UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Paulo Henrique de Moraes

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE SISTEMAS LINEARES

Florianópolis

2016

Paulo Henrique de Moraes

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE SISTEMAS LINEARES

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Moraes, Paulo Henrique
Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares / Paulo Henrique Moraes ; orientadora, Prof. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves - Florianópolis, SC, 2016.
65 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. Matrizes. 3. Escalonamento de matrizes. 4. Resolução de sistemas lineares. 5. Equação matricial. I. Gonçalves, Prof. Dra. Maria Inez Cardoso. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática. III. Título.

Paulo Henrique de Moraes

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE SISTEMAS LINEARES

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de "Mestre em Matemática", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Florianópolis, 18 de abril 2016.

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Orientador

Prof. Dra. Rosane Rossato Binotto (UFFS)

Prof. Dra. Flavia Tereza Giordani (UFSC)

Prof. Dra. Alda Dayana Mattos Mortari (UFSC)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pelas benções concedidas,

Agradeço também a minha família, minha esposa Graciela Gottardo e minha filha Rafaela, que durante esses 2 anos compreenderam que era necessário os meus estudos praticamente quase todos os finais de semana me incentivando para realização deste sonho.

Aos meus pais e irmãos que sempre me deram força para seguir em frente.

Aos colegas Fabiano, Emerson, Juarez que apesar de não serem do curso de matemática discutíamos sobre o mestrado e sobre ensino-aprendizagem, fazendo me repensar sobre minhas práticas pedagógicas.

Aos meus colegas da turma PROFMAT - 2014, que durante esses 2 anos de curso tínhamos encontro marcado toda sexta - feira para estudar, tomar chimarrão, e fazer uns lanchinhos entre um exercício e outro. Entre esses colegas vale aqui, destacar o apoio que recebi da Ana Maria Mrás e de Jeremias Stein Rodriguês pelas aulas que me deram, a ajuda nas resoluções de muitos exercícios, sem nunca pedir algo em troca. Acredito que se não fosse a ajuda desses dois grandes amigos talvez não tivesse conseguido concluir o curso.

Ao IMPA e SBM, principalmente pela oportunidade de cursar o PROFMAT, onde conheci pessoas maravilhosas.

A CAPES pelo apoio financeiro que também é importante.

E por fim mais não menos importante quero agradecer a todos os professores pelas ótimas aulas que nos concederam. Em especial a professora Dra. Alda Dayana Mattos Mortari pelas suas explicações minuciosas, exigindo que nós explicássemos também tin-tin por tin-tin na prova isso acabou me ajudando muito na vida profissional, ao professor Dr. Fernando de Lacerda Mortari, que durante suas aulas despertou em mim outras maneiras de ver, interpretar e aplicar a matemática. E a minha orientadora Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves pela simpatia com que me atendia para tirar dúvidas da minha dissertação.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo tornar-se um material de consulta para professores do ensino médio. Quando resolvemos um sistema de equações lineares algebricamente obtemos três situações possíveis. Com relação ao seu conjunto solução: O sistema linear não possui solução, possui uma única solução, ou ainda possui infinitas soluções. Neste trabalho, além de apresentarmos como resolver sistemas lineares algebricamente apresentamos também a interpretação geométrica destas três situações possíveis, com o objetivo de fazer com que o aluno e também o professor de ensino médio tenham uma visão diferente do tema e com isto uma melhor compreensão.
Palavras-chave: Matrizes, escalonamento de matrizes, resolução de sistemas lineares, equações vetoriais, combinação linear e equação matricial

ABSTRACT

This study aims to become a reference material for high school teachers. When we solve a system of algebraic linear equations we obtain three possible situations. With respect to its solution set: The linear system has no solution, it has a unique solution or has infinite solutions. In this work, and we introduce how to solve linear systems algebraically present alsothe geometric interpretation of these three possible situations, in order to make the student and also the high school teacher have a different view of the subject and thereby possibility to understand better.

Keywords: Matrices, scaling matrices, solving linear systens, vector equations and matrix equations.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Enquanto professores de matemática estamos sempre a procura de ações para despertar e estimular nos alunos o prazer de aprender MatemÃ¡tica. Trabalhando como professor de matemática desde o ano de 2001 percebo que o ensino de **Sistemas de Equações Lineares** sempre esteve muito voltado somente para a resolução algébrica. De acordo com os livros didáticos adotados pelas escolas que trabalhei no decorrer desdes 15 anos foi possível notar que os livros mais recentes como (SOUZA, 2013) estão trazendo de maneira muito superficial a **Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares**. Talvez porque alguns trabalhos acadêmicos anteriores a este já vem relatando a falta e a angustia de muitos docentes no que diz respeito a esse tema.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's): frente a uma situação problema o aluno deve saber reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da matemática, ou seja, decidir - se pela utilização das forma algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística.

De acordo com os PCN's e com relação a álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de **Sistemas de Equações Lineares**. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre equações de 1^o e 2^o grau.
Já para a unidade **Geometria Analítica** tem como objetivo tratar algebricamente as propriedades e elementos geométricos. o aluno do ensino médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equções, sistemas ou inequações. Logo, o que os PCN's afirmam é que o aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser elaborado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características.(NACIONAIS, 2016)

Porém não é isso o que acontece com os livros didáticos, pois eles trazem esses dois assuntos bem separados. Sistemas de equações lineares é apresentado no volume 2 que o aluno irá aprender no 2^o ano do ensino médio quase sempre apenas a resolução algébrica. Já Geometria Analítica está no volume 3, ou seja o aluno irá aprender no 3^o ano do ensino médio. Assim por serem conteúdos passados em anos diferentes os alunos não fazem a ligação entre esses dois assuntos que poderiam ser estudados juntos. Até mesmo alguns professores tem dificuldades para fazer esta ligação.

Por isso a motivação para a realização deste trabalho. A escolha do tema **Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares** surgiu durante uma aula de **Álgebra Linear** com o professor Dr. Fernando de Lacerda Mortari. Ele nos mostrou uma maneira diferente de ver e analisar um sistema linear, o que]al mais tarde foi melhor aprofundado nas aulas de **Geometria Analítica** com a professora Dra. Alda Dayana Mattos Mortari.

Mesmo sendo professor de matemática no ensino básico, ou seja, ensino médio e fundamental durante tantos anos, também ainda não havia feito essa ligação de resolução algébrica com as outras formas de interpretar sistemas lineares, que estão presentes nesse trabalho.

Por exemplo, no decorrer do Capítulo 2 tratamos de sistemas de equações lineares. Começando com um problema do cotidiano e fazemos a sua interpretação através de 2 equações lineares, em seguida apresentamos os diversos tipos de sistemas de equações e uma maneira de como resolvê-los. Nesse caso o escalonamento. Para o desenvolvimento deste Capítulo usei como referência os livros (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2013), (HEFEZ; FERNANDEZ, 2012), (POLYA, 1995), (KATZ et al., 1955).

No Capítulo 3 apropriando-se dos conhecimentos apresentados Capítulo anterior fazemos a resolução algébrica de alguns sistemas de equações lineares através do método do escalonamento.

Já no Capítulo 4, utilizando-se do software **Geogebra**, apresentamos uma outra forma de interpretar um sistema de equações lineares. Que é através de sua interpretação geométrica.

E por fim no Capítulo 5 é apresentado ao leitor uma outra maneira de representar um sistema de equações lineares, que é através de equações vetoriais e equações matriciais. O leitor pode fazer um maior aprofundamento sobre o assunto com o livro (LAY, 2012)

Foi pensando em todas essas maneiras de interpretar um sistema de equações lineares, que surgiu a ideia de produzir um material, para que outros professores que ainda não tiveram a oportunidade de ter contato com esses métodos, possam ter um material de apoio para pesquisar e passar para seus alunos, não deixando apenas a solução algébrica que muitas vezes não quer dizer nada para o aluno além de contas.

2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

"A resolução de problemas é a coluna vertebral da instrução matemática desde o Papiro de Rind."
George Polya

> A História da Matemática nos mostra que elafoi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática [...] não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (OLIVEIRA, 2015)

Contudo, esse reconhecimento da relevância de desenvolver a capacidade de resolver problemas, para a formação plena das pessoas, não se deu repentinamente. Foi fruto de um processo histórico.
Segundo Polya, ao ter como prioridade a construção do conhecimento pelo fazer pensar, o papel da resolução de problemas é fundamental para auxiliar na apreensão dos significados
Para isso, no seu livro: "A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático". Polya apresenta algumas etapas que devem ser consideradas na resolução de problemas. São elas:

- compreensão do problema;
- elaboração de um plano de solução;
- execução do plano;
- verificação ou retrospectiva;
- emissão da resposta.

Muitos dos problemas do nosso cotidiano podem ser modelados matematicamente por sistemas de equações lineares. Apresentamos a seguir dois exemplos de problemas, os quais podemos resolver através de sistemas de equações lineares:

Exemplo 2.1.1. *Um jogo entre Figueirense e Avaí foi visto por 18.000 pessoas e apresentou uma renda de R\$540.000,00. Haviam dois tipos de ingressos: arquibancada a R\$20,00 cada, e cadeira numerada a R\$50,00 cada. Quantos torcedores compraram arquibancada? E quantos compraram cadeira numerada?*

Para resolver a situação acima, precisamos primeiro compreender o problema e interpretá-lo matematicamente. Chamemos de x, o número de pessoas que ocuparam a arquibancada e y, o número de pessoas que ocuparam as cadeiras. Sabemos então que:

$$x + y = 18.000. \tag{2.1}$$

Por outro lado, sabemos também que as pessoas que estão na arquibancada pagaram R\$20,00 cada e as pessoas que estão na área das cadeiras pagaram R\$ 50,00 cada, perfazendo um total de R\$540.000,00. Podemos então interpretar a seguinte situação através da equação:

$$20x + 50y = 540.000. \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2), temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 18.000 \\ 20x + 50y = 540.000 \end{cases}.$$

Surgem então as seguintes perguntas:

1) O sistema acima possui solução?

2) Se o sistema possui solução como encontrá-la?

Para resolver um sistema deste tipo precisamos de um pouco mais de conhecimento. E também será necessário a utilização de algumas ferramentas que descreveremos no decorrer deste trabalho. Vamos agora para um problema um pouco mais simples.

Exemplo 2.1.2. *Queremos agora encontrar dois números reais de tal forma que a soma destes seja igual a 20 e a diferença entre eles seja igual a 2.*

Novamente, fazendo a interpretação matemática da situação, e chamando os dois úmeros que queremos conhecer de x e y. Podemos escrever as seguintes equações:

$$x + y = 20 \tag{2.3}$$

para a soma de dois números reais cuja soma é 20.

$$x - y = 2 \tag{2.4}$$

para a diferença de dois números reais cuja diferença é 2.
De (2.3) e (2.4) podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 2 \end{cases}. \tag{2.5}$$

Por se tratar de um exercício mais simples, podemos fazer algumas tentativas em busca desses dois números. As soluções procuradas podem ser representadas por pares de números reais (a, b) tais que, se substituirmos x por a e y por b, em (2.5) se tornam igualdades verdadeiras. Por exemplo, o par $(x, y) = (11,\ 9)$ é uma solução, pois obtemos as igualdades:

$$\begin{cases} 11 + 9 = 20 \\ 11 - 9 = 2 \end{cases}.$$

Os sistemas com duas equações lineares, como o acima, já eram considerados pelos babilônios por volta de 1800 a.C e resolvidos por um método que chamamos hoje de *método de eliminação gaussiana*.[1]
Por exemplo, para resolver o sistema de equações (2.5), ao somarmos a segunda equação com a primeira, o transformamos em um "sistema equivalente", que será explicado mais adiante.

$$\begin{cases} 2x = 22 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

que seguimos transformando até encontrarmos um sistema onde as soluções são trivialmente encontradas:

$$\begin{cases} 2x = 22 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x - y - x = 2 - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 9 \end{cases}.$$

Como veremos a seguir, esse método pode ser generalizado para *siste-*

[1] Em homenagem a Carl Friedrich Gauss(Alemanha, 1777 - 1855), considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

mas de equações lineares com m equações e n incógnitas, $m, n \in \mathbb{N}$ os quais definiremos na próxima seção.

Definição 2.1.1. *Uma* ***equação linear*** *é uma equação da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_1,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1 \in \mathbb{R}$ *e* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *são as* ***incógnitas****. Os escalares* [2] a_i $(1 \leq i \leq n)$ *são chamados de* ***coeficientes****.*
Um ***sistema de equações lineares****, ou um* ***sistema linear****, é um conjunto de uma ou mais equações lineares, nas mesmas incógnitas:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right. . \tag{2.6}$$

Uma ***solução do sistema*** *é uma n-upla* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *de números reais que satisfaz:*

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{in}c_n = b_i, \quad \forall\ 1 \leq i \leq m.$$

O ***conjunto solução*** *de um sistema linear é o conjunto de todas as soluções do sistema, que pode ser representado por:*

$$S = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n; a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \ldots + a_{in}c_n = b_i,\ \forall\ 1 \leq i \leq m.\}$$

Para qualquer sistema de equações lineares, existem exatamente três possibilidades para o seu conjunto solução:

i) **Solução única:** Existe uma única $n - upla$ $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ que satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

ii) **Infinitas soluções:** Existem infinitas $n - uplas$ $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ diferentes que satisfazem simultaneamente todas as equações do sistema. Neste caso S possui infintos elementos.

iii) **Nenhuma solução:** Não existe nenhuma $n{-}upla$ $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ que satisfaça simultaneamente todas as equações do sistema. Neste caso S é vazio.

[2] Neste trabalho chamaremos de escalares quando estivermos nos referindo a números reais.

Definição 2.1.2. *Dizemos que um sistema linear é* ***consistente*** *se ele possui pelo menos uma solução e que o sistema é* ***inconsistente*** *se ele não possui nenhuma solução.*

2.2 SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEO

Um tipo especial de sistema de equações lineares, são os *sistemas homogêneos*, ou seja, aqueles sistemas como em (2.6), porém com os termos independentes [3] b_i's todos nulos.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\cdots+ a_{mn}x_n & = 0 \end{array}\right. . \tag{2.7}$$

Todo sistema de equações lineares homogêneo sempre possui pelo menos uma solução a qual é dada por $\mathbf{x = (0,0,\ldots,0)}$, e é chamada de **solução trivial**.
Um sistema linear homogêneo pode ter outras soluções além da trivial.

2.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES EQUIVALENTES

Note que para resolver o sistema (2.6), do exemplo 2 anterior, ele foi modificado gradativamente, por meio de uma sequência de operações chamadas *operações elementares*, com o objetivo de transformá-lo em um **sistema equivalente** mais simples de ser resolvido.
Dois sistemas de equações lineares são ditos *sistemas equivalentes*, se pudermos obter um sistema a partir do outro usando uma sequência finita de operações elementares. São três os tipos de operações elementares, as quais descreveremos a seguir.
Podemos encontrar um outro sistema equivalente ao inicial, utilizando -se das seguintes operações;

i) Trocar a posição relativa de duas equações do sistema.
Por exemplo, dado o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y & = & 20 \\ x-y & = & 2 \end{array}\right., \text{ podemos fazer } \left\{\begin{array}{rcr} x-y & = & 2 \\ x+y & = & 20 \end{array}\right. .$$

[3] Um coeficiente independente ou constante é um termo da equação em que não há variáveis.

ii) Substituir uma equação pela soma membro a membro da própria equação com um múltiplo de outra.
Por exemplo, dado o sistema

$$\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=2 \end{cases}, \text{ podemos fazer } \begin{cases} x+y=20 \\ (x-y)+1(x+y)=2+20 \end{cases}$$

ou seja, $\begin{cases} x+y=20 \\ 2x=22 \end{cases}$.

iii) Substituir uma equação por um múltiplo da equação dada, ou seja, a nova equação é obtida multiplicando-se a equação dada por um número real não nulo.
Por exemplo, dado o sistema

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 2x=22 \end{cases} \text{ podemos fazer } \begin{cases} x+y=20 \\ \frac{1}{2}\times 2x=\frac{1}{2}\times 22 \end{cases}$$

ou seja, $\begin{cases} x+y=20 \\ x=11 \end{cases}$.

Esta relação entre sistemas é uma relação de equivalência, como veremos com detalhes no final deste Capítulo.

Antes de formalizar e generalizar o método usado para resolver o **Exemplo 2.1.2**, vamos introduzir uma notação a qual irá não somente simplificar a notação de um sistema de equação lineares, mas também permitir uma formulação mais concisa do método.

Então, dado um sistema de equações lineares com n incógnitas e m equações

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}, \tag{2.8}$$

podemos reescrever este sistema utilizando-se de matrizes.
Como duas matrizes são iguais se, e somente se, suas entradas correspondentes são iguais, nós podemos substituir as m equações deste sistema por uma única equação matricial, como segue:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Note que a matriz $m \times 1$ que está a esquerda pode ser reescrita como um produto matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & + & a_{12} & + & \cdots & + & a_{1n} \\ a_{21} & + & a_{22} & + & \cdots & + & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & + & a_{m2} & + & \cdots & + & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Se denotarmos estas matrizes por $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$, respectivamente, o sistema original de m equações e n incógnitas foi sustituído pela única equação matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

A matriz A nessa equação é chamada de matriz dos coeficientes do sistema. Usando a matriz dos coeficientes e o lado direito da equação, temos uma matriz associada a tal sistema, a qual é chamada de *matriz ampliada* do sistema dada por:

Usando a matriz dos coeficientes e o lado direito do sistema (2.8) temos uma matriz associada a tal sistema, e chamada de *matriz ampliada* do sistema dada por:

$$A = \left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & + & a_{12} & + & \cdots & + & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & + & a_{22} & + & \cdots & + & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & + & a_{m2} & + & \cdots & + & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

E esta matriz ampliada de um sistema de equações lineares será usada ao longo deste trabalho, para resolvermos os sistemas lineares através do escalonamento desta matriz.

2.4 ESCALONAMENTO DE MATRIZES

Como vimos anteriormente podemos representar um sistema de equações lineares através de uma matriz.
Nesta seção mostraremos que essas matrizes associadas a um sistema de equações lineares podem ser transformada por meio de uma sequência de operações elementares sobre linhas, numa matriz em uma forma muito especial, a *forma escalonada*, que será utilizada para resolver sistemas lineares.

Definição 2.4.1. *Uma matriz $m \times n$ será dita estar na forma escalonada se a matriz for nula, ou se:*

i) O primeiro elemento não nulo a partir da esquerda de cada linha não nula é 1;

ii) Toda coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;

iii) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

iv) Se a linha $\boldsymbol{k}$ for não nula, em que $(1 \leq k \leq m-1)$ o número de zeros que antecedem o primeiro elemento não nulo da linha $\boldsymbol{k+1}$ é maior que o número de zeros que antecedem o primeiro elemento não nulo da linha $\boldsymbol{k}$.

Por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está na forma escalonada, pois todas as condições da definição anterior são satisfeitas, mas as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 13 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não estão na forma escalonada, pois a primeira não satisfaz a condição ii). Observe que acima do primeiro elemento não nulo da linha 2 é diferente de zero. Enquanto a segunda matriz não satisfaz as condições i) e iv), ou seja, o primeiro elemento não nulo a partir da esquerda da primeira linha é diferente de 1, e na linha 2 que não é nula, o número de zeros que antecedem o primeiro elemento não nulo da linha é menor que o número de zeros que antecedem o primeiro elemento não nulo da linha 1.

O resultado que apresentaremos a seguir garantirá que toda *matriz é equivalente por linhas*[4] a uma matriz na forma escalonada. Assim ao reduzirmos a matriz ampliada associada a um dado sistema de equações lineares à forma escalonada, encontramos um outro sistema equivalente ao sistema dado, porém o qual se encontra em uma forma mais simples. Quando aplicado aos sistemas de equações lineares, este resultado é chamado de *processo de eliminação de Gauss-Jordan, ou eliminação gaussiana, ou ainda método de escalonamento.*[5]
Vejamos agora um algoritmo que *reduz por linhas* uma matriz dada não nula qualquer a uma matriz na forma escalonada. O termo reduzir por linhas significa transformar uma matriz usando as transformações elementares sobre linhas.

E essas operações elementares se constituem de três operações básicas. São elas:

- **Somar múltiplo de outra linha:** Equivale a somar múltiplo da outra equação que também não altera a solução do sistema.
- **Trocar de linhas:** A troca de linhas corresponde a troca de posição das equações, o que não influencia na solução do sistema.
- **Multiplicar uma linha por um número não nulo:** equivale a multiplicar um número não nulo na equação correspondente que também não altera a solução.

Com isso para escalonar um sistema devemos seguir os seguintes passos:

Passo 1. Seja k_1 a primeira coluna da matriz dada com algum elemento não nulo. Troque as linhas entre si de modo que esse elemento não nulo apareça na primeira linha, isto é, de modo que na nova matriz

[4]Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é equivalente por linhas a uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$, se B pode ser obtida de A aplicando-se uma sequência de operações elementares sobre as suas linhas.

[5]Esse primeiro nome é essencialmente devido a Carl Friedrich Gauss (Alemanha, 1777-1855), e foi aperfeiçoado por Camille Jordan (França 1838-1922), por esse motivo, é também chamado de eliminação de Gauss- Jordan.

$a_{1k_1} \neq 0$.

Passo 2. Para cada $i > 1$, realize a transformação

$$L_i \to L_i - \frac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}} L_1.$$

Repita os passos 1 e 2 na matriz assim obtida, ignorando a primeira linha. Novamente, repita os passos 1 e 2 nessa nova matriz, ignorando as duas primeiras linhas etc., até alcançar a última linha não nula.

Passo 3. Se $L_1, \ldots, L_p$ são linhas não nulas da matriz obtida após terminar o processo acima e se k_i é a coluna na qual aparece o primeiro elemento não nulo a_{ik_i} da linha L_i aplique as transformações

$$L_i \to \frac{1}{a_{ik_i}} L_i$$

para todo $1 \leq i \leq p$.

Passo 4. Realize na matriz obtida até então as transformações

$$L_m \to L_m - a_{mk_i} L_i, \qquad m \in \{1, \ldots, i-1\},$$

para $i = 2$. Depois para $i = 3$, e assim por diante, até $i = p$. Dessa forma, obteremos uma matriz na forma escalonada que é equivalente por linhas à matriz dada.

OBS: Todo escalonamento é efetuado em etapas, escolhendo as linhas de cima para baixo. Na primeira etapa escolhemos a linha 1, na segunda escolhemos a linha 2, e assim por diante.

Estabelecemos assim o seguinte teorema:

Teorema 2.4.2. *Toda matriz é equivalente a uma matriz na forma escalonada.*

OBS: Neste trabalho não faremos a demonstração de teoremas, porém caso o leitor tenha interesse. A demonstraçãodo **Teorema 2.4.2.** está no livro (BOLDRINI et al., 1986) página 60.

Vejamos um exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é transformada numa matriz na forma escalonada com as seguintes sequências de operações sobre as linhas:
Como já temos o primeira elemento da primeira linha diferente de zero e igual a 1, podemos ir direto para o **passo 2**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} L_1 \times (-2) + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como zeramos todos os elementos da coluna 1 abaixo do elemento a_{11}, vamos agora para a linha 2 a procura do primeiro elemento não nulo. Em seguida, aplicamos os **passo 1** e **passo 2**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} L_2 \times (2) + L_3 \to L_3,$$

obtendo a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para zerar o elemento acima de a_{22} também podemos utilizar o **passo 2**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_2 \times (-1) + L_1 \to L_1.$$

Ficando com a matriz a seguir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que na terceira linha todos os elementos são nulos. Logo não a mais nada a fazer e a matriz acima já está na sua forma escalonada. Pelo algoritmo acima deduzimos que qualquer matriz é equivalente a pelo menos uma matriz na forma escalonada. Como em cada passo do algoritmo temos certa margem de escolhas de operações elementares sobre as linhas da matriz, não há aparentemente nenhum motivo para poder afirmar que a forma escalonada de uma dada matriz seja única. Fato é que, não importando qual a sequência de operações elementares que efetuemos nas linhas de uma dada matriz, no final do processo chegamos a uma *mesma* matriz na forma escalonada que é equivalente à matriz dada.

Pois de fato, ela é claramente reflexiva, pois basta multiplicar uma das equações do sistema por 1; é transitiva, pois basta concatenar uma sequência de transformações elementares com uma outra; e é simétrica, pois podemos desfazer uma transformação elementar com outra do mesmo tipo.

Utilizando-se dessas ferramentas que neste Capítulo foram apresentadas, vamos no Capítulo seguinte aplicá-las nas resoluções dos sistemas de equações lineares.

3 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

3.1 CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Neste capítulo, colocaremos em prática a teoria desenvolvida com as matrizes para a resolução de sistemas de equações lineares.

Definição 3.1.1. *Quanto a suas soluções, um sistema linear se classifica como impossível, possível e determinado, ou possível e indeterminado. Um sistema linear é chamado* ***impossível*** *(SI), quando não tem solução,* ***possível e determinado*** *(SPD), quando tem uma única solução, e* ***possível e indeterminado*** *(SPI), quando tem mais de uma solução.*

Como já foi observado anteriormente um sistema linear homogêneo com n incógnitas e m equações é sempre possível, pois admite como solução a *n-upla* (0,0, ... ,0), chamada *solução trivial.* Qualquer outra solução, se existir, é dita *solução não trivial* do sistema.
Para resolver os sistemas lineares apresentados neste trabalho, utilizaremos o método de *eliminação de Gauss-Jordan, também conhecido como método de escalonamento* visto no Capítulo anterior, esse método consiste em se tomar a matriz ampliada de um sistema linear, e aplicar uma sequência de operações elementares a esta matriz, de modo a obtermos uma matriz na forma escalonada equivalente a matriz ampliada do sistema linear, porém mais "fácil"de se resolver. Para encontrar a solução desse sistema, basta agora reescrevê-lo utilizando-se desta matriz.

Vamos então agora resolver o problema do Exemplo 2.1.1 do início deste trabalho.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 18.000 \\ 20x & + & 50y & = & 540.000 \end{array}\right. .$$

Para isso vamos associar o sistema a matriz ampliada e fazer a sequêcia de operações elementares.

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 18000 \\ 20 & 50 & 540000 \end{array}\right] L_1 \times (-20) + L_2 \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 18000 \\ 0 & 30 & 180000 \end{array}\right] L_2 \times \left(\frac{1}{30}\right) \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 18000 \\ 0 & 1 & 6000 \end{bmatrix} L_2 \times (-1) + L_1 \to L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 12000 \\ 0 & 1 & 6000 \end{bmatrix}.$$

Logo, podemos associar ao sistema original um sistema mais fácil de se resolver.

$$\begin{cases} x = 12.000 \\ y = 6000 \end{cases}.$$

Portanto, no dia do jogo entre Figueirense e Avaí haviam 12.000 torcedores na arquibancada e 6.000 nas cadeiras numeradas. Também podemos classificar este sistema como possível e determinado, visto que essa é a única solução.

Veremos a seguir a resolução de alguns sistemas lineares.

Exemplo 3.1.1. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema linear a seguir:*

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 3 \\ x - y - z &= 2 \end{cases}.$$

Primeiro escreveremos a matriz ampliada do sistema acima que é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Agora aplicando a eliminação de Gaus - Jordan temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-2) + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-1) + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-2) + L_3 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad L_2 + L_1 \to L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right],$$

ou seja,

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 2 \\ -y - z & = & 1 \\ 0 & = & -1 \end{array}\right. .$$

Observe que a terceira equação nos diz $0 = -1$, o que é um absurdo. Isto significa que o sistema não possui solução, ou seja, é impossível.

Exemplo 3.1.2. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema linear a seguir:*

$$\left\{\begin{array}{lcr} x + 2y - 2z & = & -5 \\ 2x - 3y + z & = & 9 \\ 3x - y + 3z & = & 8 \end{array}\right. .$$

Primeiro escreveremos a matriz ampliada do sistema acima que é dada por:

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right].$$

Agora aplicando a eliminação de Gaus - Jordan temos:

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right] \quad L_1 \times (-2) + L_2 \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & 5 & 19 \\ 3 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right] \quad L_1 \times (-3) + L_3 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & 5 & 19 \\ 0 & -7 & 9 & 23 \end{array}\right] \quad L_2 \times (-1) + L_3 \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \quad L_3 \times (\tfrac{1}{4}) \to L_3$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 \times (-5) + L_2 \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad L_2 \times (\tfrac{-1}{7}) \to L_2$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad L_3 \times (2) + L_1 \to L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad L_2 \times (-2) + L_1 \to L_1$$

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \text{ ou seja,}$$

$$\left\{\begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & -2 \\ z = & 1 \end{array}\right. .$$

Observe que este sistema apresenta uma única solução. Portanto, é um sistema possível e determinado.

Exemplo 3.1.3. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema linear a seguir:*

$$\left\{\begin{array}{rcr} x + y + z & = & 4 \\ 2x - y + 3z & = & 6 \\ -x + 2y - 2z & = & -2 \end{array}\right. .$$

Primeiro escreveremos a matriz ampliada do sistema acima que é dada por:

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right].$$

Agora aplicando a eliminação de Gaus - Jordan temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-2) + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad L_1 + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad L_2 + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-1) + L_1 \to L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Após o escalonamento da matriz ampliada associada ao sistema linear inicial obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + \dfrac{4}{3}z = \dfrac{10}{3} \\ \\ y - \dfrac{1}{3}z = \dfrac{2}{3} \end{cases}. \tag{3.1}$$

Observe que (3.1) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x = \dfrac{10}{3} - \dfrac{4}{3}z \\ \\ y = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}z \end{cases}.$$

Ou seja, os valores de x e y dependem do valor de z, e z pode assumir qualquer valor real. Portanto, o sistema possui infinitas soluções. E é dito sistema possível e indeterminado.

4 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE SISTEMAS LINEARES

Muitas vezes nas escolas de ensino básico, quando é estudada a resolução de sistemas de equações lineares, a interpretação geométrica desses sistemas não é abordada, o que faz com que os alunos tenham uma visão puramente algébrica do problema, impossibilitando uma melhor compreensão desse problema e das suas aplicações. Foi isso o que observei nos livros didáticos **Matemática Aula por Aula** (FILHO; SILVA, 2000) e **Coneções com a Matemática** (BARROSO, 2010) do ensino médio.
Neste capítulo, apresentamos a interpretação geométrica de sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas e também sistemas lineares de três equações e três incógnitas, com o objetivo de desenvolver um material que possa ser utilizado por professores de ensino básico (ou ensino médio). Todos os exemplos apresentados serão resolvidos através do método do escalonamento, o qual foi apresentado no Capítulo 3.
Qual é o significado geométrico de um sistema de 2 equações e 2 incógnitas que possui infinitas soluções?
Qual é o significado geométrico de um sistema de 3 equações e 3 incógnitas que não possui solução?
Para responder a essas perguntas, resolveremos no decorrer deste capítulo mais alguns sistemas lineares, dando a cada um deles sua interpretação geométrica.

4.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM SISTEMA 2×2

Dizemos que um sistema de equações lineares **S** é do tipo 2×2, quando apresenta duas equações e duas incógnitas, ou seja , é da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right. ,$$

em que $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$.
Observamos que cada uma das equações do sistema representa uma reta no plano $\mathbb{R}^2$. Se o sistema possuir solução cada solução pode ser vista como um ponto **P** do plano, dado por suas coordenadas cartesianas $P = (x, y)$. Mais claramente, se r_1, r_2 são as retas definidas pelas duas equações de **S**, então as soluções de **S** são os pontos $P = (x, y)$ daquele

plano que pertencem à interseção dessas retas $r_1 \cap r_2$. Como sabemos, as posições relativas de duas retas no plano são:

i) concorrentes;

ii) paralelas;

iii) coincidentes.

A seguir apresentamos alguns sistemas equações lineares 2×2 que ilustram as possíveis situações descritas acima.

Exemplo 4.1.1. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema a seguir:*

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 2y & = 7 \\ 2x + 3y & = 9 \end{array} \right. .$$

Solução: A matriz ampliada associada ao sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Escalonando esta matriz vamos obter:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-2) + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-1) \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-2) + L_1 \to L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Observamos que este sistema apresenta uma única solução. E a solução do sistema é o par ordenado $(-3, 5)$.
Agora vejamos a interpretação geométrica dessas duas equações:
Observe na Figura 1 que as duas retas se cruzam no ponto $(-3, 5)$ que é a solução do sistema.

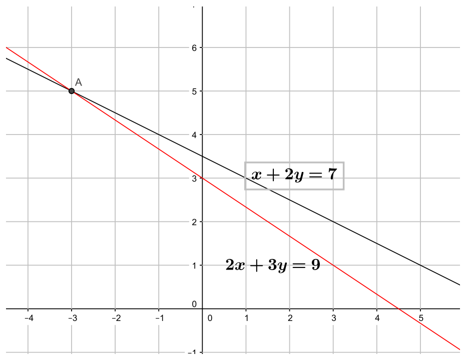

Figura 1: Retas concorrentes.

Exemplo 4.1.2. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema a seguir:*

$$\begin{cases} x - 2y &= 3 \\ -2x + 4y &= 7 \end{cases}.$$

Solução: A matriz ampliada associada ao sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Escalonando a matriz vamos obter:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \end{bmatrix} L_1 \times (2) + L_2 \to L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}.$$

Com o sistema escalonado poderíamos obter o valor das incógnitas. Porém, da segunda linha obtemos $0 = 13$, que demonstra uma impossibilidade. Logo, o sistema não possui solução.
Geometricamente como podemos observar na Figura 2 que as duas equações que representam o sistema são duas retas paralelas, logo não possuem nenhum ponto comum. Portanto, o sistema não possui solução.

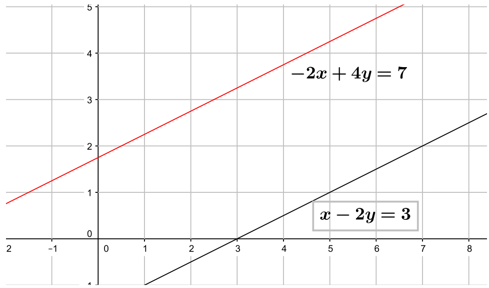

Figura 2: Retas paralelas.

Exemplo 4.1.3. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema a seguir:*

$$\begin{cases} \ \ 2x - 2y &= 5 \\ -3x + 3y &= -7,5 \end{cases}.$$

Solução: A matriz ampliada associada ao sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & -7,5 \end{bmatrix}.$$

Escalonando a matriz vamos obter:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & -7,5 \end{bmatrix} \quad L_1 \times \frac{1}{2} \to L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2,5 \\ -3 & 3 & -7,5 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (3) + L_2 \to L_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O que é equivalente a $x - y = \dfrac{5}{2}$, ou seja $x = y + \dfrac{5}{2}$.
Observamos então que y pode assumir qualquer valor real, enquanto x depende do valor que y assumir. Portanto, o sistema possui infinitas soluções.
Vejamos agora qual seria a interpretação geométrica dessas duas equações.

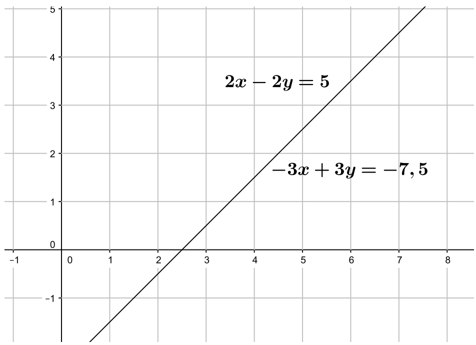

Figura 3: Retas coincidentes.

Observamos na Figura 3 duas equações que representam a mesma reta, logo elas possuem uma infinidade de pontos comuns que seriam todas as possíveis soluções do sistema, por isso dizemos que o sistema possui infinitas soluções.

4.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM SISTEMA 3×3

Dizemos que um sistema linear **S** é do tipo 3×3, quando apresenta três equações e três incógnitas, ou seja , é da forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_2y + c_3z = d_3 \end{cases},$$

em que $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_2, c_3, d_3 \in \mathbb{R}$.
Porém, agora cada solução (x, y, z) de um sistema 3×3 pode ser vista como um ponto P no espaço tridimensional, dado por suas coordenadas cartesianas $P = (x, y, z)$. Observamos que agora cada uma das equações do sistema é a equação de um plano no espaço, e as soluções do sistema são os pontos comuns a esses três planos. Mais claramente, se α_1, α_2 e α_3 são os planos definidos pelas três equações de **S**, então as soluções de **S** são os pontos $P = (x, y, z)$ que pertencem à interseção desses planos $\alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha_3$.

Ao todo são oito posições relativas possíveis para os planos α_1, α_2 e α_3, sendo que quatro delas correspondem aos sistemas impossíveis, ou seja, sistemas que não possuem solução; três delas a sistemas indeterminados, ou seja, sistemas que possuem solução porém não é única; e apenas uma delas apresenta solução única.
Apresentamos a seguir os oito possíveis resultados na resolução de um sistema linear 3×3 e a sua interpretação geométrica.

Exemplo 4.2.1. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema linear a seguir:*

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 3 \\ x + y + z & = 2 \\ -x + 3y + z & = 12 \end{cases}.$$

Primeiramente escrevemos a matriz ampliada do sistema dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 12 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as operações elementares transformaremos a matriz dada em outra matriz equivalente porém na forma escalonada. Logo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 12 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-1) + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 12 \end{bmatrix} \quad L_1 + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-1) \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-5) + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{bmatrix} \quad L_3 \times \frac{1}{10} \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 \times 2 + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_3 + L_1 \to L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-2) + L_1 \to L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Reescrevendo o sistema temos:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Portanto, os valores de (x,y,z) que satisfazem o sistema são: $x = -2$, $y = 3$ e $z = 1$, os quais são as coordenadas de um ponto **P** no espaço tridimensional.

Vejamos agora como fica a interpretação geométrica dessas três equações do sistema.

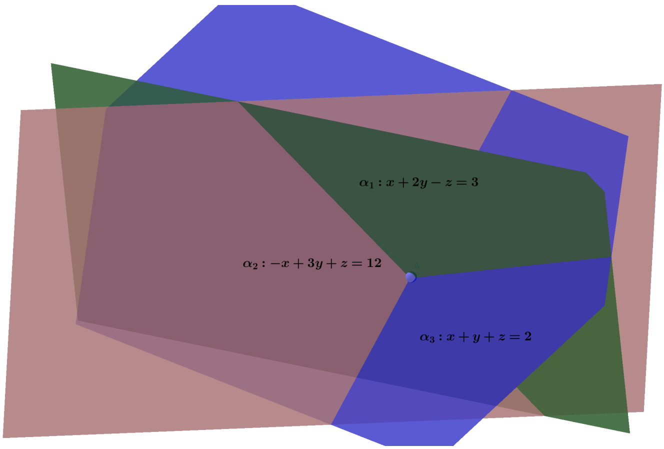

Figura 4: Intersecção de três planos em um único ponto.

Como observamos na Figura 4 os três planos se intersectam em um único ponto sendo este o ponto de coordenadas $(-2, 3, 1)$.

Exemplo 4.2.2. *Determine se houver a(as) solução(ões) do sistema linear a seguir:*

$$\begin{cases} x + 2y - z = & 1 \\ 2x - 3y + 4z = & 2 \\ 3x - y + 3z = & 3 \end{cases}.$$

Solução: Primeiramente representaremos o sistema acima com a sua matriz ampliada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Aplicaremos as operações elementares a fim de transformar esta matriz em outra equivalente porém na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-2) + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-3) + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-1) + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-\tfrac{1}{7}) \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-2) + L_1 \to L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{7} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Após escalonar a matriz observe que ficamos com uma linha de zeros e com isso, podemos reescrever o sistema com essa matriz escalonada ficando com:

$$\begin{cases} x + \dfrac{5}{7}z = 1 \\ \\ y - \dfrac{6}{7}z = 0 \end{cases}, \tag{4.1}$$

observe em 4.1 que temos uma variável livre, nesse caso a variável z podemos então colocar x e y em função de z, ficando com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{5}{7}z \\ \\ y = \dfrac{6}{7}z \end{cases},$$

logo, obtemos como solução do sistema $\left(1 - \dfrac{5}{7}z, \dfrac{6}{7}z, z\right)$, em que $z \in \mathbb{R}$.

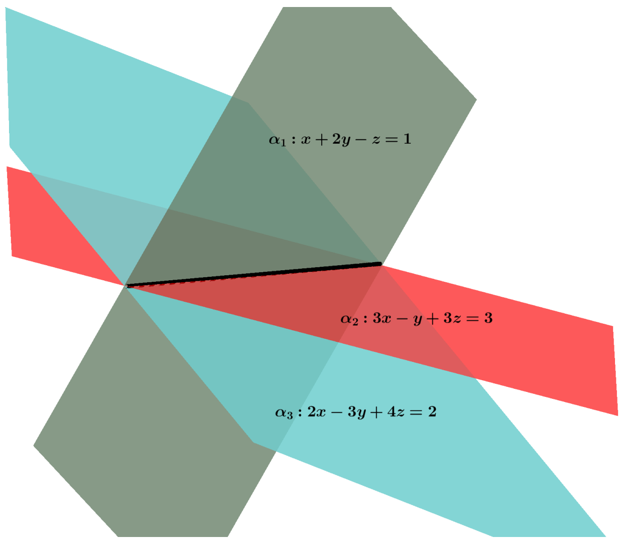

Figura 5: A intersecção dos três planos é uma reta.

Fazendo a representação geométrica desses três planos, o que se observa é que a intersecção deles forma uma reta, então variando o **z** que pertence ao conjunto dos $\mathbb{R}$ obtemos todos os pontos dessa reta,ou seja, infinitos pontos.

Exemplo 4.2.3. *Determine se houver a(as) solução(ões) do sistema linear a seguir:*

$$\begin{cases} x + 4y - z = & -2 \\ 2x - 2y + z = & 5 \\ -4x + 4y - 2z = & -10 \end{cases}.$$

Solução: Primeiramente escrevemos a matriz ampliada do sistema linear dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ -4 & 4 & -2 & -10 \end{bmatrix}.$$

Agora aplicaremos as operações elementares, buscando transformar esta matriz em outra equivalente, porém na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \\ -4 & 4 & -2 & -10 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-2) + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -10 & 3 & 9 \\ -4 & 4 & -2 & -10 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (4) + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -10 & 3 & 9 \\ 0 & 20 & -6 & -18 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-\frac{1}{10}) \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 20 & -6 & -18 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-20) + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 {\times} (-4) {+} L_1 \to L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Após escalonar a matriz observe que ficamos com uma linha de zeros e com isso, podemos reescrever o sistema com essa matriz escalonada ficando com:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{5}z = \dfrac{8}{5} \\ \\ y - \dfrac{3}{10}z = -\dfrac{9}{10} \end{cases}, \tag{4.2}$$

observe em 4.2 que temos uma variável livre, nesse caso a variável z podemos então colocar x e y em função de z, ficando com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{8}{5} - \dfrac{1}{5}z \\ \\ y = -\dfrac{9}{10} + \dfrac{3}{10}z \end{cases}.$$

Logo a solução do sistema é dada por; $\left(\dfrac{8}{5} - \dfrac{1}{5}z, -\dfrac{9}{10} + \dfrac{3}{10}z, z\right)$ $z \in \mathbb{R}$.

Observando a Figura 6 possível notar que as equações $2x - 2y + z = 5$ e $-4x + 4y - 2z = -10$ representam o mesmo plano, pois uma equação é múltipla da outra. E a intersecção deles com o plano $x + 4y - z = -2$ é uma reta.

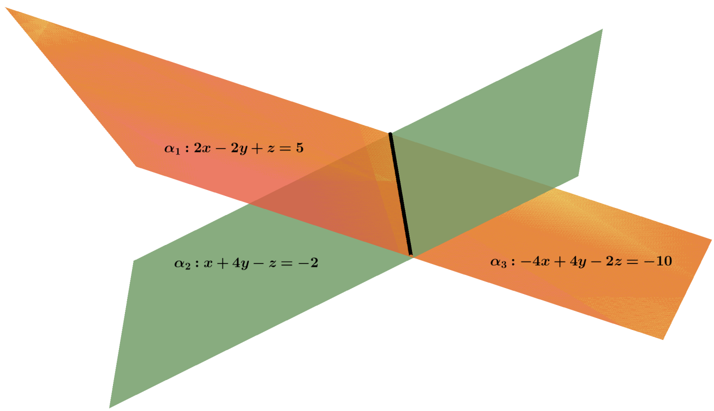

Figura 6: A intersecção dos três planos, sendo dois deles coincidentes, é uma reta.

Exemplo 4.2.4. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema a seguir:*

$$\begin{cases} x + 3y - 5z = & -1 \\ -2x - 6y + 10z = & 2 \\ 3x + 9y - 15z = & -3 \end{cases}.$$

Solução: Primeiramente escrevemos a matriz ampliada do sistema linear dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & -15 & -3 \end{bmatrix}.$$

Agora aplicaremos as operações elementares, buscando transformar esta matriz em outra equivalente, porém na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \\ 3 & 9 & -15 & -3 \end{bmatrix} \quad L_1 \times 2 + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -15 & -3 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-3) + L_3 \to L_3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ao fazer o escalonamento da matriz ampliada note que ficamos com 2 linhas nulas, logo as equações desses planos são múltiplos do 1^o plano, temos então que ambas equações representam o mesmo plano e a intersecção deles é o próprio plano. Por isso dizemos que esse sistema de equações possui infinitas soluções, a saber, todos os pontos deste plano.

Vamos agora analisar geometricamente a solução deste sistema de equações:

Observando a Figura 7 podemos notar que ambas as equações representam o mesmo plano.

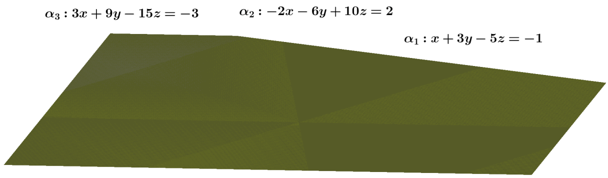

Figura 7: Na intersecção de três planos coincidentes todos os pontos são solução.

Exemplo 4.2.5. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema a seguir:*

$$\begin{cases} x - \dfrac{5}{2}y + \dfrac{3}{2}z = & 2 \\ -2x + 5y - 3z = & 5 \\ 4x - 10y + 6z = & 12 \end{cases}.$$

Solução: Primeiramente escrevemos a matriz ampliada do sistema linear dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{3}{2} & 2 \\ -2 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & -10 & 6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Aplicaremos agora as operações elementares, buscando transformar esta matriz em outra equivalente, porém na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ -2 & 5 & -3 & 5 \\ 4 & -10 & 6 & 12 \end{bmatrix} \quad L_1 \times 2 + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & -10 & 6 & 12 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-4) + L_3 \to L_3 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Analisando a matriz escalonada associada ao sistema de equações observamos duas impossibilidades $0 = 9$ e $0 = 4$. Logo, não existe solução para esse sistema. Vamos então verificar o que acontece geometricamente nessa situação.

Ao observarmos a Figura 8 a interpretação geométrica dessas equações,

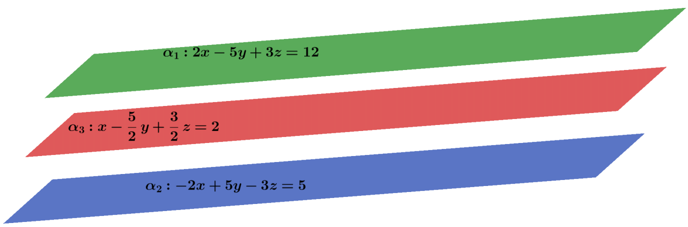

Figura 8: Três planos paralelos dois a dois.

podemos notar que as equações representam planos paralelos dois a dois. Portanto, não existe nenhum ponto que pertença simultaneamente aos três planos

Exemplo 4.2.6. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema a seguir:*

$$\begin{cases} -x + 3y - 4z = -6 \\ 3x - 9y + 12z = 0 \\ -2x + 6y - 8z = -12 \end{cases}.$$

Solução: Primeiramente escrevemos a matriz ampliada do sistema linear dada por:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & -6 \\ 3 & -9 & 12 & 0 \\ -2 & 6 & -8 & -12 \end{bmatrix}.$$

Aplicaremos agora as operações elementares buscando transformar esta matriz em outra equivalente, porém na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & -6 \\ 3 & -9 & 12 & 0 \\ -2 & 6 & -8 & -12 \end{bmatrix} \quad L_1 \times 3 + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ -2 & 6 & -8 & -12 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-2) + L_3 \to L_3 \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ao escalonar o sistema de equações encontramos na 3^a linha todos os elementos iguais a zero, isso nos diz que essa equação é múltipla da 1^a, e na 2^a temos uma impossibilidade $0 = -18$. Logo, o sistema não possui solução.
Vamos agora fazer a interpretação geométrica desses planos.

Observe na Figura 9 que temos dois planos que são coincidentes, isso justifica a linha de zeros, e outro plano paralelo a eles. Por isso a impossibilidade. Como os três planos não possuem nenhum ponto em comum, o sistema de equações não possui solução.

Exemplo 4.2.7. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema a seguir:*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 3 \\ -x - y - z = 1 \end{cases}.$$

Solução: Primeiramente escrevemos a matriz ampliada do sistema linear dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

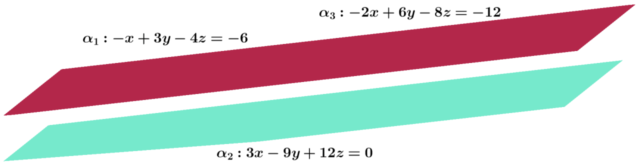

Figura 9: Dois dos planos são coincidentes e outro é paralelo a eles.

Aplicaremos agora as operações elementares buscando transformar esta matriz em outra equivalente, porém na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-1) + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-\frac{1}{2}) \to L_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ao escalonar o sistema de equações lineares obtemos uma impossibilidade $0 = 4$, logo esse sistema de equações não possui solução.
Vejamos agora a interpretação geométrica desse sistema de equações:
Note na Figura 10 que os plano α_1 e α_3 são paralelos, e ambos são intersectados por α_2 o qual é concorrente aos dois. A intersecção desses planos nos dá duas retas paralelas. Como não existe nenhum ponto comum aos três planos o sistema não possui solução.

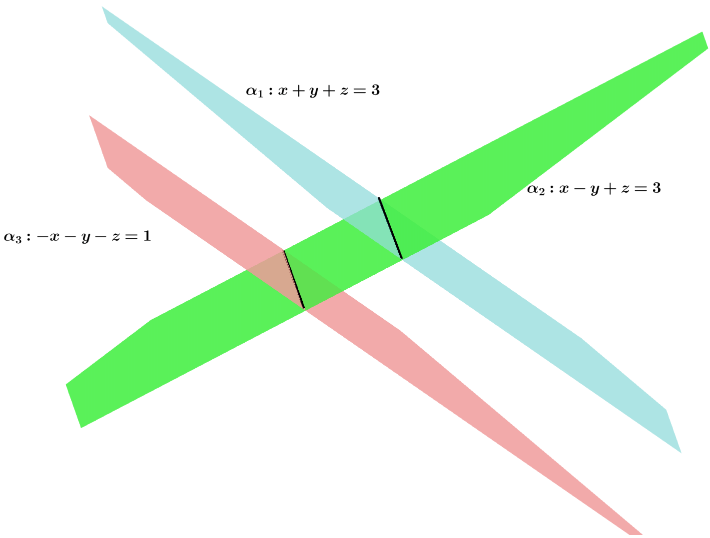

Figura 10: Dois dos planos são paralelos e outro intersecta ambos segundo duas retas paralelas.

Exemplo 4.2.8. *Determine se existir a(s) solução(ões) do sistema a seguir:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - y - 10z = -1 \\ -x - y + z = 2 \end{cases}.$$

Solução: Primeiramente escrevemos a matriz ampliada do sistema linear dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -10 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicaremos agora as operações elementares, buscando transformar esta matriz em outra equivalente, porém na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -10 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad L_1 + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad L_1 + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-\frac{1}{9}) \rightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-2) + L_3 \rightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vamos agora fazer uma análise geométrica desses sistema de equações:

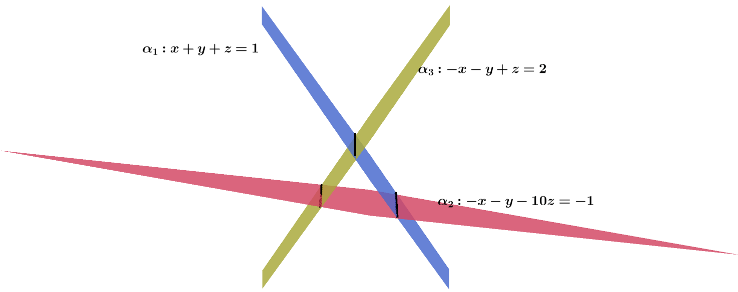

Figura 11: Três planos concorrentes dois a dois.

Observe na Figura 11 que os planos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ intersectam-se dois a dois, formando nas intersecções retas que são paralelas duas a duas. Como não existe nenhum ponto comum aos três planos, o sistema de equações não possui solução.

5 OUTRA INTERPRETAÇÃO PARA SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo, o leitor poderá interpretar um sistema de equações lineares de 2 formas diferentes, porém equivalentes:

i) Como uma equação vetorial.

ii) Como uma equação matricial.

Quando montamos um modelo matemático para um problema real, estamos livres para escolher o ponto de vista que seja o mais natural, e como a forma de interpretar é equivalente podemos mudar de um tipo de formulação para o outro sempre que for conveniente.

5.1 EQUAÇÕES VETORIAIS

Algumas propriedades importantes de sistemas lineares podem ser descritas através do conceito e notação de vetores. Esta seção faz a ligação entre equações de vetores e sistemas de equações. O termo *vetor* aparece numa grande quantidade de contextos matemáticos e físicos. Usaremos o termo *vetor* para designar uma *lista ordenada de números reais.* Essa ideia simples nos possibilita obter importantes e interessantes aplicações da forma mais rápida possível.

5.1.1 Vetores em $\mathbb{R}^2$

Consideremos o plano cartesiano que consiste de um sistema de coordenadas dado por um par de retas ortogonais, com orientação. Fixada um unidade de comprimento, um ponto P do plano pode ser identificado com o par (a, b) de números reais, que são sua coordenadas.
Vamos passar a considerar agora, apenas os segmentos orientados com ponto inicial na origem, denominados *vetores no plano.* É importante observar que vetores no plano são determinados apenas pelo seu ponto final, visto que seu ponto inicial é a origem. Assim, para cada ponto do plano $P(a, b)$, está associado um único vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ e, reciprocamente, dado um vetor, associamos um único ponto do plano, que é o seu ponto final. Isto é, a correspondência entre pontos do plano e vetores é biunívoca.
Uma matriz com apenas uma coluna é chamada de **vetor coluna** ou,

simplesmente, um **vetor**. O conjunto de todos os vetores com duas componentes[1] é denotado por $\mathbb{R}^2$. O $\mathbb{R}$ representa os números reais que aparecem nas componentes dos vetores, e o expoente 2 indica que cada vetor contém duas componentes.

5.1.2 Descrição Geométrica de $\mathbb{R}^2$

Considere um sistema de coordenadas cartesianas no plano, usando esta correspondência entre vetores e pontos do plano , costumamos representar um vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ pelas coordenadas do seu ponto final $P(a, b)$ ou usamos a notação de matriz-coluna $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.De modo que podemos considerar $\mathbb{R}^2$ como sendo o conjunto de todos os pontos do plano.

5.1.3 Vetores em $\mathbb{R}^3$

Da mesma forma que fizemos no plano, podemos considerar vetores no espaço. Teremos então um sistema de coordenadas dado por três retas orientadas, perpendiculares duas a duas, e, uma vez fixada uma unidade de comprimento, cada ponto P do espaço estará identificado com a terna ordenada de números reais(x, y, z). Aqui também existe uma correspondência biunívoca entre vetores e pontos do espaço que a cada vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ associa seu ponto final $P = (a, b, c)$, Deste modo, o vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ costuma ser denotado pelas coordenadas de P.

$$\mathbf{v} = (a, b, c) \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

5.1.4 Vetores em $\mathbb{R}^n$

Se n for um número inteiro positivo, $\mathbb{R}^n$ denota a coleção de todas as listas (ou listas ordenadas) de n números reais, geralmente escritas na

[1]os elementos de um vetor costumam ser chamados de componentes.

forma de uma matriz coluna $n \times 1$, tal como

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

O vetor cujas componentes são todas iguais a zero é chamado de **vetor nulo** e é denotado por $\overrightarrow{0}$.
A igualdade de vetores em $\mathbb{R}^n$ e as operações de multiplicação por escalar e soma de vetores são definidas componente a componente. Essas operação sobre vetores têm as seguintes propriedades que podem ser verificadas diretamente das propriedades correspondentes para números reais.

5.1.4.1 Propriedades das Operações Algébricas de $\mathbb{R}^n$

Observe que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial com as seguintes propriedades.

Para todos os **u, v, w** em $\mathbb{R}^n$ e para todos os escalares a e $b \in \mathbb{R}$

i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;

ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;

iii) $\mathbf{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$;

iv) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \overrightarrow{0}$;

v) $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$;

vi) $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$;

vii) $a(b\mathbf{u}) = (ab)(\mathbf{u})$;

viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

5.1.5 Combinações Lineares

Definição 5.1.1. *Dizemos que o vetor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ é uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_p$ se existirem números reais $c_1, c_2, \ldots, c_p$, tais que:*

$$y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p$$

A propriedade (ii) acima nos permite omitir os parênteses sempre que formamos uma combinação linear. Os escalares de uma combinação linear podem ser quaisquer números reais, incluindo o zero. Por exemplo, algumas combinações lineares dos vetores **u** e **v** são:

$$\sqrt{3}\mathbf{u} + \mathbf{v}, \qquad \frac{1}{2}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + 0\mathbf{v} \qquad 0 = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v}$$

O exemplo a seguir faz a ligação entre um problema importante sobre combinações lineares e sistemas lineares.

Exemplo 5.1.1. *Sejam* $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, *e* $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. *Determine se* $\boldsymbol{b}$ *pode ser escrito como uma combinação linear de* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$. *Isto é, determine se existem escalares* x *e* y *tais que*

$$x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}. \tag{5.1}$$

Se a equação vetorial acima tiver solução encontre-a.

Solução: Vamos usar as definições de multiplicação por escalar e de soma de vetores para reescrever a equação vetorial.

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

o que é o mesmo que

$$\begin{bmatrix} x \\ -2x \\ -5x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ 5y \\ 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ -2x + 5y \\ -5x + 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Os vetores da esquerda e da direita, da equação em 5.2 são iguais se, e somente se, suas componentes correspondentes forem iguais. Isto é x e y tornam a equação vetorial 5.1 verdadeira se, e somente, se x e y

satisfazem o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rr} x+2y= & 7 \\ -2x+5y= & 4 \\ -5x+6y= & -3 \end{array}\right. . \tag{5.3}$$

Para resolver esse sistema escreveremos a matriz ampliada do sistema e em seguida fazemos o escalonamento da mesma como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad L_1 \times 2 + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \quad L_1 \times 5 + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \quad L_2 \times \frac{1}{9} \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-16) + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-2) + L_1 \to L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução de (5.3) é $x = 3$ e $y = 2$. Portanto, $\mathbf{b}$ é uma combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, com escalares $x = 3$ e $y = 2$, isto é,

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} .$$

Observe, que no Exemplo 5.1.1, que os vetores originais $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{b}$ formam as colunas da matriz ampliada que foi escalonada. Portanto, podemos escrever a matriz ampliada imediatamente a partir da equação 5.1 sem ter que passar pelos passos intermediários do Exemplo 5.1.1, ou seja, simplesmente tomamos os vetores, na ordem em que eles aparecem em 5.1 e os colocamos nas colunas da matriz.

Portanto, a **equação vetorial**

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{b}$$

possui o mesmo conjunto solução que o sistema linear cuja matriz ampliada é

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n & \mathbf{b} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Em particular, $\mathbf{b}$ pode ser escrito por uma combinação linear de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ se e somente se existe solução para o sistema linear, representado por sua matriz ampliada em 5.4.

Uma das ideias-chave da Álgebra Linear é o estudo do conjunto de todos os vetores que podem ser gerados, ou escritos como combinação linear de um conjunto fixo de vetores $\{\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, como veremos a seguir.

Definição 5.1.2. *Dados $v_1, \ldots, v_k$ em $\mathbb{R}^n$, então o conjunto de todas as combinações lineares de $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ é denotado por Span$\{\ \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ e é chamado de **subconjunto de $\mathbb{R}^n$ gerado por $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$**, ou seja, Span[2] $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ é a coleção de todos os vetores que podem ser escritos na forma*

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k$$

em que $c_1, \ldots, c_k$ são números reais.

Então, perguntar se um vetor $\mathbf{b}$ está em Span$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ significa perguntar se a equação vetorial

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{b}$$

possui solução, ou, de modo equivalente, perguntar se o sistema linear cuja matriz ampliada é $[\mathbf{v_1} \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{\boldsymbol{k}} \quad \boldsymbol{b}]$ possui solução.
Observe que Span $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ contém todos os múltiplos escalares de $\mathbf{v}_1$ (por exemplo), já que $c\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k$. Em particular, o vetor nulo pertence a Span $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\}$.

[2] a palavra “span”é um termo em inglês que significa gerar.

5.2 DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA DE SPAN{V} E SPAN{U,V}

Seja $\mathbf{v}$ um vetor não-nulo de $\mathbb{R}^3$. Como discutimos anteriormente, Span$\{\mathbf{v}\}$ é o conjunto de todos os múltiplos escalares de $\mathbf{v}$, e pode ser visualizado como sendo a reta em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e possui mesma direção de $\mathbf{v}$.
Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não nulos em $\mathbb{R}^3$, e $\mathbf{v}$ não é um múltiplo de $\mathbf{u}$, ou seja, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ não estão sobre a mesma reta, então Span$\{\mathbf{u,v}\}$ é um plano em $\mathbb{R}^3$ o qual contém $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ e passa pela origem. Em particular, Span$\{\mathbf{u,v}\}$ contém as retas em $\mathbb{R}^3$ geradas por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Exemplo 5.2.1. *Sejam* $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{bmatrix}$, *e* $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Então Span$\{u,v\}$ é um plano pela origem no $\mathbb{R}^3$. O vetor $\boldsymbol{b}$ pertence a esse plano?

Solução : Para responder a tal pergunta devemos verificar se a equação $x\mathbf{u}+y\mathbf{v} = \mathbf{b}$ tem solução, para $x, y \in \mathbb{R}$, façamos então o escalonamento da matriz ampliada $[\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{b}]$ que é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \times 2 + L_2 \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \times (-3) + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -18 & 10 \end{bmatrix} \quad L_2 \times -\frac{1}{3} \to L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -18 & 10 \end{bmatrix} \quad L_2 \times 18 + L_3 \to L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \quad L_2 \times (-5) + L_1 \to L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

Da terceira linha da última matriz, temos que, $0y = -12$, o que mostra que o sistema não possui solução. A equação $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} = b$ não tem solução e, portanto, **b** não pertence a Span$\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$, ou seja, não pertence ao plano gerado por **u** e **v**

5.3 A EQUAÇÃO MATRICIAL AX=B

Outra ideia fundamental da Álgebra Linear é a de ver uma combinação linear de vetores como um produto de uma matriz com um vetor. A seguinte definição nos permitirá reescrever alguns dos conceitos da seção 2.1 de novas formas.

Definição 5.3.1. *Se A é uma matiz $m \times n$, com colunas $a_1, ..., a_n$, e se $\boldsymbol{x}$ pertence a $\mathbb{R}^n$, então o* ***produto de A e x****, denotado por $A\boldsymbol{x}$, é* ***a combinação linear das colunas de A usando as componentes correspondentes de x como pesos****, isto é.*

$$A\boldsymbol{x} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n.$$

Observe que $A\mathbf{x}$ fica definido somente se o número de colunas de A for igual ao número de componentes de $\mathbf{x}$.

Exemplo 5.3.1. *Dada as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, *calcule o produto $A\boldsymbol{x}$.*

Solução:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} &= 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 5.3.2. *Dada as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ *e* $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$*, calcule o produto* $A\boldsymbol{x}$*.*

Solução:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} &= 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 \\ 32 \\ -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Na seção 5.1.5, aprendemos a escrever um sistema de equações lineares como uma equação vetorial envolvendo uma combinação linear de vetores. Por exemplo, sabemos que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases} \tag{5.5}$$

é equivalente a

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

Podemos então, escrever a combinação linear do lado esquerdo como o produto de uma matriz por um vetor, de modo que a equação 5.6 se torna

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Note que a equação 5.7 tem a forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, e a chamaremos de **equação matricial** para distingui-la de uma equação vetorial como a que é dada em 5.6.

Observe também como a matriz da esquerda em 5.7 é simplesmente a matriz dos coeficientes do sistema 5.5. Uma argumentação análoga mostra que qualquer sistema de equações lineares, ou qualquer equação vetorial como em 5.6, pode ser escrita como uma equação matricial equivalente da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Teorema 5.3.2. *Se A é uma matriz $m \times n$, com colunas $a_1, ..., a_n$, e se $\boldsymbol{b}$ pertence a $\mathbb{R}^m$, a equação matricial*

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

tem o mesmo conjunto solução que a equação vetorial

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b$$

que, por sua vez, tem o mesmo conjunto solução que o sistema de equações lineares cuja matriz ampliada é

$$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \quad b].$$

O teorema acima nos fornece uma ferramenta poderosa para se desenvolver a intuição a respeito de problemas de Álgebra Linear por exemplo, agora, podemos ver um sistema de equações lineares de formas diferentes, porém equivalentes: como uma equação matricial , como uma equação vetorial, ou como um sistema de equações lineares. Em qualquer caso, a equação matricial, a equação vetorial e o sistema de equações podem ser resolvidos fazendo o escalonamento da a matriz ampliada.

6 CONCLUSÃO

Ao final deste trabalho, é possível concluir, que existem outras maneiras para resolver um sistema de equações lineares. Além da forma algébrica costumeiramente ensinada pelos professores no ensino básico.

Neste trabalho, vimos que além de resolver os sistemas de equações lineares é possível interpretá-los geometricamente por meio de suas equações, através de retas e planos e suas posições, para sistemas lineares de ordem 2 ou 3. Além disso, podemos também resolvê-los através de equações matriciais, das quais é possível fazer a interpretação de suas equações por meio de vetores.

Portanto, gostaria que o leitor, em especial, o professor de ensino médio, ao terminar de ler este trabalho possa refletir um pouco sobre sua maneira de ensinar sistemas de equações lineares, para que futuramente quando seus alunos forem estudar geometria analítica, possam ter uma maior facilidade para compreender as equações das retas. Entender o significado algébrico do que acontece quando duas retas no plano são concorrentes, paralelas ou coincidentes.

REFERÊNCIAS

BARROSO, J. M. *Coneções com a Matemática*. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. [S.l.]: Harbra ltda, 1986.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. *Geometria Analítica*. 1. ed. [S.l.]: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

FILHO, B. B.; SILVA, C. X. da. *Matemática Aula por Aula*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2000.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. de S. *Introdução à Álgebra Linear*. 1. ed. [S.l.]: SBM, 2012. (Coleção PROFMAT).

KATZ, V. et al. *Historical ideas in teaching linear lgebra, in Learn fron the Masters*. 1. ed. [S.l.]: Assoc. of America, 1955. 189-206 p.

LAY, D. C. *Álgebra Linear e suas aplicações*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

NACIONAIS, P. C. (Ed.). *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf: [s.n.], jan. 2016.

OLIVEIRA, W. J. G. de O. *História da matenática: um estudo de seus significados na educação matemática*. http://www.gvaa.com.br/revista/index.php/REBES/article/download/1963/1556: [s.n.], ago. 2015.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático*. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciêcia ltda, 1995.

SOUZA, J. R. de. *Novo Olhar Matemática*. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.