UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

LUIZ EDUARDO LANDIM SILVA

DESIGUALDADES ENTRE AS MÉDIAS GEOMÉTRICA E ARITMÉTICA E DE CAUCHY-SCHWARZ

FORTALEZA-CE
2013

LUIZ EDUARDO LANDIM SILVA

DESIGUALDADES ENTRE AS MÉDIAS GEOMÉTRICA E ARITMÉTICA E DE CAUCHY-SCHWARZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador:
Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

FORTALEZA-CE
2013

LUIZ EDUARDO LANDIM SILVA

DESIGUALDADES ENTRE AS MÉDIAS GEOMÉTRICA E ARITMÉTICA E DE CAUCHY-SCHWARZ

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 23/03/2013

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Federal do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por ter me dado força, saúde, coragem e determinação diante de tantas dificuldades que a vida nos oferece.

Aos meus pais pelo amor, exemplo e incentivo dado, desde cedo, para que me dedicasse aos estudos.

Aos meus filhos que me motivam a melhorar como pessoa e profissional.

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) por possibilitar a minha participação numa pós-graduação stricto-sensu, estando em pleno exercício em sala de aula.

Ao meu orientador professor Marcos Melo, pela sua orientação e apoio à realização deste trabalho.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará que acreditaram e participaram do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT).

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará que me ajudou custeando muitas das minhas passagens e concentrou em apenas três dias da semana a minha carga horária em sala de aula.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) que me concedeu uma bolsa de estudo.

Por fim, agradeço a todos os colegas de turma com quem tive o prazer de lutar lado a lado.

Resumo

Este trabalho trata de duas das mais importantes desigualdades da Matemática: a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Apresentamos inicialmente diversas demonstrações para o caso $n = 2$, após as quais seguem muitas demonstrações para o caso geral. Nessas demonstrações utilizamos álgebra elementar, geometria euclidiana, construções geométricas, geometria analítica, indução matemática, convexidade de funções, multiplicadores de Lagrange entre outros assuntos. Além disso foram selecionados vinte problemas que visam dar ao leitor uma melhor compreensão de como estas desigualdades podem ser aplicadas em diversos assuntos e de diversas formas, estimulando a criatividade dos alunos na resolução de problemas.

Palavras-chave: Álgebra Básica, Aplicações, Demonstrações, Desigualdades Elementares, Olimpíadas de Matemática.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa e objetivos

Após alguns anos dedicados ao ensino de Matemática quer no ensino médio, quer no ensino superior, pude constatar o quanto os estudantes apresentam dificuldades em trabalhar com desigualdades, levando-me a acreditar que tal assunto é pouco abordado durante o ensino médio.

O livro *Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio* publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) em 2001 relata diversos problemas dos livros didáticos utilizados no ensino médio no Brasil. Ainda hoje, a maior parte desses livros limitam-se a abordarem alguns tipos de inequações, apresentando métodos de resolução repetitivos e que não requerem qualquer engenhosidade. Aliado a isso temos a má formação de professores, muitos dos quais tem no livro didático adotado nas escolas a sua única fonte de estudo.

Por outro lado há muito tempo as desigualdades são bastante trabalhadas com os estudantes de olimpíadas e não são raros os problemas que envolvem desigualdades nessas competições. Problemas esses que não requerem conhecimentos avançados de Matemática, apenas o estudo de algumas desigualdades e muita criatividade nas suas utilizações.

Essa situação nos motivou a escrever este trabalho sobre a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, consideradas duas das mais importantes desigualdades, quer pelas suas frequentes utilizações na resolução de problemas, quer pelo número de demonstrações existentes para elas.

Pretendemos com este trabalho

(a) apresentar diversas demonstrações dessas duas desigualdades;

(b) mostrar que as desigualdades podem ser ensinadas no ensino médio, já que não requerem conhecimentos matemáticos mais avançados;

(c) disponibilizar um material que sirva de apresentação dessas desigualdades para os iniciantes em preparações olímpicas e para os estudantes de licenciatura em Matemática ou de aprofundamento para os estudantes do ensino médio;

(d) divulgar diversas aplicações dessas desigualdades;

(e) estimular o ensino de desigualdades no ensino médio.

1.2 Metodologia

Este trabalho resultou de pesquisa em livros e artigos sobre desigualdades, alguns dos quais voltados específicamente para olimpíadas de Matemática. Durante a análise de cada material, interessava a busca por demonstrações distintas para as desigualdades escolhidas, bem como diversas aplicações delas.

A obtenção dessas fontes não foi rápida e se deu de diversas formas: encontrados em formato digital na internet, acessados em bibliotecas, adquiridos em livrarias, obtidos com professores. Durante a triagem, notamos a repetição de diversas informações fazendo com que descartassemos alguns materiais.

1.3 Apresentação

Além deste capítulo introdutório há outros quatro que compõem nosso texto.

No segundo capítulo é abordada a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, onde são apresentadas inicialmente cinco demonstrações para o caso $n = 2$ e seis demonstrações para o caso geral.

O terceiro capítulo trata da desigualdade de Cauchy-Schwarz através de três demonstrações do caso $n = 2$ e cinco demonstrações do caso geral.

As aplicações destas duas desigualdades encontram-se no quarto capítulo, sendo sempre que possível mostrado mais de uma forma de utilização das desigualdades numa certa aplicação; acreditamos também que as aplicações estão dispostas em ordem de dificuldade sem que haja qualquer separação ou indicação de qual a melhor desigualdade a usar.

Finalmente, apresentamos nossas considerações finais no último capítulo deste trabalho.

Ressaltamos que buscamos ao longo do texto detalhar ao máximo todas as passagens de modo que o material seja autossuficente na maior parte para um estudante que terminou o ensino médio. Entretanto, tentando mostrar um pouco da diversidade de demonstrações, utilizamos convexidade de funções e multiplicadores de Lagrange.

Capítulo 2

Desigualdade entre as médias geométrica e aritmética

Dada uma sequência de números reais, podemos definir como média deles um número real que, ao substituir cada um dos termos da sequência, mantenha uma determinada propriedade. A seguir definimos duas médias.

Definição 2.1. Dados $n > 1$ números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a média aritmética deles é o número real $A(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Definição 2.2. Dados $n > 1$ números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a média geométrica deles é o número real $G(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$.

A média aritmética conserva a soma e a média geométrica o produto dos números. Além disso, essas médias estão relacionadas através de uma desigualdade que possui diversas aplicações na Matemática, sendo por isso considerada uma das mais importantes.

Proposição 2.1. Para quaisquer $n > 1$ números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ temos

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

2.1 Desigualdade MG - MA: caso $n = 2$

Inicialmente provamos a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética de dois números reais positivos. Apresentamos cinco demonstrações, sendo as duas primeiras algébricas e as demais geométricas.

Demonstração 1.

Sendo x_1 e x_2 números reais positivos, temos $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ bem definidos nos reais e portanto temos

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})^2 \geq 0 \quad &\iff x_2 - 2\sqrt{x_2}\sqrt{x_1} + x_1 \geq 0 \\
&\iff x_2 + x_1 \geq 2\sqrt{x_2x_1} \\
&\iff \frac{x_2+x_1}{2} \geq \sqrt{x_2x_1} \\
&\iff A(x_1,x_2) \geq G(x_1,x_2)
\end{aligned}
$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

$$(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})^2 = 0 \iff \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1} \iff x_2 = x_1$$

□

Demonstração 2.

Seja $a = \frac{x_1+x_2}{2}$ e $d = \frac{x_2-x_1}{2}$, temos $x_1 = a-d$ e $x_2 = a+d$ e portanto $x_1x_2 = a^2-d^2$. Ora

$$
\begin{aligned}
d^2 \geq 0 \quad &\iff -d^2 \leq 0 \\
&\iff a^2 - d^2 \leq a^2 \\
&\iff x_1x_2 \leq \left(\tfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \\
&\iff \sqrt{x_1x_2} \leq \tfrac{x_1+x_2}{2}
\end{aligned}
$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $d = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$

□

Demonstração 3.

Marcamos sobre uma reta r os segmentos adjacentes $AB = x_1$ e $BC = x_2$. A seguir traçamos o círculo de diâmetro AC e a perpendicular a r por B até instersectar o círculo em D.

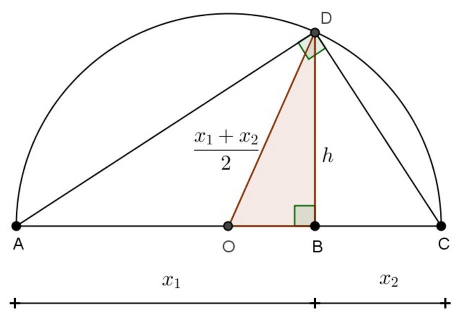

Figura 2.1: Prova por construção geométrica

O ângulo $A\widehat{D}C$ é reto e sendo $DB = h$ a altura do ΔADC relativa à hipotenusa temos $h = \sqrt{x_1x_2}$.

Sendo O o centro do círculo, se $x_1 = x_2$ temos $O = B$ e portanto $BD = OD \iff \sqrt{x_1x_2} = \dfrac{x_1+x_2}{2} \iff G(x_1,x_2) = A(x_1,x_2)$. Caso $x_1 \neq x_2$, temos que o ΔOBD é retângulo em B e portanto temos $BD < OD \iff \sqrt{x_1x_2} < \dfrac{x_1+x_2}{2} \iff G(x_1,x_2) < A(x_1,x_2)$.

□

Demonstração 4.

Construimos um quadrado $ABCD$ de lado $\sqrt{x_1+x_2}$ e, sobre cada lado deste, um triângulo de outros lados $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$, conforme a figura. Estes são congruentes e, pela recíproca do teorema de Pitágoras, são retângulos.

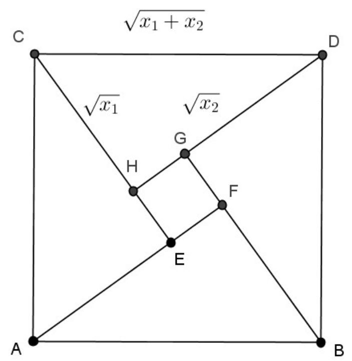

Figura 2.2: Prova por área

Como a área do quadrado $ABCD$ será maior do que ou igual a soma das áreas dos quatro triângulos, temos

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x_1+x_2})^2 \geq 4\tfrac{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}{2} &\iff x_1+x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2} \\
&\iff \tfrac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \\
&\iff A(x_1,x_2) \geq G(x_1,x_2)
\end{aligned}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, o quadrado central se reduz a um ponto o que ocorre se, e somente se, $\mid \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \mid = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$.

□

Demonstração 5.

Considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas e os pontos $O = (0,0)$, $A = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_1})$,$B = (\sqrt{x_2}, \sqrt{x_2})$, $C = (\sqrt{x_2}, \sqrt{x_1})$, $D = (\sqrt{x_2}, 0)$ e $E = (0, \sqrt{x_1})$.

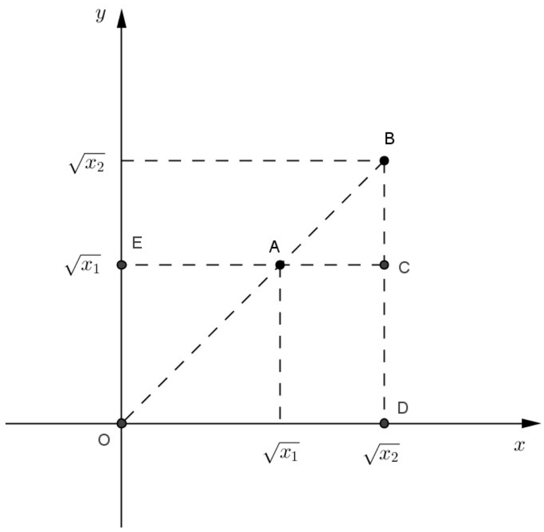

Figura 2.3: Sistema de coordenadas

Como a área do retângulo $ODCE$ não excede a soma das áreas dos triângulos OBD e OAE, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} \leq \tfrac{1}{2}(\sqrt{x_1})^2 + \tfrac{1}{2}(\sqrt{x_2})^2 \quad &\Longleftrightarrow \sqrt{x_1 x_2} \leq \tfrac{x_1+x_2}{2} \\ &\Longleftrightarrow G(x_1, x_2) \leq A(x_1, x_2)\end{aligned}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, a área do ΔABC for nula, o que ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2$.

$\square$

2.2 Desigualdade MG - MA: caso geral

Nessa seção provamos a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética de $n > 1$ números reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Antes de iniciarmos a primeira demonstração, provaremos o seguinte lema.

Lema 1. Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são $n > 1$ reais positivos tais que $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, então $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n.

Se $x_1 x_2 = 1$, então $x_1 = x_2 = 1$ ou $x_1 \neq 1$ e $x_2 \neq 1$. No primeiro caso, temos $x_1 + x_2 = 2$. Já no segundo caso, temos um deles menor do 1 e o outro maior do que 1, caso contrário o produto seria maior do que 1 (se $x_1 > 1$ e $x_2 > 1$) ou menor do que 1 (se $x_1 < 1$ e $x_2 < 1$). Considere sem perda de generalidade $x_1 < 1$ e $x_2 > 1$. Assim teremos

$$\begin{aligned}
(1-x_1)(x_2-1) > 0 &\iff -1 + x_1 + x_2 - x_1x_2 > 0 \\
&\iff x_1 + x_2 - 2 > 0 \\
&\iff x_1 + x_2 > 2
\end{aligned}$$

Concluimos então que se $x_1x_2 = 1$, então $x_1 + x_2 \geq 2$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = 1$.

Suponha como hipótese de indução que o lema seja válido para $n = k$ com $k \geq 2$. Mostremos então que a proposição continua válida para $n = k+1$.

Se $x_1x_2 \ldots x_{k+1} = 1$, então $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k+1} = 1$ ou teremos termos menores do que 1 e termos maiores do que 1.

No primeiro caso, temos $x_1+x_2+\ldots+x_{k+1} = k+1$. Já no segundo caso, consideremos sem perda de generalidade $x_1 < 1$ e $x_{k+1} > 1$. Fazendo $y_1 = x_1x_{k+1}$, temos $y_1x_2 \ldots x_k = 1$ e pela hipótese de indução $y_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq k$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1} &= (y_1 + x_2 + \ldots + x_k) + x_{k+1} + x_1 - y_1 \\
&\geq k + x_{k+1} + x_1 - y_1 \\
&= k + 1 - 1 + x_{k+1} + x_1 - y_1 \\
&= k + 1 - 1 + x_{k+1} + x_1 - x_1x_{k+1} \\
&= k + 1 + x_{k+1}(1 - x_1) - (1 - x_1) \\
&= k + 1 + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) \\
&> k + 1
\end{aligned}$$

Logo se $x_1x_2 \ldots x_n = 1$, então $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq n$ para todo inteiro $n > 1$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

□

Demonstração 1.

Considere $g = \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$, então

$$\frac{\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}}{g} = 1 \iff \sqrt[n]{\frac{x_1x_2\ldots x_n}{g^n}} = 1$$

$$\iff \sqrt[n]{\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\ldots\frac{x_n}{g}} = 1$$

$$\iff \frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\ldots\frac{x_n}{g} = 1$$

Pelo lema 1 temos

$$\frac{x_1}{g}\frac{x_2}{g}\ldots\frac{x_n}{g} = 1 \Longrightarrow \frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + \ldots + \frac{x_n}{g} \geq n$$

$$\iff \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq g \iff A(x_1, \ldots, x_n) \geq G(x_1, \ldots, x_n)$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\frac{x_1}{g} = \frac{x_2}{g} = \ldots = \frac{x_n}{g} = 1$, ou seja, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = g$

□

Demonstração 2.
Dividiremos a nossa demonstração em duas etapas.

Etapa 1: Provamos a desigualdade para $n = 2^m$, com m inteiro positivo.

Utilizamos indução sobre m, sendo que para $m = 1$ já apresentamos algumas provas no início do capítulo. Suponha agora a desigualdade válida para $m = k$ e mostremos que também será válida para $m = k + 1$.

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_{2^{k+1}}) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^k} + x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^k}}{2^k} + \frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)$$

$$\geq \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^k}}{2^k} \cdot \frac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^k}}$$

$$\geq \sqrt{\sqrt[2^k]{x_1x_2\ldots x_{2^k}} \cdot \sqrt[2^k]{x_{2^k+1}x_{2^k+2}\ldots x_{2^{k+1}}}}$$

$$= \sqrt[2^{k+1}]{x_1 x_2 \ldots x_{2^{k+1}}}$$

$$= G(x_1, x_2, \ldots, x_{2^{k+1}})$$

Logo $A(x_1, x_2, \ldots, x_{2^{k+1}}) \geq G(x_1, x_2, \ldots, x_{2^{k+1}})$ para todo n que seja uma potência de base 2 com expoente inteiro positivo.

A igualdade ocorre se, e somente se,

1. $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^k}}{2^k} = \dfrac{x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \ldots + x_{2^{k+1}}}{2^k}$

2. $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2^k}$ e $x_{2^k+1} = x_{2^k+2} = \ldots = x_{2^{k+1}}$

   De 1 e 2 temos $\dfrac{2^k \cdot x_{2^k}}{2^k} = \dfrac{2^k \cdot x_{2^{k+1}}}{2^k} \Longleftrightarrow x_{2^k} = x_{2^{k+1}}$

logo $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2^{k+1}}$

Etapa 2: Provamos a desigualdade para todo inteiro $n > 1$

Considere $g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$. Da primeira etapa temos a desigualdade sobre as médias dos números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $2^m - n$ números iguais a g

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n + (g + \ldots + g)}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{x_1 \ldots x_n \cdot g^{2^m - n}} = \sqrt[2^m]{g^n \cdot g^{2^m-n}} = g$$

Assim temos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n + (2^m - n)g \geq 2^m g \quad &\Longleftrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq ng \\ &\Longleftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq g \\ &\Longleftrightarrow A(x_1, \ldots, x_n) \geq G(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = g$.

□

Demonstração 3.

Sendo côncava a função logaritmo natural, então para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ e $t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0$ com $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$, temos

$$\ln(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n) \geq t_1 \ln(x_1) + t_2 \ln(x_2) + \ldots + t_n \ln(x_n)$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. (Desigualdade de Jensen)

Utilizando as propriedades dos logaritmos, temos

$$\begin{aligned} t_1\ln(x_1)+t_2\ln(x_2)+\ldots+t_n\ln(x_n) &= \ln\left({x_1}^{t_1}\right)+\ln\left({x_2}^{t_2}\right)+\ldots+\ln\left({x_n}^{t_n}\right)= \\ &= \ln\left({x_1}^{t_1}{x_2}^{t_2}\ldots{x_n}^{t_n}\right) \end{aligned}$$

Deste modo a desigualdade inicial é equivalente a

$$\ln(t_1x_1+t_2x_2+\ldots+t_nx_n)\geq\ln\left({x_1}^{t_1}{x_2}^{t_2}\ldots{x_n}^{t_n}\right)$$

Como a função exponencial na base e é crescente, temos

$$e^{\ln(t_1x_1+\ldots+t_nx_n)}\geq e^{\ln\left({x_1}^{t_1}\ldots{x_n}^{t_n}\right)}\Longleftrightarrow t_1x_1+\ldots+t_nx_n\geq{x_1}^{t_1}\ldots{x_n}^{t_n}$$

Tomando $t_1=t_2=\ldots=t_n=\frac{1}{n}$, temos

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\Longleftrightarrow A(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geq G(x_1,x_2,\ldots x_n)$$

A ocorrência da igualdade tem como condição necessária e suficiente a mesma condição da desigualdade inicial, ou seja, $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

$\square$

Demonstração 4.

Podemos definir o $\ln(a)$ como sendo a área da região limitada pela curva $y=\frac{1}{x}$ e pelas retas $x=1$, $x=a$ e $y=0$, se $a\geq 1$; ou o oposto dessa área, se $0<a\leq 1$.

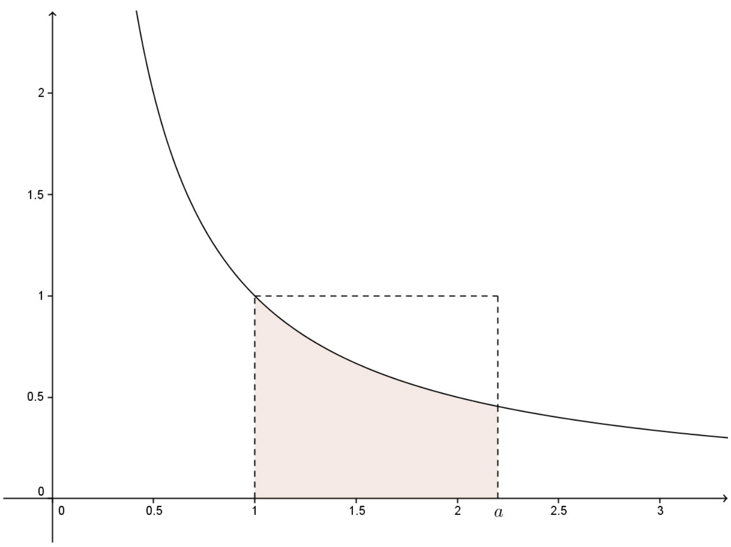

Figura 2.4: Logaritmo natural como área

Esta região está contida no retângulo de base $\mid a-1 \mid$ e altura 1, de onde concluímos que $ln(a) \leq a-1$, valendo a igualdade se, e somente se, $a=1$. Como a função $y=e^x$ é crescente temos $a \leq e^{a-1}$.

Desta última igualdade temos,
$$e^{\frac{x_i}{A}-1} \geq \frac{x_i}{A}$$
para todo inteiro $1 \leq i \leq n$, onde $A = A(x_1, \ldots, x_n)$.

Nas desigualdades ao multiplicarmos membro a membro, temos

$$\begin{aligned} e^{\frac{x_1+\ldots+x_n}{A}-n} \geq \tfrac{x_1x_2\ldots x_n}{A^n} \quad &\Longleftrightarrow e^{\frac{nA}{A}-n} \geq \tfrac{x_1x_2\ldots x_n}{A^n} \\ &\Longleftrightarrow A^n \geq x_1x_2\ldots x_n \\ &\Longleftrightarrow A \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \\ &\Longleftrightarrow A(x_1,x_2,\ldots,x_n) \geq G(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, ocorre a igualdade em todas as n desigualdades $\left(\frac{x_i}{A} = 1 \text{ para todo } i\right)$, ou seja, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = A$.

□

Demonstração 5.
Ordenemos os n números reais de modo que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ e sejam a e g as médias aritméticas e geométricas deles respectivamente.

Se todos os números forem iguais, temos $a = g$. Suponha então que nem todos sejam iguais.

Substituindo x_1 e x_n respectivamente por g e $\frac{x_1x_n}{g}$, mantendo os demais números inalterados, a média geométrica dos novos números continua g, pois $g \cdot \frac{x_1x_n}{g} = x_1x_n$, conservando assim o produto dos números. Como $x_1 \leq g \leq x_n$, segue que

$$\begin{aligned} & x_1 + x_n - \left(g + \tfrac{x_1x_n}{g}\right) = \\ &= x_1 - g + x_n - \tfrac{x_1x_n}{g} \\ &= x_1 - g + x_n\left(\tfrac{g-x_1}{g}\right) \\ &= (x_1-g)\left(1-\tfrac{x_n}{g}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Deste modo a média aritmética a_1 dos novos números é menor do que ou igual a a, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = g$ ou $x_n = g$, o que em ambos os casos é equivalente a $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = g$.

Reordende os novos números de modo que $x_{k1} \leq x_{k2} \leq \ldots \leq x_{kn}$. Substituindo x_{k1} e x_{kn} por g e $\frac{x_{k1}x_{kn}}{g}$, teremos da mesma forma a média geométrica inalterada e a média aritmética a_2 dos novos números menor do que ou igual a a_1.

Após n procedimentos destes, teremos necessariamente n termos iguais a g, ocorrendo $g = a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a$, ou seja, $G(x_1, \ldots, x_n) \leq A(x_1, \ldots, x_n)$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a_n = a_{n-1} = \ldots = a$, ou de modo equivalente, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = g$.

□

Demonstração 6.

Considere a função $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow R$, onde A é o conjunto das n-uplas de números reais positivos, definida por $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$, sujeita à condição $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$. Utilizaremos multiplicadores de Lagrange para determinarmos o valor máximo de f sujeita à condição dada.

Perceba que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n) = \frac{1}{n} x_1^{\frac{1}{n}} x_2^{\frac{1}{n}} \ldots \; x_i^{\frac{1}{n}-1} \ldots x_n^{\frac{1}{n}}$$

para todo inteiro $1 \leq i \leq n$.

Além disso, $\frac{\partial g}{\partial x_i} = 1$ para todo inteiro $1 \leq i \leq n$.

Resolvendo a equação vetorial $\nabla f = \lambda \nabla g$, temos $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} = n\lambda x_i$, para todo inteiro $1 \leq i \leq n$; ou seja, $n\lambda x_1 = n\lambda x_2 = \ldots = n\lambda x_n$, ou ainda, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{S}{n}$.

Sabemos portanto que a função f apresenta valor máximo sob as condições dadas quando $x_1 = \ldots = x_n = \frac{S}{n}$, logo

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq \sqrt[n]{\frac{S}{n}\frac{S}{n} \ldots \frac{S}{n}}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{S}{n}$$

$$\Longleftrightarrow G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq A(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

□

Capítulo 3

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Quanto ao número de aplicações, surge ao lado da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, a desigualdade de Cauchy-Schwarz que abordaremos nesse capítulo apresentando algumas de suas demonstrações.

Proposição 3.1. Dados $2n$ números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$, temos

$$| \, x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \, | \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2} \cdot \sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + \ldots + {y_n}^2}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, existir um número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo inteiro $1 \leq i \leq n$.

3.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz: caso $n = 2$

Ocorrendo na desigualdade uma identidade no caso $n = 1$, demonstramos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para o caso em que $n = 2$, por meio de uma prova algébrica e outras duas geométricas, permitindo uma interpretação geométrica da desigualdade.

Demonstração 1.

$$\begin{aligned}
({x_1}^2 + {x_2}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2) &= {x_1}^2{y_1}^2 + {x_2}^2{y_2}^2 + {x_1}^2{y_2}^2 + {x_2}^2{y_1}^2 \\
&= (x_1y_1)^2 + 2(x_1y_1)(x_2y_2) + (x_2y_2)^2 + (x_1y_2)^2 \\
&\quad -2(x_1y_2)(x_2y_1) + (x_2y_1)^2 \\
&= (x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&\geq (x_1y_1 + x_2y_2)^2
\end{aligned}$$

Logo

$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leq (x_1{}^2 + x_2{}^2)(y_1{}^2 + y_2{}^2)$

$\Longleftrightarrow \mid x_1y_1 + x_2y_2 \mid \leq \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1y_2 = x_2y_1$, ou de modo equivalente $x_1 = \lambda y_1$ e $x_2 = \lambda y_2$.

□

Demonstração 2.

Considere os pontos $O = (0, 0)$, $A = (x_1, x_2)$ e $B = (y_1, y_2)$. Se os pontos O, A e B são colineares, temos $x_1 = \lambda y_1$ e $x_2 = \lambda y_2$ e assim

$$\begin{aligned}
\mid x_1y_1 + x_2y_2 \mid &= \mid \lambda y_1{}^2 + \lambda y_2{}^2 \mid \\
&= \mid \lambda \mid (y_1{}^2 + y_2{}^2) \\
&= \mid \lambda \mid \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2} \\
&= \sqrt{(\lambda y_1)^2 + (\lambda y_2)^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2} \\
&= \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}
\end{aligned}$$

Se os pontos O, A e B não são colineares, podemos aplicar a lei dos cossenos no ΔOAB, obtendo

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\theta$$

onde θ é o angulo $A\widehat{O}B$.

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos e algumas manipulações, obtemos

$$\mid \cos\theta \mid = \frac{\mid x_1y_1 + x_2y_2 \mid}{\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}}$$

Como $\mid \cos\theta \mid < 1$, temos

$$\mid x_1y_1 + x_2y_2 \mid < \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}$$

Demonstração 3.

Essa prova utilizará áreas de duas figuras cuja construção indicamos a seguir.

Construímos o retângulo $ABCD$ de lados $\mid x_1 \mid + \mid y_2 \mid$ e $\mid y_1 \mid + \mid x_2 \mid$, e a partir dele o paralelogramo $EFGH$ conforme a figura a seguir.

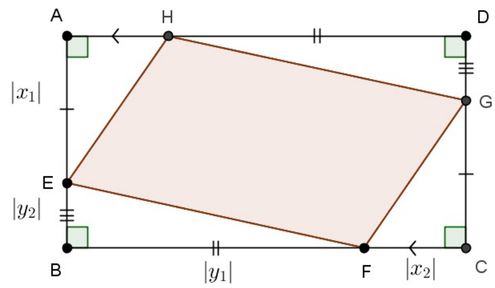

Figura 3.1: Paralelogramo

Em seguida construímos o retângulo $A'B'C'D'$ de dimensões $\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}$ e $\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2}$, e sobre cada os seus lados construímos os triângulos retângulos indicados na figura abaixo.

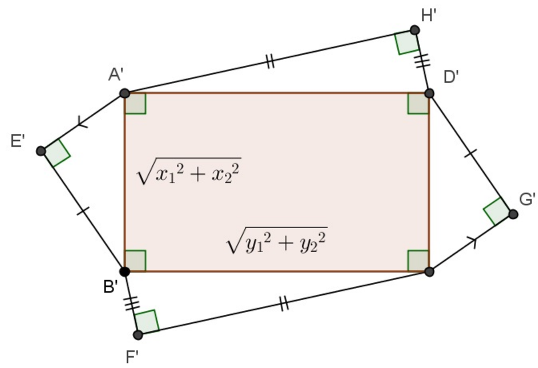

Figura 3.2: Retângulo

Note que a área de um paralelogramo é sempre menor do que ou igual a área de um retângulo de mesmos lados, temos

$$S(EFGH) \leq S(A'B'C'D')$$

$$\Leftrightarrow (|\ x_1\ |+|\ y_2\ |)(|\ y_1\ |+|\ x_2\ |) \leq \sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}\cdot\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2}+|\ x_1x_2\ |+|\ y_1y_2\ |$$

$$\Leftrightarrow |\ x_1y_1\ |+|\ x_2y_2\ |+|\ x_1x_2\ |+|\ y_1y_2\ | \leq \sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}\cdot\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2}+|\ x_1x_2\ |+|\ y_1y_2\ |$$

$$\Leftrightarrow |\ x_1y_1\ |+|\ x_2y_2\ | \leq \sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}\cdot\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2}$$

$$\Rightarrow |\ x_1y_1+x_2y_2\ | \leq \sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}\cdot\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, o paralelogramo $EFGH$ for um retângulo e valer a igualdade na desigualdade triangular utilizada na implicação, o que ocorre se, e somente se, os triângulos AEH e BEF forem semelhantes, $x_1y_1 \geq 0$ e $x_2y_2 \geq 0$, ou seja, $x_1 = \lambda y_1$ e $x_2 = \lambda y_2$.

$\square$

3.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz: caso geral

Nesta seção são realizadas algumas demonstrações da desigualdade de Cauchy-Schwarz para qualquer inteiro positivo n.

Demonstração 1.

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(u) = (x_1u - y_1)^2 + (x_2u - y_2)^2 + \ldots + (x_nu - y_n)^2$$

Desenvolvendo a expressão, obtemos

$$f(u) = ({x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2)u^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)u + ({y_1}^2 + {y_2}^2 + \ldots + {y_n}^2)$$

Como cada uma das parcelas $(x_iu - y_i)^2$ é não negativa, temos $f(u) \geq 0$ para todo u real o que ocorre se, e somente se, $\Delta \leq 0$, ou seja,

$$4(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 - 4({x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2) \cdot ({y_1}^2 + \ldots + {y_n}^2) \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow (x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq ({x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2) \cdot ({y_1}^2 + \ldots + {y_n}^2)$$

$$\Longleftrightarrow \mid x_1y_1 + \ldots + x_ny_n \mid \leq \sqrt{{x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2} \cdot \sqrt{{y_1}^2 + \ldots + {y_n}^2}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\Delta = 0$ o que significa que a função apresenta um único zero real u'. Ora, $f(u') = 0$ se, e somente se, cada uma das parcelas $(x_iu' - y_i)^2$ for nula, ou de modo equivalente $x_i = \frac{1}{u'}y_i$ para todo inteiro $1 \leq i \leq n$.

$\square$

Demonstração 2.

Considere os números $A = \sqrt{{x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2}$, $B = \sqrt{{y_1}^2 + \ldots + {y_n}^2}$ e a partir deles $\overline{x}_i = \frac{x_i}{A}$ e $\overline{y}_i = \frac{y_i}{B}$ com o inteiro i variando de 1 a n.

Perceba que ${\overline{x}_1}^2 + {\overline{x}_2}^2 + \ldots + {\overline{x}_n}^2 = 1$ e ${\overline{y}_1}^2 + {\overline{y}_2}^2 + \ldots + {\overline{y}_n}^2 = 1$

Além disso, da desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, temos

$$\mid \overline{x}_i\overline{y}_i \mid \leq \frac{{\overline{x}_i}^2 + {\overline{y}_i}^2}{2}$$

Somando membro a membro as n desigualdades obtidas quando fazemos i variar de 1 a n, temos

$$| \overline{x}_1\overline{y}_1 | + \ldots + | \overline{x}_n\overline{y}_n | \leq \frac{\overline{x}_1{}^2 + \ldots + \overline{x}_n{}^2 + \overline{y}_1{}^2 + \ldots + \overline{y}_n{}^2}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{| x_1y_1 |}{AB} + \ldots + \frac{| x_ny_n |}{AB} \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow | x_1y_1 | + \ldots + | x_ny_n | \leq AB$$

$$\Longleftrightarrow | x_1y_1 | + \ldots + | x_ny_n | \leq \sqrt{x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + \ldots + y_n{}^2}$$

Ora $| x_1y_1 + \ldots + x_ny_n | \leq | x_1y_1 | + \ldots + | x_ny_n |$, logo

$$| x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n | \leq \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2} \cdot \sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2 + \ldots + y_n{}^2}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\overline{x}_1 = \overline{y}_1$, ..., $\overline{x}_n = \overline{y}_n$, ou seja, $x_1 = \frac{A}{B}y_1$, ..., $x_n = \frac{A}{B}y_n$.

□

Demonstração 3.

Da desigualdade entre as médias geométrica e aritmética, temos para todo λ real não nulo

$$G(\frac{x_i{}^2}{\lambda}, \lambda y_i{}^2) \leq A(\frac{x_i{}^2}{\lambda}, \lambda y_i{}^2)$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\frac{x_i{}^2}{\lambda} \cdot \lambda y_i{}^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x_i{}^2}{\lambda} + \lambda y_i{}^2\right)$$

$$\Longleftrightarrow | x_iy_i | \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x_i{}^2}{\lambda} + \lambda y_i{}^2\right)$$

Tomando $\lambda = \dfrac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2}}$ e somando membro a membro as n desigualdades obtidas quando fazemos i variar de 1 a n, temos

$$\sum_{i=1}^{n} | x_i y_i | \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}} \cdot \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} | x_i y_i | \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} | x_i y_i | \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$

$$\Longrightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, ocorrer a igualdade na desigualdade das médias e na desigualdade triangular, ou de modo equivalente, $\frac{{x_i}^2}{\lambda} = \lambda {y_i}^2$ e $x_i y_i \geq 0$, logo $x_i = \lambda y_i$ para todo inteiro $1 \leq i \leq n$.

□

Demonstração 4.

Considere os vetores $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Podemos reescrever a desigualdade de Cauchy-Schwarz como $| u \cdot v | \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Se $u = 0$ ou $v = 0$, temos $u \cdot v = 0$ e $\|u\| \cdot \|v\| = 0$, sendo portanto válida a igualdade.

Suponha então que u e v sejam vetores não nulos. Se u e v são unitários, temos

$0 \leq \|u \pm v\|^2 = (u \pm v) \cdot (u \pm v)$

$= u \cdot v \pm 2u \cdot v + v \cdot v$

$= 1 \pm 2u \cdot v + 1$

$= 2(1 \pm u \cdot v)$

logo $1 \pm u \cdot v \geq 0 \Longleftrightarrow \mp u \cdot v \leq 1 \Longleftrightarrow | u \cdot v | \leq 1$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $u \pm v = 0$.

Se u e v não são vetores unitários, tome os vetores unitários $\frac{1}{\|u\|}u$ e $\frac{1}{\|v\|}v$, pelo resultado anterior temos

$| \frac{1}{\|u\|}u \cdot \frac{1}{\|v\|}v | \leq 1$

$\iff \frac{1}{\|u\| \cdot \|v\|} \mid u \cdot v \mid \leq 1$

$\iff | u \cdot v | \leq \|u\| \cdot \|v\|$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\frac{1}{\|u\|}u \pm \frac{1}{\|v\|}v = 0$, ou seja, $u = \pm\frac{\|u\|}{\|v\|}v$, ou de modo equivalente, $x_1 = \lambda y_1$, ..., $x_n = \lambda y_n$.

$\square$

Demonstração 5.

Considere a função definida por $f(u,v) = \langle u, v\rangle$, em que $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$; sujeita às condições $g(u,v) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ e $h(u,v) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$. Utilizaremos os multiplicadores de Lagrange para determinar o valor máximo de f sujeita às condições dadas.

Perceba que

(a) $\frac{\partial f}{\partial x_i} = y_i$ e $\frac{\partial f}{\partial y_i} = x_i$, para todo inteiro $1 \leq i \leq n$.

(b) $\frac{\partial g}{\partial x_i} = 2x_i$ e $\frac{\partial g}{\partial y_i} = 0$, para todo inteiro $1 \leq i \leq n$.

(c) $\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0$ e $\frac{\partial h}{\partial y_i} = 2y_i$, para todo inteiro $1 \leq i \leq n$.

Da igualdade $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, temos

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2\lambda x_1, 2\lambda x_2, \ldots, 2\lambda x_n, 2\mu y_1, 2\mu y_2, \ldots, 2\mu y_n)$$

$$\iff y_i = 2\lambda x_i \;\text{ e }\; x_i = 2\mu y_i \quad \text{para todo inteiro} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Das condições temos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} 4\mu^2 y_i^2 = 1 \;\Rightarrow\; 4\mu^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1 \;\Rightarrow\; 4\mu^2 = 1 \;\Rightarrow\; \mu = \pm\frac{1}{2}.$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} 4\lambda^2 x_i^2 = 1 \;\Rightarrow\; 4\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \;\Rightarrow\; 4\lambda^2 = 1 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm\frac{1}{2}.$$

Calculando o valor da função para cada caso

(a) Para $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, temos $x_i = y_i$ e portanto $f(u,v) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$

(b) Para $\lambda = \mu = -\frac{1}{2}$, temos $x_i = -y_i$ e portanto $f(u,v) = \sum_{i=1}^{n}(-x_i^2) = -1$

(c) Para os dois outros casos, temos $x_i = 0$ e $y_i = 0$, ou seja, $f(u,v) = 0$.

Portanto o valor máximo de f sujeita às condições dadas é 1 e o mínimo -1, ocorrendo o primeiro quando $x_i = y_i$ e o segundo quando $x_i = -y_i$ para todo inteiro $1 \leq i \leq n$.

Considere agora os vetores $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Tomemos $x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$ e $y_i = \dfrac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}$, com isso retomamos as condições iniciais, e portanto

$$-1 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq 1 \Longleftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq 1 \Longleftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}}\right)\right| \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $|x_i| = |y_i|$, ou de modo equivalente, $a_i = \lambda' b_i$.

$\square$

Capítulo 4

Aplicações

1. (Caso particular da Desigualdade Isoperimétrica) Prove que:

   (a) Dentre todos os retângulos de perímetro dado P, o de maior área é o quadrado.

   (b) Dentre todos os retângulos de área dada S, o de menor perímetro é o quadrado.

Resolução

(a) Considere que as dimensões de um retângulo de perímetro P são x e y, então $P = 2(x+y)$ e sua área é $S = xy$.

Pela desigualdade MG - MA, temos

$$
\begin{aligned}
G(x,y) \leq A(x,y) \quad & \Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \\
& \Leftrightarrow xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\
& \Leftrightarrow S \leq \left(\frac{P}{4}\right)^2
\end{aligned}
$$

Logo a área de um retângulo de perímetro P é menor do que ou igual a $\left(\frac{P}{4}\right)^2$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y$, ou seja, quando o retângulo for um quadrado.

(b) Considere que as dimensões de um retângulo de área S são x e y, então $S = xy$ e o seu perímetro é $P = 2(x+y)$.

Pela desigualdade MG - MA temos

$$
\begin{aligned}
G(x,y) \leq A(x,y) \quad & \Leftrightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \\
& \Leftrightarrow 4\sqrt{xy} \leq 2(x+y) \\
& \Leftrightarrow 4\sqrt{S} \leq P
\end{aligned}
$$

Logo o perímetro de um retângulo de área S é maior do que ou igual a $4\sqrt{S}$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y$, ou seja, quando o retângulo for um quadrado.

■

2. Prove que para quaisquer reais positivos x e y temos

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x = y$.

Resolução

Pela desigualdade MG - MA temos

$$
\begin{aligned}
& G\left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right) \leq A\left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right) \\
& \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{y^2}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right) \\
& \Leftrightarrow \frac{xy}{2} \leq \frac{x^2+y^2}{4} \\
& \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{xy}{2} \leq \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{x^2+y^2}{4} \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\frac{x}{2}\frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2} \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}
\end{aligned}
$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$, ou seja, $x = y$.

■

3. Sejam a e b reais positivos tais que $a+b=1$, prove que

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Resolução

Usaremos o resultado do problema anterior, tomando $x=a+\dfrac{1}{a}$ e $y=b+\dfrac{1}{b}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2}{2} &\geq \left(\frac{a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}}{2}\right)^2\\
&= \left(\frac{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{a+b}{ab}\right)^2\\
&= \frac{1}{4}\cdot\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2 \quad \text{(I)}
\end{aligned}$$

Ora, pela desigualdade MG - MA temos que

$$\begin{aligned}
G(a,b)\leq A(a,b) \quad &\Leftrightarrow \sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\\
&\Leftrightarrow ab\leq\frac{1}{4}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{ab}\geq 4\\
&\Leftrightarrow 1+\frac{1}{ab}\geq 5\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\geq\frac{25}{4} \quad \text{(II)}
\end{aligned}$$

De (I) e (II) temos

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

■

4. Sejam a, b e c reais positivos, prove que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Resolução 1

Considere os números

$$x=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

$$y=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$

$$z=\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$$

Perceba que

$$y+z=\frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}=3$$

Além disso

$$x+y=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}$$

$$x+z=\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+a}{c+a}+\frac{c+b}{a+b}$$

Pela desigualdade MG - MA temos

$$G\left(\frac{a+b}{b+c},\frac{b+c}{c+a},\frac{c+a}{a+b}\right)\leq A\left(\frac{a+b}{b+c},\frac{b+c}{c+a},\frac{c+a}{a+b}\right)\Leftrightarrow 1\leq\frac{x+y}{3}$$

e

$$G\left(\frac{a+c}{b+c},\frac{b+a}{c+a},\frac{c+b}{a+b}\right)\leq A\left(\frac{a+c}{b+c},\frac{b+a}{c+a},\frac{c+b}{a+b}\right)\Leftrightarrow 1\leq\frac{x+z}{3}$$

Somando os membros dessas desigualdades temos

$$2x+y+z\geq 6\ \Leftrightarrow\ 2x\geq 3\ \Leftrightarrow\ x\geq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

■

Resolução 2

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\sqrt{(b+c)+(c+a)+(a+b)} \cdot \sqrt{\tfrac{a+b+c}{b+c} + \tfrac{a+b+c}{c+a} + \tfrac{a+b+c}{a+b}} \geq 3\sqrt{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow ((b+c)+(c+a)+(a+b)) \cdot \left(\tfrac{a+b+c}{b+c} + \tfrac{a+b+c}{c+a} + \tfrac{a+b+c}{a+b}\right) \geq 9(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c) \cdot \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3\right) \geq 9(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 3 \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

■

5. Sejam a, b e c reais positivos, prove que $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a = b = c$.

Resolução

Pela desigualdade MG - MA temos

$$A(a,b) \geq G(a,b) \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$A(a,b) \geq G(b,c) \Leftrightarrow \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$$

$$A(c,a) \geq G(c,a) \Leftrightarrow \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$$

Multiplicando membro a membro, temos

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq abc \;\Leftrightarrow\; (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, ocorrer a igualdade em cada uma das desigualdades do tipo MG - MA, ou seja, $a = b = c$.

■

6. Sejam $n > 1$ números reais positivos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de soma unitária. Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(p_i + \frac{1}{p_i}\right)^2 \geq n^3 + 2n + \frac{1}{n}$$

Resolução

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nas sequências $(\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n \ termos})$ e $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ temos

$$|p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 1 + \ldots + p_n \cdot 1| \leq \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}$$

$$\Longleftrightarrow p_1 + p_2 + \ldots + p_n \leq \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2} \cdot \sqrt{n}$$

$$\Longleftrightarrow 1 \leq \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2} \cdot \sqrt{n}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n} \leq p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \quad \text{(I)}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nas sequências $(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n})$ e $(\frac{1}{\sqrt{p_1}}, \frac{1}{\sqrt{p_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{p_n}})$ temos

$$|\sqrt{p_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_1}} + \ldots + \sqrt{p_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_n}}| \leq \sqrt{p_1 + \ldots + p_n} \cdot \sqrt{\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n}}$$

$$\Longleftrightarrow |1 + 1 + \ldots + 1| \leq \sqrt{1} \cdot \sqrt{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}}$$

$$\Longleftrightarrow n \leq \sqrt{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}}$$

$$\Longleftrightarrow n^2 \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}$$

$$\Longleftrightarrow n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \quad \text{(II)}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nas sequências $(\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n \ termos})$ e $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots, \frac{1}{p_n})$ temos

$$|1 \cdot \frac{1}{p_1} + 1 \cdot \frac{1}{p_2} + \ldots + 1 \cdot \frac{1}{p_n}| \leq \sqrt{1+1+\ldots+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_1^2} + \ldots + \frac{1}{p_n^2}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} \leq \sqrt{1+\ldots+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots + \frac{1}{p_n^2}}$$

Usando a propriedade tansitiva em relação à desigualdade (II) temos

$$\Longleftrightarrow n^2 \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots + \frac{1}{p_n^2}}$$

$$\Longleftrightarrow n^4 \leq n \cdot \left(\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \ldots + \frac{1}{p_n^2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow n^3 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} \quad \text{(III)}$$

Somando membro a membro as desigualdades (I) e (III) temos

$$n^3 + \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2}$$

$$\Longleftrightarrow n^3 + 2n + \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} + 2n$$

$$\Longleftrightarrow n^3 + 2n + \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n} \left(p_i^2 \cdot \frac{1}{p_i^2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow n^3 + 2n + \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(p_i + \frac{1}{p_i}\right)^2$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, ocorre a igualdade nas três vezes que usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, ou de modo equivalente, $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$.

■

7. Prove que dentre todos os triângulos de perímetro dado $2p$, o de maior área é o equilátero.

Resolução

Seja S a área do triângulo ABC de perímetro dado $2p$, cujas medidas dos lados indicaremos por a, b e c. Temos $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ e $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Pela desigualdade MG - MA temos

$$G(p-a, p-b, p-c) \leq A(p-a, p-b, p-c)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{3p-(a+b+c)}{3}$$

$$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^4}{27}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$$

$$\Leftrightarrow S \leq \frac{p^2\sqrt{3}}{9}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $p-a = p-b = p-c$, ou ainda, $a = b = c$, ou seja, quando o triângulo equilátero.

■

8. Determine o valor máximo da função $f(x) = x(1-x)^3$, sendo $x \in (0, 1)$.

Resolução

No domínio da função, $3x$ e $1-x$ são números reais positivos.

Pela desigualdade MG - MA temos

$$G(3x, 1-x, 1-x, 1-x) \leq A(3x, 1-x, 1-x, 1-x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{3x(1-x)^3} \leq \frac{3x+(1-x)+(1-x)+(1-x)}{4}$$

$$\Leftrightarrow x(1-x)^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{27}{256}$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $3x = 1-x$, ou seja, $x = \frac{1}{4}$. Como $\frac{1}{4} \in D(f)$, então o valor máximo da função é $\frac{27}{256}$.

■

9. Dados $n > 1$ números reais não nulos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a média harmônica deles é o número real
$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$
Sejam H e G as médias harmônica e geométrica de n reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mostre que $H \leq G$ e que a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Resolução

Pela desigualdade MG - MA temos

$$G\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right) \leq A\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{G} \leq \frac{1}{H} \Leftrightarrow H \leq G$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \ldots = \frac{1}{x_n}$, ou de modo equivalente, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

■

10. Mostre que para quaisquer reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, temos
$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

Resolução 1

Pela desigualdade MG - MA e pela obtida no problema anterior temos

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$
$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

■

Resolução 2

Basta aplicarmos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para as sequências $(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots \sqrt{x_n})$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \ldots \frac{1}{\sqrt{x_1}}\right)$.

Assim,

$$\sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \cdot \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \geq |1 + 1 + \ldots 1|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \cdot \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \geq n$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

■

11. De um quadrado de lado 2a, retira-se a partir dos vértices pequenos quadrados de lados b, com o intuito de formar uma caixa conforme a figura a seguir. Determine o valor de b que fará a caixa ter volume máximo.

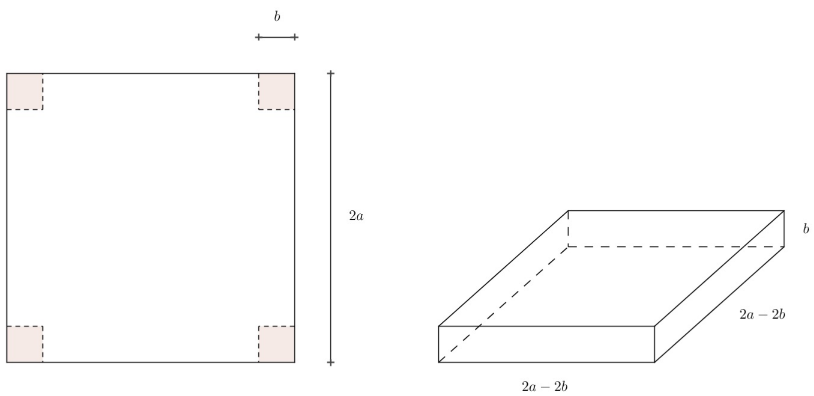

Figura 4.1: Construção de caixa

Resolução

O volume V da caixa é dado por $V = b(2a - 2b)^2 = 4b(a - b)^2$ com $0 < b < a$.

Pela desigualdade MG - MA temos

$$\sqrt[3]{4b \cdot 2(a-b) \cdot 2(a-b)} \leq \frac{4b + 2(a-b) + 2(a-b)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{4V} \leq \frac{4a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 4V \leq \frac{64a^3}{27}$$

$$\Leftrightarrow V \leq \frac{16a^3}{27}$$

Ocorrendo o máximo volume se, e somente se, ocorrer a igualdade, ou de modo equivalente, $4b = 2(a-b)$, ou ainda, $b = \frac{a}{3}$.

■

12. Dados $n > 1$ números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a média quadrática deles é o número real

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

Sejam A e Q as médias aritmética e quadrática de n números reais $x_1, x_2, ..., x_n$, mostre que $A \leq Q$ e que a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Resolução

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\overbrace{(1, 1, \ldots, 1)}^{n\ termos}$ temos

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}{n}}$$

Ora $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq |x_1 + x_2 + \ldots + x_n|$, logo

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}{n}} \quad \Leftrightarrow \quad A \leq Q$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, existe número real λ tal que $x_i = \lambda \cdot 1$ para todo inteiro $1 \leq i \leq n$, ou seja, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

■

13. Se a, b e c são números reais positivos, prove que

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(a^2c + b^2a + c^2b) \geq 9a^2b^2c^2$$

Resolução 1

Pela desigualdade MG - MA temos

$A(a^2b, b^2c, c^2a) \geq G(a^2b, b^2c, c^2a) \;\Leftrightarrow\; a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc$
e
$A(a^2c, b^2a, c^2b) \geq G(a^2c, b^2a, c^2b) \;\Leftrightarrow\; a^2c + b^2a + c^2b \geq 3abc$

Multiplicando membro a membro, temos

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(a^2c + b^2a + c^2b) \geq 9a^2b^2c^2$$

■

Resolução 2

Usando a desigualdade de Cauhy-Schwarz para as sequências $(a\sqrt{b}, b\sqrt{c}, c\sqrt{a})$ e $(c\sqrt{b}, a\sqrt{c}, b\sqrt{a})$ temos

$|(a\sqrt{b})(c\sqrt{b}) + (b\sqrt{c})(a\sqrt{c}) + (c\sqrt{a})(b\sqrt{a})| \leq \sqrt{a^2b + b^2c + c^2a} \cdot \sqrt{c^2b + a^2c + b^2a}$

$\Leftrightarrow 3abc \leq \sqrt{a^2b + b^2c + c^2a} \cdot \sqrt{c^2b + a^2c + b^2a}$

$\Leftrightarrow 9a^2b^2c^2 \leq (a^2b + b^2c + c^2a)(a^2c + b^2a + c^2b)$

■

14. Sejam h_a, h_b e h_c as alturas do ΔABC relativas aos lados a, b e c respectivamente. Prove que ΔABC é equilátero se, e somente se, $ah_b + bh_c + ch_a$ é igual a seis vezes a sua área.

Resolução

Pela desigualdade MG - MA temos

$A(ah_b, bh_c, ch_a) \geq G(ah_b, bh_c, ch_a)$

$\dfrac{ah_b + bh_c + ch_a}{3} \geq \sqrt[3]{(ah_b)(bh_c)(ch_a)}$

$ah_b + bh_c + ch_a \geq 3\sqrt[3]{8S^3}$

$ah_b + bh_c + ch_a \geq 6S$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $ah_b = bh_c = ch_a = 2S$, ou de modo equivalente, $a = b = c$.

■

15. Prove que se $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, então

$$tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + tg^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + tg^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq 1$$

Resolução

Se $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, então $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi-\gamma}{2}$ e portanto

$tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = cotg\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

$\Leftrightarrow tg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) + tg\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1 - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{\beta}{2}\right)} \cdot tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) + tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) + tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = 1$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para as sequências

$\left(tg\left(\frac{\alpha}{2}\right), tg\left(\frac{\gamma}{2}\right), tg\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$ e $\left(tg\left(\frac{\gamma}{2}\right), tg\left(\frac{\beta}{2}\right), tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$ temos

$tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + tg^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + tg^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) + tg\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) + tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{\beta}{2}\right)$

$\Leftrightarrow tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + tg^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + tg^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq 1$

■

16. Mostre que para quaisquer duas sequências de reais $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ para $b_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos

$$\frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \ldots + \frac{{a_n}^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

Resolução

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para as sequências $\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)$ e $(\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \ldots, \sqrt{b_n})$ temos

$$\mid \frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\sqrt{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\sqrt{b_n} \mid\leq \sqrt{\frac{{a_1}^2}{b_1} + \ldots + \frac{{a_n}^2}{b_n}} \cdot \sqrt{b_1 + \ldots + b_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mid a_1 + a_2 + \ldots + a_n \mid}{\sqrt{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}} \leq \sqrt{\frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \ldots + \frac{{a_n}^2}{b_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq \frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \ldots + \frac{{a_n}^2}{b_n}$$

■

17. (Desigualdade de Weitzenböck) Se um triângulo de lados a, b e c tem área S, prove que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\, S$.

Resolução

Usando a desigualdade do problema anterior para (a, b, c) temos

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) \geq \sqrt{3(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) \geq \sqrt{6p\left(\frac{2p}{3}\right)^3} \quad \text{(I)}$$

Por outro lado, da desigualdade MG - MA temos

$$G(2p - 2a, 2p - 2b, 2p - 2c) \leq A(2p - 2a, 2p - 2b, 2p - 2c)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{8(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{6p - 2(a+b+c)}{3}$$

$$\Leftrightarrow 8(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{2p}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 48p(p-a)(p-b)(p-c) \leq 6p\left(\frac{2p}{3}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{6p\left(\frac{2p}{3}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}\,S \leq \sqrt{6p\left(\frac{2p}{3}\right)^3} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II) conclui-se que $(a^2+b^2+c^2) \geq 4\sqrt{3}\,S$.

■

18. (Teorema de Cauchy-Schwarz)

    (a) Prove que $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ para todo a, b, x e y reais $(x, y > 0)$.

    (b) Utilize indução finita para provar a desigualdade da aplicação 16.

    (c) Use o resultado 18b para provar o teorema de Cauchy-Schwarz.

Resolução

(a) Considere o número $ya - xb$, temos

$$(ya-xb)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2a^2 - 2xyab + x^2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2a^2 + x^2b^2 \geq 2xyab$$

$$\Leftrightarrow xya^2 + y^2a^2 + x^2b^2 + xyb^2 \geq xya^2 + 2xyab + xyb^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y)ya^2 + (x+y)xb^2 \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{ya^2+xb^2}{xy} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

(b) Para $n = 2$ foi provado no item anterior. Suponha então que a desigualdade seja válida para $n = k$, ou seja,

$$\frac{{a_1}^2}{b_1} + \frac{{a_2}^2}{b_2} + \ldots + \frac{{a_k}^2}{b_k} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_k}$$

para quaisquer duas sequências de reais $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

Considere agora as sequências de reais $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_{k+1})$. Da hipótese de indução temos

$$\frac{{a_1}^2}{b_1} + \ldots + \frac{{a_k}^2}{b_k} + \frac{a_{k+1}^2}{b_{k+1}} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_k)^2}{b_1 + \ldots + b_k} + \frac{a_{k+1}^2}{b_{k+1}} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_{k+1})^2}{b_1 + \ldots + b_{k+1}}$$

(c)Tome $x_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ e $y_i = \sqrt{b_i}$. Substituindo na desigualdade anterior temos

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq \frac{(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2}{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2} \geq |x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n|$$

■

19. (Teorema de Cauchy-Schwarz)

    (a) (Desigualdade de Young) Sejam p e q reais positivos tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Prove que para quaisquer reais positivos x e y temos

    $$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

    (b) (Desigualdade de Holder) Sejam p e q reais positivos tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Prove que para quaisquer sequências de reais positivos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, temos

    $$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leq ({x_1}^p + {x_2}^p + \ldots + {x_n}^p)^{\frac{1}{p}}({y_1}^q + {y_2}^q + \ldots + {y_n}^q)^{\frac{1}{q}}$$

    (c) Mostre que a desigualdade de Holder fornece a desigualdade de Cauchy-Schwarz para reais positivos.

Resolução

(a) Como a função logaritmo natural é concava, temos

$$\ln(tx_1 + (1-t)x_2) \geq t\ln(x_1) + (1-t)\ln(x_2)$$

para todo reais positivos x_1 e x_2, com $0 \leq t \leq 1$.

Sendo a função exponencial de base e é crescente, segue que
$e^{\ln(tx_1+(1-t)x_2)} \geq e^{t\ln(x_1)+(1-t)\ln(x_2)}$

$\Leftrightarrow tx_1 + (1-t)x_2 \geq (x_1)^t \cdot (x_2)^{1-t}$

Além disso

$$xy = (x^p)^{\frac{1}{p}}(y^q)^{\frac{1}{q}}$$

Tomando $t = \frac{1}{p}$, $x_1 = x^p$ e $x_2 = y^q$, ao aplicarmos a desigualdade obtemos

$$xy = (x^p)^{\frac{1}{p}}(y^q)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^p$$

(b) Considere

$$u = (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} \quad \mathbf{e} \quad v = (y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Aplicando a desigualdade de Young

$$\frac{x_i}{u} \cdot \frac{y_i}{v} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{x_i}{u}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{y_i}{v}\right)^q$$

para todo inteiro $1 \leq i \leq n$.

Somando membro a membro, temos

$$\frac{1}{uv}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{1}{p\,u^p}\sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q\,v^q}\sum_{i=1}^{n} y_i^q = \frac{1}{p\,u^p}u^p + \frac{1}{q\,v^q}v^p = 1$$

Portanto

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leq ({x_1}^p + {x_2}^p + \ldots + {x_n}^p)^{\frac{1}{p}}({y_1}^q + {y_2}^q + \ldots + {y_n}^q)^{\frac{1}{q}}$$

(c) Usando a desigualdade de Holder para $p = q = \frac{1}{2}$ temos

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$$

$\blacksquare$

20. (Teorema de Laguerre) Se todas as raízes do polinômio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ são números reais então elas pertencem ao intervalo de extremidades

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}$$

Resolução
Seja $y_1, y_2, \ldots, y_n$ as raízes do polinômio, deste modo o polinômio pode ser fatorado assim $(x-y_1)(x-y_2)\ldots(x-y_n)$ e pelas relações Girrad temos

$$a_{n-1} = -(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \ \text{ e } \ a_{n-2} = y_n(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + \sum_{i<j\neq n} y_i y_j$$

E a partir destas, obtemos

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

Por outro lado, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz a $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ e $(\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n-1\,termos})$, temos

$$(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})^2 \leq (n-1)\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

$$\Leftrightarrow (a_{n-1} + y_n)^2 \leq (n-1)(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} - y_n^2)$$

$$\Leftrightarrow a_{n-1}^2 + 2a_{n-1}y_n + y_n^2 \leq (n-1)a_{n-1}^2 - 2(n-1)a_{n-2} - (n-1)y_n^2$$

$$\Leftrightarrow ny_n^2 + 2a_{n-1}y_n + 2(n-1)a_{n-2} - (n-2)a_{n-1}^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y_n^2 + \frac{2a_{n-1}}{n}y_n + \frac{2(n-1)a_{n-2} - (n-2)a_{n-1}^2}{n} \leq 0$$

Deste modo qualquer raiz y_n do polinômio deve estar no intervalo de extremos $-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n}\sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1}a_{n-2}}$

■

Capítulo 5

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos diversas demonstrações para as desigualdades entre as médias geométrica e aritmética e de Cauchy-Schwarz, muitas delas utilizando apenas conhecimentos elementares. Acreditamos com isso que torna-se perfeitamente viável o ensino destas desigualdades, demonstrando-as em turmas do ensino médio.

Além disso pudemos mostrar que o uso dessas desigualdades nos permite resolver diversos problemas interessantes sem os quais a solução se tornaria bem mais difícil ou mesmo impossível a nível elementar. Deste modo justifica-se a importância de ensinar essas desigualdades ainda no ensino médio, bem como para alunos que participarão de competições olímpicas de Matemática.

A mudança no ensino de Matemática na educação básica passa por uma reformulação da formação do professor, sendo imprescindível que os estudantes de licenciatura em Matemática estudem essas desigualdades e vejam sua importância. Neste sentido esse material pode fornecer uma boa contribuição, servindo como material para um estudo inicial sobre desigualdades ou mesmo como fonte para um trabalho de conclusão de curso.

Encerro este trabalho, certo de que disponibilizo um material para aqueles que querem conhecer um pouco mais sobre essas desigualdades, suas demonstrações e aplicações.

Referências Bibliográficas

[1] AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter M. **As provas estão n'O LIVRO**. São Paulo: Edgard Blücher, 2002. p 101 - 103.

[2] CARNEIRO, José P. Demonstrações Visuais. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 13 - 15, quadrimestre 1. 1995.

[3] KOROVKIN, P. P. **Inequalities**. 1.ed. Moscou: Mir Publishers, 1975. p 12 - 43.

[4] LIMA, Elon L. **Meu Professor de Matemática**. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemmática (SBM), 2006. p. 115 - 122.

[5] LIMA, Elon L. **Análise Real**. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2004. v. 2. p. 91 - 97.

[6] LIMA, Elon L. et. al. **A Matemática do Ensino Médio**. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2002. v. 2. p. 153 - 158.

[7] NETO, Antonio C. M. Desigualdades Elementares. **Eureka!**, Rio de Janeiro, n. 5, p. 34 - 49, 1999.

[8] SHKLARSKY, D. O.; CHENTZOV, N. N.; YAGLOM I.M. **The USSR Olympiad Problem Book**: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics. 3. ed. New York: Dover, 1993. p. 61 - 73.

[9] WAGNER, Eduardo. Duas Médias. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 18, p. 43 - 47, semestre 1. 1991.

[10] WAGNER, Eduardo. A desigualdade Cauchy-Schwarz. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 16 - 20, quadrimestre 1. 1995.

[11] WU, Hui-Hua; WU, Shanhe. **Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality**. Disponível em: <http://rgmia.org/papers/v12e/Cauchy-Schwarzinequality.pdf>. Acesso em: 11 de março de 2013.