanto:

$$\frac{c}{n}.x_{k-1}^2 < A(x_k) - A(x_{k-1}) < \frac{c}{n}.x_k^2 \ ; \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Somando de $k = 1$ até $k = n$:

$$\frac{c}{n}.\sum_0^{n-1} x_k^2 < A(c) < \frac{c}{n}\sum_1^n x_k^2 \tag{3.2}$$

De modo análogo, encontramos:

$$\frac{c}{n}.\sum_0^{n-1} x_k^2 < \bar{A}(c) < \frac{c}{n}.\sum_1^n x_k^2 \tag{3.3}$$

Como:

$$|\bar{A}(c) - A(c)| = max.\{\bar{A}(c) - A(c), A(c) - \bar{A}(c)\}$$

A partir de (3.2) e (3.3), podemos estimar o valor de $|\bar{A}(c) - A(c)|$:

- Se $\bar{A}(c) > A(c)$,então: $|\bar{A}(c) - A(c)| = \bar{A}(c) - A(c)$,e:

$$\begin{cases} \bar{A}(c) < \frac{c}{n}\sum_1^n x_k^2 & + \\ -A(c) < \frac{c}{n}\sum_0^{n-1} x_k^2 \end{cases}$$

$$\bar{A}(c) - A(c) < \frac{c}{n}[c^2]$$

- Se $A(c) > \bar{A}(c)$,então: $|\bar{A}(c) - A(c)| = A(c) - \bar{A}(c)$,e:

$$\begin{cases} A(c) < \frac{c}{n}\sum_1^n x_k^2 & + \\ -\bar{A}(c) < \frac{c}{n}\sum_0^{n-1} x_k^2 \end{cases}$$

$$A(c) - \bar{A}(c) < \frac{c}{n}[c^2]$$

Consequentemente:

$$|\bar{A}(c) - A(c)| < \left[\frac{c}{n}\right].[c^2]$$

Assim:

$$n < \frac{c}{|\bar{A}(c) - A(c)|}$$

Porém, o princípio de Arquimedes nos assegura que existe um número inteiro e positivo n tal que:

$$n.|\bar{A}(c) - A(c)| > c^3$$

Deste modo, somos levados a uma contradição ao assumir que $\bar{A}(c) \neq A(c)$, e devemos portanto rejeitar esta hipótese, provando, assim a unicidade de $A(x)$.

□

3.3 Área delimitada pelo gráfico da função $f(x) = c.x^n$, com $c > 0$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$, e pelas retas $x = 0$ e $x = a$

Proposição 3.3.1. *Sejam dois números reais não negativos x' e x.*

Se $x' > x$,então

$$(x' - x).c.x^n < \frac{(x')^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1} < (x' - x).(x')^{n+1}$$

Demonstração. Como $x' > x$, isto é, $x'–x > 0$, então:

$$(n+1).cx^n < x^n + x^{n-1}.x' + ... + x.(x')^n < (n+1).(x')^n$$

Multiplicando os membros da inequação acima por $(x'–x)$, obtemos:

$$(n+1).(x - x').cx^n < (x - x').(x^n + x^{n-1}.x' + ... + x.(x')^n < (n+1).(x - x').(x')^n$$

Mas:

$$(x')^{n+1} - x^{n+1} = (x' - x).(x^n + x^{n-1}.x' + ... + x'^n)$$

Assim:

$$(n+1).(x - x').cx^n < (x')^{n+}) - x^{n+1} < (n+1).(x - x').(x')^n$$

Portanto:

$$(x' - x).c.x^n < \frac{(x')^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1} < (x' - x).(x')^{n+1}$$

□

3.3.1 Existência da Função Área $A(x)$

Seja $A(x)$ a área embaixo do gráfico da função $f(x) = c.x^n$, com $c > 0$ e n um inteiro positivo, no intervalo $[0, x]$, com $x > 0$. A área no intervalo $[x, x']$ é $A(x')–A(x)$ (aditividade). Observe, na Figura 3.2, que esta área é maior do que a área do retângulo

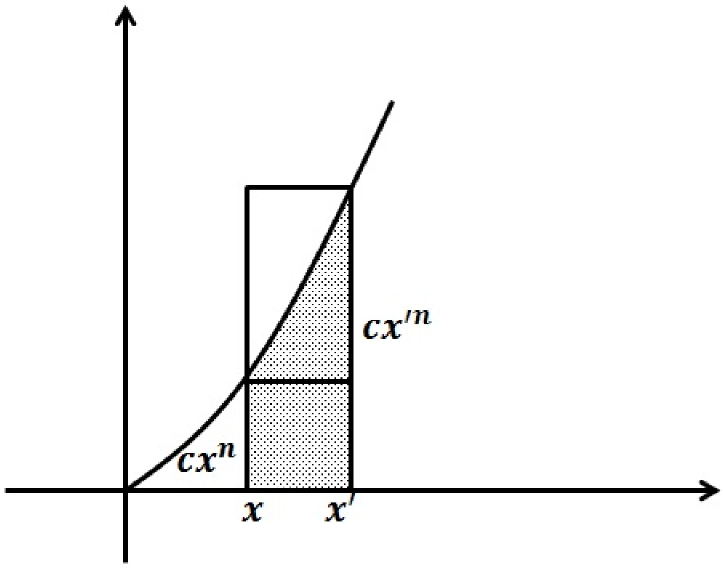

Figura 3.2

de base $(x'–x)$ e altura $c.x^n$, e menor do que a área do retângulo de base $(x'–x)$ e altura $c.(x')^n$ (aditividade e positividade).

Consequentemente,

$$(x'–x).f(x) < A(x')–A(x) < (x'–x).f(x') \quad ; (0 \leq x < x')$$

Note, pela Proposição 3.3.1, que a função $A(x) = \frac{c.x^{n+1}}{n+1}$ satisfaz a inequação dupla acima, para todo $0 \leq x < x'$ e $A(0) = 0$, provando sua existência. A seguir, demonstraremos sua unicidade.

3.3.2 Unicidade da Função Área $A(x)$

Para funções elementares, se $f(x)$ é monótona crescente e positiva no intervalo $[a, b]$, e existe uma função área $A(x)$, então $A(x)$ satisfaz:

- $A(0) = 0$ e
- $(x'–x).f(x) < A(x')–A(x) < (x'–x).f(x')$

Para todo $x < x'$ no intervalo, $A(x)$ pode ser facilmente encontrada sem o uso da teoria dos limites. Ao exibi-la, tornamos desnecessária a prova de sua existência. Demonstraremos que $A(x)$ é a única resposta possível para a área em $[a, x]$.

Como podemos tratar funções monótonas decrescentes, invertendo os sinais da desigualdade na inequação (3.1), este método é suficiente para lidar com funções elementares que são monótonas por partes.

Teorema 3.3.1. *Sejam $f(x)$ uma função elementar não negativa e estritamente crescente no intervalo $a \leq x \leq b$,e $A(x)$ a área embaixo do gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $[a, x]$. Se:*

- $A(a) = 0$, *e*
-] $(x'–x).f(x) < A(x')–A(x) < (x'–x).f(x')$

Para todos $a \leq x < x' \leq b$, $A(x)$ é unicamente definida.

Demonstração. Vamos assumir, por absurdo, que existe uma função diferente $\bar{A}(x)$, satisfazendo (3.1) com $\bar{A}(a) = 0$, de modo que para algum c, $a < c \leq b$, $\bar{A}(c) \neq A(c)$.

Tome:

$$x_k = a + \frac{k.(c-a)}{n},$$

onde né um número inteiro positivo e $k = 0, 1, 2, ..., n$. Então:

$$(x_k - x_{k-1}).f(x_{k-1}) < A(x_k) - A(x_{k-1}) < (x_k - x_{k-1}).f(x_k), \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

Mas:

$$x_k - x_{k-1} = \left(a + \frac{k.(c-a)}{n}\right) - \left(a + \frac{(k-1).(c-a)}{n}\right)$$

Então:

$$x_k - x_{k-1} = \frac{c-a}{n}$$

Portanto:

$$\frac{c-a}{n}.f(x_{k-1}) < A(x_k) - A(x_{k-1}) < \frac{c-a}{n}.f(x_k); \qquad (k = 1, 2, ..., n)$$

Somando de $k = 1$ até $k = n$:

$$\frac{c-a}{n}.\sum_{0}^{n-1} f(x_k) < A(c) < \frac{c-a}{n}.\sum_{1}^{n} f(x_k) \tag{3.4}$$

De modo análogo, encontramos:

$$\frac{c-a}{n}\sum_{0}^{n-1} f(x_k) < \bar{A}(c) < \frac{c-a}{n}.\sum_{1}^{n} f(x_k) \tag{3.5}$$

Como:

$$|\bar{A}(c) - A(c)| = max\{\bar{A}(c) - A(c), A(c) - \bar{A}(c)\}$$

A partir de (3.4) e (3.5), podemos estimar o valor de $|\bar{A}(c) - A(c)|$,

- Se $\bar{A}(c) > A(c)$,então: $|\bar{A}(c) - A(c)| = \bar{A}(c) - A(c)$,e:

$$\begin{cases} \bar{A}(c) < \frac{c-a}{n} \sum_1^n f(x_k) & + \\ -A(c) < \frac{c-a}{n} \sum_0^{n-1} f(x_k) \end{cases}$$

$$\bar{A}(c) - A(c) < \frac{c-a}{n}[f(c) - f(a)]$$

- Se $A(c) > \bar{A}(c)$,então: $|\bar{A}(c) - A(c)| = A(c) - \bar{A}(c)$,e:

$$\begin{cases} A(c) < \frac{c-a}{n} \sum_1^n f(x_k) & + \\ -\bar{A}(c) < \frac{c-a}{n} \sum_0^{n-1} f(x_k) \end{cases}$$

$$A(c) - \bar{A}(c) < \frac{c-a}{n}[f(c) - f(a)]$$

Consequentemente:

$$|\bar{A}(c) - A(c)| < \left[\frac{c-a}{n}\right].[f(c) - f(a)]$$

Assim:

$$n < \frac{(c-a).[f(c) - f(a)]}{|\bar{A}(c) - A(c)|}$$

De modo análogo à demonstração da unicidade da função área $A(x)$, para $f(x) = x^2$, somos levados a uma contradição, o que nos faz rejeitar a hipótese de existência de uma função $\bar{A}(x) \neq A(x)$, provando assim, a unicidade de $A(x)$.

□

3.3.3 A Área Sob o Gráfico de Funções Polinomiais

Para calcular a área sob o gráfico de funções polinomiais, no intervalo no intervalo $[0, x]$, com $x > 0$, precisaremos dos dois teoremas a seguir:

Teorema 3.3.2. *Se f e g são funções não negativas, estritamente crescentes em $x \geq 0$ e A_1 e A_2 são suas respectivas funções área, então $A_1 + A_2$ é a função área de $f + g$.*

Demonstração. Sejam as desigualdades abaixo:

$$(x'-x).f(x) < A_1(x')-A1(x) < (x'-x).f(x') \quad (3.6)$$

$$(x'-x).g(x) < A_2(x')-A_2(x) < (x'-x).g(x') \quad (3.7)$$

Adicionando as inequações (3.6) e (3.7) e ordenando, encontramos:

$$(x'–x).[f(x) + g(x)] < [A_1(x') + A_2(x')]–[A_1(x) + A_2(x)] < (x'–x).[f(x') + g(x')]$$

Note que:

$$(A_1 + A_2)(0) = A_1(0) + A_2(0).$$

□

O uso repetido deste teorema dá as áreas de gráficos de funções polinomiais, em qualquer intervalo $[a, b]$, $a \geq 0$, desde que todos os coeficientes sejam positivos.

Para polinômios onde alguns coeficientes são negativos, podemos escrever a função polinomial como a diferença de dois incrementos de funções polinomiais, p e q. $(f = p–q)$.

Assumimos que estamos lidando com um intervalo para o qual $p(x) > q(x)$, assim o gráfico de $f(x)$ é constituído por um número finito de incrementos ao longo de f que aumentam ou diminuem.

Por definição, suponha, a menos de uma mudança de variável, que f cresça no intervalo $[a, b]$.

Teorema 3.3.3. *Sejam p e q funções estritamente crescentes em $[a, b]$, não-negativas, e sejam P e Q as funções área correspondentes. Se $f = p - q$ é positiva e crescente (ou decrescente) em $[a, b]$, então a função área para f é dada por $A = P–Q$.*

Demonstração. (Geométrica)

Iremos demonstrar o caso em que $f = p–q$ é crescente, pois o caso decrescente é análogo.

Observe, na Figura 3.3, que a área em $[x, x'](a \leq x < x' \leq b)$ e abaixo de $y = p(u)$ com $x \leq u \leq x'$ é $P(x')–P(x)$. A área correspondente abaixo da linha horizontal $y = p(x)$ é dada por $(x'–x).p(x)$. Por conseguinte, a área R é $P(x')–P(x)–(x'–x).p(x)$. Da mesma forma, a área S é $Q(x')–Q(x)–(x'–x).q(x)$.

Desde que $p–q$ cresça em $[x, x']$,

$$p(u)–q(u) > p(x)–q(x) \quad ; \quad (x < u)$$

Assim:

$$p(u)–p(x) > q(u)–q(x)$$

Fazendo:

$r(u) = p(u)–p(x)$ e $s(u) = q(u)–q(x)$

Temos:

$r(u) > s(u)$ e, consequentemente: $R > S$, isto é:

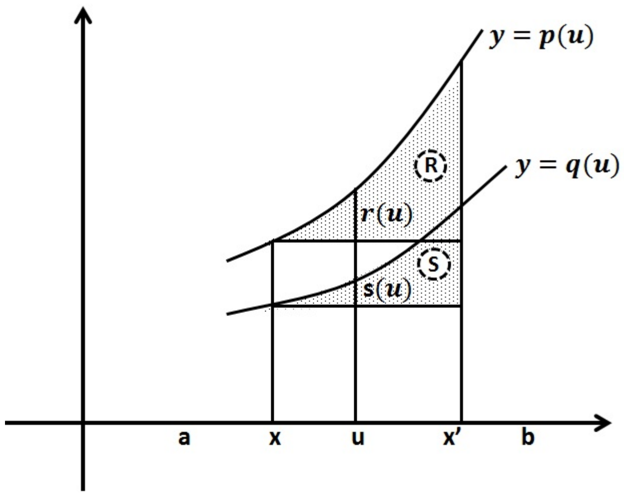

Figura 3.3

$$P(x')–P(x)–(x'–x).p(x) > Q(x')–Q(x)–(x'–x).q(x)$$

Portanto:

$$[P(x')–Q(x')] - [P(x)–Q(x)] > (x'–x).[p(x)–q(x)]$$

Assim:

$$A(x')–A(x) > (x'–x).f(x)$$

De forma análoga:

$$p(u)–q(u) < p(x')–q(x') \quad (u < x')$$

Portanto, encontramos:

$$A(x')–A(x) < (x'–x).f(x')$$

Desde que $A(0) = P(0)–Q(0) = 0$, $A = P–Q$ é a função área requerida.

□

Para fazer a demonstração analítica, utilizaremos as duas Proposições enunciadas a seguir:

Proposição 3.3.2. *Para determinado $x \in [a, b]$, $P(u)–P(x)–(u–x).p(x)$ é a função área de $p(u)–p(x)$, que se anula em $u = x$. Raciocínio análogo para Q e q segue imediatamente.*

Demonstração. Para $x \leq u < u' \leq x'$:

$$\begin{cases} (p(u).(u' - u) < P(u') - P(u) \\ P(u') - P(u) < p(u').(u' - u)) \end{cases}$$

Adicionando $-p(x).(u'-u)$ aos membros das inequações acima:

$$\begin{cases} (p(u).(u' - u) - p(x).(u' - u) < P(u') - P(u) - p(x).(u' - u) \\ P(u') - P(u) - p(x).(u' - u) < p(u').(u' - u) - p(x).(u' - u)) \end{cases}$$

Assim:

$$(*) \begin{cases} [p(u) - p(x)].(u' - u) < [P(u') - p(x).u'] - [P(u) - p(x).u] \\ [P(u') - p(x).u'] - [P(u) - p(x).u] < [p(u') - p(x)].(u' - u) \end{cases}$$

Somando $-P(x)+x.p(x)+P(x)-x.p(x)$ ao segundo membro da primeira inequação de (*) e ao primeiro membro da segunda inequação de (*), encontramos o resultado desejado.

□

Proposição 3.3.3. *Tome $r(u) = p(u)–p(x)$, $s(u) = q(u)–q(x)$ e $r(u)–s(u)$, de modo que sejam não negativos e crescentes em $x \leq u \leq x'$ e $r(x) = s(x) = 0$. Faça $R(u)$ e $S(u)$ serem as funções áreas de $r(u)$ e $s(u)$, que se anulam em $u = x$. Então:*

$$R = R(x') > S = S(x')$$

Demonstração. Subdivida $[x, x']$ em $2n$ intervalos cada um de comprimento $\Delta u = \frac{x'-x}{2n}$.

Em cada subintervalo $[u_{k-1}, u_k]$:

$$R(u_k) - R(u_{k-1}) > r(u_{k-1})\Delta u \tag{3.8}$$

E:

$$S(u_k) - S(u_{k-1}) < s(u_k)\Delta u \tag{3.9}$$

Mude os sinais em (3.9) e some (3.8) e (3.9), então:

$$(R–S)(u_k) - (R–S)(uk - 1) > [r(u_{k-1})–s(u_k)]\Delta u$$

Somando de $k = 1$ até $k = 2n$,

$$(R - S)(x') = R - S > \sum_{1}^{(} 2n - 1)r(u_k) - \sum_{1}^{2n} s(u_k)\Big]\Delta u$$

Mas:

$$\left[\sum_{1}^{2n-1} r(u_k) - \sum_{1}^{2n} s(u_k)\right]\Delta u = \sum_{1}^{2n}[r(u_k) - s(u_k)]\Delta u - r(x')\Delta u$$

Note que:

$$\sum_{n}^{2n}[r(u_k) - s(u_k)]\Delta u < \sum_{1}^{2n}[r(u_k) - s(u_k)]\Delta u$$

Portanto:

$$(R - S)(x') = R - S > \sum_{n}^{2n}[r(u_k) - s(u_k)]\Delta u - r(x')\Delta u$$

Como:

$$d = r(u_n) - s(u_n) < r(u_k) - s(u_k), \quad \forall k > n$$

$$\sum_{n}^{2n}[r(u_n) - s(u_n)]\Delta u < \sum_{n}^{2n}[r(u_k) - s(u_k)]\Delta u$$

Temos que:

$$d.\sum_{n}^{2n} \Delta u < \sum_{n}^{2n}[r(u_k) - s(u_k)]\Delta u$$

Assim:

$$d.(u_{2n} - u_n) = d.\left(\frac{x' - x}{2}\right) < \sum_{n}^{2n}[r(u_k) - s(u_k)]\Delta u$$

Subtraindo $r(x').\Delta u$ dos dois membros da inequação acima:

$$d.\left(\frac{x' - x}{2}\right) - r(x').\Delta u < \sum_{n}^{2n}[r(u_k) - s(u_k)]\Delta u - r(x').\Delta u$$

Assim:

$$(R - S)(x') = R - S > d.\left(\frac{x' - x}{2}\right) - r(x').\Delta u$$

Fazendo:

$$\Delta u < \frac{(x' - x)d}{2r(x')}$$

Teremos:

$$d.\left(\frac{x' - x}{2}\right) > r(x').\Delta u \Rightarrow d.\left(\frac{x' - x}{2}\right) - r(x').\Delta u > 0$$

Consequentemente:

$$R–S > 0 \quad e \quad R > S.$$

□

3.4 Considerações sobre o método

No presente método, para o cálculo da área limitada por funções polinomiais $f(x)$, tornamos evidente que a ordenada da função f representa a derivada do que chamamos a função área A. Assim, esse método se torna uma alternativa à determinação de derivadas de funções polinomiais, proposta no capítulo 01, sem o uso de limites. Quando f cresce em $[a, b]$, o gráfico de $y = A(x)$ é convexo e é caracterizado pelo fato de que a curva se encontra acima da tangente, exceto em um ponto.

De fato, para $a < c < x \leq b$:

$$(x - c).f(x) < A(x) - A(c) \Rightarrow A(x) > A(c) + f(c).(x - c)$$

Para $a \leq x < c$:

$$A(c) - A(x) < (c - x).f(x) \Rightarrow A(x) > A(c) + f(c).(x - c)$$

Assim $A(x)$ está sobre $y = A(c) + f(c).(x - c)$ para todo $x \neq c$ em $[a, b]$.

De modo semelhante, se f decresce, $A(x) < A(c).(x–c)$ para $x \neq c$.

É fácil mostrar que se $A(x)$ tem uma derivada em (a, b) o seu gráfico não tem saltos finitos. Daqui resulta que se A tem uma derivada, então é única. Este método permite a obtenção de resultados que são muito similares aos do cálculo elementar.

Capítulo 4

Aplicações do Cálculo na resolução de problemas

Problema 4.0.1. *(Engenharia de Produção)*

De todos os cilindros circulares retos de volume V, qual a relação entre a medida do raio da base, R, e a altura, h, para que a área total, S, seja mínima?

Resolução:

Para um cilindro circular reto, temos que:

$$V = \pi R^2 h(58) \tag{4.1}$$

$$S = 2\pi R h + 2\pi R^2 \tag{4.2}$$

Como o volume do cilindro é constante e igual a V, de (4.1):

$$h = \frac{V}{\pi R^2} \tag{4.3}$$

Substituindo (4.3) em (4.2):

$$S(R) = 2\pi R\left(\frac{V}{\pi R^2} + R\right)$$

Para encontrar o valor de R que minimiza a área total, devemos fazer $S'(R) = 0$, assim:

$$S'(R) = 2.\left(-\frac{V}{R^2} + 2\pi R h\right) = 0 \quad \therefore$$

$$-\frac{V}{R^2} + 2\Pi R h = 0 \Rightarrow \frac{V}{R^2} = 2\Pi R h \tag{4.4}$$

Substituindo (4.1) em (4.4):

$$\frac{\pi R^2 h}{R^2} = 2\pi R h \Rightarrow h = 2R$$

Assim, dentre todos os cilindros circulares retos de volume V, o de menor área total é aquele em que h=2R.

Problema 4.0.2. *(Biologia)*

Ao tossimos, a traqueia se contrai e aumenta a velocidade do ar que passa. Considerando algumas hipóteses razoáveis sobre a elasticidade da parede da traqueia e de como a velocidade do ar próximo às paredes é reduzida pelo atrito, a velocidade média v do fluxo de ar, pode ser modelada pela equação:

$$v(r) = -cr^3 + cr_0.r^2$$

Onde r_0 é o raio, em centímetros da traqueia em repouso e c é uma constante positiva, cujo valor depende, em parte, do comprimento da traqueia. Determine o valor de r que maximiza v.

$$v'(r) = -3cr^2 + 2cr_0 r$$

Para encontrar o valor de r que maximiza v, devemos fazer $v'(r) = 0$, assim:

$$-3cr^2 + 2cr_0.r = 0 \quad \therefore$$

$r = 0$ *(não convém) ou* $r = \frac{2r_0}{3}$

Assim, v é maior, quando a traqueia estiver, aproximadamente, 33% contraída.

Problema 4.0.3. *(Administração)*

Uma companhia aérea fretou um avião de 50 lugares, para uma empresa de turismo, com as seguintes condições,indicadas abaixo:

Cada passageiro pagará R$ 500,00, se todos os 50 lugares estiverem ocupados. Se existirem lugares vazios, cada passageiro pagará um acréscimo de R$ 25,00 por lugar não ocupado.

Qual o número de lugares vendidos que maximizam a receita da companhia aérea?

Resolução:

Sendo x, o número de lugares vazios na aeronave, a receita da companhia pode ser obtida através da expressão:

$$R(x) = (50 - x).(500 + 25x)$$

$$R(x) = 25000 + 1250x - 500x - 25x^2 \therefore$$

$$R(x) = -25x^2 + 750x + 25000 \tag{4.5}$$

Para calcular o número de lugares vazios que maximiza a receita, devemos ter $R'(x) = 0$:

$$R'(x) = -50x + 750 = 0$$

$$50x = 750 \Rightarrow x = 15$$

Se $x = 15$ lugares vazios maximizam a receita, então a companhia deverá vender um total de $50 - 15 = 35$ lugares.

Problema 4.0.4. *(Medicina)*

A reação do organismoà administração de certo medicamento é frequentemente representada por uma função da forma:

$$R(d) = -\frac{d^3}{3} + c.\frac{d^2}{2}$$

Onde d é a dose aplicada e c (uma constante) é a dose máxima que pode ser administrada. A taxa de variação de R em relação à d é chamada desensibilidade, $S = R'(d)$. Qual o valor de d para que maximiza a sensibilidade?

Resolução:

A sensibilidade pode ser obtida pela expressão:

$$S(d) = -d^2 + c.d$$

Para calcularmos o valor de d que maximiza a sensibilidade, devemos fazer

$$S'(d) = 0$$

, assim:

$$S'(d) = -2d + c = 0$$

Portanto:

$$2d = c \Rightarrow d = \frac{c}{2}$$

Então a sensibilidade será máxima quando a dose aplicada for igual à metade da dose máxima que pode ser administrada.

Problema 4.0.5. *(Física)*

A equação horária do movimento de um ponto material é dada por

$$S(t) = t^2 - 10t + 2,$$

com S em metros e $t \geq 0$, em segundos. Determine:

(i) A equação horária da velocidade;

(ii) A velocidade inicial do ponto material;

(iii) A velocidade do ponto material em $t = 10$ s;

(iv) A aceleração do ponto material.

Como a velocidade $v(t)$ é tal que:

$$v(t) = S'(t)$$

Então:

$$v(t) = 2t - 10 \tag{4.6}$$

Para calcular a velocidade inicial do ponto material, v_0, devemos substituir $t = 0$, em (4.6), assim:

$$v_0 = 2.(0) - 10 = -10m/s$$

Calculando a velocidade, para $t = 10s$, temos:

$$v(10) = 2.(10) - 10 = 10m/s$$

Como a aceleração, a, é a taxa de variação da velocidade, temos:

$$a = v'(t) = 2m/s^2$$

Capítulo 5

Considerações Finais

No presente trabalho apresentamos uma introdução aos conceitos de Derivada e Integral, sem o uso da teoria limites, para uso no ensino médio.

Geometricamente, derivadas foram definidas diretamente, a partir da inclinação de uma reta tangente à curva, num ponto P e, algebricamente, derivadas e antiderivadas foram introduzidas simultaneamente como um par DA.

Em seguida, definimos uma Integral como o incremento da altura da antiderivada. Este incremento foi interpretado geometricamente como a área da região delimitada pela função do integrando, o eixo horizontal, e o intervalo de integração. A justificativa desta interpretação foi dada para demonstrar que esta definição da área era razoável e matematicamente rigorosa.

Constatamos que, para a maioria dos estudantes do ensino médio, o Teorema do Valor Médio, é intuitivamente verdadeiro, não sendo recomendado, neste trabalho introdutório, demonstrá-lo.

Consideramos que a abordagem do limite para o Cálculo é um método excelente para a obtenção de derivadas. Na era pré-computador, esta abordagem era obviamente essencial no cálculo de derivadas de uma variedade de funções, porém, em nossa era atual, essa abordagem é menos essencial e pode ser desnecessária numa etapa introdutória. Neste curso, recomendamos o uso de softwares livres para cálculo de pares DA, que não sejam de fácil obtenção pelo método das tangentes de Descartes.

Apesar das ideias de Cálculo, descritas neste trabalho, virem de aplicações práticas, mantivemos o rigor e lógica Matemática suficiente.

Abordagens mais sofisticadas do Cálculo, principalmente devido a Cauchy e Weierstrass certamente enriqueceram os trabalhos começados por Arquimedes, Descartes, Fermat, Wallis, Newton, Leibniz e outros, entretanto, nos dispusemos a mostrar que é possível introduzir os conceitos básicos do cálculo, sem o uso de limites e com notações mais simples, ideal para um curso introdutório no ensino médio.

Nossa descrição do método de cálculo demonstrou que se evitarmos o cálculo da área debaixo de uma curva e definirmos uma integral pelo incremento em altura, podemos facilmente estender o método das tangentes de Descartes para estabelecer a teoria de diferenciação e integração considerando a inclinação, o par DA, e o incremento em altura.

No capítulo 03 foi apresentado um modo de se calcular a área limitada por funções polinomiais e, tornamos evidente que a ordenada da função f, representa a derivada do que chamamos a função área A. Assim, esse método dá uma forma de encontrar derivadas sem o uso de um processo de limite, como alternativa ao apresentado no capítulo 01.

É fácil mostrar que se $A(x)$ tem uma derivada em (a, b) o seu gráfico não tem saltos finitos. Daqui resulta que se A tem uma derivada, então é única. Este método permite a obtenção de resultados que são muito similares aos de cálculo elementar.

É frequentemente enfatizado que as desigualdades devem ser estudadas no ensino médio, mas as aplicações habitualmente dadas não convencem a maioria dos estudantes de sua importância. O fato de que os resultados, tradicionalmente encontrados pelos métodos de cálculo, podem ser obtidos da álgebra das desigualdades, imediatamente nos abre aplicações significativas desta álgebra. Além disso, ele permite que o aluno, possa lidar com essas aplicações sem as sutilezas da teoria do limite.

No capítulo 04, apresentamos alguns problemas que mostraram como o Cálculo é relevante ao desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento, nos convencendo que o trabalho aqui desenvolvido é uma resposta possível para o problema de ensinar cálculo no ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] F. Cajori, A History of Mathematics (pp. 162-198), 4th ed., Chelsea Publishing Co., New York, 534pp, 1985.

[2] J.L. Coolidge, The story of tangents. American Math. Monthly 58 (1951) 449-462.

[3] D. Ginsburg, B. Groose, J. Taylor, and B. Vernescu, The History of the Calculus and the Development of Computer Algebra Systems, Worcester Polytechnic Institute Junior-Year Project, http://www.math.wpi.edu/IQP/BVCalcHist/calctoc.html 1998

[4] SAMUEL S.P. SHEN, QUN LIN, DD Calculus. http://arxiv.org/pdf/1404.0070.pdf

[5] R.M. Range, Where are limitsneeded in calculus? Amer Math Monthly 118 (2011) 404-417.

[6] J. Susuki, The lostcalculus (1637-1670): Tangency and Optimization with out limits. Mathematics Mag. 78 (2005) 339-353.

[7] D. E. Richmund, Areas e Volumes without Limit Process, American Mathematical Monthly – 05 (1966) (477-483).