

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ÁREAS E DISTÂNCIAS NA AGRIMENSURA: UMA
PROPOSTA DIDÁTICA DE MODELAGEM
MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL E
MÉDIO.**

Luana Patrícia Silva Cândido

Maceió, Junho de 2016



Instituto de Matemática



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LUANA PATRÍCIA SILVA CÂNDIDO

**ÁREAS E DISTÂNCIAS NA AGRIMENSURA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA DE
MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO.**

MACEIÓ
2016

LUANA PATRÍCIA SILVA CÂNDIDO

**ÁREAS E DISTÂNCIAS NA AGRIMENSURA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA DE
MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO.**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto

Maceió
2016

**Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central**

Bibliotecário Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

C217a Cândia, Luana Patrícia Silva.

Áreas e distâncias na agrimensura: uma proposta didática de modelagem matemática para o ensino fundamental e médio / Luana Patrícia Silva Cândia. - 2016.

157 f. : il.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

Bibliografia: f. 64.

Apêndice: f. 65-68.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Agrimensura – Ensino e aprendizagem.
3. Atividades investigativas. I. Título.

CDU: 372.852.8

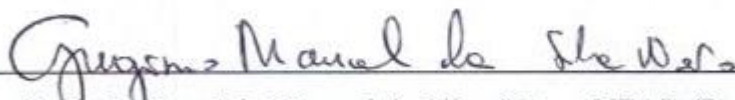
Folha de Aprovação

LUANA PATRÍCIA SILVA CÂNDIDO

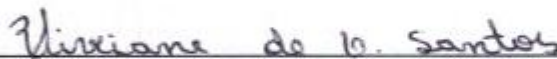
**ÁREAS E DISTÂNCIAS NA AGRIMENSURA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA DE
MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO**

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 28 de maio de 2016.

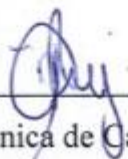
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto - UFAL (Presidente)



Profa. Ma. Viviane de Oliveira Santos - UFAL



Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines – UFTM

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por cada conquista alcançada;

Ao meu orientador Gregório, pelos ensinamentos e dedicação concedidos.

Ao meu esposo Euder, pelo apoio, carinho e paciência a mim sempre prestados;

Aos meus pais, por promoverem minha educação e serem exemplo em minha vida;

Às minhas irmãs, pela colaboração e apoio sempre prestados;

Aos professores do PROFMAT, pela competência e dedicação que tiveram com a turma;

Aos meus companheiros de trabalho, pela paciência e pela colaboração na execução desse projeto;

Aos meus alunos, pelo desafio vencido e o aprendizado.

RESUMO

Este trabalho propõe sequências didáticas utilizando-se do cálculo de áreas e distâncias na agrimensura direcionada ao ensino fundamental e médio com o objetivo de propor aulas com atividades que possibilitem a investigação pelos alunos, o que proporcionam motivação e aprendizado significativo. Visando assegurar um método de ensino eficaz, a proposta descrita aborda ações onde os alunos realizam atividades de modelagem matemática, manuseiam materiais para fazer medições e calcular áreas e/ou distâncias. Essa prática direciona a investigação matemática que funciona de forma a conduzir o aluno a aplicar os conteúdos vistos em sala de aula. As atividades propostas são alternativas que possibilitam ao professor coordenar a construção do conhecimento de forma motivadora, pois favorece ao aluno a oportunidade de vivenciar de modo prático e ativo a utilização de conceitos e resultados matemáticos como ferramenta indispensável para esse tipo de trabalho. Assim, os conteúdos matemáticos são vistos de forma relevante, onde o aluno reconhece a presença da matemática na realidade.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Áreas na agrimensura. Distâncias na agrimensura. Atividades investigativas. Modelagem matemática.

ABSTRACT

This paper proposes teaching sequences using the calculation of areas and distances in surveying directed to primary and secondary education in order to propose lessons with activities which enable research by students, providing motivation and meaningful learning. To ensure an effective teaching method, the described proposal covers actions where students perform mathematical modeling activities, handling materials to make measurements and calculate areas and/or distances. This practice directs the mathematical research which it operates to drive the student to apply the contents seen in the classroom. The proposed activities are alternatives, allowing the teacher to coordinate the construction of knowledge in a motivating way, it favors the student the opportunity to experience using a practical and active way the use of concepts and mathematical results as an essential tool for this kind of work. Thus, the mathematical content are seen relevantly, where the student recognizes the presence of mathematics in reality.

Keywords: Mathematics Teaching. Areas in surveying. Distances in surveying. investigative activities. Mathematical modeling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Topógrafos que delimitam parcelas. Túmulo de Menna	16
Figura 2 - Armação para nivelamento	17
Figura 3 - O radiano	21
Figura 4 - Teorema de Tales.....	22
Figura 5 - Semelhança de triângulos.....	23
Figura 6 - Teorema fundamental da semelhança de triângulos.	23
Figura 7 - Teorema de Pitágoras.....	25
Figura 8 - Relações métricas no triângulo retângulo	25
Figura 9 - Relações trigonométricas no triângulo retângulo	26
Figura 10 - Ciclo trigonométrico	27
Figura 11 - Trigonometria no ciclo trigonométrico (seno e cosseno).....	28
Figura 12 - Trigonometria no ciclo trigonométrico (tangente).....	29
Figura 13 - Unidade de área.....	29
Figura 14 - Área do retângulo.....	30
Figura 15 - Área do paralelogramo.....	30
Figura 16 - Área do triângulo.....	30
Figura 17 - Área do trapézio.....	31
Figura 18 - Plano topográfico	33
Figura 19 - Efeito da curvatura para distância.....	34
Figura 20 - Gráfico das funções g e f	36
Figura 21 - Efeito da curvatura na altimetria.....	37
Figura 22 - Gráfico das funções t e h	38
Figura 23 - Exposição aos alunos sobre o efeito da curvatura da terra na planimetria e altimetria.....	42
Figura 24- Efeito da curvatura da terra na altimetria	45
Figura 25 – Alunos realizando a atividade referente ao efeito da curvatura da terra na distância e altimetria.....	47
Figura 26 - Tabela com valores de Δs realizada pelas alunas $\alpha 20$ e $\alpha 10$	48
Figura 27 - Tabela com valores de Δh realizada pelas alunas $\alpha 20$ e $\alpha 10$	48
Figura 28 - Alunos confeccionando teodolito para ângulos horizontais.....	50
Figura 29 - Alunos realizando atividade referente a áreas de figuras planas	51

Figura 30 - Cálculo da área do polígono irregular realizado pelas alunas γ_2 e β_{15} .	52
Figura 31 - Alunos fazendo as medições para o cálculo da área da praça	53
Figura 32 - Planta da praça e desenho com divisão em triângulos para o cálculo da área da praça	54
Figura 33 - Aluno expondo o trabalho realizado pelo grupo voluntário da turma β ...	55
Figura 34 - Medidas para o cálculo da área da praça	55
Figura 35 - Questões resolvidas pelas alunas α_{21} e γ_{13} referentes à atividade sobre cálculo de distâncias inacessíveis	57
Figura 36 - Seno, cosseno e tangente de 45°	58
Figura 37 - Seno, cosseno e tangente de 30° e 60°	59
Figura 38 - Cálculo da área do polígono irregular realizado pelas alunas γ_2 e β_{15} .	61
Figura 39 - Alunos confeccionando o teodolito vertical	61
Figura 40 - Ângulo de visão do teodolito vertical	62
Figura 41 - Alunos fazendo medidas para o cálculo da altura do poste por semelhança de triângulos	63
Figura 42 - Cálculo da altura do poste por semelhança de triângulos	63
Figura 43 - Alunos fazendo medidas para o cálculo da altura do poste por trigonometria no triângulo retângulo	64
Figura 44 - Cálculo da altura do poste por trigonometria no triângulo retângulo	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores das projeções correspondentes de distâncias na superfície terrestre sobre o plano topográfico.....	43
Tabela 2 –Valores relativos às funções f e g	44
Tabela 3 –Valores relativos às funções h e t	45

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Múltiplos do metro	20
Quadro 2 – Submúltiplos do metro.....	20
Quadro 3 – Razões trigonométricas dos ângulos notáveis	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	AGRIMENSURA E SEU CONTEXTO HISTÓRICO: UMA INTRODUÇÃO	15
3	BASE CONCEITUAL DE MATEMÁTICA	19
3.1	Medidas de comprimento	19
3.2	Unidades de medida de arcos e ângulos	20
3.3	Escalas	21
3.4	Teorema de Tales	22
3.5	Semelhança de triângulos	22
3.5.1	<i>Teorema fundamental da semelhança de triângulos</i>	23
3.5.2	<i>Casos de semelhança</i>	24
3.5.2.1	Caso ângulo – ângulo (AA).....	24
3.5.2.2	Caso lado – ângulo – lado (LAL)	24
3.5.2.3	Caso lado – lado – lado (LLL).....	24
3.6	Relações no triângulo retângulo	24
3.6.1	<i>Teorema de Pitágoras</i>	25
3.6.2	<i>Relações Métricas</i>	25
3.6.3	<i>Relações trigonométricas</i>	26
3.7	Ciclo trigonométrico	27
3.8	Trigonometria no ciclo trigonométrico	27
3.9	Áreas	29
3.9.1	<i>Área do retângulo</i>	30
3.9.2	<i>Área do paralelogramo</i>	30
3.9.3	<i>Área do triângulo</i>	30
3.9.4	<i>Área do trapézio</i>	31
3.9.5	<i>Fórmula do seno para a área de um triângulo</i>	31
3.9.6	<i>Fórmula de Herão</i>	31
4	EFEITO DA CURVATURA TERRESTRE NA DISTÂNCIA E ALTIMETRIA.	32
5	SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS	40
5.1	O efeito da curvatura da terra na distância (planimetria) e na	

altimetria.....	41
5.2 Cálculo de áreas de figuras planas.....	49
5.2.1 <i>Confecção do teodolito horizontal</i>	49
5.2.2 <i>Cálculo de áreas.....</i>	50
5.2.3 <i>Calculando a área da praça.....</i>	52
5.3 Cálculo de distâncias inacessíveis.....	56
5.4 Atividade prática sobre o cálculo de distâncias inacessíveis.....	57
5.4.1 <i>Confecção do teodolito vertical.....</i>	60
5.4.2 <i>Calculando a altura do poste.....</i>	62
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	66
REFERÊNCIAS.....	67
APÊNDICE A – Folha do aluno	68
APÊNDICE B – Folha do aluno	69
APÊNDICE C – Folha do aluno	70

1 INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios do professor atualmente é a busca pelo desenvolvimento da capacidade de aprender dos alunos e do modo como se constrói o conhecimento, ou seja, o processo de aprendizagem dos alunos é objeto de investigação. Expor conteúdos, reproduzir fórmulas e cálculos de forma alheia às aplicabilidades ao cotidiano quase sempre provoca a falta de interesse na busca do aprendizado.

Este trabalho destaca o ensino de geometria por ser, segundo Portanova, (2005)

uma habilidade básica porque tem importantes aplicações em tópicos de Matemática elementar. É um tema unificador para todo o currículo de matemática e como tal é uma rica fonte de visualização para conceitos aritméticos, algébricos e estatísticos (p. 25).

Existem diversas formas de abordar um conteúdo de modo a despertar o interesse e a curiosidade do aluno. Baseada em 9 anos de experiência da autora com o ensino da Matemática no ensino fundamental e médio, a utilização de atividades práticas no ensino de trigonometria e geometria é um recurso que produz aprendizado efetivo pelos alunos.

Nesta produção, atividades relatadas são práticas pedagógicas que possibilitam ao aluno resolver problemas de modo prático ou realizar atividades através de manipulação de materiais, o que proporciona a contato e comunicação entre os estudantes, dinamização da aprendizagem e motivação, facilitando a compreensão de conteúdos matemáticos e servindo como base de um desenvolvimento cognitivo adequado.

Para Mendes (2009, p.25),

O uso de materiais concretos no ensino de Matemática é uma ampla alternativa didática que contribui para a realização de intervenções do professor na sala de aula durante o semestre letivo. Os materiais são usados em atividades que o próprio aluno, geralmente trabalhando em grupos pequenos, desenvolve na sala de aula. Essas atividades têm estrutura matemática a ser redescoberta pelo aluno que, assim, se torna agente ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático.

Existe a discussão, inclusive entre os alunos em sala de aula, sobre a disparidade entre a Matemática da vida cotidiana e a Matemática da escola. Além disso, nessas discussões, associa-se o insucesso dos alunos à essa disparidade. A ideia de Modelagem Matemática se origina como forma de associar essas duas

práticas. Modelagem Matemática é utilizada como um processo para a obtenção de um modelo, em linguagem matemática, de uma determinada situação da realidade (SILVEIRA e MIOLA, 2008). Ao fazer a ligação entre a Matemática escolar com a Matemática que contorna o mundo do aluno, segundo Silveira e Miola (2008, p.59) “é provável que o aluno não se esqueça tão facilmente do conteúdo que foi desenvolvido, uma vez que esse conteúdo passou a ter significado pra ele.”

Baseando-se nesta problemática, a proposta didática contida nessa dissertação tem como objetivo viabilizar a inserção do cálculo de áreas e distâncias de modo prático no 9º ano do ensino fundamental e 2º ano do ensino médio, respeitando as especificidades e limitações dessas fases no processo do ensino da matemática.

No segundo capítulo, o contexto histórico da Agrimensura destaca desde o início do processo das medições de terras até os importantes avanços na produção de equipamentos necessários para a elaboração de mapas nas últimas décadas. A noção histórica da Agrimensura, bem como algumas atribuições de um profissional agrimensor foi exposto e discutido em sala de aula com os alunos antes e durante as práticas das atividades visando a motivação, compreensão e significação dos conhecimentos a serem obtidos pelos alunos.

No terceiro capítulo, são abordados conhecimentos de geometria e trigonometria necessários para a aplicação das sequências didáticas, fazendo uso de linguagem clara e simples, visando alunos do ensino fundamental e médio e sua ampla compreensão, respeitando suas limitações.

O quarto capítulo aborda os princípios de topografia que foram utilizados em uma das sequências didáticas, que são um “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos” (ZABALA, 1998, p.18). Esse conhecimento foi adaptado para que pudesse ser compreendido pelos alunos.

O quinto capítulo aborda as sequências didáticas, aplicadas em sala de aula e autorizadas pela escola, algumas produções dos alunos e as considerações da professora. Constitui registros das aulas e da participação dos alunos. Todas as atividades aplicadas estão em apêndice.

A dissertação se baseia no ensino da matemática e se estrutura na compreensão de conceitos prévios como também conceitos e práticas da topografia

que serão inseridos de modo conveniente à vivência dos alunos com o objetivo de aplicar conhecimentos produzidos em sala de aula.

2 AGRIMENSURA E SEU CONTEXTO HISTÓRICO: UMA INTRODUÇÃO

“A Topografia pode ser entendida como parte da Geodésia, ciência que tem por objetivo determinar a forma e as dimensões da Terra” (VEIGA, ZANETTI e FAGGION, 2007, p. 1). A Topografia é uma ciência aplicada, baseada na geometria e na trigonometria e se incumbem do estudo dos instrumentos e métodos utilizados para a representação gráfica de todos os detalhes da configuração do terreno sobre a superfície plana.

A medida de superfícies agrárias foi uma das primeiras tarefas de que se incumbiu a topografia desde a antiguidade, razão pela qual a mesma era chamada de agrimensura. Hoje, entretanto, este vocabulário indica a, parte da topografia que trata da medida e da representação de superfícies no plano, bem como a sua divisão em parcelas, de acordo com condições preestabelecidas (ESPARTEL, 1987). A agrimensura é uma das áreas que tem como ferramenta básica a matemática e, aliada a recursos tecnológicos para determinar áreas e volumes, é inserida em todas as etapas, desde a coleta de dados no campo até o cálculo desses dados.

Diversos monumentos, pontes, pirâmides e outras obras de grande magnitude foram construídas desde as civilizações antigas. Medir distâncias, alturas, calcular áreas, delimitar terrenos, traçar estradas, construir canais de irrigação foram algumas das aplicações da agrimensura.

A história da topografia, mesmo que no seu modo mais simples, existe desde que o homem pratica medição de propriedades de terras ou como separa parcelas de terra de uma pessoa para outra. Heródoto, historiador grego que viveu no século V a.E.C¹, cita em um dos seus livros a palavra “geometria”, termo derivado de palavras gregas que significa medições da terra. Conforme Roque e Carvalho (2012), Heródoto relata que o faraó repartiu o solo entre seus habitantes e, quando as enchentes anuais do rio Nilo levassem muitos dos marcos, o faraó mandava pessoas designadas para recolocá-los. Segundo McCormac (2007) essas pessoas, que hoje conhecemos como topógrafos, eram chamados de *harpedonapata*, ou “esticadores-de-corda”, porque eles usavam cordas (com marcadores ou nós, distribuídos em certos intervalos) para suas medições.

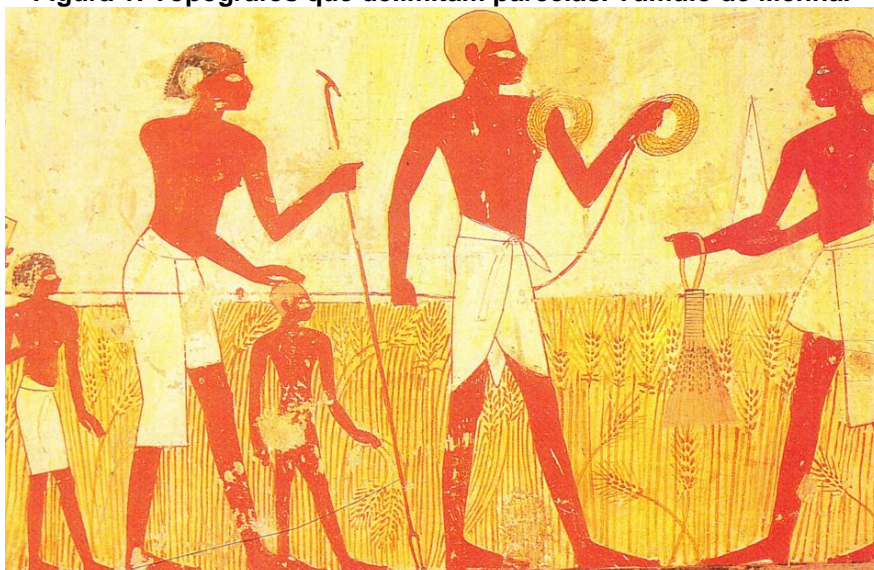
¹ Esta abreviação designa “antes da Era Comum” e é usada atualmente em substituição a “antes de Cristo”

A regularização das demarcações de terras de cada proprietário favorecia o cálculo para a arrecadação de impostos nessas regiões e impedia os conflitos entre pessoas e comunidades sobre o uso de terras não delimitadas. Segundo Roque e Carvalho (2012, p.45)

A *geometria* dos babilônios e egípcios era essencialmente uma geometria métrica, isto é, preocupada em calcular comprimentos, áreas e volumes. Assim, o historiador associa essa prática à invenção da geometria, um conhecimento importado pelos gregos.

Os topógrafos, nesse período, eram fundamentais no auxílio de projetos de construção de sistemas de irrigação, de pirâmides, estabelecimentos públicos e outros. No século seguinte, o filósofo Aristóteles conclui que o desenvolvimento da geometria no Egito se deve à classe de sacerdotes que tinham tempo livre, mas existe até os tempos de hoje um debate sobre, segundo Boyer (2012), creditar o progresso da matemática aos homens práticos (os demarcadores de terras ou “esticadores-de-corda”) ou aos elementos contemplativos da sociedade (os sacerdotes e os filósofos).

Figura 1: Topógrafos que delimitam parcelas. Túmulo de Menna.



Fonte: Escuela Virtual de Sabiduría de Pamplona²

Apesar de o primeiro registro do termo *geometria* estar nos relatos de Heródoto, desenvolvida pelos egípcios, os mesopotâmicos também realizavam

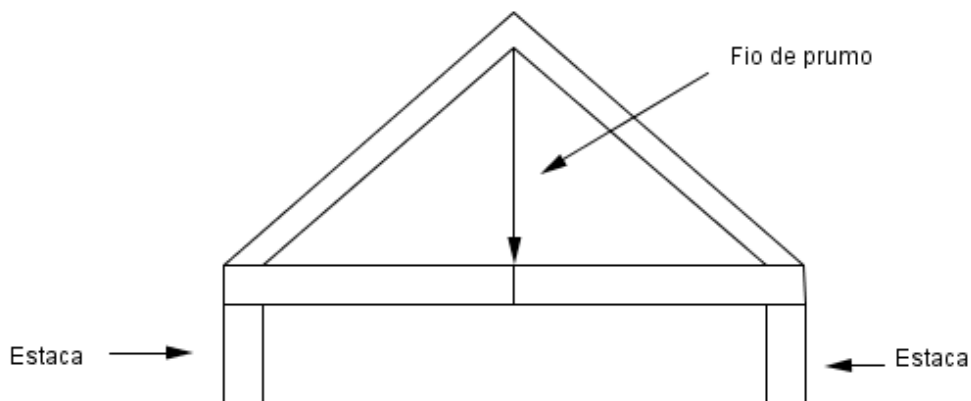
²Disponível em < <http://www.sofiaoriginals.com/oc123egiptoantigoouysusfuncionarios2.htm> >, acessado em abril de 2016

cálculos com medidas de comprimento, áreas e volumes, e alguns de seus procedimentos aritméticos devem ter sido obtidos por métodos geométricos, envolvendo transformação de áreas. Isso não quer dizer que, tanto mesopotâmicos quanto egípcios possuíssem uma geometria. Por outro lado, segundo Espartel (1987, p. 4),

Os egípcios, os gregos, os árabes e os romanos nos legaram instrumentos e processos que, embora primitivos, serviram para descrever, delimitar e avaliar propriedades rurais, com finalidades cadastrais; na *História da Topografia*, de Laussedat, são mencionadas plantas e cartas militares e geográficas bem interessantes, organizadas nos primórdios da topografia, ou melhor, da chamada Geometria aplicada.

Segundo McCormac (2007), a fim de obter o nivelamento aproximado das fundações dessas grandes estruturas, os egípcios provavelmente despejavam água em extensas e estreitas calhas de barro (um método aceitável), ou usavam armações triangulares com fios de prumo ou outros pesos suspensos de seus pontos mais alto. Essas armações representavam triângulos isósceles com a sua altura indicada pelo fio de prumo.

Figura 2: Armação para nivelamento



Fonte: autora, 2016.

Cada armação de nivelamento tinha uma marca a sua barra inferior que mostrava onde o fio de prumo deveria estar quando a barra estivesse na horizontal, ou seja, quando a barra e o fio fossem perpendiculares.

Segundo Roque e Carvalho (2012), supõe-se que o conhecimento da geometria pelos egípcios através das práticas de agrimensura teria sido importado pelos gregos. Estudiosos postulam que teria sido Tales, um rico comerciante da cidade grega de Mileto, cerca de 600 anos a.E.C., que levou esse conhecimento

para a Grécia. Diz-se que um dos seus feitos teria sido o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito. Tales aplicou seus conhecimentos sobre segmentos proporcionais, pois a razão entre a altura da pirâmide e sua própria altura é igual à razão entre comprimento da sombra projetada pela pirâmide e de sua própria sombra.

Os gregos foram os pioneiros na construção de uma teoria matemática. Entre Tales e Euclides, a historiografia da Matemática costuma analisar as contribuições da escola Pitagórica do século V a.E.C.. Com Euclides, a Matemática na Grécia adquiriu um aspecto particular, pois passa-se a empregar enunciados geométricos gerais, que não envolvem procedimentos de medida. “Os Elementos de Euclides representam, nesse contexto, o resultado dos esforços da formalização da Matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada” (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 60).

A matemática que surgiu na Grécia perdurou até o início do século XVII devido ao surgimento da Revolução Científica que permitiu uma nova forma de pensar e fundamentar conhecimentos. “Certamente, porém, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do Cálculo, perto do final do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz” (EVES, 2011, p. 417). Com o desenvolvimento do Cálculo, tornou-se possível a investigação de fenômenos físicos importantes com precisão e rigores jamais experimentados. Mas somente nos últimos séculos, a topografia tomou uma direção natural, passando do empirismo às bases de uma legítima ciência, graças ao desenvolvimento notável que tiveram a Matemática e a Física. Desde então, houve o surgimento de instrumentos essenciais para o avanço da topografia: teodolito, medidor eletrônico de distâncias, computadores, GPS e muitos outros dispositivos excelentes.

Segundo McCormac (2007), durante a 1ª e 2ª Guerras Mundiais e as guerras da Coreia e do Vietnã, do século XX, foram obtidos importantes avanços no desenvolvimento de equipamentos topográficos necessários para a preparação de mapas. Em décadas recentes, avanços semelhantes foram obtidos em relação ao desenvolvimento de mísseis e programas espaciais.

3 BASE CONCEITUAL DE MATEMÁTICA

Neste capítulo abordaremos os conceitos de matemática referentes ao ensino fundamental e médio que foram utilizados como conteúdos básicos para a abordagem dos temas propostos e realização das atividades em sala de aula.

3.1 Medidas de comprimento

As unidades de medida de comprimento do passado eram variáveis por regiões, por épocas, mas tinham frequentemente algo em comum: baseavam-se quase sempre nas dimensões de partes do corpo humano, padronizadas pelos comprimentos do seu pé, polegar, palmo, braço, mão, dedo, etc.

É difícil identificar na história da humanidade o momento em que o homem começou a medir ou criou instrumentos de medida mas, segundo Rozenberg (2006, pag 14),

[...] é razoável admitir que as primeiras grandezas cujas medições foram por eles realizadas tenham sido o volume, a massa (por muitos e muitos séculos confundida com o peso) e, obviamente, o tempo cujo transcorrer, já nas mais antigas civilizações, era avaliado pelo periodismo dos movimentos da Lua e (aparente) do Sol ao redor da terra.

Segundo Rozenberg (2006), existiram várias tentativas de padronizar as unidades de pesos e medidas praticados em diferentes regiões, como a feita por Carlos Magno no século IX, pretendendo simplificar o comércio entre povos da Europa e do Oriente Médio, não obteve sucesso pelo fato de que cada povo instituir suas próprias unidades.

Na Inglaterra, no início do século XIII, foi instituído, por um decreto real, o “Padrão de Pesos e Medidas” para ser praticado no reino, que foi aplicado por 600 anos.

Em pleno período da Revolução Francesa, os líderes da Assembleia Nacional Constituinte Francesa propuseram a determinação de um sistema de unidades, definidas cientificamente e desprovidas de qualquer acepção regionalista, com o propósito de ser praticado universalmente.

No final do século XVIII, Laplace apresentou os padrões de “metro”, “quilograma” e “litro”, como também seus múltiplos e submúltiplos e, conforme Rozenberg (2006, p.20)

[...] o Sistema Métrico Decimal foi definitivamente adotado pela França sob o lema “PARA TODOS OS POVOS E PARA TODOS OS TEMPOS”, inscrito numa medalha comemorativa mandada cunhar pelo governo da República Francesa para perpetuar a data dessa adoção: 2 de novembro de 1799.

Devido à difusão das relações internacionais entre países, principalmente na segunda metade do século 20, Rozemberg (2006) afirma que tornou-se preciso a adoção entre eles de um sistema de unidades bem definidas que permitisse determinar e manter um sistema eficiente de comércio e troca de informações. Originou-se assim o Sistema Internacional de Unidades, conhecido por SI, retratada em 1971 em publicação editada pelo Instituto Nacional de Pesos e Medidas³.

O metro é a unidade básica para a representação de medidas de comprimento no SI.

Quadro 1: Múltiplos do metro

Decâmetro	Hectômetro	Quilômetro	Megametro	Gigametro	Terametro
dam	hm	Km	Mm	Gm	Tm
10m	10 ² m	10 ³ m	10 ⁶ m	10 ⁹ m	10 ¹² m

Fonte: Autora, 2016

Quadro 2: Submúltiplos do metro

Decímetro	Centímetro	Milímetro	Micrômetro	Nanômetro	Picômetro
dm	cm	Mm	μ m	nm	pm
10 ⁻¹ m	10 ⁻² m	10 ⁻³ m	10 ⁻⁶ m	10 ⁻⁹ m	10 ⁻¹² m

Fonte: Autora, 2016

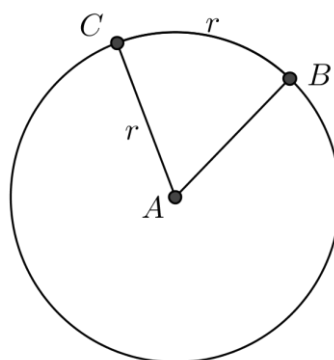
3.2 Unidades de medida de arcos e ângulos

O grau, representado por °, é a unidade definida a partir da divisão da circunferência em 360 partes congruentes, em que cada uma dessas partes corresponde a 1°. A circunferência toda corresponde a 360°.

O radiano, representado por rad, é a unidade de medida de um arco cujo comprimento é igual a medida do raio da circunferência que o contém. É uma unidade suplementar do SI para ângulos planos.

³ Órgão do Ministério da Indústria e Comércio que precedeu no Brasil o atual INMETRO.

Figura 3: O radiano



Fonte: Autora, 2016

Na figura, a medida do arco BC (vamos adotar aqui, na notação de arco BC , o arco que inicia no ponto B e termina no ponto C no sentido anti-horário) é igual a 1 rad pois o comprimento do arco BC é igual à medida do raio da circunferência.

O comprimento de uma circunferência qualquer pode ser obtido pela fórmula $C = 2\pi \cdot r$, então o raio de uma circunferência cabe 2π vezes na circunferência e, assim, 2π rad equivale a 360° .

De modo geral, sendo α a medida em radianos do arco de comprimento C , contido na circunferência de raio r , pode-se dizer que

$$\alpha = \frac{C}{r}.$$

Com isso, as medidas de arcos de circunferência em graus são diretamente proporcionais às medidas de arcos de circunferência em radianos.

3.3 Escalas

Os mapas e as plantas baixas são representações gráficas reduzidas de superfícies territoriais e de construções. Para elaborar esse tipo de representação, temos que relacionar as dimensões reais e o desenho que corresponde a realidade no mapa. Essa relação por meio da razão entre o valor de uma distância medida no desenho (d) e sua medida real correspondente (D) é chamada de escala. Desta forma,

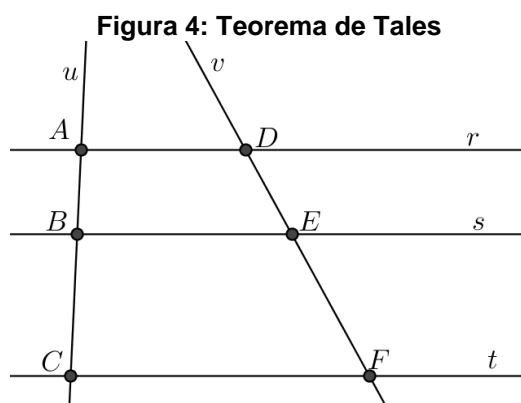
$$E = d : D.$$

Por exemplo, numa representação gráfica de uma determinada região, a escala sendo 1:10000, cada centímetro no desenho corresponde a 10000 centímetros ou 100 metros no local real.

3.4 Teorema de Tales⁴

Teorema: *Sejam r, s, t retas paralelas. Escolhemos pontos $A, D \in r, B, E \in s$ e $C, F \in t$, de modo que $A, B, C \in u$ e $D, E, F \in v$, onde u e v são retas transversais às retas paralelas dadas. Então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$



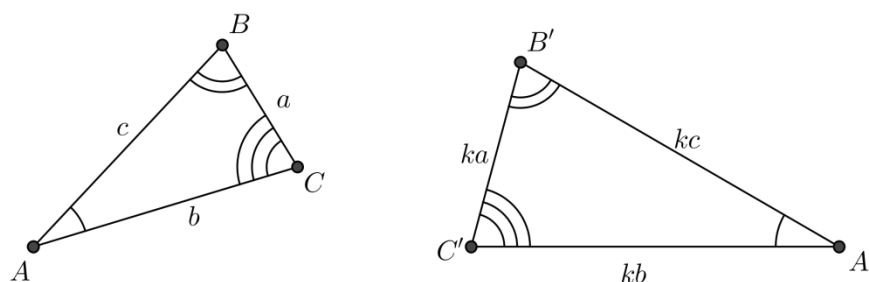
Fonte: Autora, 2016

3.5 Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes “quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e de outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma” (MUNIZ NETO, 2013, p. 148). Escrevemos $ABC \sim A'B'C'$ para indicar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$.

⁴ Para verificar a demonstração do Teorema de Tales, veja no livro “Geometria”, do prof. Antônio Caminha Muniz Neto, editado pela SBM, nas páginas 138 à 141.

Figura 5: Semelhança de triângulos



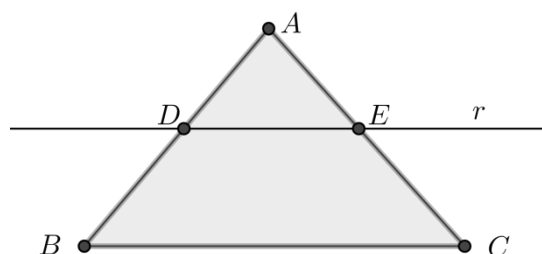
Fonte: Autora, 2016

Assim, temos que $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$ e $k \in \mathbb{R}$, com $k > 0$ é chamado razão de semelhança.

3.5.1 Teorema fundamental da semelhança de triângulos

Teorema: Uma reta paralela a qualquer lado de um triângulo que intercepte os outros dois lados em pontos distintos determina um triângulo semelhante ao primeiro.

Figura 6: Teorema fundamental da semelhança de triângulos



Fonte: Autora, 2016

Considere o triângulo ABC dado e a reta r traçada paralela à base BC do triângulo, determinando os pontos D e E , como ilustrado.

Os ângulos \hat{ABC} e \hat{ADE} , assim como os ângulos \hat{ACB} e \hat{AED} , são correspondentes, logo são congruentes.

Pelo Teorema de Tales, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$. Assim, pode-se concluir que o triângulo ADE é semelhante ao triângulo ABC .

3.5.2 Casos de semelhança⁵

Serão enunciados nesse item casos em que, conhecendo-se alguns elementos dos triângulos, será possível afirmar se eles são semelhantes ou não.

3.5.2.1 Caso ângulo – ângulo (AA)

Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, então eles são semelhantes.

3.5.2.2 Caso lado – ângulo – lado (LAL)

Se dois triângulos têm lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

3.5.2.3 Caso lado – lado – lado (LLL)

Se dois triângulos têm os pares de lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.

3.6 Relações no triângulo retângulo.

A seguir são apresentadas de modo conciso algumas relações válidas para triângulos retângulos.

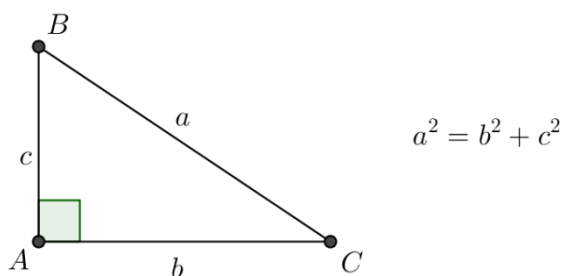
Dado um triângulo ABC de hipotenusa a (lado oposto ao ângulo reto) de catetos b e c é possível escrever as seguintes relações métricas:

⁵ Para verificar as demonstrações dos casos de semelhança de triângulos veja-as no livro “Geometria”, do prof. Antônio Caminha Muniz Neto, editado pela SBM, nas páginas 149 à 151.

3.6.1 Teorema de Pitágoras⁶

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Figura 7: Teorema de Pitágoras

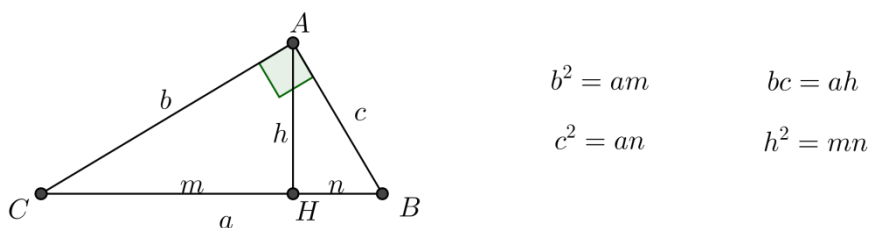


Fonte: Autora, 2016.

3.6.2 Relações métricas

Seja ABC um triângulo retângulo em A , com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{AH} = h$, $\overline{CH} = m$, $\overline{BH} = n$, temos:

Figura 8: Relações métricas no triângulo retângulo



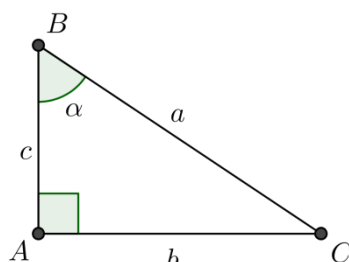
Fonte: Autora, 2016.

⁶ Para examinar a demonstração do Teorema de Pitágoras, bem como as demonstrações das demais relações métricas em triângulos retângulos, veja em “Geometria”, do prof. Antônio Caminha Muniz Neto, editado pela SBM, nas páginas 152 à 153.

3.6.3 Relações trigonométricas

Dado um triângulo ABC , retângulo em A , em que o ângulo \widehat{ABC} é igual a α , como na figura a seguir, existem três razões entre os lados do triângulo ABC , que denominamos razões trigonométricas de α .

Figura 9: Relações trigonométricas no triângulo retângulo



Fonte: Autora, 2016

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{b}{c}$$

Segundo Lima (2013), estas definições fazem sentido devido à semelhança de todos os triângulos retângulos em que um dos ângulos agudos é α (caso AA); em consequência disto, estas razões são sempre as mesmas, não dependendo do tamanho do triângulo. É importante ressaltar que os valores destas razões, para um mesmo ângulo α , não são independentes entre si, já que as medidas dos lados de um triângulo retângulo estão associados pelo Teorema de Pitágoras. Como consequência das razões trigonométricas anteriormente citadas, estão as seguintes relações:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1; \quad (1)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}. \quad (2)$$

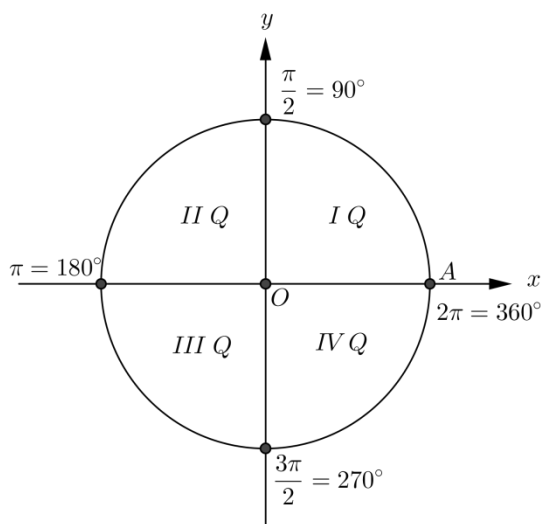
Se conhecermos uma razão trigonométrica do ângulo α , através das razões (1) e (2), podemos encontrar todas as outras.

3.7 Ciclo trigonométrico

Chama-se ciclo trigonométrico a circunferência C de raio unitário ($r = 1$), cujo centro coincide com a origem do plano cartesiano $O = (0,0)$. Os eixos coordenados dividem a circunferência C em quatro partes iguais, isto é, cada uma em um quadrante do plano.

Por convenção, adota-se o percurso dos arcos que serão medidos a partir do ponto $A(1,0)$ (intersecção da circunferência com o semieixo positivo das abscissas) como positivo no sentido anti-horário e negativo no sentido horário. Os quadrantes do plano são numerados no sentido anti-horário conforme indicado na figura 10.

Figura 10: Ciclo trigonométrico

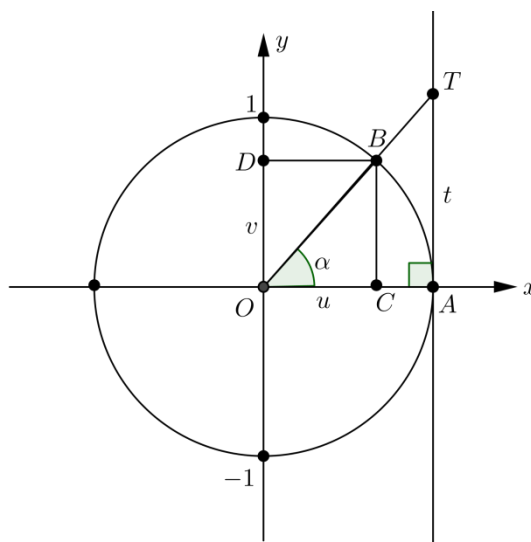


Fonte: Autora, 2016

3.8 Trigonometria no ciclo trigonométrico

É possível aplicar a definição de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos utilizada nos triângulos retângulos para definir seno, cosseno e tangente de arcos. Na figura 11, os pontos D e C são projeções do ponto B sobre os eixos y e x , respectivamente, e $B = (u, v)$. A reta \overline{AT} é perpendicular ao eixo Ox no ponto A e $\overline{AT} = t$. Note que $m(\widehat{B\hat{O}C}) = m(\widehat{T\hat{O}A}) = m(\widehat{AB}) = \alpha$ ($m(\widehat{B\hat{O}C})$ e $m(\widehat{T\hat{O}A})$ são as medidas dos ângulos $\widehat{B\hat{O}C}$ e $\widehat{T\hat{O}A}$ e $m(\widehat{AB})$ é a medida do arco AB) e os triângulos $\triangle BOC$ e $\triangle TOA$ são semelhantes pelo caso AA.

Figura 11: Trigonometria no ciclo trigonométrico (seno e cosseno)



Fonte: Autora, 2016

O ponto B pertence ao 1º quadrante, a medida do arco AB igual a α e o triângulo OCB é retângulo em C . Aplicando a definição de seno para ângulos agudos, obtém-se:

$$\operatorname{sen} AB = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \overline{BC} = v$$

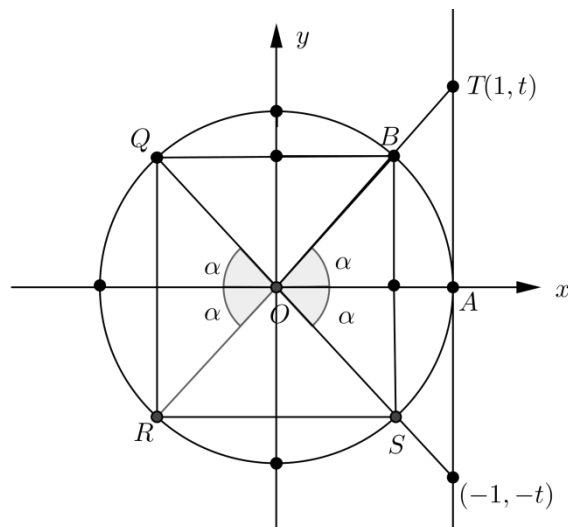
$$\operatorname{cos} AB = \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \overline{OC} = u$$

$$\operatorname{tg} AB = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{v}{u} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}.$$

Mas como $\frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{TA}}{\overline{OA}} = \frac{t}{1} = t > 0$, temos que $\operatorname{tg} \alpha = t$. A reta \overleftrightarrow{AT} é chamada de reta das tangentes.

Para definir o seno, cosseno e tangente dos arcos nos demais quadrantes, isto é, para ângulos maiores que 90° , utiliza-se as relações de simetria do ponto B em relação aos eixos coordenados e a origem do plano cartesiano, como pode ser visto na figura 12.

Figura 12: Trigonometria no ciclo trigonométrico (tangente)



Fonte: Autora, 2016

Na figura 12, as medidas dos arcos AB , AQ , AR e AS são dados por:

$$AB = \alpha, AQ = \pi - \alpha, AR = \pi + \alpha \text{ e } AS = 2\pi - \alpha.$$

Desta forma, temos então:

- (i) $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen } \alpha$, $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen } \alpha$ e $\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen } \alpha$.
- (ii) $\text{cos}(\pi - \alpha) = -\text{cos } \alpha$, $\text{cos}(\pi + \alpha) = -\text{cos } \alpha$ e $\text{cos}(2\pi - \alpha) = \text{cos } \alpha$.
- (iii) $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$, $\text{tg}(\pi + \alpha) = \text{tg } \alpha$ e $\text{tg}(2\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha$.

3.9 Áreas

Adotamos como unidade de área o quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento.

Figura 13: unidade de área



1

Fonte: Autora, 2016

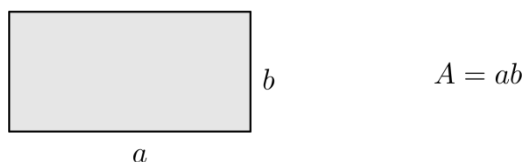
Se o lado do quadrado for de 1cm, a unidade de área será medida em *centímetro quadrado* e representada em cm^2 . Naturalmente, em outras unidades de comprimento, a medida da área correspondente se procede de modo análogo.

A seguir listamos expressões para o cálculo de áreas de figuras planas que serão usadas na elaboração e execução das propostas didáticas.

3.9.1 A área do retângulo⁷

A área do retângulo é o produto das medidas do comprimento e da largura.

Figura 14: Área do retângulo

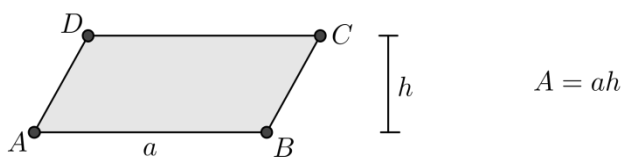


Fonte: Autora, 2016

3.9.2 Área do paralelogramo

Considerando o paralelogramo $ABCD$ da figura 15, com base $\overline{AB} = a$ e altura h , a sua área é o produto da base pela altura.

Figura 15: Área do paralelogramo

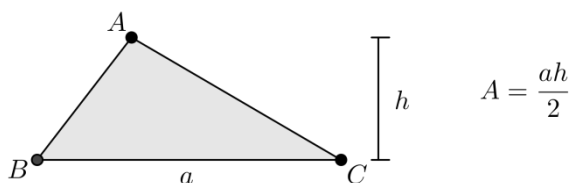


Fonte: Autora, 2016

3.9.3 Área do triângulo

Seja um triângulo ABC , de base BC , com $\overline{BC} = a$ e altura h , a sua área é a metade do produto da base pela altura.

Figura 16: Área do triângulo



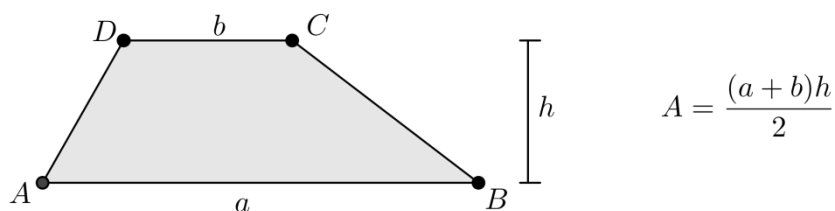
Fonte: Autora, 2016

⁷ Para analisar as demonstrações das fórmulas das áreas do retângulo, do paralelogramo, do triângulo e do trapézio veja no livro "Temas e Problemas Elementares" de Elon L. Lima, Paulo C. P. Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, editado pela SBM, nas páginas 98 e 99.

3.9.4 Área do trapézio

Considere o trapézio $ABCD$ com base maior $\overline{AB} = a$, base menor $\overline{CD} = b$ e altura h , como na figura a seguir. Sua área será igual à metade do produto da altura pela soma das bases.

Figura 17: Área do trapézio



Fonte: Autora, 2016

3.9.5 Fórmula do seno para a área de um triângulo.⁸

Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$, ângulos internos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} e raio do círculo circunscrito igual a r , então a área do triângulo será dada por:

$$A = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{abc}{4r}.$$

3.9.6 Fórmula de Herão

Se ABC é um triângulo de lados com comprimentos a , b e c e o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, então a área A do triângulo é dada por:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

⁸ Para examinar a demonstração da fórmula do seno para a área de um triângulo, veja no livro "Geometria" de Antônio Caminha Muniz Neto, editado pela SBM, nas páginas 272 e 273.

4 EFEITO DA CURVATURA TERRESTRE NA DISTÂNCIA E ALTIMETRIA

Os princípios de topografia abordados nesta dissertação são os que foram utilizados como base para as atividades aplicadas com alunos do ensino médio. Esses conhecimentos foram adaptados para os alunos, ou seja, foram utilizados métodos para que esse conhecimento pudesse ser transmitido e apropriado para os estudantes. Nesse processo, é desenvolvido um saber específico, chamado saber escolar, “um novo saber, que alguns autores chamam de transposição didática” (MELO e URBANETZ, 2008, p. 111)

A atividade escolar é diferenciada da atividade científica propriamente dita. Cabe à escola o ensino de conteúdos produzidos em outra instância, como, por exemplo, nos centros de pesquisa, nas universidades entre outros. Desta forma, conhecimentos científicos são transformados em conteúdos escolares e a característica da atuação pedagógica na escola é o “não só emprego de uma metodologia, mas também pelo conjunto de elementos que se relacionam, como os conteúdos, os valores e os objetivos que juntos conduzem o ensino da Matemática” (WACHILISKI, 2007, p.16)

“Etimologicamente a palavra TOPOS, em grego significa lugar e GRAPHEN descrição, assim de uma forma bastante simples, Topografia significa descrição do lugar” (VEIGA, ZANETTI e FAGGION, 2007, p. 1).

Segundo Espartel, (1987) na Topografia trabalha-se com medidas (lineares e angulares) efetuadas sobre a superfície da Terra, de forma local, sobre a qual o efeito da curvatura terrestre é considerada desprezível, e a partir destas medidas calculam-se coordenadas, áreas, volumes, etc. Estas grandezas poderão ser representadas na forma de mapas ou plantas. Para isto, é necessário um efetivo conhecimento sobre instrumentação, técnicas de medição, métodos de cálculo e estimativa de precisão.

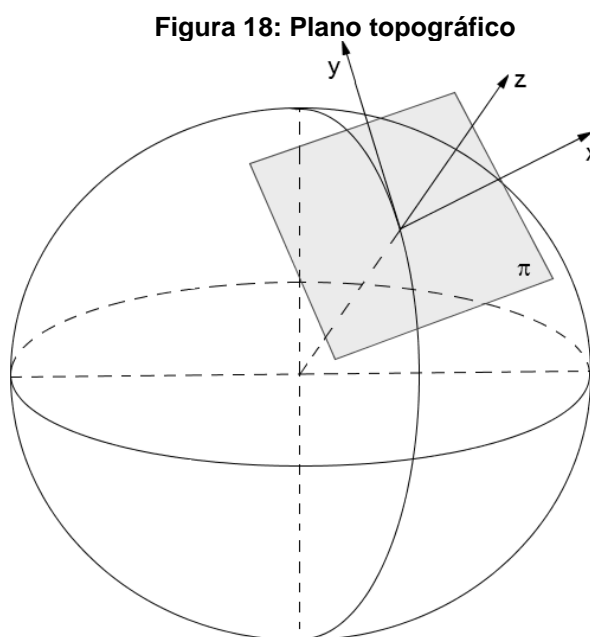
Através dos séculos, os usos da topografia têm-se expandido. Hoje, todo tipo de projeto de construção inclui algum tipo de levantamento. Por exemplo, os levantamentos de terras são os tipos mais antigos de levantamentos, realizados desde os primeiros tempos da história conhecida. Segundo McCormac (2007), eles são normalmente levantamentos topográficos planos para locação de limites de propriedades, subdivisão de terras, levantamento de áreas, fornecendo qualquer informação que envolva a transferência de terra de um proprietário para outro.

Segundo Espartel (1987), a *topografia* tem por finalidade determinar o contorno, dimensão e posição relativa de uma porção limitada da superfície terrestre, sem levar em conta a curvatura resultante da esfericidade terrestre. Desta forma, sempre podemos representar em um plano uma determinada região, o que equivale a considerar a projeção dessa região sobre um plano. Esse plano deve ser perpendicular à direção da gravidade. A essa projeção ou imagem figurada do terreno chama-se plano topográfico ou planta.

Topometria é a parte da topografia que estuda os procedimentos de medição de distâncias, ângulos e desníveis. Pode ser dividida em *planimetria* e *altimetria*.

Planimetria é a representação em projeção horizontal dos detalhes existentes da superfície; a *altimetria* determina as distâncias verticais, ou seja, na direção da gravidade, de um certo número de pontos referidos ao plano de projeção.

O plano no qual são representados as projeções dos pontos da superfície terrestre é o plano topográfico, que é o plano tangente à mesma em um ponto. Neste plano é estabelecido um sistema de coordenadas cartesianas para suas representações.

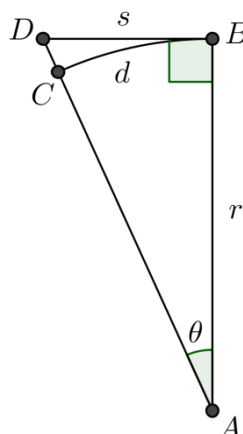


Fonte: autora, 2016

O eixo z é perpendicular ao plano tangente à esfera, o eixo y é determinado pela meridiana (linha norte – sul) e o eixo x na direção leste ou oeste.

Considere um plano que intersecciona perpendicularmente o plano π , na figura anterior, contendo o meridiano destacado. Este plano contém o centro da esfera (representado pelo ponto A na figura 19). A figura a seguir retrata geometricamente o efeito da curvatura da terra para distâncias no plano topográfico e na *altimetria* (distâncias, na direção da gravidade, entre a superfície terrestre e o plano).

Figura 19: Efeito da curvatura para distância



Fonte: Autora, 2016

Na figura o segmento BD , cujo comprimento é s , está contido no eixo y . O arco BC , cujo comprimento é d , representa uma distância considerada na superfície terrestre, o segmento BD é a projeção dessa distância no plano topográfico. O raio da terra está representado pelo segmento AB , de comprimento r , que mede aproximadamente, 6370 km. A seguir, tem-se a dedução uma expressão que permita calcular a diferença (ΔS) entre a projeção s de uma distância terrestre em um plano topográfico e a distância real d .

No triângulo ABD , temos $\operatorname{tg} \theta = \frac{s}{r} \Rightarrow s = r \cdot \operatorname{tg} \theta$. Temos ainda que $\theta = \frac{d}{r} \Rightarrow d = \theta \cdot r$. Se $\Delta S = s - d$, então

$$\Delta S = r \operatorname{tg} \theta - \theta r. \quad (1)$$

Visto ser de grande dificuldade o cálculo da $\operatorname{tg} \theta$ para ângulos arbitrários, precisamos de um método que nos dê valores aproximados de $\operatorname{tg} \theta$ e que seja relativamente fácil de calcular. Uma das maneiras de aproximar o valor de uma função é através do polinômio de Taylor. Nos conceitos introduzidos a seguir, utilizamos os conhecimentos de cálculo diferencial, para os quais citamos como referências Stewart, J. Cálculo, volumes 1 e 2 (2009).

Definição 1: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas contínuas de todas as ordens em (a, b) . Seja $c \in (a, b)$. O Polinômio de Taylor de grau n de f em torno de c é:

$$T_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{f^{(p)}(c)}{p!} (x - c)^p, \quad (2)$$

onde $f^{(0)}(c) = f(c)$ e $f^{(p)}(c)$ é a derivada de ordem p de f em c . Expandindo a fórmula (2), temos:

$$T_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2}(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{6}(x - c)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n.$$

Iremos tomar os valores de $T_n(x)$ como uma aproximação de $f(x)$ próximo ao ponto c e, para isso, devemos saber estimar o valor da diferença

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \quad (3)$$

para saber a precisão desta aproximação. O resultado a seguir oferece uma estimativa para $R_n(x)$.

Teorema (Desigualdade de Taylor): Sejam $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas contínuas de todas as ordens em (a, b) e $T_n(x)$ seu polinômio de Taylor em torno de $c \in (a, b)$. Se $|f^{(n+1)}(x)| < M$ para $x \in (a - d, a + d)$, $d > 0$, então $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ satisfaz $|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1}$.

Vamos usar os dados da definição 1 e o teorema para encontrar uma aproximação da função $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\theta) = tg \theta$ pelo polinômio de Taylor em torno de $\theta = 0$. A escolha do ângulo $\theta = 0$ não é arbitrária. Observando a figura 19 notamos que as distâncias medidas em agrimensura são muito pequenas se comparadas ao raio da terra. Desta forma, iremos precisar de valores de θ próximos de zero. Cabe ressaltar que, para grandes distâncias, é mais adequado o uso de técnicas de geometria esférica, visto que a curvatura da terra não pode mais ser desprezada.

Assim, usando a definição 1, temos que $T_n(\theta) = \sum_{p=0}^n \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \theta^p$.

Desta forma precisamos calcular as derivadas da função f em $\theta = 0$. Note que se tomarmos $s < 30$ km, por exemplo, teremos $tg \theta < \frac{30}{6370} \cong 0,0047$ e visto que $\theta < tg \theta$, temos que $\theta < 0,0047$. Usando a desigualdade de Taylor, temos

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} (0,0047)^{n+1},$$

para $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Assim, para $n = 3$ temos:

$$|R_3(x)| \leq \frac{M}{4!} (0,0047)^4 \cong 2,03 \cdot 10^{-11} M.$$

Desta forma, uma aproximação de $f(x)$ para $T_3(x)$ é bastante satisfatória para as medidas de distâncias em topografia.

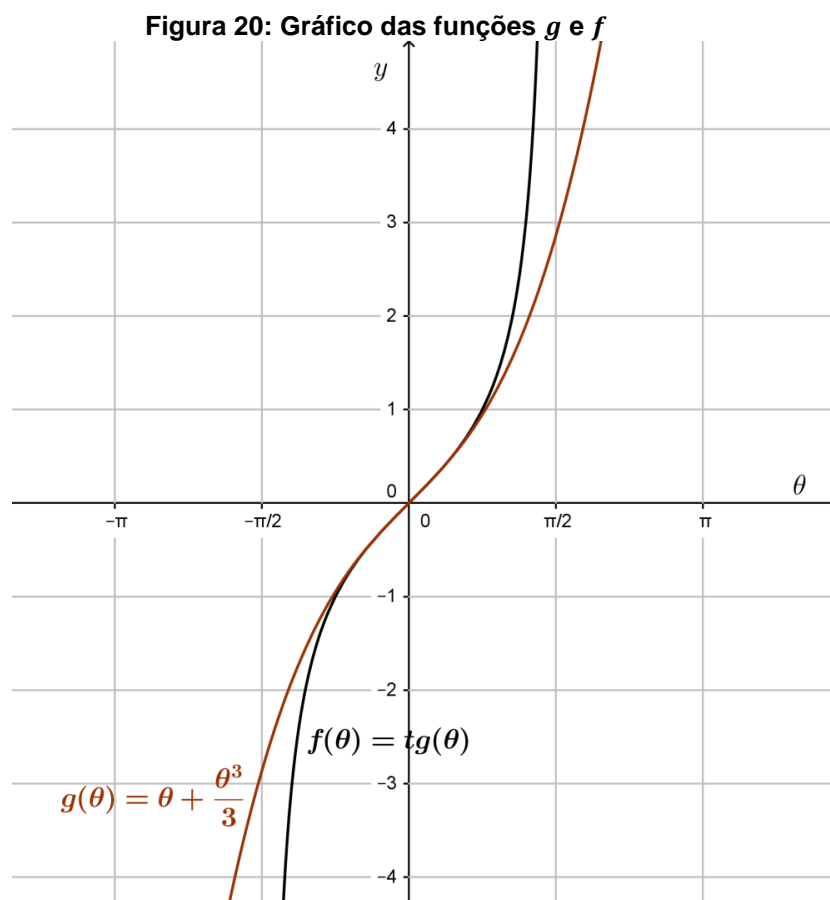
Calculando, então, as derivadas de até ordem 3 temos:

- (i) $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta$ e $f(0) = 0$;
- (ii) $f'(\theta) = \sec^2 \theta$ e $f'(0) = 1$;
- (iii) $f''(\theta) = 2 \sec^2 \theta \cdot \operatorname{tg} \theta$ e $f''(0) = 0$;
- (iv) $f'''(\theta) = 2 \sec^4 \theta + 4 \operatorname{tg}^2 \theta \cdot \sec^2 \theta$ e $f'''(0) = 2$.

Temos então,

$$T_3(\theta) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \theta + \frac{f''(0)}{2!} \theta^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \theta^3 \Rightarrow T_3(\theta) = \theta + \frac{1}{3} \theta^3.$$

O gráfico a seguir mostra que para pequenos valores positivos de θ , próximos de zero, a função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(\theta) = \theta + \frac{\theta^3}{3}$ é uma aproximação aceitável da função $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta$.



Fonte: Autora 2016

Desta forma a equação (1) $\Delta S = r \operatorname{tg} \theta - \theta r$ torna-se

$$\Delta S = r(\operatorname{tg} \theta - \theta) = r\left(\theta + \frac{\theta^3}{3} - \theta\right) = r\frac{\theta^3}{3}.$$

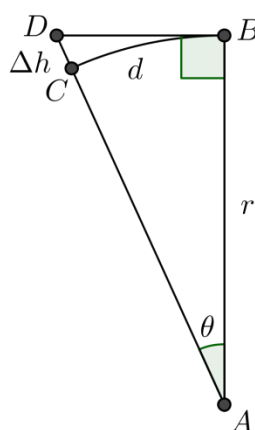
Visto que $\theta = \frac{d}{r}$, temos:

$$\Delta S = \frac{d^3}{3r^2}.$$

Note que, como $\Delta S = \frac{d^3}{3r^2}$, para pequenas distâncias sobre a superfície terrestre, a diferença entre a mesma e a sua projeção sobre o plano topográfico (ΔS) é relativamente pequena.

A seguir, será exposta a dedução uma expressão que permita calcular o efeito da curvatura terrestre na altimetria.

Figura 21: Efeito da curvatura na altimetria



Fonte: Autora, 2016

Pela figura 21, como $\overline{AC} = r$, temos que $\cos \theta = \frac{r}{r + \Delta h}$, isso implica

$$\begin{aligned} \Delta h \cos \theta + r \cos \theta &= r \Rightarrow \Delta h = \frac{r - r \cos \theta}{\cos \theta} \\ \Rightarrow \Delta h &= r(\sec \theta - 1). \end{aligned} \quad (4)$$

De modo análogo ao método utilizado no cálculo do efeito da curvatura na planimetria, vamos encontrar um polinômio de Taylor em torno de $\theta = 0$ para uma aproximação da função $h: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(\theta) = \sec \theta$ e verificar, graficamente, que o polinômio é uma boa aproximação da função.

Temos:

- (i) $h(\theta) = \sec \theta$ e $h(0) = 1$;
- (ii) $h'(\theta) = \sec \theta \cdot \operatorname{tg} \theta$ e $h'(0) = 0$;

$$(iii) \quad h''(\theta) = \sec^3 \theta + \sec \theta \cdot \operatorname{tg}^2 \theta \text{ e } h''(0) = 1;$$

$$(iv) \quad h'''(\theta) = 5\sec^3 \theta \cdot \operatorname{tg} \theta + \sec \theta \cdot \operatorname{tg}^3 \theta \text{ e } h'''(0) = 0;$$

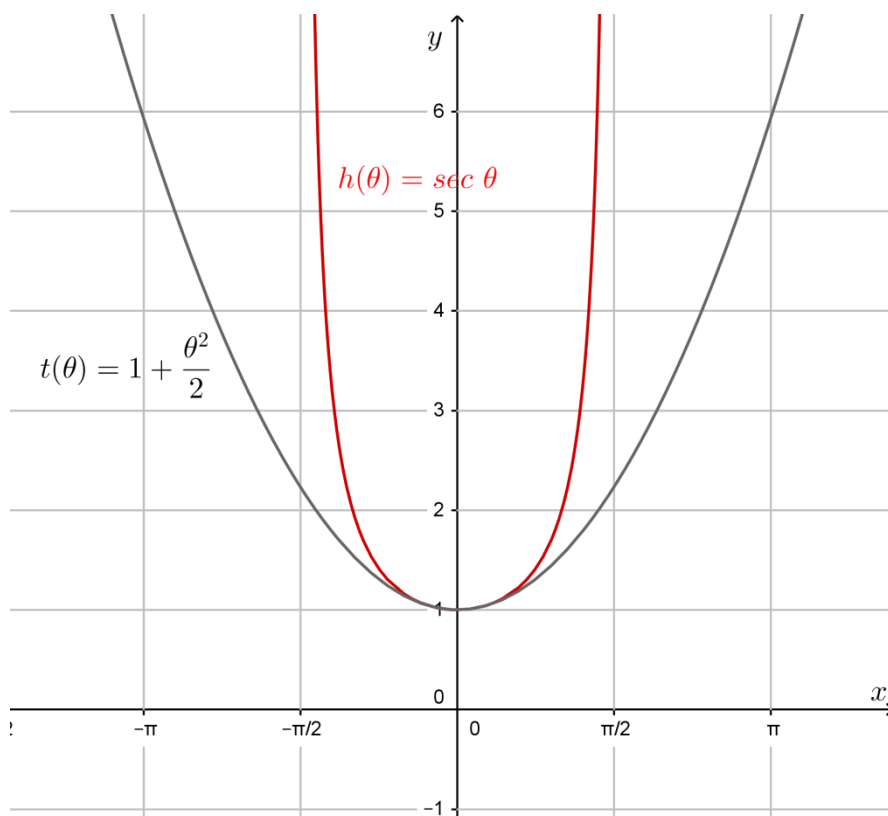
Desta forma,

$$T_3(\theta) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!}\theta + \frac{h''(0)}{2!}\theta^2 + \frac{h'''(0)}{3!}\theta^3$$

$$\Rightarrow T_3(\theta) = 1 + 0 + \frac{\theta^2}{2} + 0 = 1 + \frac{\theta^2}{2}.$$

O gráfico a seguir mostra que, para valores próximos de zero, considerando θ pequeno, a função $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $t(\theta) = 1 + \frac{\theta^2}{2}$ é uma boa aproximação da função h .

Figura 22: Gráfico das funções t e h



Fonte: Autora, 2016

Agora, utilizando a equação (4) $\Delta h = r(\sec \theta - 1)$ e considerando que $\sec \theta$ é aproximadamente igual a $\frac{\theta^2}{2} + 1$ para pequenos valores de θ e $\theta = \frac{d}{r}$, obtemos

$$\Delta h = r \left(\left(\frac{d}{r} \right)^2 + 1 - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{d^2}{2r}. \quad (5)$$

Esta expressão de Δh permite verificar, em uma determinada distância na superfície terrestre, a medida do afastamento da mesma ao plano topográfico. Essas deduções de ΔS e Δh foram possíveis devido a algumas aproximações. Essas aproximações são válidas dentro de uma margem aceitável de erro e facilita bastante os cálculos. “Tem-se adotado como limite para este plano na prática a dimensão de 20 a 30 km” (VEIGA, ZANETTI e FAGGION, 2007, p. 25)

5 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Conceder a vivência da prática de conceitos de geometria foi a base que conduziu este trabalho. Neste capítulo explanaremos a proposta didática composta pela escolha conveniente dos conteúdos, as metodologias utilizadas, as atividades de sala e o processo de avaliação.

A pesquisa foi realizada no Colégio Atheneu, em Maceió – AL, no turno matutino, no período de outubro a novembro de 2015 com os 113 (cento e treze) alunos distribuídos em três turmas de 2º ano do ensino médio. Propusemos a sequência didática nesta série por ser abordado o conteúdo de trigonometria. Nesta escola, as turmas de ensino médio têm acrescidas, em sua carga horária semanal de matemática, no turno vespertino, duas aulas com o objetivo de revisar conteúdos do ensino fundamental e foram nessas aulas que foram realizadas as atividades descritas nessa unidade didática. Nestas turmas, foram revisados, durante os três primeiros bimestres do ano, os conteúdos de razão (dando ênfase à escala), proporção, regra de três simples e composta e toda a geometria plana que é abordada no ensino fundamental. Esta revisão serviu como base complementar para propor a sequência didática de modelagem matemática sobre áreas e distâncias na agrimensura.

Escolhemos também o 9º ano para aplicação de atividades práticas sobre o cálculo de alturas inacessíveis utilizando os conteúdos de semelhança de triângulos e trigonometria no triângulo retângulo, no período de setembro e outubro de 2015 com 51 alunos distribuídos em duas turmas. Estas turmas são da Escola Municipal de Educação Básica Dom Pedro I, do turno vespertino, localizada no município de Rio Largo – AL.

Os conhecimentos básicos de trigonometria e cálculo de áreas para a aplicação das atividades do 2º ano do ensino médio já haviam sido adquiridos. Parte das atividades dos alunos serão citadas, mas seus nomes preservados. As citações dos alunos das turmas de 2º ano serão feitas acompanhadas das letras α , β e γ , referentes às turmas α (Alfa), β (Beta) e γ (Gama), com numeração de 1 a 42 (turma α), de 1 a 39 (turma β) e de 1 a 32 (turma γ) e as citações dos alunos das turmas de 9º ano serão feitas acompanhadas das letras A ou B, referentes às turmas A e B, com numeração de 1 a 25 (turma A) e de 1 a 26 (turma B).

As metodologias utilizadas foram aulas expositivas, exposições das produções dos alunos, atividades práticas, oficinas com uso de material concreto e atividades fotocopiadas. A avaliação dos estudantes foi feita continuamente, levando em consideração o desenvolvimento da aprendizagem de cada um, inclusive a participação efetiva em cada atividade.

A sequência didática nas turmas de 2º ano foi composta por 12 (doze) aulas, de cinquenta minutos cada, divididas da seguinte maneira: 5 (cinco) aulas para o estudo do efeito da curvatura da terra na planimetria e altimetria, 5 (cinco) aulas para o estudo de áreas de figuras planas e 2 (duas) aulas para o estudo do cálculo de distâncias inacessíveis, incluindo exposições da professora, oficina, aplicação das atividades, exposições dos alunos e avaliação da aprendizagem.

A sequência didática nas turmas de 9º ano foi constituída por 24 (vinte e quatro) aulas de sessenta minutos cada, segmentadas da seguinte forma: 8 (oito) aulas para o estudo da semelhança de triângulos e 12 (doze) aulas para o estudo da trigonometria no triângulo retângulo, aulas estas direcionadas à exposição do conteúdo pela professora e exercícios de sala e 4 (quatro) aulas para a realização da oficina e aplicação das atividades práticas.

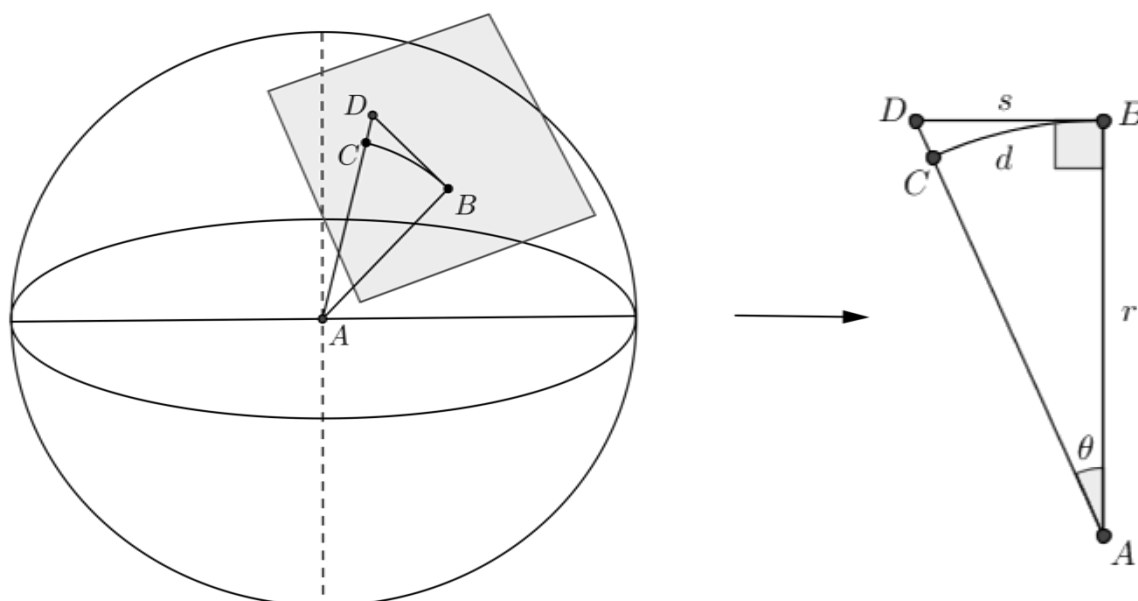
Antes da aplicação das sequências didáticas, tanto para os ensino médio quanto para o ensino fundamental, foi apresentado aos alunos a ideia das atividades que seriam realizadas, seus objetivos (que estão descritos no decorrer desta produção) e também algumas atribuições do engenheiro agrimensor no que se refere ao cálculo de áreas de terras e distâncias inacessíveis. Estas sequências aqui abordadas são uma forma de situar as atividades e, segundo Zabala (1998), não podem ser reparadas apenas como um tipo de tarefa, mas como um parâmetro que auxilia identificações e indicações preliminares na forma de ensinar.

5.1 O efeito da curvatura da terra na distância (planimetria) e na altimetria.

A sequência didática iniciou-se com uma aula expositiva sobre o contexto histórico da matemática como base para a agrimensura (exposto no capítulo 2 desta dissertação), com objetivo de reconhecer a matemática como uma ciência em construção e fazer a associação entre o conteúdo e a prática pedagógica. Foi

exposto também sobre como se dá o efeito da curvatura da terra na distância e na altimetria, em cada turma de 2º ano do ensino médio. Foram necessárias 3 aulas de 50 minutos cada para a exposição deste tema. Inicialmente foi lançado para a turma o seguinte questionamento sobre medidas de distância na superfície terrestre: Sendo a Terra aproximadamente esférica, porque fazemos medidas lineares de distâncias? Após algumas discussões, os alunos concluíram que podemos considerar regiões locais como planas. Daí foi proposta uma outra pergunta: Podemos representar a distância entre dois pontos em continentes distintos do planeta por um segmento de reta? Após um debate, todos concordaram que não convém este fato. Então um último questionamento foi feito: Qual deve ser a distância máxima, sobre a superfície terrestre, que podemos considerar como linear? Para que essa pergunta fosse respondida, iniciou-se a exposição sobre o efeito da curvatura da terra em distâncias com um desenho da figura a seguir no quadro branco.

Figura 23: Exposição aos alunos sobre o efeito da curvatura da terra na planimetria e altimetria



Fonte: Autora, 2016

Na figura 23, d é o valor de uma distância considerada sobre a terra esférica e s a projeção desta distância sobre o plano tangente (plano topográfico) e a medida r representa o raio da terra (aproximadamente 6 370 km). Inicialmente foi exposto aos alunos os conceitos de plano topográfico, planimetria e altimetria.

Vamos verificar, em uma tabela, o valor de θ , $tg \theta$ e $s = r \cdot tg \theta$ para uma distância d (em quilômetros) correspondente. Considerando que $\theta = \frac{d}{r}$, vejamos:

Tabela 1: Valores das projeções correspondentes de distâncias na superfície terrestre sobre o plano topográfico

d	θ	$tg \theta$	s
15	0,002354788	0,002354792	15,00003
20	0,003139717	0,003139728	20,00007
25	0,003924647	0,003924667	25,00013
30	0,004709576	0,004709611	30,00022
35	0,005494505	0,005494561	35,00035
40	0,006279435	0,006279517	40,00053
45	0,007064364	0,007064482	45,00075
50	0,007849294	0,007849455	50,00103
100	0,015698587	0,015699877	100,0082
200	0,031397174	0,031407495	200,0657
300	0,047095761	0,047130612	300,222
400	0,062794349	0,062877014	400,5266
500	0,078492936	0,078654536	501,0294
600	0,094191523	0,094471072	601,7807

Fonte: Autora, 2016

Os dados da tabela já nos mostram que, para pequenos ângulos (θ), a diferença entre a projeção s e uma distância d sobre a superfície terrestre é desprezível.

Usamos a notação Δs para indicar a diferença entre a projeção s e a distância d , assim, $\Delta s = s - d$. Temos que, no triângulo ABD na figura 23, $tg \theta = \frac{s}{r}$, ou seja, $s = r \cdot tg \theta$. Temos ainda, $d = \theta \cdot r$. Fazendo as devidas substituições em Δs , temos que

$$\Delta s = r \, tg \theta - \theta r. \quad (1)$$

Existe uma função polinomial $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(\theta) = \theta + \frac{\theta^3}{3}$ que assume valores aproximados da função $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\theta) = tg \theta$, para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Essa função polinomial não é determinada arbitrariamente, é resultado de estudos mais aprofundados do cálculo infinitesimal. Na tabela a seguir, este fato pode ser verificado.

Tabela 2: Valores relativos às funções f e g

d	θ	$f(\theta) = tg \theta$	$g(\theta) = \theta + \frac{\theta^3}{3}$	Erro ($f(\theta) - g(\theta)$)
15	0,002354788	0,002354792	0,002354792	$9,65374 \cdot 10^{-15}$
20	0,003139717	0,003139728	0,003139728	$4,06814 \cdot 10^{-14}$
25	0,003924647	0,003924667	0,003924667	$1,2415 \cdot 10^{-13}$
30	0,004709576	0,004709611	0,004709611	$3,08924 \cdot 10^{-13}$
35	0,005494505	0,005494561	0,005494561	$6,67708 \cdot 10^{-13}$
40	0,006279435	0,006279517	0,006279517	$1,30181 \cdot 10^{-12}$
45	0,007064364	0,007064482	0,007064482	$2,34592 \cdot 10^{-12}$
50	0,007849294	0,007849455	0,007849455	$3,97285 \cdot 10^{-12}$
100	0,015698587	0,015699877	0,015699877	$1,27141 \cdot 10^{-10}$
200	0,031397174	0,031407495	0,031407491	$4,06972 \cdot 10^{-9}$
300	0,047095761	0,047130612	0,047130581	$3,09199 \cdot 10^{-8}$
400	0,062794349	0,062877014	0,062876884	$1,30387 \cdot 10^{-7}$
500	0,078492936	0,078654536	0,078654138	$3,98269 \cdot 10^{-7}$

Fonte: Autora, 2016

Os alunos concordaram que, para valores pequenos de θ , a aproximação dos valores das funções f e g é aceitável. Na equação (1), substituindo $tg \theta$ por $\theta + \frac{\theta^3}{3}$, e fazendo as devidas reduções, obtemos:

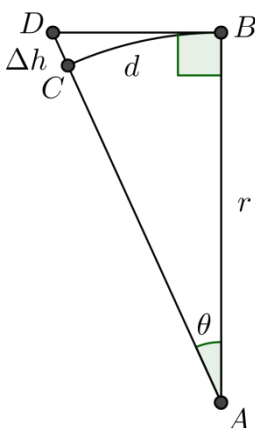
$$\Delta s = r \frac{\theta^3}{3}, \quad (2)$$

mas como $\theta = \frac{d}{r}$, segue que

$$\Delta s = \frac{d^3}{3r^2}. \quad (3)$$

Vamos agora determinar uma expressão que permita calcular o efeito da curvatura da terra na altimetria. De acordo com a figura a seguir, queremos encontrar uma expressão para Δh .

Figura 24: Efeito da curvatura da terra na altimetria



Fonte: Autora, 2016

Temos que $\cos \theta = \frac{r}{r+\Delta h} \Rightarrow \Delta h = r \cdot \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)$, o que é equivalente a

$$\Delta h = r \cdot (\sec \theta - 1). \quad (4)$$

De modo análogo, função polinomial que assume valores aproximados da função $h: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(\theta) = \sec \theta$ tem lei de formação $t(\theta) = 1 + \frac{\theta^2}{2}$, para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Este fato pode ser observado na seguinte tabela de valores:

Tabela 3: Valores relativos às funções h e t

d	θ	$h(\theta) = \sec \theta$	$t(\theta) = 1 + \frac{\theta^2}{2}$	Erro ($h(\theta) - t(\theta)$)
15	0,002354788	1,000002773	1,000002773	$6,40576 \cdot 10^{-12}$
20	0,003139717	1,000004929	1,000004929	$2,02454 \cdot 10^{-11}$

25	0,003924647	1,000007701	1,000007701	$4,94269 \cdot 10^{-11}$
30	0,004709576	1,00001109	1,00001109	$1,02492 \cdot 10^{-10}$
35	0,005494505	1,000015095	1,000015095	$1,8988 \cdot 10^{-10}$
40	0,006279435	1,000019716	1,000019716	$3,23928 \cdot 10^{-10}$
45	0,007064364	1,000024953	1,000024953	$5,18872 \cdot 10^{-10}$
50	0,007849294	1,000030806	1,000030806	$7,90846 \cdot 10^{-10}$
100	0,015698587	1,000123235	1,000123223	$1,26545 \cdot 10^{-8}$
200	0,031397174	1,000493094	1,000492891	$2,02533 \cdot 10^{-7}$
300	0,047095761	1,001110031	1,001109005	$1,02584 \cdot 10^{-6}$
400	0,062794349	1,00197481	1,001971565	$3,24443 \cdot 10^{-6}$
500	0,078492936	1,003088499	1,00308057	$7,92813 \cdot 10^{-6}$
600	0,094191523	1,004452479	1,004436021	$1,6458 \cdot 10^{-5}$

Fonte: Autora, 2016

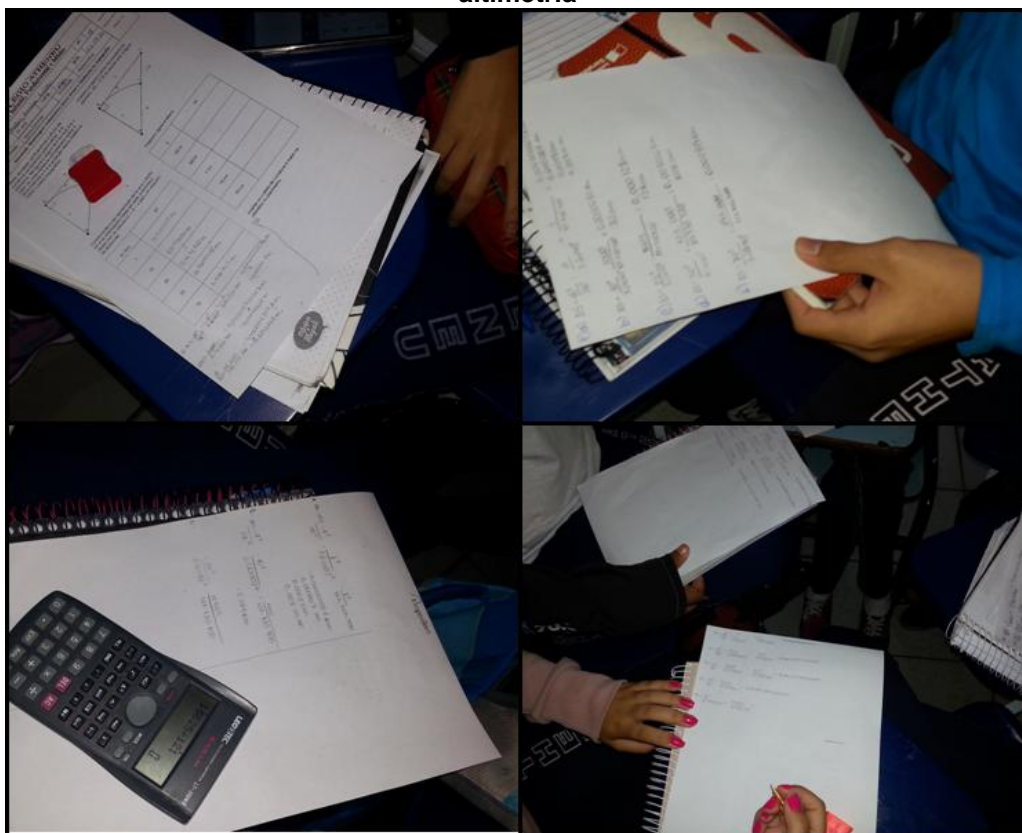
De modo análogo, os alunos concordaram que $\sec \theta$ e $1 + \frac{\theta^2}{2}$ são próximos para valores pequenos de θ . Na equação (4), substituindo $\sec \theta$ por $1 + \frac{\theta^2}{2}$ e fazendo as reduções possíveis, obtemos:

$$\Delta h = \frac{d^2}{2r}. \quad (5)$$

Encontramos então as expressões que determinam o efeito da curvatura terrestre na distância dada por $\Delta s = \frac{d^3}{3r^2}$ e o efeito da curvatura na altimetria expressa por $\Delta h = \frac{d^2}{2r}$.

Foi proposta uma atividade⁹ para os alunos com uma duração de 2 aulas de 50 minutos cada, em que a mesma consiste em construir uma tabela de valores de erros relativos para um conjunto de distâncias. Os alunos formaram grupos, apesar da atividade ser individual, para discutir e socializar os conceitos entre os colegas do grupo, para só então ser compartilhado com a classe. O objetivo dessa atividade é encontrar meios de responder questionamento feito inicialmente: Qual é a distância máxima, sobre a superfície terrestre, que podemos considerar como linear?

Figura 25: Alunos realizando atividade referente ao efeito da curvatura da terra na distância e altimetria



Fonte: Autora, 2016

Os alunos realizaram a atividade em grupo, apesar de ser entregue folhas individualmente para discutirem e compararem resultados. Foi permitido o uso da calculadora. Durante todo o processo os estudantes foram monitorados, podendo haver intervenção da professora a qualquer momento da atividade, com o objetivo de auxiliá-los em possíveis dúvidas. As figuras a seguir expõem algumas resoluções de alunos.

⁹ Vide apêndice A

Figura 26: Tabela com valores de Δs realizada pelas alunas $\alpha 20$ e $\alpha 10$

d (km)	Δs <i>planimetria</i>	d (km)	Δs
1	0,00000008 km 0,000008 m	1	$\Delta s = \frac{1^3}{3(6370)^2} = \frac{1}{3.40576900}$ $\Delta s = 0,00000008 \text{ km} = 0,008 \text{ mm}$
10	0,000008214 km 0,008214 m	10	$\Delta s = \frac{10^3}{3(6370)^2} = \frac{1000}{3.40576900}$ $\Delta s = 0,0082149 \text{ m}$
25	0,00128357 km 0,128357 m	25	$\Delta s = \frac{25^3}{3(6370)^2} = \frac{15625}{3.40576900}$ $\Delta s = 0,1283571 \text{ m}$
50	0,001026856 km 1,026856 m	50	$\Delta s = \frac{50^3}{3(6370)^2} = \frac{125000}{3.40576900}$ $\Delta s = 1,0268568 \text{ m}$
70	0,002817695 km 2,817695 m	70	$\Delta s = \frac{70^3}{3(6370)^2} = \frac{343000}{3.40576900}$ $\Delta s = 2,8176951 \text{ m}$

Fonte: Autora, 2016

Figura 27: Tabela com valores de Δh realizada pelas alunas $\alpha 20$ e $\alpha 10$

d	Δh <i>altimetria</i>	d	Δh
100m	0,784929356 m	100m	$\Delta h = \frac{100^2}{2 \cdot 6370} = \frac{10000}{12740}$ $\Delta h = 0,7849293 \text{ m}$
500m	19,62323391 m	500m	$\Delta h = \frac{500^2}{2 \cdot 6370} = \frac{250000}{12740}$ $\Delta h = 19,623233 \text{ m}$
1 km	0,00078492 km 0,78492 m	1 km	$\Delta h = \frac{1^2}{2 \cdot 6370} = \frac{1}{12740}$ $\Delta h = 0,0007849 \text{ km}$
10 km	0,007849293 km 7,849293 m	10 km	$\Delta h = \frac{10^2}{2 \cdot 6370} = \frac{100}{12740}$ $\Delta h = 0,0078492 \text{ km}$
70 km	0,384615384 km 384,615384 m	70 km	$\Delta h = \frac{70^2}{2 \cdot 6370} = \frac{4900}{12740}$ $\Delta h = 0,3846153 \text{ km}$

Análise se o efeito da curvatura é maior na altimetria ou planimetria.
O Efeito da curvatura é maior na altimetria.

Análise se o efeito da curvatura é maior na altimetria ou planimetria.
Na altimetria é maior que na planimetria.

Fonte: Autora, 2016.

De modo geral, os alunos compreenderam a ideia de planimetria e altimetria, puderam contemplar uma aplicação da geometria e trigonometria. Após responderem a atividade proposta, os alunos compartilharam soluções, sugeriram algumas distâncias máximas a serem medidas linearmente sobre a terra esférica, como, por exemplo, 50 e 70 km. Foi mostrado que, na prática pelos topógrafos, por convenção, a distância pode ser considerada em linha reta de 20 a 30 km.

5.2 Cálculo de áreas de figuras planas

Esta sequência didática iniciou-se com uma exposição sobre o cálculo de área de figuras planas, com duração de uma aula de 50 minutos em cada turma de 2º ano, em caráter de revisão das fórmulas de áreas de triângulos, paralelogramos, trapézios, círculos e polígonos regulares e, em seguida, foi levantado um questionamento sobre como eles fariam para calcular a área de um polígono irregular. Após algumas discussões, os alunos chegaram à conclusão de que a melhor forma seria dividir a região em figuras planas conhecidas como retângulos e triângulos para então calcular a área. Então a professora propôs algumas questões no quadro branco para que fossem resolvidas coletivamente, com sugestões de resolução dos próprios alunos.

5.2.1 Confecção do teodolito horizontal

No dia seguinte, em uma aula de 50 minutos, os alunos trouxeram os materiais solicitados pela professora na aula anterior para a confecção de um teodolito artesanal para medir ângulos horizontais para ser usado na atividade seguinte, referente ao cálculo da área de uma praça próxima à escola. Os alunos se formaram grupos de 5 ou 6 alunos para a confecção do teodolito. A professora disponibilizou a imagem (fotocópia) de um transferidor de 360º e os materiais solicitados foram: embalagem de plástico com tampa circular, tesoura, folha de papel, EVA (ou um pedaço de cartolina dura), palito, canudinho, compasso, régua, estilete, cola ou adesivo dupla face.

Os alunos seguiram as instruções a seguir:

1. Determinar o centro do círculo do fundo e da tampa da embalagem. Para isso, desenhe o círculo da base e da tampa da embalagem em uma folha de papel para facilitar o desenho com régua e compasso. Traçar duas cordas em cada circunferência e traçar as mediatrizes dessas cordas, que se cruzam no centro do círculo. Cortar os círculos e colam no fundo e na parte superior da embalagem circular. Esse processo é somente para localizar o centro do círculo do fundo e da tampa da embalagem. Essa etapa mobiliza

conhecimentos de desenho geométrico (intersecção das mediatrizes de duas cordas do círculo).

2. Passar o palito pelo diâmetro em posição próxima à borda da embalagem. A tampa da embalagem é colocada em contato com a folha, com seu centro coincidindo com o centro da imagem do transferidor. A embalagem (com o palito) deve girar por dentro da tampa.
3. Fixar o canudo passando pelo centro da base da embalagem, alinhado com o palito.

Figura 28: Alunos confeccionando teodolito para ângulos horizontais



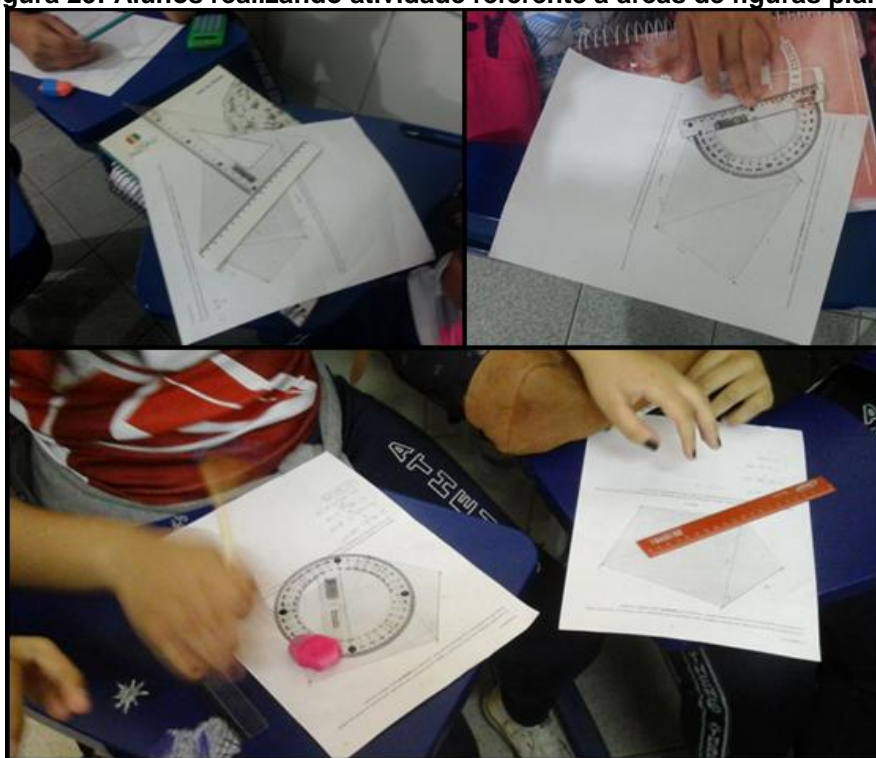
Fonte: Autora, 2016

5.2.2 Cálculo de áreas

Para a realização desta atividade, os alunos foram divididos em grupos de 6 ou 7 integrantes para realizar uma atividade de aplicação de áreas de figuras planas,

na qual seria entregue uma folha A4¹⁰ para cada aluno contendo duas questões: a primeira se trata do cálculo da área de algumas regiões de uma casa (área interna, externa, janelas, porta e paredes) e a outra com a imagem de um polígono convexo irregular que se refere a região interna de uma fazenda, mas não é dado na questão nenhuma medida de ângulo ou distância. Foram necessárias duas aulas de 50 minutos cada para a realização desta atividade. A professora sugeriu que os alunos dividissem em triângulos para, então, calcular a área. Já que não haviam medidas, os alunos utilizaram réguas, esquadro e/ou transferidor para que fossem feitas as medições necessárias.

Figura 29: Alunos realizando atividade referente a áreas de figuras planas



Fonte: Autora, 2016

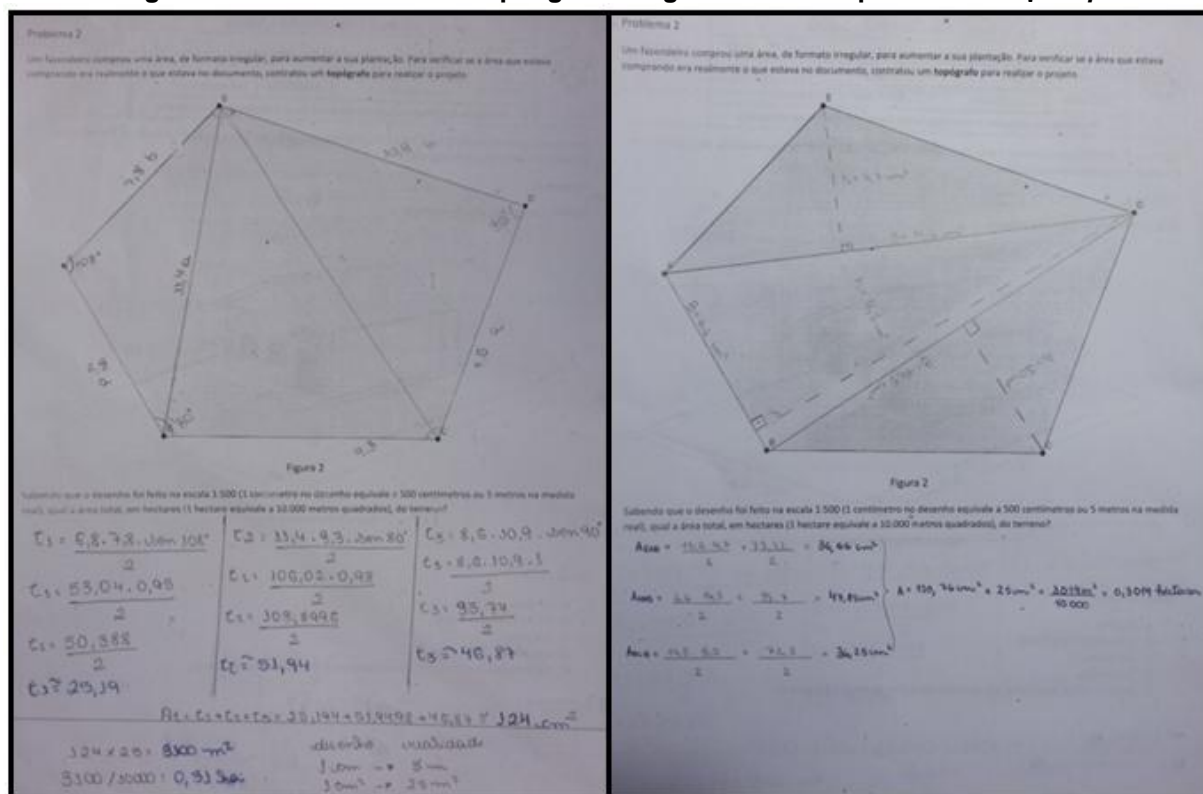
A seguir estão ilustradas as atividades das alunas $\gamma 2$ e $\beta 15$ que resolveram por métodos diferentes. A aluna $\gamma 2$ utilizou a régua para medir os lados de cada triângulo e o transferidor para medir o ângulo entre dois lados adjacentes e utilizar a fórmula do seno¹¹ para calcular a área de cada triângulo. Já a aluna $\beta 15$ utilizou régua junto com o esquadro para traçar uma altura de cada triângulo e a régua para medir a base e altura de cada um e, então, calculou as áreas. Ambas utilizaram a

¹⁰ Vide apêndice B

¹¹ Veja item 3.9.5

calculadora, somaram as áreas dos triângulos, fizeram as transformações de cm^2 para m^2 utilizando a escala dada no problema e, em seguida, transformaram a área de m^2 para ha .

Figura 30: Cálculo da área do polígono irregular realizado pelas alunas $\gamma 2$ e $\beta 15$



Fonte: Autora, 2016

A maioria dos alunos apresentou dificuldade em resolver este segundo problema da atividade, já que eles deveriam escolher uma das três fórmulas para o cálculo da área do triângulo¹² e, a partir daí, verificar quais as medidas a serem feitas. No decorrer da aula, após as discussões entre os alunos e as intervenções da professora, eles foram escolhendo o método a ser utilizado e os procedimentos a serem feitos para a resolução do problema. Nenhum dos grupos utilizou a fórmula de Herão para o cálculo da área dos triângulos, pois argumentaram ser um tanto “trabalhosa”.

5.2.3 Calculando a área da praça

¹² Ver base conceitual “áreas de triângulos”

Para a realização desta atividade, foi proposto pela professora que apenas um grupo, de 6 ou 7 alunos, por turma, que se submetesse de modo voluntário, para que calculassem a área de uma praça que fica à 200 m da escola, com o auxílio da professora, utilizando o teodolito confeccionado por eles em sala, trena e balizas¹³. Como os alunos têm aulas duas vezes por semana no período vespertino, o grupo voluntário chegaria 30 minutos antes da aula para fazer as medições da praça.

O grupo compareceu no horário combinando e foram, junto com a professora, até a praça. Fizeram um desenho rápido do formato da praça, que é um hexágono irregular e, nesse desenho, dividiram em triângulos e decidiram quais as medições deveriam ser feitas com o teodolito e a trena.

Figura 31: Alunos fazendo as medições para o cálculo da área da praça

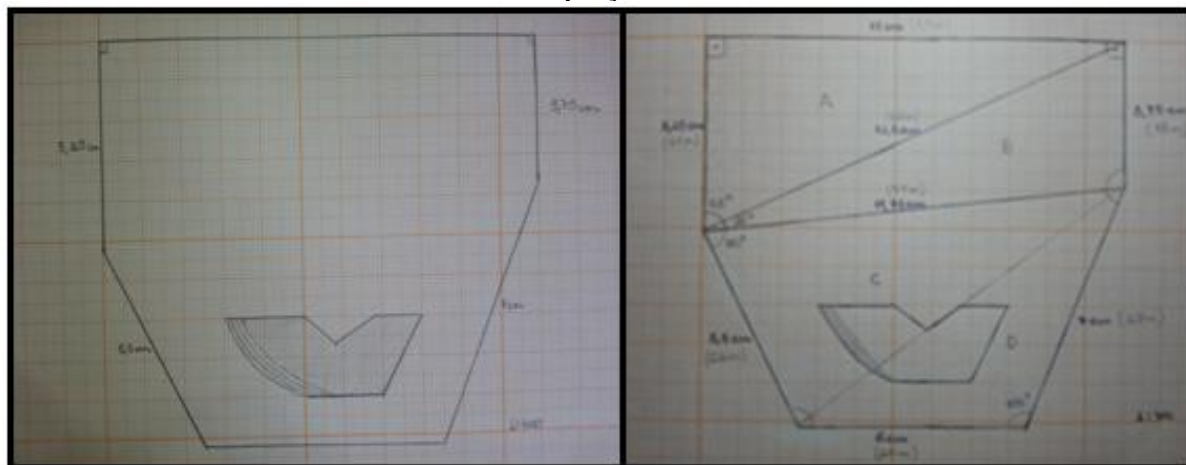


Fonte: Autora, 2016

¹³ Balizas são usadas para marcar pontos no terreno. São hastes usualmente de 2 a 3 m de comprimento e pintadas com bandas alternadas de vermelho e branco para torná-las mais facilmente visíveis.

O grupo deveria trazer na semana seguinte uma planta da praça e expor para a turma os procedimentos utilizados e como foi feito o cálculo da área da praça. E assim foi feito. O grupo fez a planta da praça e um outro desenho com a divisão em triângulos que usaram para calcular a área, ambos em papel milimetrado. Utilizaram a escala 1:400, como ilustra a figura a seguir, feito pelo grupo voluntário da turma β .

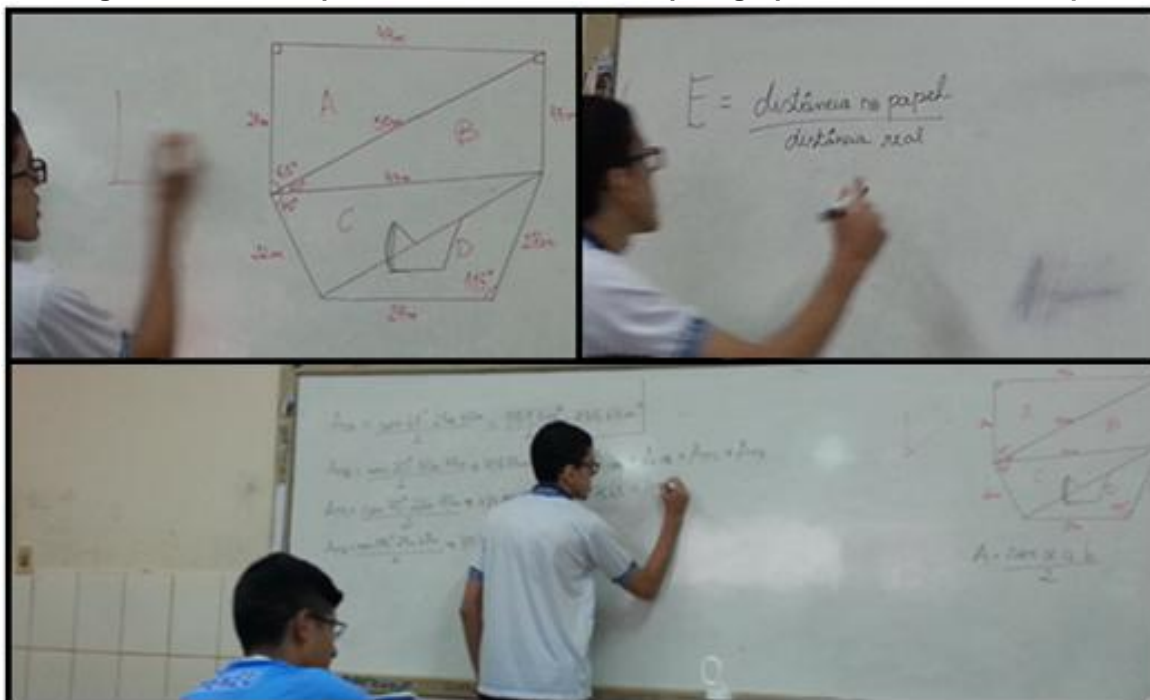
Figura 32: Planta da praça e desenho com divisão em triângulos para o cálculo da área da praça



Fonte: Autora, 2016

Em duas aulas de cinquenta minutos cada, o grupo apresentou a planta à turma, relataram como fizeram as medições e, no quadro branco, um dos componentes do grupo mostrou como foi determinada a escala utilizada para a planta e como calculou a área da praça, desenhando a figura desta, dividida em regiões triangulares denotadas por A , B , C e D , como mostra a ilustração a seguir. A área de cada triângulo foi determinada pela fórmula do seno e depois o aluno expôs a soma das áreas de todos os triângulos.

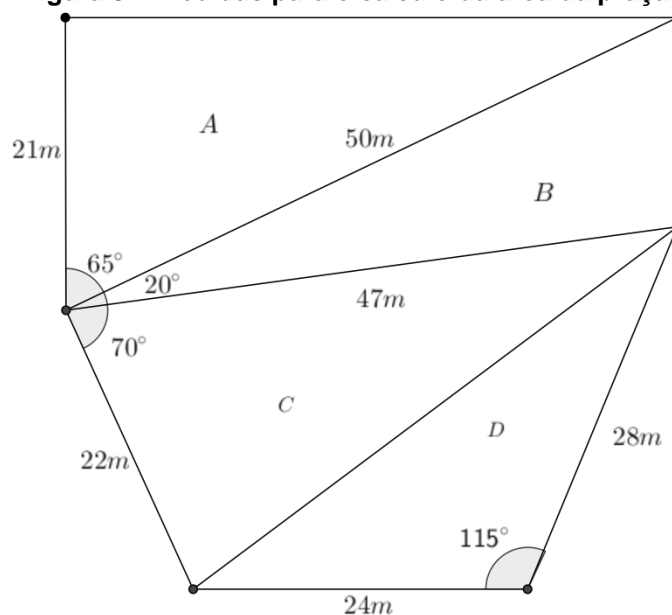
Figura 33: Aluno expõe o trabalho realizado pelo grupo voluntário da turma β



Fonte: Autora, 2016

A figura a seguir expõe, de modo claro, as medidas utilizadas para calcular a área da praça, realizada pelos alunos.

Figura 34: Medidas para o cálculo da área da praça



Fonte: Autora, 2016

Utilizando a notação A_A para indicar a área da região A , o aluno expôs:

$$A_A = \frac{21 \cdot 50 \cdot \text{sen } 65^\circ}{2} = 475,65$$

$$A_B = \frac{50 \cdot 47 \cdot \text{sen } 20^\circ}{2} = 401,85$$

$$A_C = \frac{47 \cdot 22 \cdot \text{sen } 70^\circ}{2} = 485,82$$

$$A_D = \frac{24 \cdot 28 \cdot \text{sen } 115^\circ}{2} = 304,51$$

$$A_{total} = 475,65 + 401,85 + 485,82 + 304,51 = 1667,83 \text{ m}^2$$

A interação da turma e o empenho do grupo voluntário foi bastante satisfatório. Os alunos puderam ver, de modo prático, a aplicação de vários conteúdos vistos durante o ano letivo, e isso proporcionou um atenção e um interesse maior da turma durante a exposição do trabalho do grupo voluntário.

5.3 Cálculo de distâncias inacessíveis

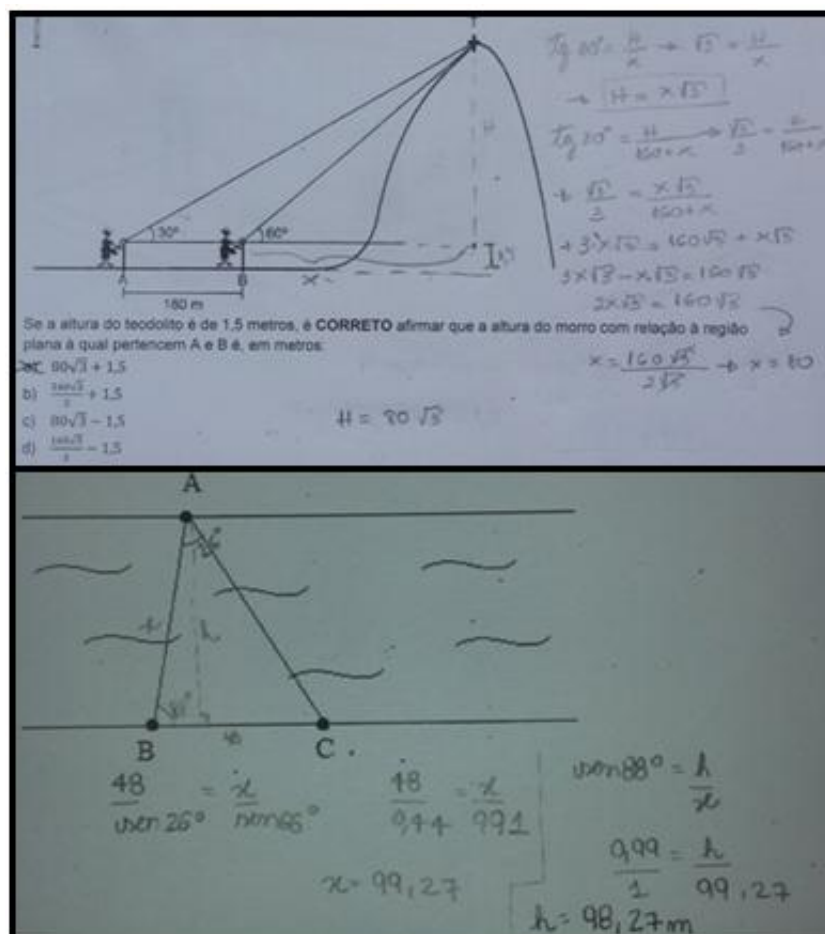
O objetivo desta atividade é utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Esta atividade foi realizada em duas aulas de cinquenta minutos cada, com os alunos do 2º ano. Inicialmente, a professora perguntou aos alunos quais instrumentos e que conhecimentos eles usariam para calcular a largura de um rio que não pudessem atravessar. Alguns sugeriram a utilização de um teodolito e trena, mas estavam confusos sobre a forma com a qual poderiam calcular a largura do rio.

A professora entregou a cada um deles uma folha A4¹⁴ contendo duas questões referentes ao cálculo de distâncias inacessíveis. Os alunos formaram grupos de 2 ou 3 integrantes para que discutissem meios para a resolução dos problemas. A imagem a seguir ilustra a resolução da 1ª questão do aluno $\alpha 21$ e da 2ª questão da aluna $\gamma 13$.

¹⁴ Vide apêndice C

Figura 35: Questões resolvidas pelas alunas $\alpha 21$ e $\gamma 13$ referentes à atividade sobre cálculo de distâncias inacessíveis



Fonte: Autora, 2016

A atividade descrita nada mais é do que a proposta de dois problemas usuais na abordagem do conteúdo de trigonometria no 2º ano do ensino médio. Porém, na sequência didática presente, os estudantes enxergaram de um modo concreto, ou seja, os problemas são uma representação da realidade sobre a qual refletimos e procuramos construir estratégias de ação. Esse processo de passagem a partir de representações é, de fato, a modelagem matemática.

5.4 Atividade prática sobre o cálculo de alturas inacessíveis

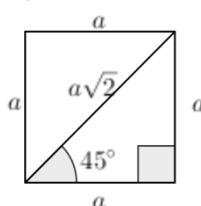
Após ser abordado o contexto histórico da agrimensura, principalmente sobre como Tales aplicou seus conhecimentos sobre segmentos proporcionais para o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, foi exposto o conteúdo de Teorema de Tales e aplicações, então deu-se início, nas turmas de 9º ano, ao conteúdo de semelhança de figuras planas, com uma exposição sobre polígonos semelhantes e razão de semelhança e, em seguida, os alunos discutiram sobre a resolução de

alguns problemas propostos. No dia seguinte, iniciou-se com a semelhança de triângulos, retomando-se o conceito de ângulos correspondentes e foi enunciado e demonstrado o teorema fundamental da semelhança de triângulos¹⁵. Os alunos resolveram individualmente, em sala de aula, as algumas questões do livro didático e outras foram propostas para casa. Em outras aulas, houveram as discussões dos problemas que os alunos tiveram dificuldade para resolver. Foi exposto os casos de semelhança de triângulos com as respectivas demonstrações e a resolução de problemas envolvendo casos de semelhança. Foram necessárias oito aulas de 60 minutos cada até a conclusão do conteúdo de semelhança de triângulos.

Na semana seguinte, iniciou-se o conteúdo de razões trigonométricas no triângulo retângulo com a ideia de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo. Foram propostas algumas questões com o objetivo de memorizar as razões trigonométricas e foi solicitado que os alunos resolvessem em casa outras questões entregues pela professora, pois os alunos apresentaram dificuldade em resolver os exercícios. Após trabalhar, em foco, nas dúvidas dos alunos na aula seguinte, foi ressaltado para os alunos como são obtidos o seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30° , 45° e 60°).

Para verificar os valores de seno, cosseno e tangente de 45° , utilizou-se o quadrado ilustrado em seguida, em que a diagonal pôde ser calculada utilizando o Teorema de Pitágoras.

Figura 36: Seno, cosseno e tangente de 45°



Fonte: Autora, 2016

A partir das medidas indicadas, pode-se determinar as seguintes razões.

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ então } \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

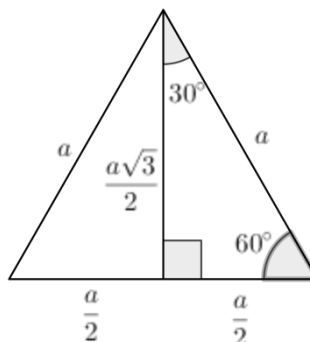
$$\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ então } \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a}, \text{ então } \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

¹⁵ Veja 3.5.1

Observe o triângulo equilátero, na imagem a seguir, em que a medida da altura pôde ser calculada utilizando o teorema de Pitágoras.

Figura 37: Seno, cosseno e tangente de 30° e 60°



Fonte: Autora, 2016

A partir das medidas indicadas, pode-se determinar as seguintes razões:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a}, \text{ então, } \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}, \text{ então } \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ então } \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Os seguintes valores podem ser determinados analogamente: $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$ e $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$.

Com os valores determinados, é possível elaborar uma tabela como a apresentada a seguir.

Quadro 3: Razões trigonométricas dos ângulos notáveis

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Fonte: Autora, 2016

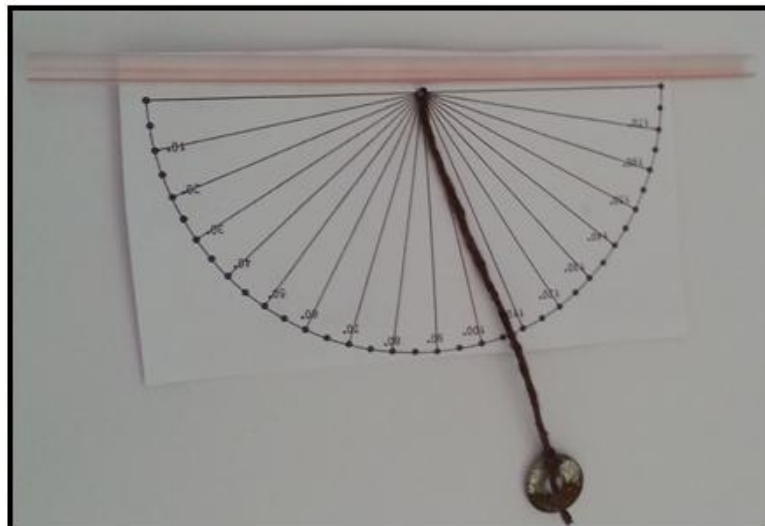
Foi apresentada a tabela trigonométrica aos alunos contida no livro didático. A tabela apresenta as medidas inteiras de ângulos de 1° até 89° com os valores de seno, cosseno e tangente dos respectivos ângulos. A professora resolveu no quadro branco alguns exemplos de aplicação e propôs aos alunos que resolvessem todos os exercícios desta seção contidas no livro didático. Os alunos que realizaram as atividades trouxeram as dúvidas na aula seguinte que foram discutidas em sala e, perante a dificuldade da turma, foi lançada uma lista complementar de exercícios. Foram necessárias 12 aulas para a abordagem do conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo.

5.4.1 Confeção do teodolito vertical

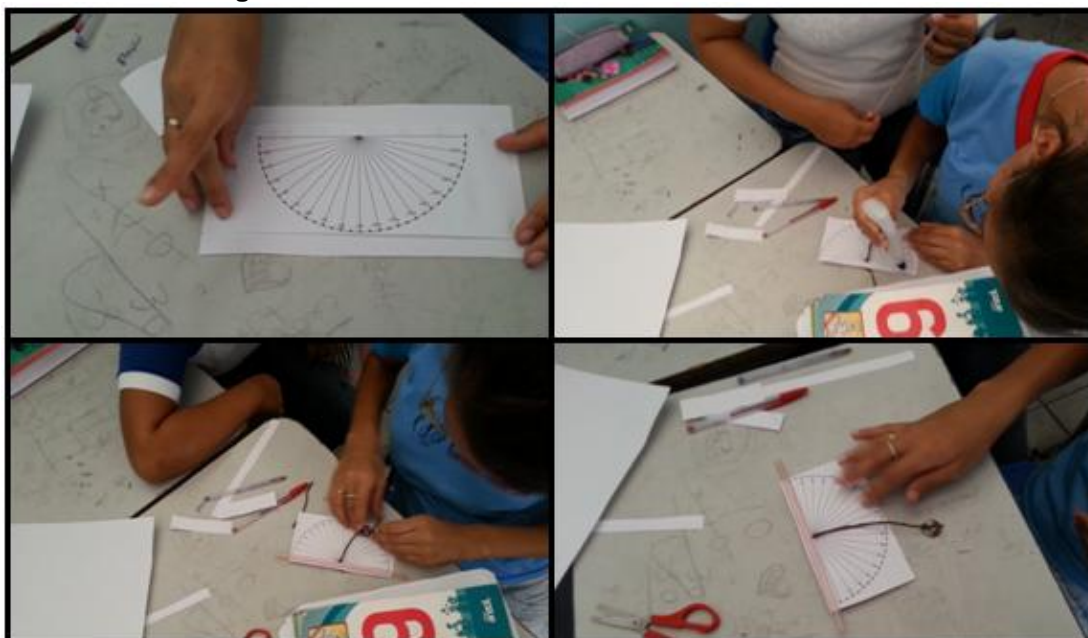
Os alunos se reuniram em grupos de 3 ou 4 componentes e foram necessárias duas aulas de 60 minutos cada para a confecção do teodolito. Cada grupo recebeu, da escola, uma folha de papel com a representação de um transferidor de 180° , um pedaço de barbante de 20 cm, tesoura, cola, um pedaço de cartolina no formato retangular nas dimensões 12cm x 30cm, um canudo e uma peça que pudesse ser amarrada no barbante (uma arruela ou uma porca).

Os alunos seguiram as orientações a seguir:

1. Colar a representação do transferidor na cartolina e recortar os espaços excedentes;
2. Perfurar o centro do transferidor com um lápis e passar o barbante pelo furo e dar um nó no barbante no verso do transferidor.
3. Na outra ponta do barbante amarrar uma arruela ou porca e colaram o canudo transferidor passando pelo centro.

Figura 38: Teodolito vertical

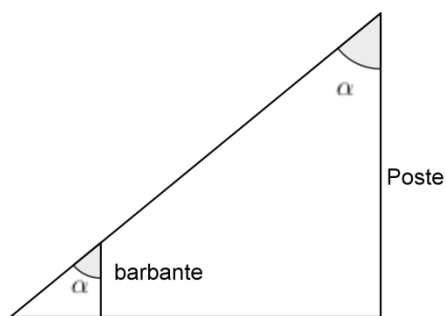
Fonte: Autora, 2016

Figura 39: Alunos confeccionando o teodolito vertical

Fonte: Autora, 2016

A professora apresentou aos alunos como utilizar o teodolito para calcular medidas de alturas inacessíveis. Ao observar pelo canudo o ponto mais alto de um poste, por exemplo, o menor ângulo formado pelo canudo e o barbante é o mesmo ângulo formado pelo segmento de reta que representa a direção da visão e o poste, como mostra a figura abaixo, o que pode ser demonstrado por semelhança de triângulos.

Figura 40: Ângulo de visão do teodolito vertical



Fonte: Autora, 2016

Conhecendo-se a distância do observador ao poste, é possível calcular a altura do poste com a tangente do ângulo encontrado

$$\left(\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{distância do observador ao poste}}{\text{altura do poste}} \right).$$

5.4.2 Cálculo da altura do poste

A professora propôs aos alunos que calculassem a altura de um poste que fica na mesma rua da escola. Os alunos deveriam calcular a altura de dois modos diferentes: utilizar a semelhança de triângulos e a trigonometria no triângulo retângulo. Para a realização da atividade, os alunos deveriam estar organizados em grupos com os mesmos componentes do grupo que confeccionaram o teodolito. A professora acompanhou um grupo por vez para fazer as medidas necessárias para o cálculo da altura do poste, utilizando o teodolito e a trena. Foram necessárias duas aulas de 60 minutos cada para que todos os grupos fizessem as medições e, ao retornar para a sala de aula, organizassem os dados em uma folha de papel A4 junto com um modelo da realidade e os cálculos correspondentes.

Para calcular a altura do poste por semelhança de triângulos os alunos deveriam medir a sombra do poste, a sombra de um dos integrantes do grupo e a altura do mesmo, como mostra a figura 41.

Figura 41: Alunos fazendo medidas para o cálculo da altura do poste por semelhança de triângulos



Fonte: Autora, 2016

Foi permitido que os estudantes utilizassem calculadora. Os alunos prosseguiram com os cálculos como foi visto nas aulas exemplos que retratam a mesma situação. A figura a seguir mostra a resolução do problema pelo grupo formado pelos alunos B14, B22 e B27.

Figura 42: Cálculo da altura do poste por semelhança de triângulos

Cálculo da altura de um poste por semelhança de triângulos.

$$\frac{x}{1,65} = \frac{10,74}{3,65} = 1,65x = 3,65 \cdot 10,74$$

$$x = \frac{17,29}{1,65} = \boxed{10,47}$$

Fonte: Autora, 2016

Para o cálculo da altura do poste utilizando a trigonometria no triângulo retângulo, os alunos precisaram medir, com o teodolito, o ângulo entre a linha de visão pelo canudo ao topo do poste e o próprio poste, a distância do olho do observador ao chão e a distância do observador ao poste, como ilustra a figura 43.

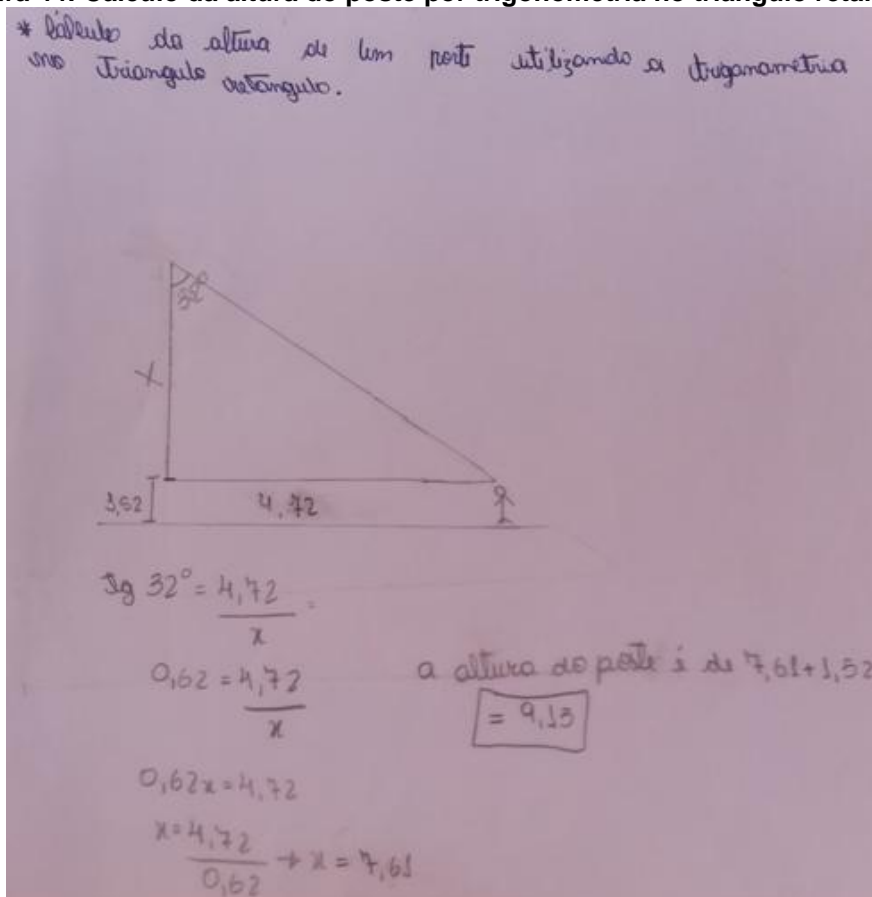
Figura 43: Alunos fazendo medidas para o cálculo da altura do poste por trigonometria no triângulo retângulo



Fonte: Autora, 2016

A figura 44 mostra o cálculo desta altura realizada pelos alunos A2, A14, A19 e A20.

Figura 44: Cálculo da altura do poste por trigonometria no triângulo retângulo



Fonte: Autora, 2016

A participação e interesse dos alunos em realizar tais atividades foi bastante significativa. Os resultados do cálculo da altura do poste por semelhança de triângulos variavam de até 1,2 metros e por trigonometria no triângulo retângulo tinham uma diferença de até 1,7 metros. A maior diferença dos resultados por trigonometria no triângulo retângulo se deve ao fato da baixa precisão da medição de ângulos do teodolito vertical. Por média, com as soluções os alunos deduziram que o poste tem aproximadamente 9,5 m.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino da Matemática evidencia-se passivo e demasiadamente teórico, tornando o aluno observador do seu conhecimento. A aprendizagem mediante a atividades em que o aluno participa de modo ativo na resolução de problemas reais, ou seja, problemas que são propostos de modo a aplicar conceitos de forma prática, ou na realização de atividades com modelos da realidade, transforma-o no construtor do seu conhecimento.

É importante ressaltar que esse caminho se abre em uma vereda que não está totalmente percorrida, havendo sempre novas possibilidades, com o objetivo de aperfeiçoar as ideias que foram postas em prática. Desse modo, as atividades expostas nessa produção, são estratégias produtivas de se fazer matemática, na qual o processo de aplicação de conceitos matemáticos conduzem o professor e alunos à formação de novas concepções a respeito do que seja Matemática e como executar esse conhecimento de modo a produzir fatores imprescindíveis à progressão de uma visão integral do conhecimento construído.

Os trabalhos propostos, tanto para o 9º ano do ensino fundamental, quanto para o 2º ano do ensino médio, despertou o interesse dos alunos de modo notório e estimulou a participação ativa dos alunos nas atividades. Essa experiência se mostrou eficiente no processo de aprendizagem e também foi capaz de transformar minhas práticas, enquanto professora, em estabelecer diálogos modeladores entre a realidade vivenciada e aquelas construídas na escola.

As alternativas metodológicas tratadas nesta dissertação mostraram o quanto este tipo de atividade é relevante no decurso da aprendizagem da Matemática, visto que fornece ao aluno uma maneira de compreendê-la como criação humana, gradativamente abstrata conforme os modelos representativos que sua sistematização formal se fazem necessários.

REFERÊNCIAS

- BOYER, C.B; **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.
- ESPARTEL, L. **Curso de Topografia**. 9 ed. Rio de Janeiro: Globo, 1987.
- EVES. H. **Introdução à História da Matemática**. 5 ed Campinas: Unicamp, 2011.
- LIMA, E. L. ; WAGNER, E. ; CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C.; **Temas e Problemas Elementares**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- McCORMAC, Jack C. **Topografia**. Rio de Janeiro: LTC, 2007.
- MELO, Alessandro de; URBANETZ, Sandra Terezinha. **Fundamentos de Didática**. 20 ed. Curitiba: IBPEX, 2008.
- MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas da aprendizagem**. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2009. 2 ed.
- MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- PORTANOVA, Ruth (org.). **Um currículo de matemática em movimento**. Rio Grande do Sul. EDIPUCRS, 2005.
- ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João B. P.. **Tópicos de História da Matemática**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- ROZENBERG, I. M.; **O Sistema Internacional de Unidades – SI**. 3. ed. São Paulo: Instituto Mauá de Tecnologia, 2006.
- SILVEIRA, Everaldo; MIOLA, Rudinei José. **Professor Pesquisador em Educação Matemática**. Curitiba: IBPEX, 2008.
- STEWART, James; **Cálculo**, volume 1. 5 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009
- STEWART, James; **Cálculo**, volume 2. 5 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009
- VEIGA, Luis; ZANETTI, Maria; FAGGION, Pedro. **Fundamentos de Topografia**, 2007. Disponível em http://www.cartografica.ufpr.br/docs/topo2/apos_topo.pdf.
- WACHILISKI, Marcelo. **Didática e Avaliação: Algumas Perspectivas da Educação Matemática**. Curitiba: IBPEX, 2007.
- ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

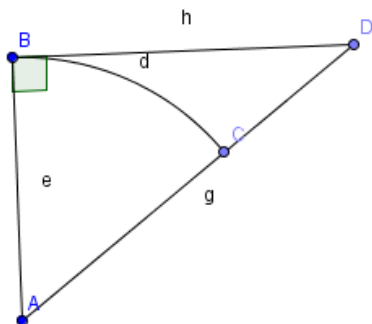
APÊNDICE A – Folha do aluno

Aluno: _____

Disciplina: Matemática Série: ____ Turma: ____ Data: __/__/__

Modelagem matemática sobre áreas e distâncias na agrimensura

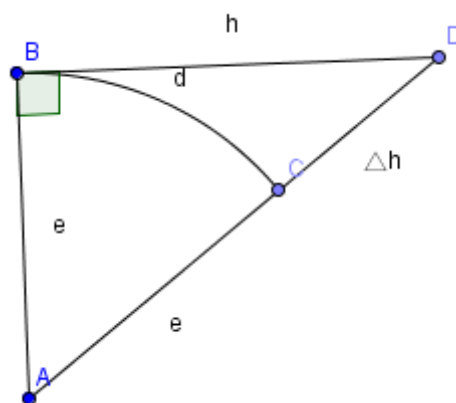
Nesta atividade verificaremos o efeito da curvatura na distância (planimetria) e a altimetria. Na figura a seguir tem-se que d é o valor de uma distância considerada sobre a terra esférica e h é a projeção desta distância sobre o plano topográfico.



Considerando o raio aproximado da terra $e = 6370$ km e as informações vistas em aula, preencha a tabela com os valores $\Delta S = h - d$ para um conjunto de distâncias.

d (km)	ΔS
1	
10	
25	
50	
70	

Analise agora o efeito da curvatura na altimetria $\Delta h = CD$ de acordo com a figura:



Preencha agora a tabela:

d	Δh
100m	
500m	
1 km	
10 km	
70 km	

Análise se o efeito da curvatura é maior na altimetria ou planimetria.

APÊNDICE B – Folha do aluno

Aluno: _____

Disciplina: Matemática Série: ____ Turma: ____ Data: __/__/__

Modelagem matemática sobre áreas e distâncias na agrimensura

Objetivos da aprendizagem: Calcular a área de polígonos irregulares por triangulação e resolução de problemas de modelagem matemática na topografia.

Problema 1:

Observe o projeto de uma casa a seguir:

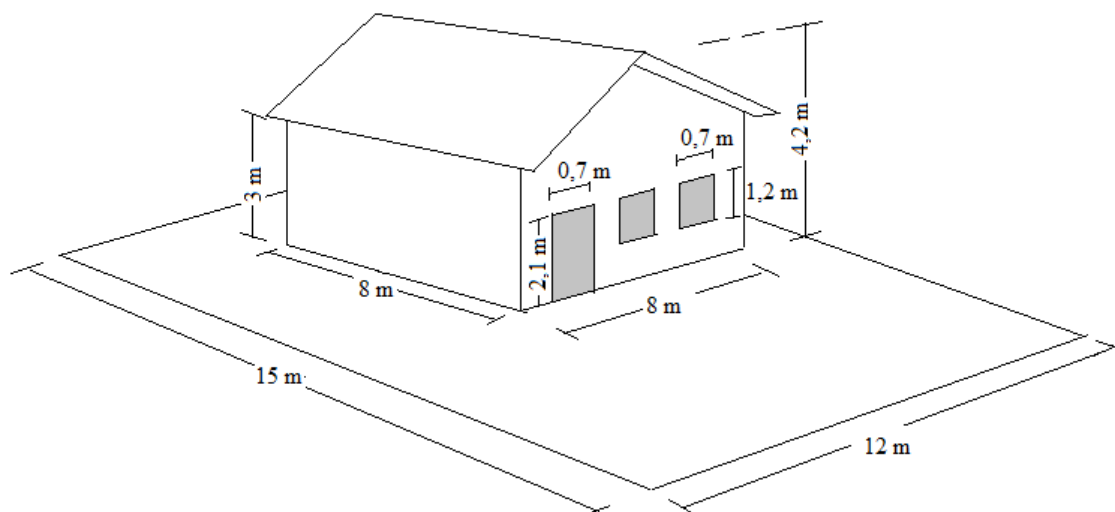


Figura 1: Perspectiva da casa

Calcule a área:

- Da casa;
- Da região externa à casa;
- Das portas;
- Das janelas;
- Da parte lateral externa da casa descontando a área da porta e das janelas;

Problema 2

Um fazendeiro comprou uma área, de formato irregular, para aumentar a sua plantação. Para verificar se a área que estava comprando era realmente o que estava no documento, contratou um **topógrafo** para realizar o projeto

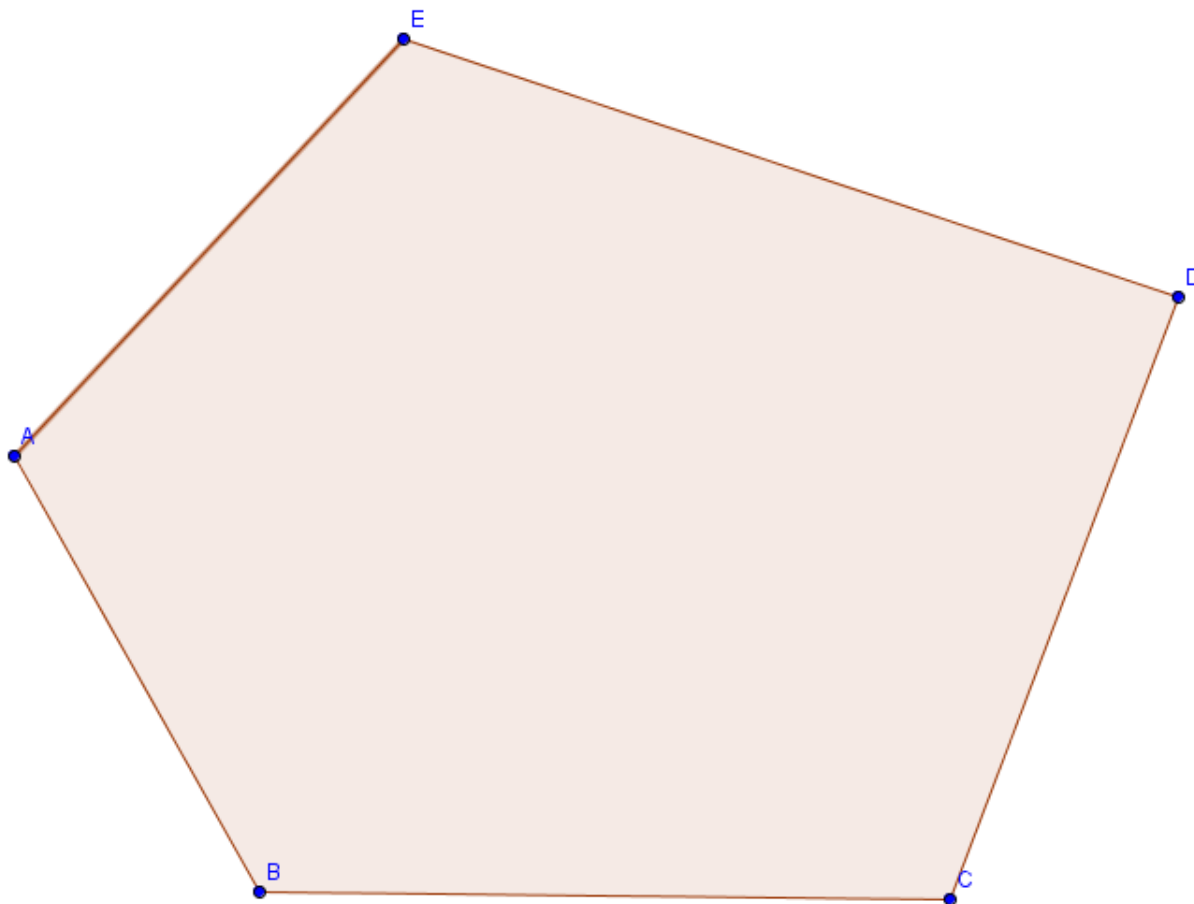


Figura 2

Sabendo que o desenho foi feito na escala 1:500 (1 centímetro no desenho equivale a 500 centímetros ou 5 metros na medida real), qual a área total, em hectares (1 hectare equivale a 10.000 metros quadrados), do terreno?

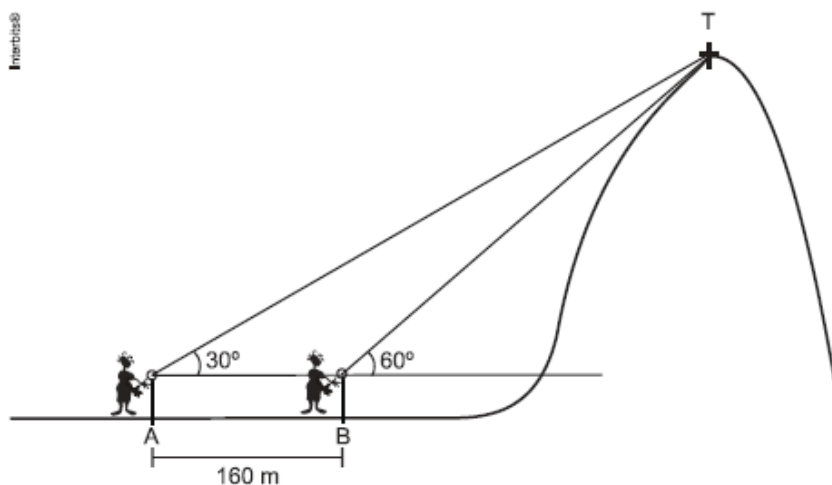
APÊNDICE C – Folha do aluno

Aluno: _____

Disciplina: Matemática Série: ____ Turma: ____ Data: ____/____/____

Modelagem matemática sobre áreas e distâncias na agrimensura

1. (Ufsj 2012) O teodolito é um instrumento de medida de ângulos bastante útil na topografia. Com ele, é possível determinar distâncias que não poderiam ser medidas diretamente. Para calcular a altura de um morro em relação a uma região plana no seu entorno, o topógrafo pode utilizar esse instrumento adotando o seguinte procedimento: situa o teodolito no ponto A e, mirando o ponto T no topo do morro, mede o ângulo de 30° com a horizontal; desloca o teodolito 160 metros em direção ao morro, colocando-o agora no ponto B, do qual, novamente mirando o ponto T, mede o ângulo de 60° com a horizontal.



Se a altura do teodolito é de 1,5 metros, é **CORRETO** afirmar que a altura do morro com relação à região plana à qual pertencem A e B é, em metros:

- a) $80\sqrt{3} + 1,5$
 b) $\frac{160\sqrt{3}}{3} + 1,5$
 c) $80\sqrt{3} - 1,5$
 d) $\frac{160\sqrt{3}}{3} - 1,5$
2. Para calcular a largura de um rio, um topógrafo observa uma árvore situada no ponto A e em seguida faz as medições dos ângulos \widehat{ABC} e \widehat{BCA} , que medem 88° e 66° , respectivamente, e o segmento BC que mede 48 m. Qual é a largura do rio?

