MAURICIO MINCHILLO

UM ARTEFATO PARA A CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM O ISOPOR E APLICAÇÕES

LAVRAS – MG

2013

MAURICIO MINCHILLO

UM ARTEFATO PARA A CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM O ISOPOR E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora

Dra. Rita De Cássia Dornelas Sodré Broche

LAVRAS - MG

2013

Ficha Catalográfica Elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca da UFLA

Minchillo, Mauricio.
Um artefato para a construção de sólidos geométricos com o isopor e aplicações / Mauricio Minchillo. – Lavras : UFLA, 2013.
104 p. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Lavras, 2013.
Orientador: Rita de Cássia Dornelas Sodré Broche.
Mestrado Profissional em Matemática.
Bibliografia.

1. Ensino de Geometria. 2. Material manipulável. 3. Máquina para cortar isopor. 4. Geometria no Ensino Médio. I. Universidade Federal de Lavras. II. Título.

CDD – 373.133

MAURICIO MINCHILLO

UM ARTEFATO PARA A CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM O ISOPOR E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Lavras, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, área de concentração em Matemática, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em 12 de Março de 2013.

Prof. Ricardo Edem Ferreira UFLA

Prof. Carlos Alberto Raposa da Cunha UFSJ

Dra. Rita de Cássia Dornelas Sodré Broche
Orientadora

LAVRAS - MG

2013

AGRADECIMENTOS

Aos Professores Doutores do quadro do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Federal de Lavras: Osnel Broche Cristo, Agnaldo José Ferrari, Ricardo Edem Ferreira, Mario Henrique Andrade Claudio, Fábio Dadam, Ana Claudia Pereira e Maria do Carmo Pacheco de Toledo Costa, pela disposição, apoio e incentivo que dispensaram ao nosso grupo.

À Professora Dra. Rita de Cássia Dornelas Sodré Broche, pela colaboração inestimável com críticas, sugestões e comentários que enriqueceram todas as etapas de elaboração desse trabalho.

À Rosália, Enrico, Evandro, Dedé, Ilza, Amado, Ronney e Roberto, minha família, pelo apoio irrestrito.

Aos colegas de curso, pelo companheirismo e amizade que tornaram menos árduas as nossas muitas horas de dedicação aos estudos.

Ao Instituto Federal Sul de Minas, pela compreensão que possibilitou uma total dedicação ao curso.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pela concessão de bolsa de estudos.

Em especial, ao amigo e colega Gilberto, parceiro constante, incansável e confiante.

“Conte-me e eu vou esquecer.

Mostre-me e eu vou lembrar.

Envolva-me e eu vou entender.”

Confúcio

RESUMO

Inicialmente procura-se, neste trabalho, apresentar a importância do uso de materiais e processos inovadores que têm por finalidade aumentar a capacidade do professor de Matemática para sensibilizar e motivar os seus alunos. A intenção principal, sempre que mudanças são propostas, é a de que a aquisição do conhecimento torne-se mais prazerosa e eficaz. Especialmente na área de Geometria, o uso de recursos e materiais tem demonstrado especial poder para atrair a atenção dos discentes em todos os níveis escolares. A utilização de materiais manipuláveis, nessa linha de raciocínio, facilita o aprendizado e torna-o mais ameno. Elabora-se um breve histórico de mudanças ocorridas nas formas de enxergar a transmissão do conhecimento matemático no Ensino Básico e as detecções da necessidade de mudanças ocorridas no Brasil e no mundo. Destacam-se mudanças no perfil dos alunos ingressantes nos Institutos Federais, a partir da década de 1970. É constatada a importância dos recursos audiovisuais e computacionais no ensino e, a despeito disso, são apresentadas propostas de utilização de materiais e equipamentos simples a serem utilizados em atividades práticas em sala e ou nos laboratórios didáticos de Matemática. Destaca-se o uso de uma máquina para cortar isopor que fabrica os principais sólidos geométricos estudados no Ensino Médio. Demonstra-se a forma de construí-la. Apresentam-se, ainda, diversos exemplos de aplicação do equipamento e propostas atividades de seu uso ligadas a conteúdos de Matemática no Ensino Médio. Encerra-se o trabalho com um elenco de expectativas relacionadas ao futuro da transmissão dos conhecimentos da área de Geometria e com o levantamento dos resultados esperados com a aplicação das atividades propostas.

Palavras-chave: Sólidos geométricos. Material manipulável. Ensino de geometria.

ABSTRACT

Initially, the objective of this work was to show the importance of the use of materials and innovative processes which aims at increasing Math teachers' capacity of sensitizing and motivating their students. The main intention, every time changes are proposed, is that the acquisition of knowledge becomes pleasurable and effective. Especially in the Geometry area, the use of resources and materials has demonstrated special power in attracting the attention of students in all schooling levels. The use of manipulable materials, in this line of reasoning, facilitates apprenticeship and renders it more pleasant. A brief record of changes occurred in the forms of recognizing the transmission of mathematical knowledge in primary education the detection of the need for change occurring in Brazil and in the world. The changes in the profiles of students entering Federal Institutes, from the 1970's decade, are highlighted. It is important to use audiovisual and computer resources in teaching and, for this, propositions on using materials and simple equipments in practices in class or in Math laboratories are presented. The use of a machine to cut foam, which fabricates the main geometric solids studied in High School, is highlighted. The manner in which to build it is demonstrated. We also show many examples of the application of the equipment and activity propositions connected to High School Math content. We close this work with a cast of expectations related to the future of knowledge transmission in the Geometry area and with the survey of the expected results with the application of the proposed activities.

Keywords: Geometric solids. Manipulable material. Geometry teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE DESENHOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Observa-se, constantemente, uma grande valorização dos materiais pedagógicos na área metodológica da Matemática, especialmente na Geometria. Nos eventos brasileiros ligados à Educação Matemática de que o autor participou, observou-se que as atividades que discutem questões relativas a esse tema são as mais procuradas. Os professores se entusiasmam ao se depararem com um novo recurso para o ensino.

Os motivos apontados para a utilização de materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem são, em linhas gerais, que eles servem para motivar, facilitar, mediar, fixar e atrair, entre outras tantas funções. (Fiorentini e MIORIM, 1990; LORENZATO, 2006).

São muitas as dificuldades encontradas por alunos e professores em relação ao ensino-aprendizagem na área específica da Geometria. Para ilustrar, pesquisa realizada por Acylena Coelho Costa – UEPA e outras, apresentada no X Encontro Gaúcho de Educação Matemática (COSTA, 2009) e que objetivava verificar se o ensino da Geometria estava de acordo com que é proposto pelos PCN's, verificou que existiam diversas dificuldades, nas duas escolas investigadas, uma federal e outra particular. Problemas foram detectados com relação à representação geométrica, quanto à manipulação da relação de Euler e na identificação de elementos das figuras espaciais, dentre outros.

Diversos outros trabalhos (RODRIGUES; GAZIRE, 2012) levam à perspectiva de que os jogos e os materiais manipuláveis são relevantes ao ensino, não como uma fórmula mágica, mas como uma metodologia diferenciada para torná-lo mais significativo para alunos e para professores, em especial no Ensino Básico. Entretanto, apesar da disseminação e da fascinação pelo uso de materiais entre os profissionais das ciências exatas, Nacarato (2005) alerta que há pouca discussão e uma quantidade pequena de pesquisas teóricas a respeito do assunto. Assim, com a falta de subsídios para a problematização das questões que envolvem os materiais didáticos, a reflexão sobre o tema é severamente prejudicada.

Observa-se que o ato de aprender é individual e interno a cada sujeito na construção do seu conhecimento. Alguns aprendem de modo mais autônomo enquanto outros precisam de suporte e do incentivo externo para que se sintam motivados para o estudo. Nos dois casos, quando existe curiosidade, interesse ou estratégias de aprendizagem mais envolventes, todo o processo tende a se tornar mais eficaz. Diante desse fato, professores buscam, constantemente, propostas pedagógicas diferenciadas. Procuram envolver os estudantes, atualizar em relação às suas práticas e criar e experimentar estratégias mais dinâmicas com o intuito de alcançar maior êxito nos processos envolvidos na aprendizagem. Assim a procura por novos materiais torna-se um assunto sempre atual e natural.

Deve-se salientar, também, que o uso dos materiais didáticos não é recente, especialmente na área de Geometria. Essa prática tem uma história e é certo que, conforme Fiorentini e Miorim (1990, p. 2), “por trás de cada material, esconde-se uma visão de educação, de matemática, de homem e de mundo; ou seja, subjacente ao material, existe uma proposta pedagógica que o justifica”.

2 UM HISTÓRICO SOBRE MUDANÇAS NA ÁREA DO ENSINO GEOMÉTRICO

Durante a década de 1950, na Europa e nos Estados Unidos, surgiram numerosas iniciativas de naturezas distintas e com propósitos variados, cuja intenção principal era modificar os currículos de Matemática. A intenção era focada na diminuição da defasagem entre os primeiros anos de estudo da disciplina e o nível estudado nas universidades (Guimarães, 2007). Em 1959, tal interesse culminou com a decisão da Organização Europeia de Cooperação Econômica de realizar uma pesquisa sobre a situação do ensino dessa disciplina nos países membros e, com base nos resultados desse inquérito, organizar trabalhos que promovessem uma reforma generalizada na transmissão dos conhecimentos da Matemática de então. Reunidos na França, cinquenta representantes de dezoito países discutiram, no Seminário de Royaumont, os novos rumos da matemática escolar e, em especial, a base curricular mais apropriada à formação científica da população estudantil entre 11 e 18 anos. O trabalho teve grande influência no processo reformador da Matemática, a nível internacional. Discussões sobre o ensino secundário da área firmaram-se em torno da existência de três finalidades educativas fundamentais: a Matemática como método de ensino liberal, um ***meio de formar o espírito***; como ***base para a vida e para o trabalho***, um instrumento necessário a todos; e como propedêutica, uma ***preparação para os estudos universitários***. (OECE, 1961a, p. 64). No ano seguinte, em 1960, em Dubrovnik, na Croácia, foi elaborado um programa voltado para o Ensino Secundário intitulado *Um Programa Moderno de Matemática para o Ensino Secundário* baseado nas discussões de Royaumont. Representava o resultado de diversas sessões de trabalhos com vistas à modernização da Geometria e da Matemática como um todo. O programa apresentou "sugestões destinadas a estimular a reflexão sobre a natureza da Matemática que convém ensinar nos estabelecimentos secundários e sobre a maneira como esse ensino deve ser ministrado" (OECE, 1961b. p. 3). Assim, o ideário da Matemática Moderna ficou conhecido por traços como a ênfase nas estruturas matemáticas, na linguagem dos conjuntos, no rigor e na precisão do uso dessa linguagem, na unicidade da Matemática, na abordagem dedutiva e axiomática, entre outros aspectos (FIORENTINI, 1995; GUIMARÃES, 2007; SOARES, 2001). Além disso, existia uma preocupação, por parte dos envolvidos no processo, quanto a urgente necessidade de alterações, também, dos métodos empregados no ensino da Matemática. Desenvolver e usar materiais durante as aulas foi tema de discussão em Royaumont e também em Dubrovnik. Uma abordagem intuitiva da Matemática, ligada à observação, à experimentação e à manipulação de materiais, foi considerada como especialmente aplicável aos últimos anos do Ensino Básico. No caso da Geometria, o evento de Royaumont recomendava que o ensino deveria começar com trabalhos que envolvessem objetos manipuláveis. Então, as primeiras recomendações levavam a um estudo baseado na observação e na manipulação de objetos e materiais diversos. Esse processo visava contribuir para o alcance de um maior grau de abstração por parte do aluno. Guimarães (2007) destaca ainda que o trabalho de Piaget sobre as estruturas mentais esteve fortemente presente e abriu espaço para se tratar a Matemática de uma forma mais intuitiva, por meio do uso de materiais didáticos.

No Brasil, a década de 1950 seguiu os movimentos mundiais e foi marcada por inquietações relacionadas ao ensino da Matemática em nosso país. Conforme Shaw (2010), o ensino de Ciências e Matemática sofreu diversas transformações, especialmente nas décadas de 1950, 1960 e 1970. Diversos acontecimentos foram responsáveis pelo impulso às transformações a nível nacional, tais como: o processo de industrialização no Brasil, as repercussões da Guerra Fria e as Leis de Diretrizes e Bases da Educação do ano de 1961 e 1971.

As primeiras propostas concretas para a modernização no Brasil aconteceram em São Paulo, por meio do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, fundado em 1961. Esse grupo contribuiu decisivamente para a difusão do conjunto de ideias propostas. Oferecia cursos, treinamentos de professores e edição de livros-textos (FIORENTINI, 1995). À época, considerou-se importante verificar, de maneira mais específica, as características teórico-metodológicas e considerar, em especial, o desenvolvimento de materiais didáticos para o ensino de Geometria. É fato que as diretrizes da Matemática Moderna primavam pelo rigor, pelo formalismo, por uma Matemática abstrata e axiomática. Entretanto, havia uma indicação de que o uso de materiais variados nas atividades viria contribuir para o crescimento do espírito investigativo e científico e isso levaria a um caminhar que tendesse a aproximar a Matemática do campo das Ciências. Nas últimas décadas devemos destacar o desenvolvimento da Informática e das suas aplicações em todo o mundo. Suas pesquisas propiciaram a criação de ferramentas digitais poderosas com uso pedagógico. Entre os softwares educacionais desenvolvidos exclusivamente para o ambiente escolar e que obtiveram grande sucesso temos o Logo, o Poly, o Cabri e o Geogebra. Outros, como o Google Sketchup, produzidos para fins diversos, foram sendo adaptados e incorporados à rotina do nosso Ensino Médio. Nos dias atuais, há vários eventos ao redor do mundo que reúnem autores e executores de experiências realizadas em sala de aula e que objetivam a troca de informações e a atualização no campo da informática ligada ao ensino. Novidades e novos programas e recursos surgem a cada dia e disputam espaço com atividades práticas e com as aulas expositivas. Há, portanto, uma necessidade constante de atualização e de se repensar os materiais e métodos no processo educacional cotidiano.

3 NOS INSTITUTOS FEDERAIS

Especialmente nas Escolas Técnicas Federais, a matemática e sua relação com o desenvolvimento técnico-científico e a formação para o trabalho constituem uma temática fundamental para a organização curricular. Atualmente denominadas de Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, essas escolas formam a Rede Federal de Educação Tecnológica cuja criação data de 1909. Eram, à época de sua criação, escolas de aprendizes e artífices destinadas a adolescentes e jovens das camadas mais populares. Visavam especificamente à formação para o trabalho. Mas, a partir da década de setenta do século passado, essas escolas passaram a ser reconhecidas pela qualidade do ensino e, por serem públicas e gratuitas, atraíram os adolescentes e jovens de segmentos sociais mais elitizados. Nas antigas Escolas Agrícolas dessa rede, em que filhos homens de proprietários rurais, na prática, tinham quase total exclusividade de acesso, mais recentemente houve a diversificação de cursos e a inserção de alunas no corpo discente. A partir de então, seu currículo passou a não ser restrito à preparação profissional e incluiu uma sólida preparação para o ingresso na Universidade (PINTO, 2006). Na década de oitenta, essa descaracterização incomodava professores que percebiam ter tornado-se secundária a função de formar o jovem para o trabalho. Motivados pela democratização do país, professores de matemática de diversas Instituições Federais de Ensino, nos diferentes Estados da Federação iniciaram a organização e realização de encontros anuais com o intuito de elaborar propostas para a melhoria do ensino da Matemática. Desejavam a troca de experiências e a reflexão sobre questões pertinentes às especificidades do ensino profissional. Organizadas em formato de seminários, cada uma dessas reuniões denominava-se Encontro Nacional de Professores de Matemática das Escolas Técnicas Federais e Cefet’s, também conhecidos por ENCONAMs. É possível enumerar treze encontros realizados entre os anos de

1980 e 1994. Podemos destacar que, nesses encontros, a temática das discussões girava em torno das questões relativas aos conteúdos e metodologias de ensino de Matemática para a educação profissional. Uma preocupação constante era a de que os alunos das Escolas Técnicas não estariam recebendo uma formação profissional técnica de qualidade se o ensino ministrado seguisse a concepção clássica e acadêmica hegemonia das escolas regulares. Esse argumento sensibilizou os professores que, nos encontros, aprovaram proposta de elaboração de textos de matemática para aplicação específica no ensino profissionalizante dessas instituições federais. Mais recentemente, por ocasião da criação dos Institutos Federais, houve maior diversificação de cursos, inclusive superiores, nas mais diversas áreas. Isso motiva e torna pertinente a reflexão constante sobre os conteúdos abordados em cada caso e os materiais e métodos por meio dos quais esse conteúdo é trabalhado nessas instituições de ensino.

Devido à heterogeneidade dos alunos dos Institutos, no primeiro ano do Ensino Médio faz-se uma revisão geral dos conteúdos matemáticos abordados nas séries anteriores. Além disso, atendendo às necessidades de cada curso, os cronogramas dos diversos assuntos dessa fase escolar sofrem alterações para atender às necessidades mais prementes das áreas técnicas dessas escolas. Dessa forma, é comum que a Geometria Espacial euclidiana seja abordada em um dos bimestres letivos do terceiro ano na maioria dos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia. Como pré-requisito para o estudo de poliedros convexos, é necessário que o aluno tenha compreendido os princípios básicos da Geometria plana. É feita uma rápida revisão sobre os conceitos intuitivos de ponto, reta e plano e são estudados vários postulados e teoremas. A partir daí, os estudos se concentram nos sólidos geométricos mais simples, seus elementos, cortes, áreas e volumes.

No IFSuldeMinas – Campus Muzambinho, especificamente, esses sólidos são analisados por meio de aulas convencionais e, esporadicamente, exposição de vídeos e outros recursos. Conhecidas as definições, os componentes, áreas e volumes de prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas e troncos de cone e de pirâmide, é possível a realização de uma aula prática. A proposta passa pela construção e estudo, por meio do corte de peças manipuláveis em isopor, da maioria desses sólidos. Os seus elementos podem, então, por meio da fabricação e manipulação de cada peça pelo próprio aluno, ser visualizados com riqueza de detalhes. Cortes realizados em cada poliedro construído possibilitam a identificação das suas partes, de seus elementos, e melhoram significativamente a capacidade de visualização tridimensional do aprendiz. Além disso, é possível a visualização e um melhor entendimento com relação às cônicas obtidas em cortes realizados em cones e cilindros. Entre os diversos assuntos que recebem ilustração com a possibilidade de corte e manipulação dos sólidos citados destaca-se, ainda, a Relação de Euler entre vértices, arestas e faces dos poliedros. Com o intuito de instigar a curiosidade dos adolescentes e motivar o aprendizado, materiais diversos e algumas engenhocas podem ser utilizados na confecção dessas peças, dos sólidos geométricos. Entre os tantos materiais comumente encontrados em oficinas e laboratórios de Matemática encontram-se tabuas, pregos, elásticos, fios coloridos, latas, tubos, floral e isopor. Mecanismos como balanças, pequenos tornos e modelos de sólidos em variados materiais geralmente são apresentados em aulas e trabalhos que envolvem a Geometria.

4 OBJETIVOS

Por meio de material manipulável e do uso de equipamentos que podem ser fabricados na própria escola, com a participação dos estudantes, pretende-se inovar as formas com que os sólidos geométricos são estudados e abordar, com a construção e a secção desses sólidos, os principais conceitos e os seus elementos fundamentais.

Segundo levantamento informal realizado pelo autor junto à maioria das instituições de ensino das cidades de Guaranésia, Guaxupé e Muzambinho chega-se à conclusão de que praticamente nenhum material manipulável é utilizado durante as aulas de Matemática nessas cidades. Na maioria das casas de ensino contatadas, os professores não souberam aferir se existe algum recurso manipulável. Apenas alguns vídeos estão à disposição e, em alguns casos, nem são usados com os alunos.

Diferentemente da tendência nos últimos anos em que as aulas expositivas vêm sendo gradualmente substituídas pelo uso dos recursos computacionais, o presente trabalho sugere a utilização de materiais concretos. Ainda, por meio das atividades propostas, espera-se melhorar a compreensão da interligação entre conteúdos que, normalmente, são estudados separadamente nas aulas de Matemática.

5 PÚBLICO ALVO

Devido aos conceitos abordados, a proposta enquadra-se para aplicação aos alunos dos últimos dois anos do ensino médio, nas escolas públicas. A necessidade da apreensão prévia de fundamentação teórica ligada à Geometria Plana e a outras áreas da Matemática justifica a preferência de aplicação das atividades aqui propostas nessas duas séries.

Em especial, nos institutos Federais de Educação Científica e Tecnológica, a indicação da terceira série do segundo grau é mais conveniente em virtude das peculiaridades do ensino nessas Instituições.

6 PRÉ-REQUISITOS

Entende-se que os estudantes devam estar familiarizados com os conceitos da Geometria Plana e da Trigonometria. A aplicação das atividades, preferencialmente, deverá se dar em sintonia com os estudos dos conceitos fundamentais da Geometria Espacial Euclidiana, visto que têm relação direta com os assuntos a ela relacionados.

Para que as atividades práticas propiciem uma boa fixação dos conteúdos aqui envolvidos, é primordial que os principais conceitos relacionados à Geometria Plana estejam claramente assimilados pelos alunos.

7 MATERIAIS E TECNOLOGIAS

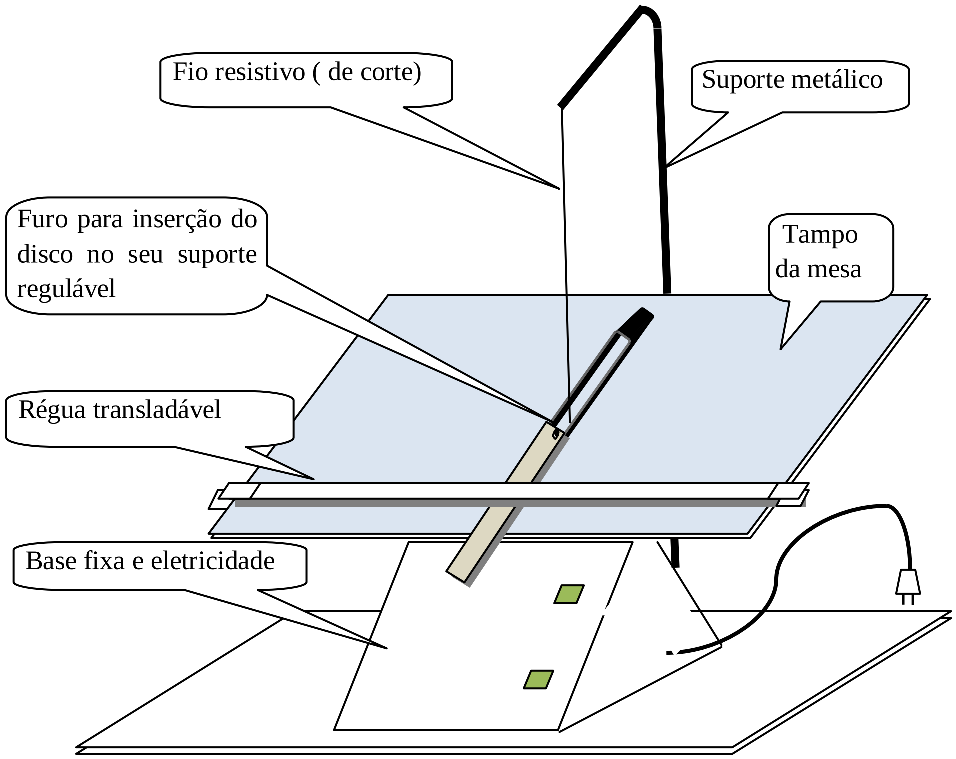
Vê-se, por meio da analise dos trabalhos citados pelo autor, que os laboratórios e oficinas de Matemática desempenham um papel importante na facilitação da transmissão dos conteúdos nos mais diversos níveis. Nossa proposta de atividades requer uma sala previamente preparada com quadro e pincéis, além de mobiliário que possibilite a distribuição dos alunos em grupos de quatro ou cinco. Sólidos em materiais como madeira e isopor também devem estar à disposição, além de peças grossas de isopor e uma máquina para realizar cortes que pode, inclusive, ser construída pelos próprios alunos.

7.1 Uma máquina de cortar isopor

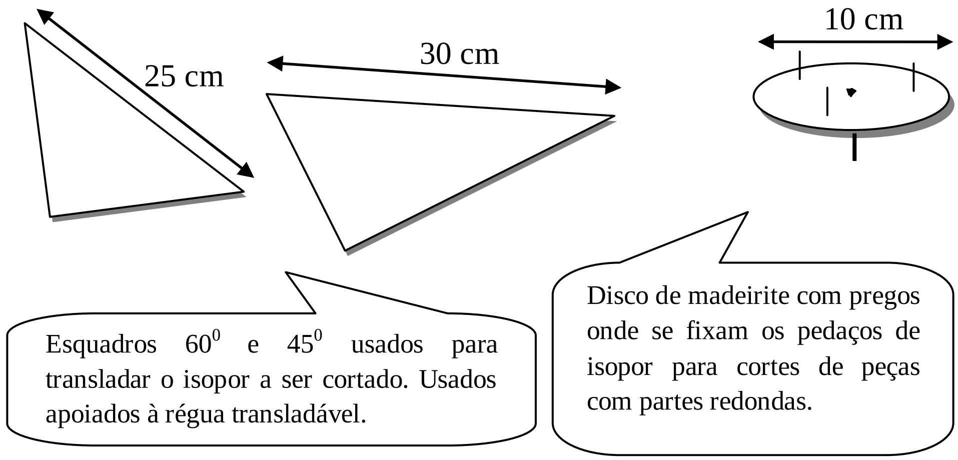
Para a realização das práticas aqui propostas é utilizado um equipamento para a confecção dos sólidos geométricos estudados em nossas escolas públicas. Esse aparelho, representado na Figura 1 e no Desenho 1 que se seguem, sua montagem e funcionamento, passam a ser explicados a seguir.

Com regulagens e movimentos, o equipamento demonstra versatilidade na construção de prismas, pirâmides, cilindros, cones e troncos, entre outros sólidos.

Figura 1   Máquina para cortar isopor



Desenho 1 Máquina para produzir sólidos em isopor



Desenho 2 Peças auxiliares da máquina

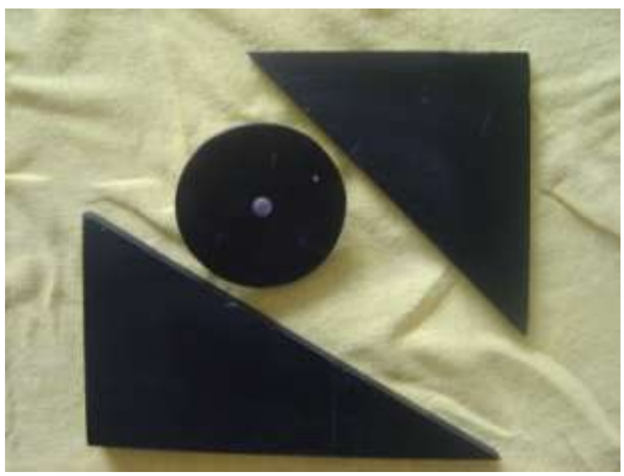


Figura 2 Esquadros e disco. Peças auxiliares da máquina

Neste trabalho, nas propostas que se seguem de atividades aplicáveis aos alunos do Ensino Médio, utiliza-se em especial a mesa de corte do Desenho 7 que é capaz de gerar e seccionar os principais sólidos. O aparelho é utilizado no desbaste do isopor ou polietileno expandido e é, basicamente, uma tábua móvel com um fio que, ao ser aquecido, promove cortes na peça.

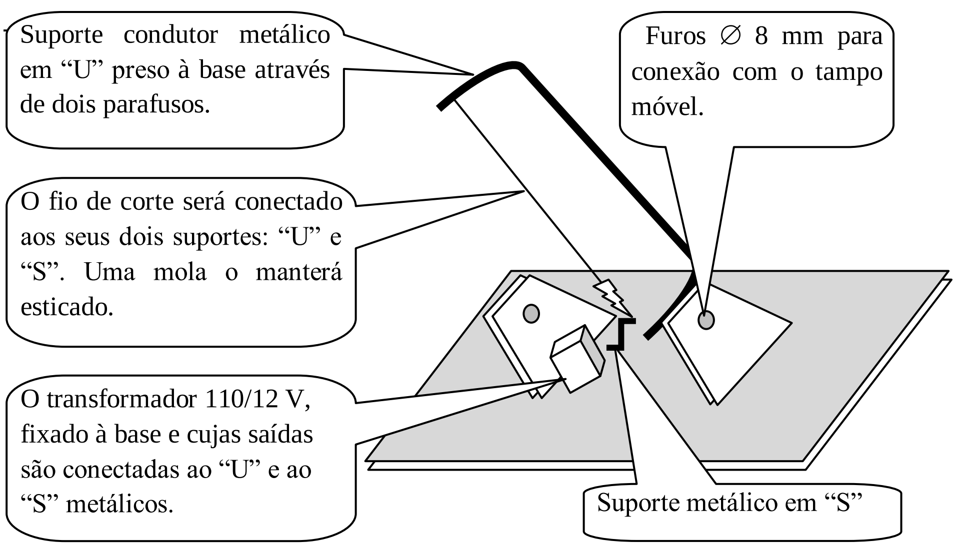
O equipamento conta com um tampo de mesa que pode ser deslocado e cujos movimentos assemelham-se aos das pranchetas de desenho. Possui uma régua horizontal fixável que pode correr em um único sentido ao longo da tabua principal. Em madeirite, além dessas peças e da base fixa, existem dois esquadros e uma peça redonda (Desenho 8), que servem para deslocar pedaços de isopor com relação ao fio resistivo que atravessa a mesa verticalmente. Há um suporte em barra metálica que fixa o fio e serve como condutor elétrico para gerar o aquecimento, além de manter o fio de corte fixo em relação ao centro da mesa. Uma ripa de madeira corre dentro de uma fenda da mesa e serve para a inserção do disco para rotação de peças.

Diversas fotografias anexadas ao final desse trabalho possibilitam uma visão geral da máquina e de peças produzidas por ela.

7.2 Como construir o aparelho

A maior parte das peças necessárias à construção da mesa é em madeira ou madeirite. Para a sua montagem serão consideradas duas partes. A primeira, chamada aqui de base, é a parte fixa do equipamento. Uma segunda parte, que será descrita a seguir, é o tampo móvel do aparelho.

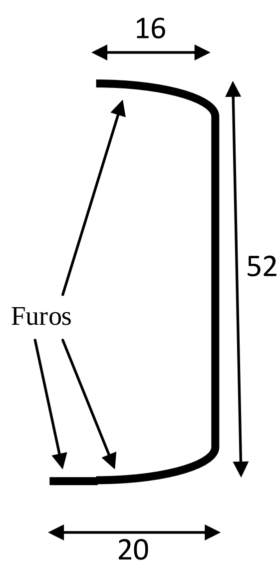
- A peça inferior, em preto, é uma tábua com 1 cm de espessura e medidas 35 x 32 cm onde são fixados, com pregos, os dois suportes trapezoidais que sustentarão a parte móvel. São fixados, também nessa tábua inferior e por meio de parafusos (0,4 x 2,0 cm), o suporte do fio em "U", o suporte em "S" e o transformador elétrico.



Desenho 3 A base da máquina

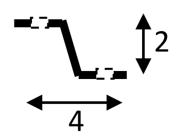
No desenho 3 temos os seguintes detalhes:

a) A tábua inferior, em madeira maciça ou, como nesse caso, em madeirite, tem medidas de 35 x 32 x 1 cm. Nela serão fixadas as duas peças trapezoidais, os suportes metálicos “U” e “S” e o transformador;
b) O transformador, de 110/12 Volts, pode ser adquirido (R$10,00) em oficina de reparos de equipamentos eletrônicos e é facilmente encontrado, também, em lojas do ramo. Foram testados diversos modelos com desempenho semelhante;
c) O suporte metálico em “U”, além de fixar a extremidade superior do fio de corte, servirá como condutor elétrico. Pode ser uma barra de metalon ou de ferro chato, de comprimento total de 90 cm. No nosso caso, conforme as medidas em cm do desenho, uma barra com 1,2 x 0,3 x 90 cm foi dobrada em forma de “U”.



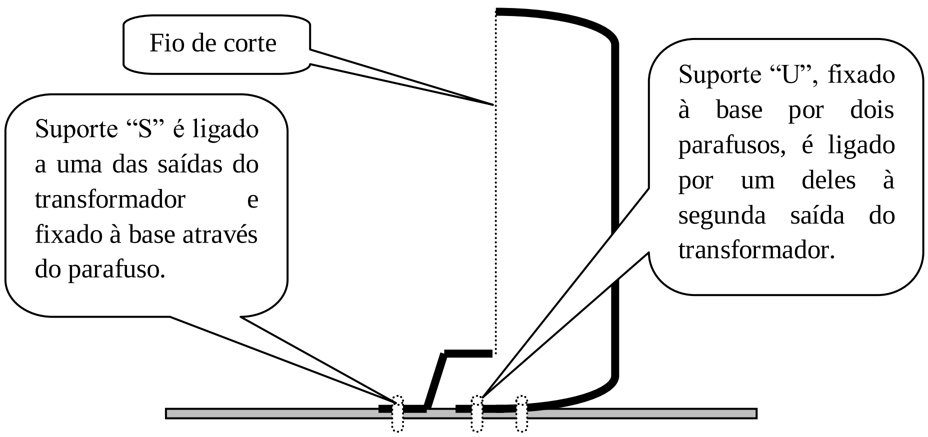
Desenho 4 O suporte em formato de “U”

a) Os furos da parte inferior prendem o “U” na base de madeira por meio de parafusos de 2,5 x 0,4 cm. Em um desses dois parafusos é conectada uma das saídas do transformador elétrico. O furo superior tem a mesma medida e se destina á fixação de uma das pontas do fio de corte;
b) O suporte em “S”, também metálico, será a conexão da segunda saída do transformador com a ponta inferior do fio de corte.



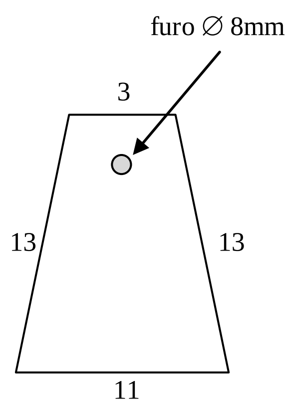
Desenho 5 Suporte em formato de “S”

Pode ser qualquer chapa de metal com medida aproximada de 6 cm dobrada conforme ilustração. Deve ter dois furos de 0,5 cm de diâmetro nas extremidades e as medidas aproximadas ás do desenho 5. O furo inferior se destina à fixação do “S” na base. O superior suporta a conexão da saída do transformador com o fio de corte do aparelho.



Desenho 6 Fixação dos suportes do fio de corte na tábua inferior do aparelho

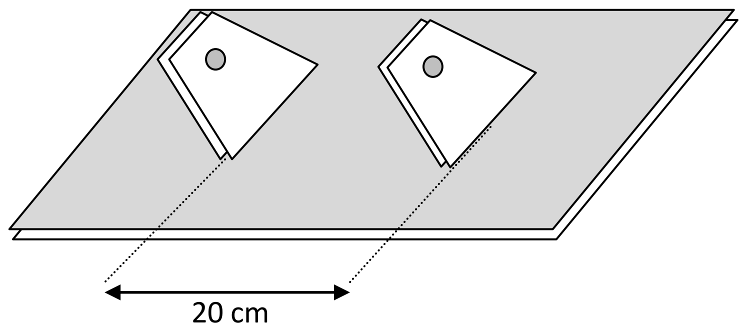
Os dois suportes trapezoidais fixados na base são de madeira maciça com espessura de 2,5 cm e tem as medidas, em centímetros, conforme o desenho.



Desenho 7 Esquema para construção dos dois suportes de madeira que se conectam, por meio dos furos, à parte superior da mesa

O furo mostrado no desenho 13, com diâmetro de 8 mm e centralizado horizontalmente, fica a 2 cm da parte superior da peça.

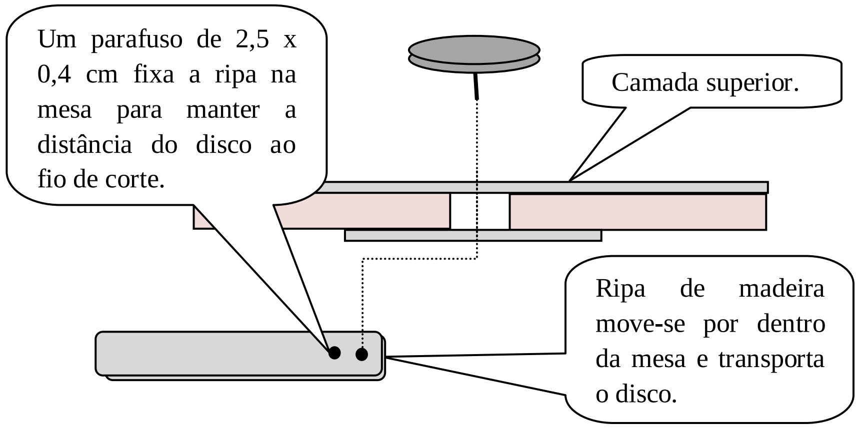
Fixadas na base com pregos, são instaladas de forma simétrica e devem manter distância externa total de 20 cm.



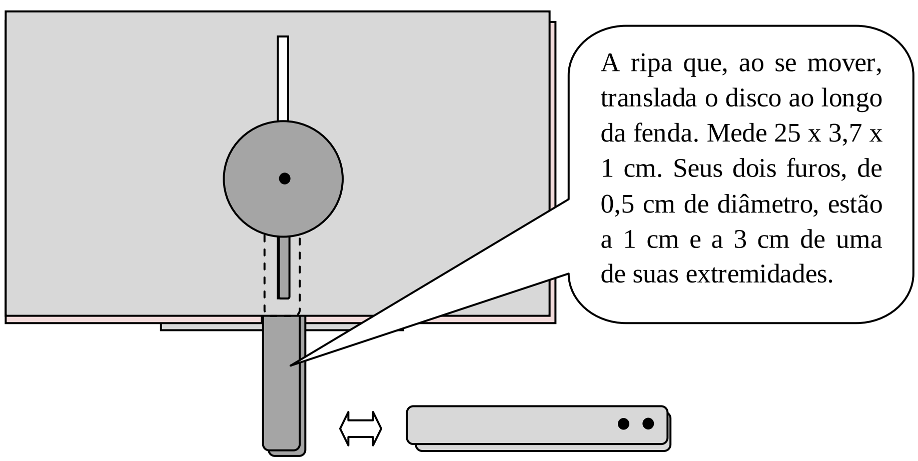
Desenho 8 Fixação dos suportes trapezoidais à base e distância externa entre eles

A parte móvel do aparelho, o *tampo* da mesa, se unirá à base detalhada no desenho acima por meio de parafusos inseridos nos dois furos das peças trapezoidais em madeira. Os parafusos, de medidas 7 x 0,7 cm, devem ter porcas do tipo "borboleta" para facilitar as regulagens requeridas nos processos variados de corte.

Na construção dessa segunda parte, a peça móvel e tampo da mesa, foram utilizadas três camadas sobrepostas e coladas. A superior tem 3 mm de espessura em madeira compensada e um rasgo centralizado com medidas 27 x 1 cm. Na segunda camada, cuja espessura é de 1 cm, duas tábuas mantêm distância de 4 cm entre si. A camada inferior, menor do que as outras, é do mesmo material da primeira, também com 3 mm de espessura. Conforme o desenho, a união das peças mantém um espaço central por onde se movimentará a ripa de madeira da figura que se segue.



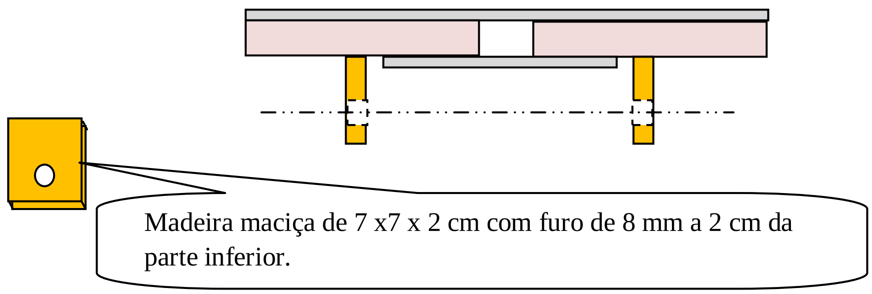
Desenho 9 A construção do tampo com vão por onde corre a ripa de inserção do disco



Desenho 10 Vista superior do tampo

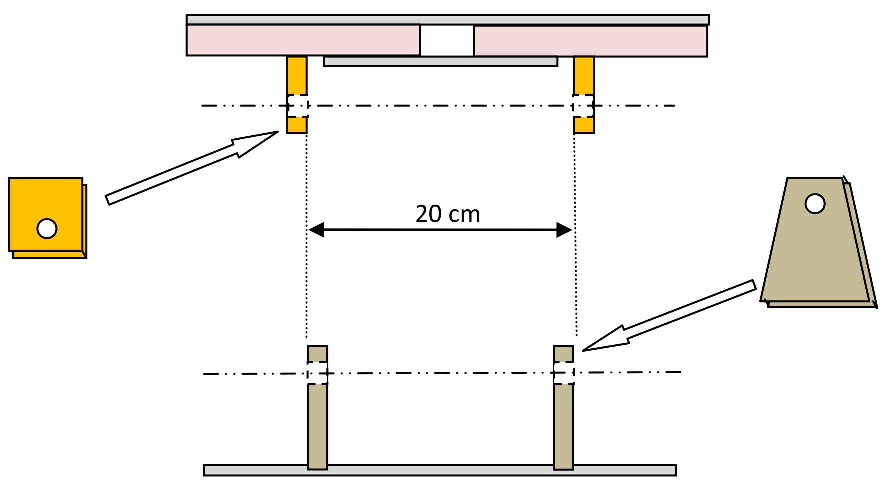
Assim, o centro do tampo terá um espaço de 32 x 4 x 1 cm por onde correrá a ripa responsável pelo suporte da peça redonda usada na confecção de cones e cilindros. O parafuso que prende a ripa, com porca borboleta, mantém a distância desejada até o fio de corte.

Sob o tampo são fixadas duas peças de madeira de 7 x 7 x 2 cm que deverão manter uma distância interna entre si de 20 cm, conforme desenho abaixo. Um furo de 8 mm de diâmetro está a 2 cm da parte inferior de cada uma delas e será transpassado por um parafuso de 7 x 0,7 cm com porca borboleta.



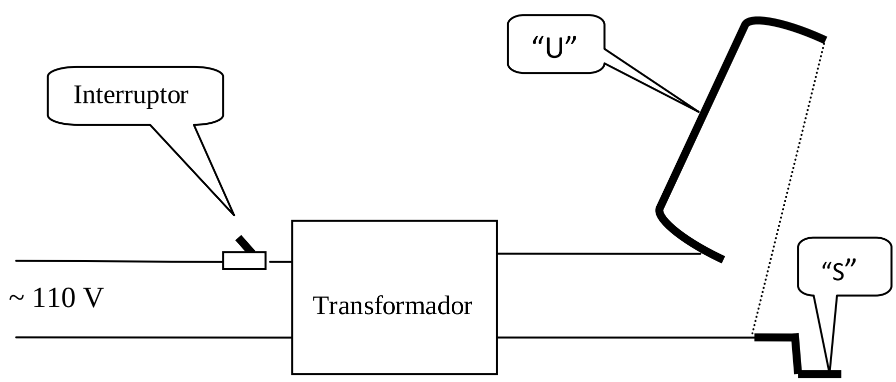
Desenho 11 Suportes fixados ao tampo e que se conectarão á base por meio de dois

As duas partes do aparelho serão unidas pelos parafusos que permitirão o movimento do tampo em relação à base.



Desenho 12 Esquema de montagem com a união das duas partes

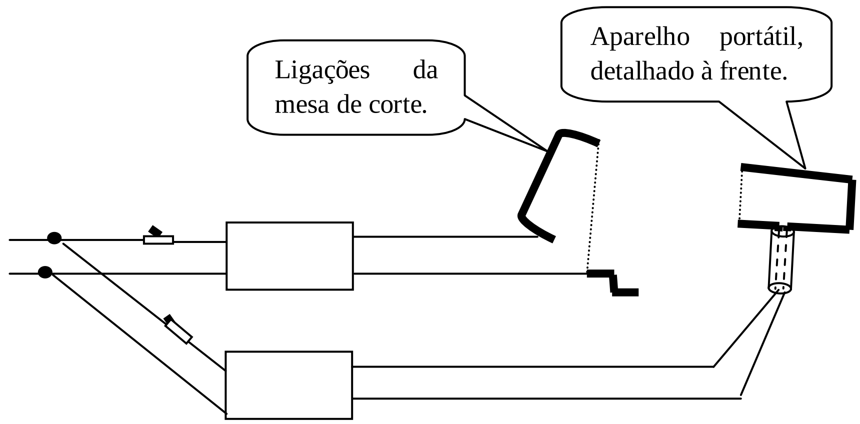
O circuito elétrico do aparelho, bastante simples, pode ser descrito conforme o esquema a seguir:



Desenho 13 Esquema do circuito elétrico do aparelho

Um cabo de 2 x 1,5 mm (NBR 13249) liga a entrada do aparelho a uma tomada comum (110 ou 127 V).

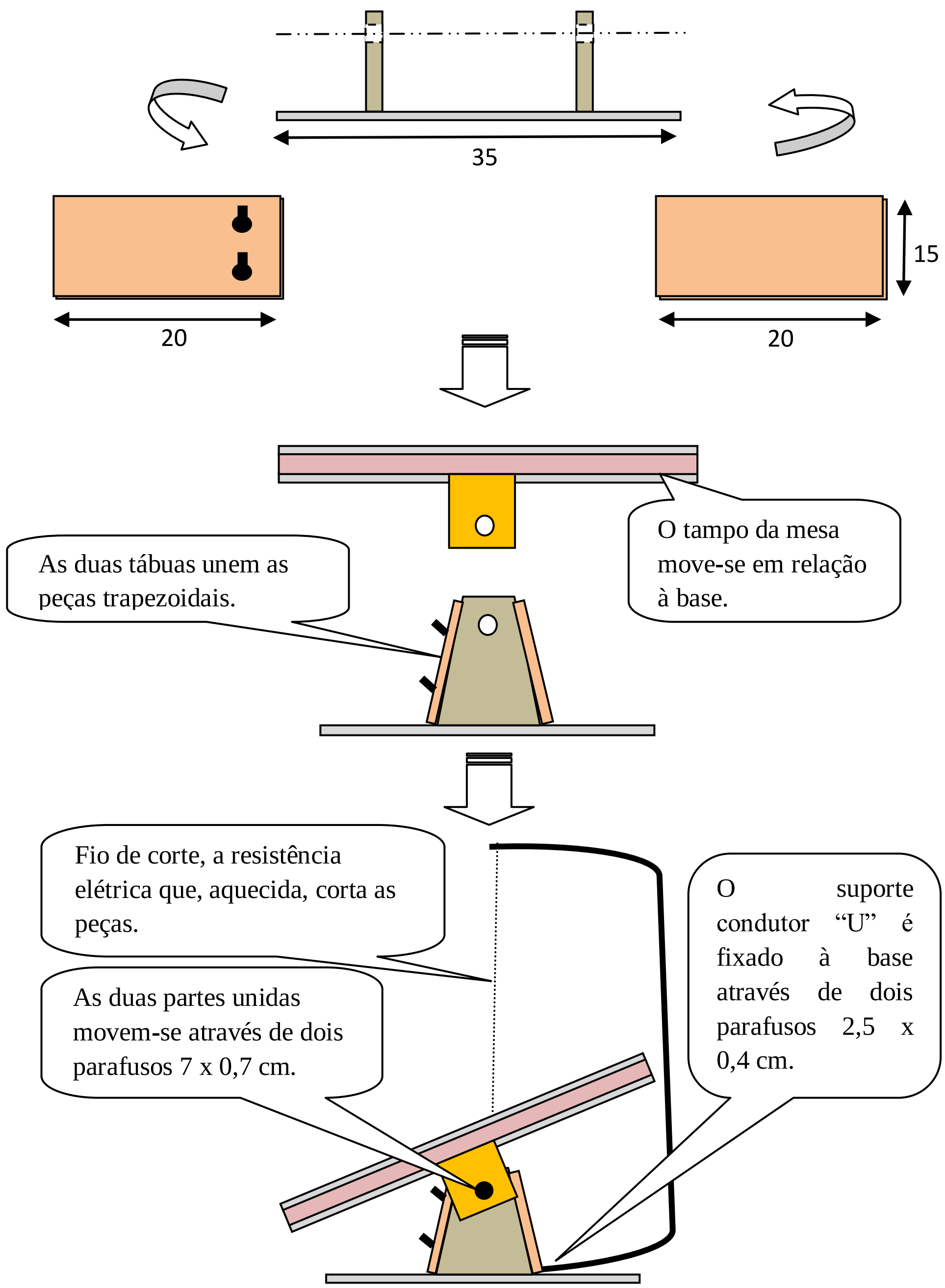
Um segundo transformador, similar ao descrito e instalado ao lado do principal, será ligado de forma independente no circuito mostrado no desenho 18 e será o responsável pelo funcionamento de um *aparelho portátil* externo à máquina, porém ligado a ela por fio,o que será detalhado à frente.



Desenho 14 Dois fios de corte ligados em paralelo

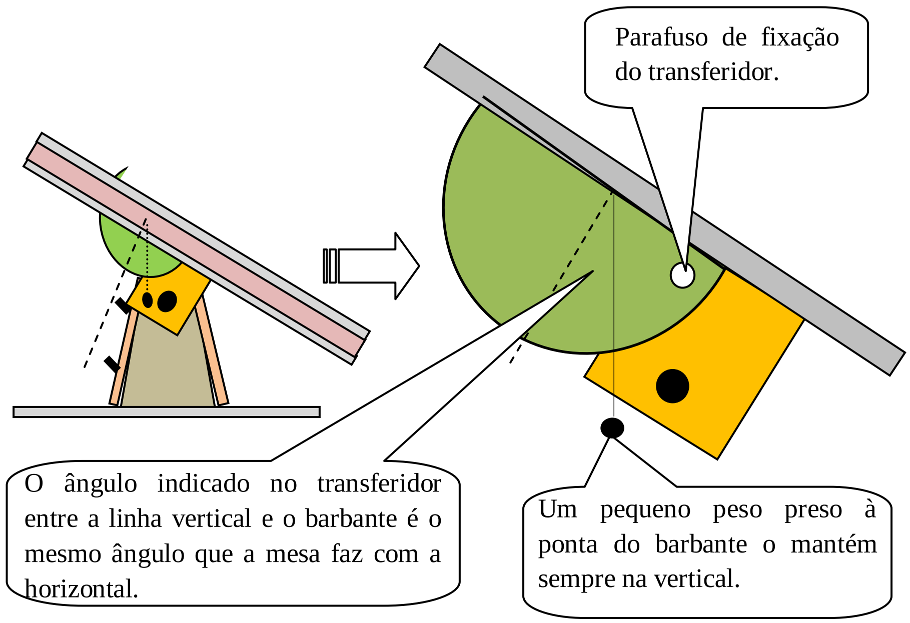
Duas tábuas de madeira fecham a parte inferior, unindo os dois suportes trapezoidais e formando, sob o tampo da mesa, o espaço onde são instalados os componentes elétricos do equipamento.

Em uma delas, por meio de furos, são instalados interruptores de energia elétrica que podem ser encontrados em casas comerciais do ramo.



Desenho 15 Colocação das tampas laterais e união do tampo à base

Um transferidor é fixado á mesa e do seu centro pende um barbante com um pequeno peso. Assim, o ângulo entre o tampo da mesa e o plano horizontal pode ser facilmente determinado, conforme a figura.



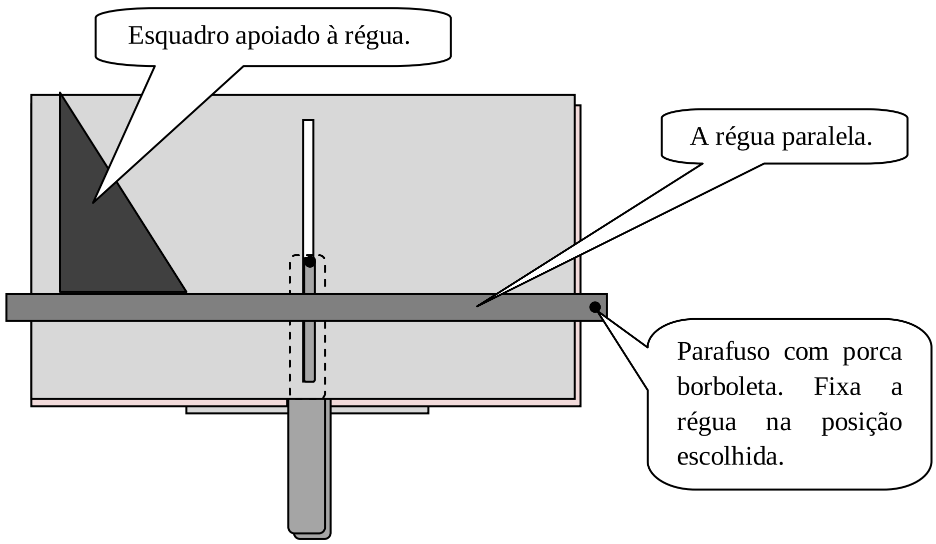
Desenho 16 Detalhe da instalação do transferidor que possibilita a medição do ângulo de inclinação do tampo

O fio de corte, resistivo, pode ser obtido de equipamentos como chuveiro ou secador de cabelos. No nosso caso, foi utilizado o enrolamento aquecedor de um ferro de solda comumente encontrado nas casas de materiais elétricos.

Figura 3 Aparelho convencional de solda encontrado no mercado

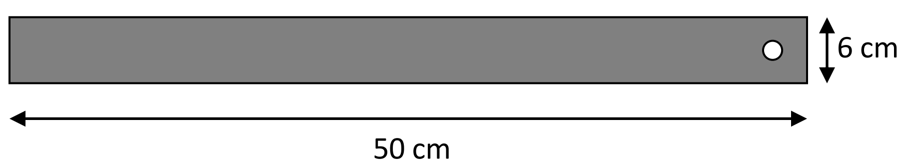
Figura 4 Resistência elétrica retirada do aparelho da figura anterior e utilizado como fio de corte da mesa. Bastante fino, proporciona cortes precisos

A régua paralela, de concepção similar a equipamento utilizado nas pranchetas de desenho, serve para direcionamento das peças do material a ser cortado. A régua funciona, também, como apoio aos esquadros para movimentos transversais.



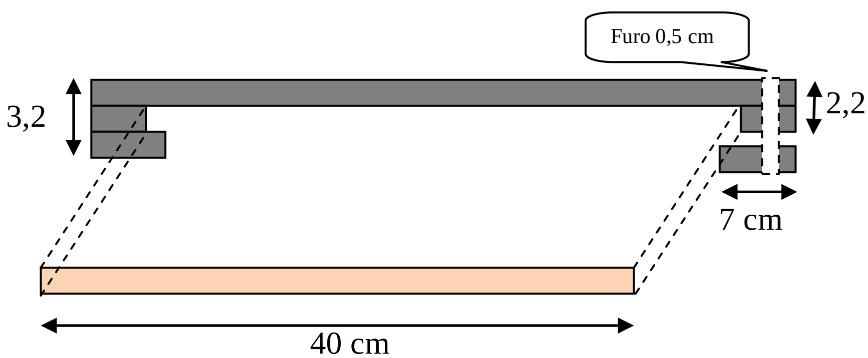
Desenho 17 A régua paralela move-se ao longo da mesa e serve de apoio para os esquadros

Construída em madeirite, a régua paralela tem as medidas e o formato especificados no desenho que se segue.



Desenho 18 Vista superior da régua, seu comprimento e largura

Figura 5   Régua paralela – visão superior



Desenho 19   Vista lateral da régua, visualizando o encaixe na mesa. A peça solta, de 7 x 6 cm, é unida à peça principal por parafuso de 5 cm com porca borboleta para facilidade na regulagem da posição

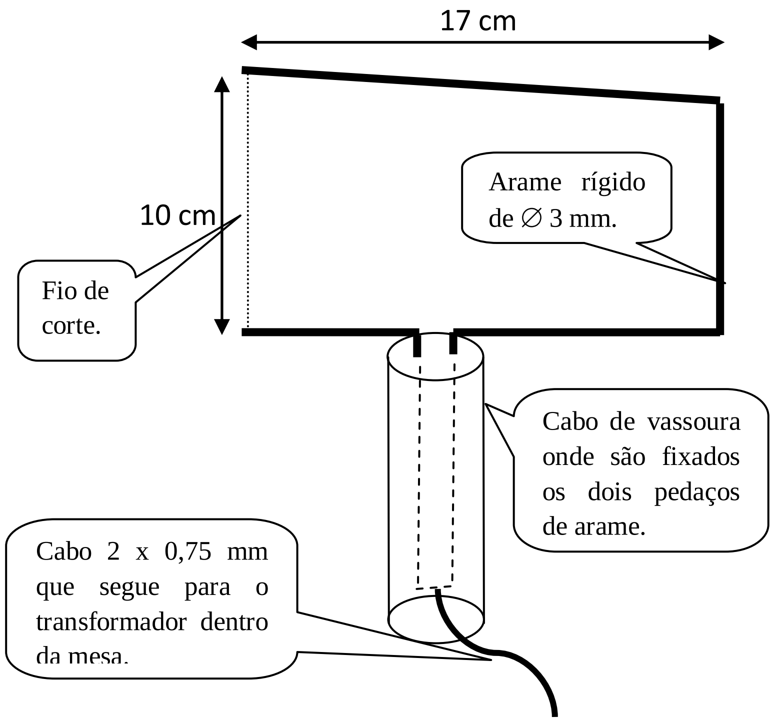
Figura 6 A régua – visão lateral

7.3 Um Equipamento anexo à mesa

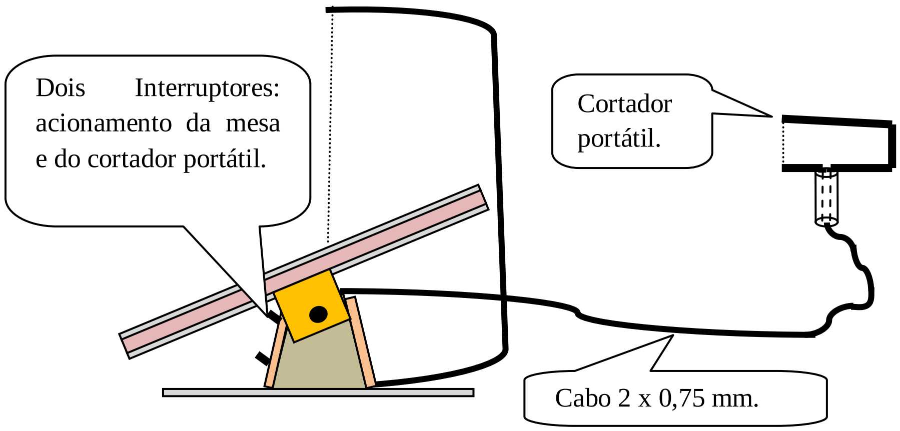
A máquina conta, ainda, com um aparelho portátil ligado a ela por um cabo elétrico 2 x 0,75 mm e cuja energia é fornecida por um transformador similar ao primeiro. Esse segundo transformador, também de 110/12 V, fica instalado no interior da mesa, paralelo ao primeiro. Isso justifica o segundo interruptor na lateral da máquina, usado no liga e desliga do aparelho portátil.

Figura 7 Cortador de isopor portátil

Fabricado com um pedaço de cabo de vassoura e dois pedaços de arame rígido com diâmetro de, aproximadamente, 3 mm, pode ser usado em cortes menos precisos das peças. Tem funcionamento independente do fio da própria mesa devido ao circuito elétrico isolado. O desenho indica as suas medidas aproximadas:



Desenho 20 Aparelho manual



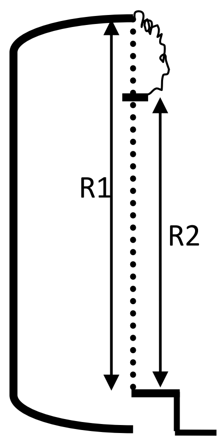
Desenho 21 O cortador portátil e sua instalação, independente do funcionamento da mesa principal

7.4 Regulagem da velocidade de corte

Uma forma simples de se regular a potência e, consequentemente, a velocidade com que o fio é capaz de cortar o isopor, é por meio da variação no tamanho da resistência elétrica do sistema, do comprimento do fio de corte. Quanto menor for o fio, maior será o seu aquecimento e a velocidade com que ele corta o material (explicação no anexo, página 86).

Assim, conforme a figura 16 e o desenho 22 que se seguem, ao mudar o conector tipo “jacaré” para baixo, diminui-se o tamanho da resistência e aumenta-se a potência de corte.

Figura 8 Detalhe da parte superior do aparelho. O conector jacaré isola parte da resistência e aumenta a potência da máquina ao deslizar para baixo



Desenho 22 Ao ligar o fio (azul na figura acima), parte da resistência fica isolada e o seu tamanho passa de R1 para R2, diminui. Quanto mais para baixo se der a ligação do conector jacaré, maior a potência de corte da mesa e, portanto, maior a rapidez no corte.

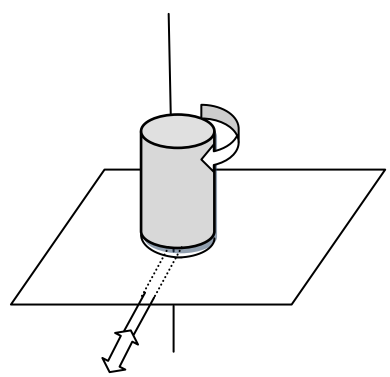
Por meio de chave elétrica ou de um potenciômetro é possível uma regulagem mais sofisticada da velocidade de corte do aparelho. No nosso caso, consideramos uma versão simples, mas eficaz.

7.5 Funcionamento do equipamento

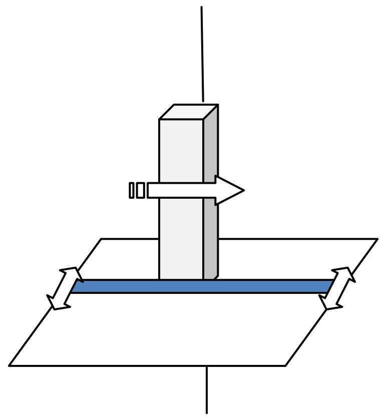
Por meio de regulagem da posição do tampo e da régua e, com o uso dos esquadros, as peças cujas faces são poligonais são cortadas com facilidade gerando, entre outros sólidos, prismas e pirâmides.

Outras construções, como os cones e cilindros, são obtidas por meio da fixação do centro do disco e do seu movimento giratório. Cortes em cones e pirâmides geram seus respectivos troncos.

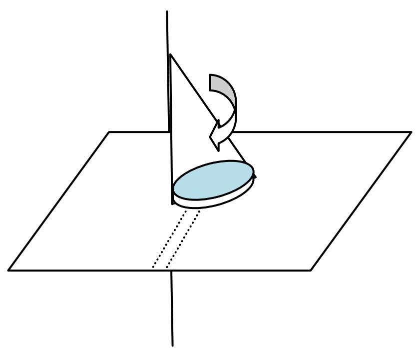
Circunferências e cônicas podem ser visualizadas, com cortes apropriados, em cones e cilindros.



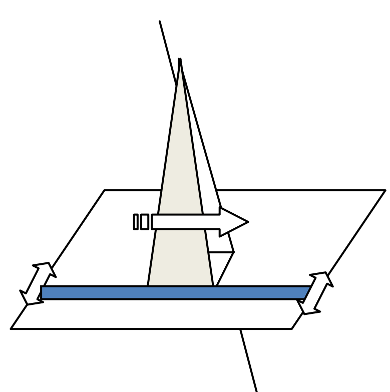
Desenho 23 Geração de um cilindro

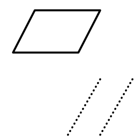


Desenho 24 Geração de um prisma

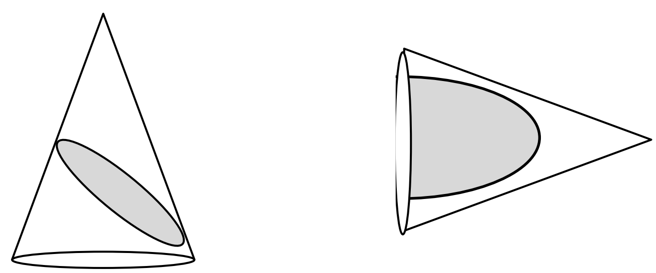


Desenho 25 Geração de um cone, mesa inclinada





Desenho 26 Geração de uma pirâmide quadrada



Desenho 27 Cônicas obtidas através de cortes planos em cones

Atentamos para o fato de existirem vários materiais que podem ser utilizados no aparelho, para a obtenção dos sólidos estudados, por meio de cortes.

Registramos aqui algumas curiosidades sobre o isopor e a boia de piscina, tipo “espaguete”, dois polímeros expandidos que podem ser utilizados no aparelho.

-Os espaguetes, boias compridas e coloridas utilizadas em praias e piscinas, foram criados por um jovem brasileiro chamado Adriano Luiz Carneiro Sabino, em 1997. Naquele ano, as vendas atingiram um milhão de unidades. Adriano, que trabalhava no ramo de construção civil, percebeu que o material que usava como isolante térmico tinha baixa densidade e, portanto, flutuava com facilidade. Patenteou a ideia e montou uma fábrica.

O Isopor é a marca registrada da Knauf Isopor Ltda, empresa que fabrica o poliestireno expandido, descoberto na Alemanha em 1949. É um tipo de plástico fabricado a partir do estireno, derivado do petróleo. O material passa pelo processo de polimerização, formando o poliestireno, composto por carbono e hidrogênio. Ele é expandido e composto por mais de 95% de ar. Por isso pode se transformar em diversos produtos com as mais variadas formas e utilidades. É reciclável.

Em nossas práticas, prevê-se a utilização preferencial de material reutilizado. Peças de isopor que protegem eletrônicos e boias de piscina danificadas são dois exemplos de material a serem reciclados durante as aulas práticas. Espera-se que, comparativamente com o que ocorre em aulas expositivas, nas atividades propostas nesse trabalho, o interesse e a concentração dos estudantes sejam mais significativos especialmente em razão do aguçamento de sua natural curiosidade. Considera-se que a manipulação de materiais sempre motiva os envolvidos e colabora para uma melhor compreensão dos conteúdos abordados.

8 DIFICULDADES PREVISTAS

Podem ocorrer problemas de interpretação nas práticas devido a um desenvolvimento possivelmente incipiente da visão espacial e à falta de domínio de partes significativas dos conteúdos por parte dos estudantes.

Falhas no equipamento para o corte das peças de isopor também podem acontecer, como o arrebentamento do fio que corta as peças, facilmente substituível.

Em todos os casos, a orientação do professor e os sólidos previamente preparados por ele tornam-se peças imprescindíveis ao desenvolvimento das atividades e minimizam as possíveis dificuldades na realização das práticas.

Feitas essas considerações, seguem-se as atividades propostas que, conforme já especificado, têm como tempo previsto o período de duas horas-aula e devem ser acompanhadas de perto pelo professor para que as dúvidas que porventura venham a surgir sejam sanadas de imediato.

Aplicadas às práticas, o tempo previsto e outras indicações podem sofrer adaptações para a sua adequação visando o melhor rendimento no processo de ensino e aprendizagem.

9 IMPORTÂNCIA DO USO DO MATERIAL MANIPULÁVEL NA GEOMETRIA DO ENSINO MÉDIO

Figura 9 Sólidos geométricos em madeira, material de apoio às aulas de Geometria Espacial

Nas várias áreas da Matemática e, em especial, nos estudos da Geometria Espacial, é incontestável que a utilização de recursos computacionais aparece como uma importante forma de incentivo e promoção do aprendizado. Uma vez que proporcionam rapidez e precisão, o computador, projetores audiovisuais e outros recursos tecnológicos mostram-se parceiros importantes do professor na construção e na transmissão de conceitos. Entretanto, aulas e oficinas desenvolvidas com a utilização de material manipulável também fazem parte do elenco de recursos à disposição da melhoria e do enriquecimento do processo de aprendizagem.

Há uma relação incontestável entre os infindáveis objetos ao redor do aluno no dia a dia e aqueles que passam por suas mãos nas aulas práticas e oficinas. Nessa linha, desenvolvemos algumas propostas cuja pretensão é a de alavancar o aprendizado da Matemática, principal objetivo do professor.

Figura 10 Objetos do cotidiano cujo formato assemelha-se ao dos sólidos estudados nas aulas de Geometria – um tronco de cone e um cilindro

Figura 11 Uma lata de balas em formato cilíndrico e uma xícara que tem a forma de uma semiesfera

Figura 12 Na construção civil, prismas e tronco de pirâmide em uma churrasqueira. Os cabos dos espetos têm formato aproximado ao do cilindro

10 UMA REVISÃO DOS CONTEÚDOS PARA A REALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS NESSE TRABALHO

Entre os conceitos a serem correlacionados às práticas propostas destacamos ,numa rápida revisão,os seguintes.

10.1 Definição e classificação dos poliedros

Poliedro é uma palavra de origem grega cuja composição é dada por poly e edro, respectivamente muitas e faces. Os poliedros foram estudados pelos grandes filósofos da Antiguidade e participaram das teorias sobre o Universo. Chamamos de poliedro todo sólido limitado por polígonos planos. Em contrapartida, um *não poliedro* é qualquer sólido não limitado exclusivamente por superfícies planas. Nesse último caso, temos como exemplos mais conhecidos o cone, o cilindro e a esfera.

Segundo o professor Eduardo Wagner (2012) (IMPA, RPM, OBMEP), pode-se definir poliedro de diversas formas, dependendo da generalidade de que precisamos para realizar nosso estudo. Uma definição de poliedro convexo, para uso geral no Ensino Médio, é a seguinte:

Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos onde devem ser observadas três restrições:

-cada lado de um polígono tem que ser também lado de um único outro polígono. Cada polígono é chamado de face, cada segmento de reta comum a duas faces é chamado de aresta e cada vértice do polígono é também vértice do poliedro.

-a intersecção de duas faces ou é uma aresta, ou é um vértice ou é vazia.

- é sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

Temos que os polígonos, chamados faces do poliedro, são colocados lado a lado e, não pertencendo a um mesmo plano, definem um trecho fechado no espaço. O ângulo entre duas faces é chamado ângulo diedro. Um ângulo é chamado *sólido* se é formado por arestas que saem de um mesmo vértice. Os lados das faces poligonais são as arestas do poliedro. Os vértices de cada polígono coincidem com os vértices do poliedro. Portanto, o poliedro é qualquer porção do espaço euclidiano que está completamente cercada por um conjunto finito de polígonos. Temos, quanto à sua classificação, as seguintes definições:

- os poliedros regulares, que são apenas cinco, são formados por junção de faces congruentes e regulares. Seus ângulos poliédricos são todos iguais.

- poliedros semiregulares, também chamados de poliedros arquimedianos, são convexos e constituídos por faces regulares com número de lados diferentes. Seus ângulos sólidos são iguais ou simétricos.

- poliedros irregulares podem ser considerados como aqueles que não admitem uma lei de geração que os caracterize com perfeição.

Além disso, podemos classificar cada um dos poliedros em uma das seguintes categorias:

- convexos: aqueles que se mantêm completamente em um mesmo semiespaço quando o consideramos em relação a qualquer plano que contenha uma de suas faces. Todas as diagonais de um poliedro convexo estão completamente contidas em seu interior.

- côncavos: quando ligando-se dois pontos internos quaisquer do poliedro é possível obter um segmento de reta que não é completamente contido no sólido.

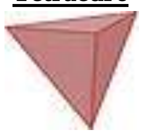
Destacam-se, por sua singularidade, os poliedros regulares convexos, chamados platônicos por terem sido estudados e divulgados por Platão. São regulares por terem todas as faces e seus respectivos ângulos congruentes entre si. Os ângulos entre as faces são, também, congruentes. Os polígonos geradores de ângulos sólidos são os de ângulo interno menor que 120°, ou seja: o triângulo equilátero, o quadrado e o pentágono. Portanto, as faces dos cinco poliedros regulares são formadas por esses três polígonos.

Os sólidos platônicos têm grande relação com estruturas encontradas na natureza e são os seguintes:

a) o tetraedro, cujas quatro faces são triângulos equiláteros. Têm, portanto, quatro vértices e seis arestas.
b) o hexaedro, ou cubo, com seis faces quadradas. Conta com oito vértices e doze arestas. Tem a característica de poder ser aglomerado perfeitamente, ou seja, é possível juntar cubos sem que sobrem espaços vazios. Um cubo é um módulo básico das nossas construções civis atuais.
c) o octaedro**,** cujas faces são oito triângulos equiláteros. Pode ser visto como um antiprisma de base triangular, ou como duas pirâmides de base quadrada, acopladas pelas bases. Tem seis vértices, doze arestas e oito faces.
d) o dodecaedro, cujas faces são doze pentágonos. Composto pela ligação de doze vértices por meio de vinte arestas.
e) O icosaedro é composto por vinte faces que são triângulos equiláteros e é usado como base fundamental para geração da ampla maioria das coberturas geodésicas. Tem doze vértices e trinta arestas.

Resumidamente, temos, sobre os Sólidos Platônicos:

Tetraedro



Hexaedro

Octaedro

Dodecaedro

Icosaedro.

Tabela 1 Os sólidos platônicos e alguns dos seus elementos

Poliedros Regulares	Faces por vértice	Faces	Vértices	Arestas
Tetraedro	3	$4F_3$	4	6
Hexaedro	3	$6F_5$	8	12
Octaedro	4	$8F_3$	6	12
Dodecaedro	3	$12F_5$	20	30
Icosaedro	3	$20F_3$	12	30

10.2 Teorema de Euler

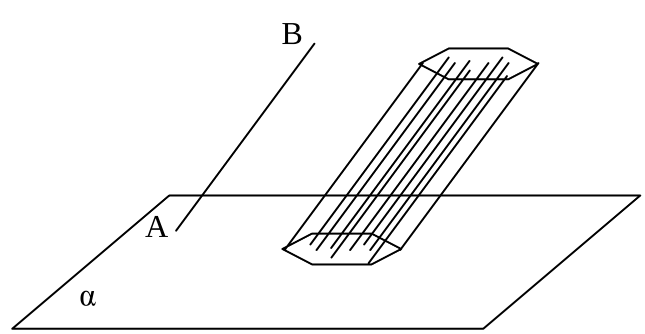
Figura 13 Leonhard Euler, matemático e físico suíço

Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço extremamente ativo durante toda a vida, publicou 886 trabalhos. Descobriu, em 1758, o teorema que leva o seu nome e relaciona os números de vértices (V), arestas (A) e faces(F) dos poliedros. A relação de Euler tem sido estudada por várias décadas no Ensino Médio, em todo o mundo. Sabe-se que Descartes e Leibniz estudaram, também, assuntos que se aproximaram bastante do famoso teorema. O caso dos poliedros homeomorfos à esfera, cuja demonstração é a mais divulgada, tem sua descoberta datada de 1813 e devida a Cauchy. Nessa situação, ao imaginar o poliedro de borracha, que ao ser inflado se transforma em uma esfera, dizemos que ambos são homeomorfos e têm característica 2. Jules Henri Poincaré (1854-1912), matemático francês, foi pioneiro na interpretação do Teorema de Euler (como um teorema de Topologia, e não de Geometria. Observou que o número $V - A + F$ é um invariante topológico do poliedro P. Mas existem outros casos a serem estudados. Por exemplo, poliedros com um furo são homeomorfos ao toro e possuem característica de Euler igual a zero. Com simplicidade de enunciado e demonstração elegante e inteligível, a Relação é atraente e popular nas aulas ministradas no Ensino Médio. Resume-se a V – A + F = 2, no caso enunciado por Cauchy. Possibilita aprofundamento em casos bastante variados que, no entanto, fogem ao nível do Ensino Médio.

10.3 Definição dos sólidos geométricos para o Ensino Médio

No segundo grau são apresentadas as definições dos principais sólidos geométricos que têm, em seguida, seus elementos, secções, áreas e volumes estudados. Os sólidos podem ser definidos de várias formas e, abaixo, descrevemos cada um com uma versão, que entendemos, apropriada ao Ensino Médio.

a) **PRISMA**: Seja dado um plano α e um polígono nele contido. Seja, ainda, um segmento de reta AB que tem apenas um de seus extremos (A ou B) contido nesse plano. Ao conjunto de todos os (infinitos) segmentos que partem de pontos do polígono e são congruentes, paralelos e pertencentes ao mesmo semiespaço que AB, chamamos de PRISMA.

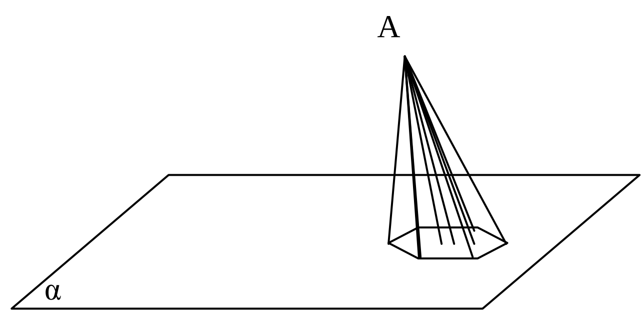


Desenho 28 Ilustração de uma definição de prisma

Figura 14 Um prisma octagonal produzido em isopor

Figura 15 Um prisma quadrangular reto em isopor

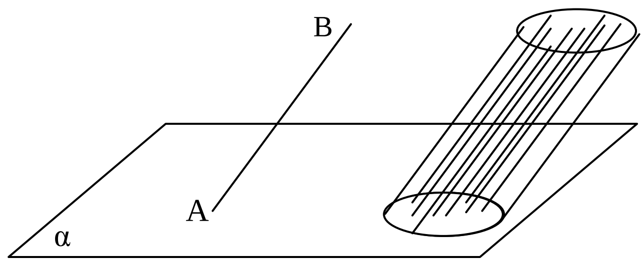
b) **PIRÂMIDE**: Considere um plano α e um polígono nele contido. Seja, ainda, um ponto A não contido nesse plano. Ao conjunto de todos os (infinitos) segmentos que partem de A e chegam a cada ponto do polígono, denominamos PIRÂMIDE.



Desenho 29 Uma definição de pirâmide no Ensino Médio

Figura 16 Pirâmide quadrangular construída em isopor

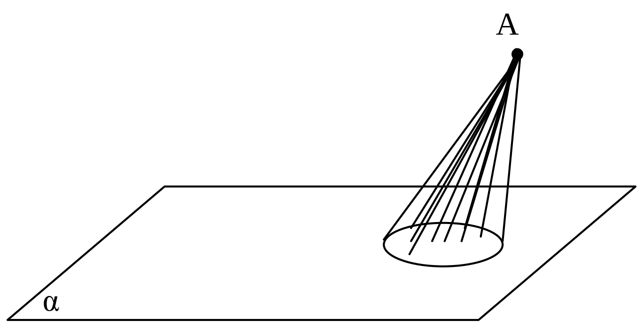
c) **CILINDRO**: Seja dado um plano α e uma circunferência nele contido. Seja, ainda, um segmento de reta AB que tem apenas um de seus extremos (A ou B) contido nesse plano. Ao conjunto de todos os (infinitos) segmentos que partem de pontos da circunferência e são congruentes, paralelos e pertencentes ao mesmo semiespaço que AB, chamamos de CILINDRO CIRCULAR.



Desenho 30 Ilustrando uma definição de cilindro no Ensino Médio

Figura 17 Cilindros circulares em isopor

d) **CONE**: Considere um plano α e uma circunferência nele contido. Seja, ainda, um ponto A não pertencente ao plano α. Ao conjunto de todos os (infinitos) segmentos que partem de pontos da circunferência e chegam ao ponto A, chamamos de CONE CIRCULAR.

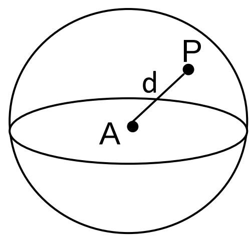


Desenho 31 A definição de cone

Figura 18 Cones construídos em isopor

e) **ESFERA** é o conjunto de todos os pontos (infinitos) cuja distância *d* a um ponto A dado – chamado centro da esfera - é menor ou igual a um valor fixo, seu raio.

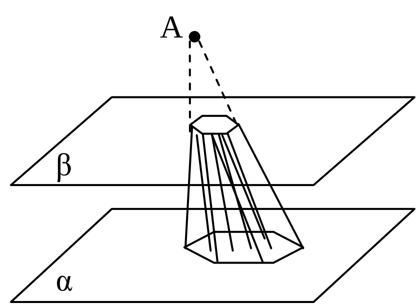
No desenho, P é um ponto qualquer do interior ou da casca da esfera.



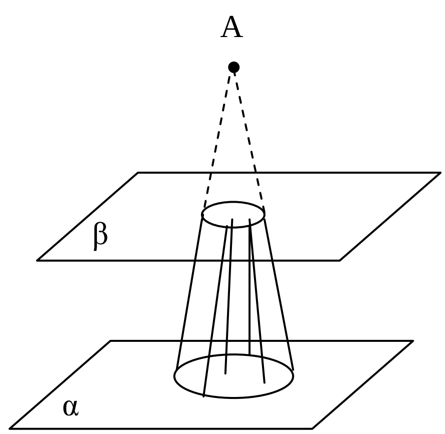
Desenho 32 A esfera

Figura 19 Esfera em isopor encontrada à venda em papelarias

f) Considere uma pirâmide (ou um cone), conforme a definição dada acima. O sólido formado pela parte da pirâmide (ou do cone) que está entre o plano α e um plano β, paralelo a α e que e passa pela região entre α e A é definido como TRONCO DE PIRÂMIDE (OU TRONCO DE CONE).



Desenho 33 Tronco de pirâmide



Desenho 34 Tronco de cone

Figura 20 Tronco de cone em isopor e uma forma de empadinha

Figura 21 O tronco de uma pirâmide triangular em isopor

Estudados os principais sólidos em sala de aula, várias atividades podem ser propostas com a finalidade de fixar e desenvolver os conceitos. Temos, nesse trabalho, a apresentação de algumas dessas práticas e, em todos os casos, temos o tempo previsto de duas horas aula.

11 ATIVIDADES

Para cada uma das atividades propostas a seguir, inicialmente faz-se a distribuição dos alunos de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio em pequenos grupos, de 4 a 5 alunos.

11.1 Relação de Euler – Cortando Poliedros

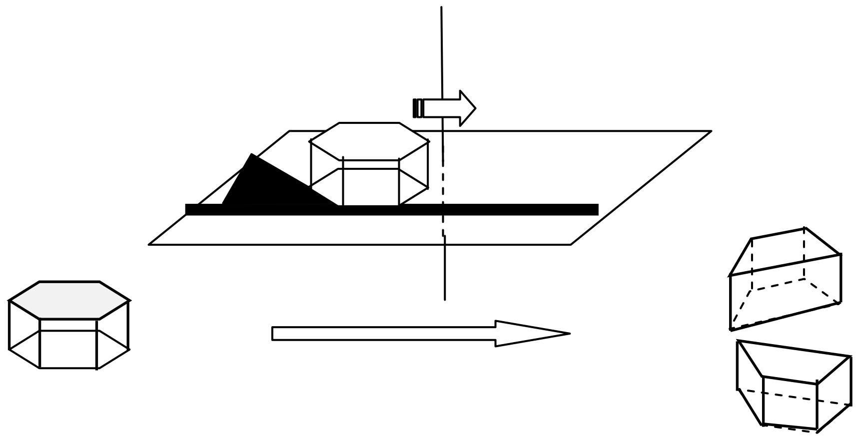
A cada grupo é fornecido um poliedro convexo em isopor e, a seguir, listam-se as definições mais importantes para a realização da tarefa a ser executada. Os sólidos inicialmente distribuídos podem ser prismas retos de bases variadas, pirâmides, troncos ou quaisquer outros poliedros convexos.

Pede-se aos estudantes que contem as faces, arestas e vértices do sólido recebido pelo grupo e que seja feita a verificação quanto à validade da Relação $V - A + F = 2$. Como se tratam de poliedros convexos, é esperado que, em todos os casos, chegue-se à conclusão de que a relação é válida.

Então, com orientações sobre o funcionamento da mesa de corte, pede-se que, para cada um dos poliedros, seja definido e executado um seccionamento de forma tal como se ele fosse intersectado por um único plano.

O poliedro deve ser posicionado com o auxílio dos esquadros e movido ao longo da régua paralela, de maneira a obter-se o corte proposto pelo grupo.

Como exemplo, no desenho abaixo, temos a transformação de um prisma hexagonal regular em dois outros prismas iguais e cujas bases são trapezoidais.



Desenho 35 Na figura, um prisma hexagonal (F = 8, A = 18 e V = 12), ao ser seccionado por um plano que contém duas de suas arestas laterais opostas, é transformado em dois prismas iguais cujas bases são trapézios (F = 6, A = 12 e V = 8)

Novamente, pede-se aos estudantes que verifiquem a validade da igualdade dada para um novo sólido obtido. O trabalho pode se repetir com diferentes sólidos e os dados relativos a cada um deles deverão ser relacionados para posterior troca de experiências entre os grupos.

Só então o professor deve referir-se à Relação de Euler, o teorema que relaciona vértices, arestas e faces e cuja validade pretende-se testar experimentalmente.

Observa-se que, nos poliedros aqui considerados, cada lado de um dos polígonos que o formam é lado de um, e apenas um, outro polígono; e a intersecção de duas faces distintas pode ser uma aresta comum, um vértice ou o conjunto vazio. Os diversos grupos de alunos devem chegar à conclusão que a relação de Euler- Cauchy – cujo resultado sempre é dois - se verifica, sim, para todos os sólidos até aqui analisados. Isso se deve ao fato de que todos os poliedros assim obtidos são convexos e homeomorfos à esfera. O professor deverá fazer, então, uma explanação sobre o homeomorfismo à esfera e observar que a versão de Cauchy para a Relação de Euler vale sempre para poliedros que tenham essa característica.

Em seguida, numa segunda etapa, é proposta aos estudantes a tentativa de realização de cortes, por meio de planos secantes ao poliedro, que levem a sólidos para os quais o Teorema de Euler não seja válido. (LIMA, 2012). Os alunos devem chegar à conclusão de que, qualquer que seja o corte plano realizado na peça, sempre será obtido um poliedro homeomorfo à esfera e que obedece à relação V – A + F = 2. Alguns exemplos podem ser observados na tabela abaixo.

Tabela 2 Exemplos da característica de Euler.Poincaré

Sólido	Nº de Vértices	Nº de Arestas	Nº de Faces	Característica de Euler-Poincaré
Prisma hexagonal	12	18	8	2
Prisma trapezoidal	8	12	6	2
Pirâmide triangular	4	6	4	2

Porém, deve-se observar que nem sempre a Relação tem 2 como resultado. Ao considerarmos sólidos poliédricos que não se enquadrem na versão de Cauchy, ou seja, não homeomorfos à esfera, o valor K na equação V – A + F = K, chamado Característica de Euler-Poincaré, pode se alterar.

Na proposta de novos cortes, agora não necessariamente por meio de um único plano, deve ser observado que poliedros que tenham algum furo, por exemplo, não satisfazem a Relação de Euler-Cauchy, onde k = 2.

Além da mesa de corte, utilizada com o intuito de aguçar o interesse e a curiosidade dos participantes, temos a possibilidade de utilização de aparelhos portáteis para o corte dos sólidos. Assim, mais de um grupo pode ter acesso simultâneo à realização das tarefas a que se propõem.

11.2 Relação de Euler – Montando sólidos com prismas

Efetua-se a distribuição de pequenos prismas retangulares ou triangulares ou troncos de pirâmide que devem ser unidos por palitos de dente de formas diferentes para cada grupo de alunos. Montados os sólidos, deve ser proposta a determinação do valor de k na relação $V - A + F = k$.

Espera-se que a maioria dos grupos produza sólidos homeomorfos à esfera e que tenham, portanto, k = 2. Porém, havendo grupos que realizem a montagem de sólidos com k ≠ 2, propicia-se uma discussão entre resultados que deve levar os participantes a analisar os tipos de sólidos cuja característica de Euler seja a mesma.

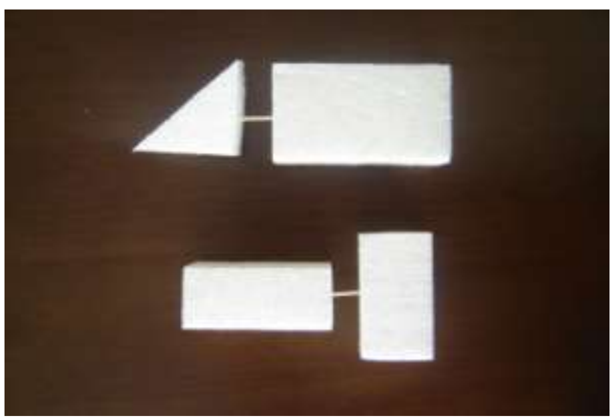


Figura 22 Unindo prismas com palitos de dentes. Com a união das peças observamos que os sólidos obtidos (figura 23) são homeomorfos à esfera

Figura 23 Observa-se que o primeiro sólido é de um poliedro. O segundo, na parte inferior da figura, não se enquadra na classificação de poliedro, não é convexo

Figura 24 O sólido à esquerda é convexo, homeomorfo à esfera e, portanto, tem k= 2. O sólido maior, à direita, não se encaixa na definição de poliedro e é homeomorfo ao toro

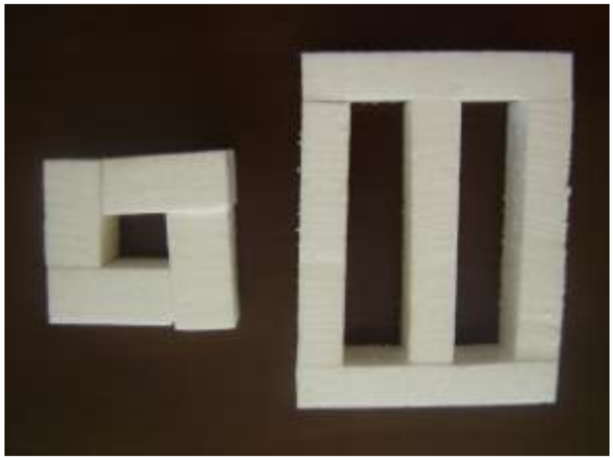


Figura 25 Sólidos Homeomorfos ao toro e ao bitoro, respectivamente, da esquerda para a direita

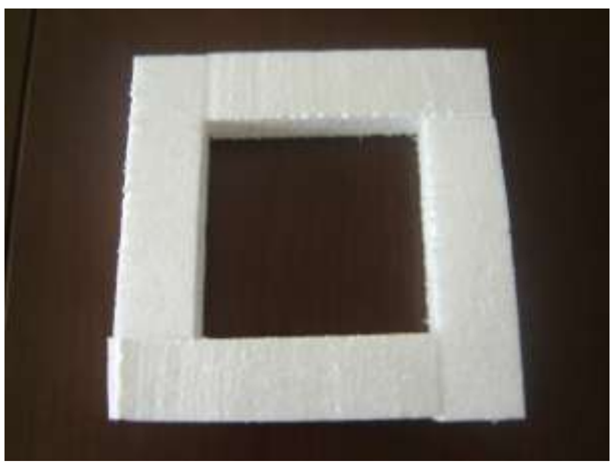


Figura 26 Sólidos homeomorfos ao toro, como o da figura, podem se transformar com a retirada de uma das peças com que foram montados, tornando-se, assim, homeomorfos à esfera

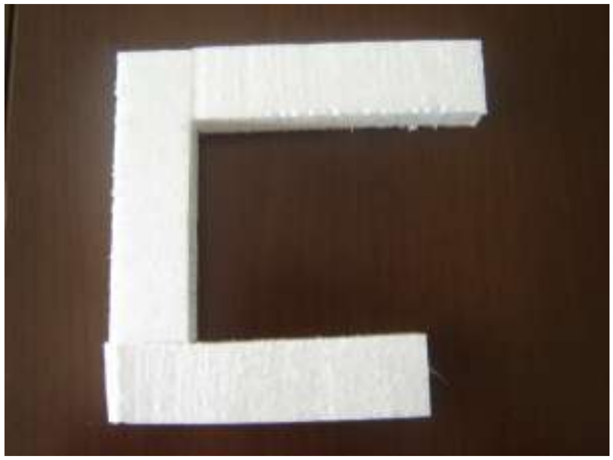


Figura 27 Sólido da figura 26, com a retirada de uma peça, agora homeomorfo à esfera tem k = 2

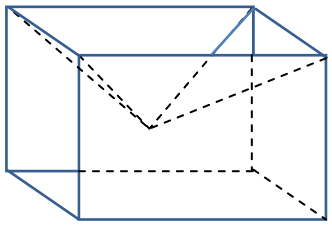
Nas figuras 26 e 27, com a retirada de uma das peças que formava o poliedro, ele se transforma e passa a ter k = 2, homeomorfo à esfera.

Nessa segunda prática relacionada à Relação de Euler, após a discussão entre os grupos sobre os valores obtidos para k = V – A + F, o professor deve, então, fazer a explanação sobre a característica de Euler-Poincaré.

Ao final da prática, portanto, os alunos deverão verificar a validade do valor k = 2 para todos os sólidos homeomorfos à esfera.

Seguem alguns exemplos de sólidos que podem ser utilizados na ilustração das práticas relacionadas ao Teorema de Euler:

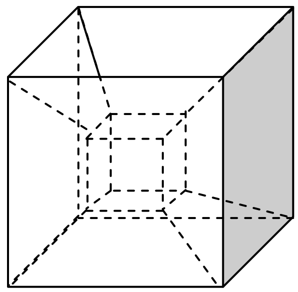
a)



Desenho 36 Um paralelepípedo do qual foi retirada uma pirâmide.

Conforme o desenho, é um poliedro côncavo com 9 vértices, 16 arestas e 9 faces. Portanto, tem característica de Euler-Poincaré igual a 9 – 16 + 9 = 2 e a Relação de Euler-Cauchy está satisfeita. A despeito de não ser um poliedro convexo, é homeomorfo à esfera e mantém k = 2.

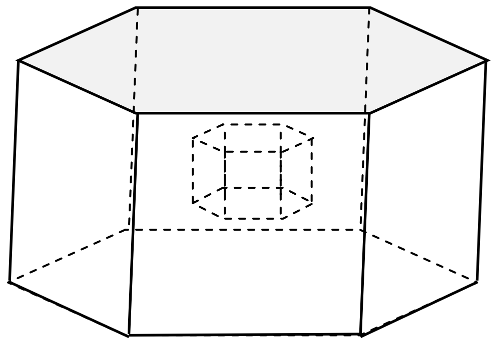
b)



Desenho 37 Um cubo do qual foi retirado, internamente, outro cubo e dois troncos de pirâmide opostos

O sólido assim construído tem 16 vértices, 32 arestas e 16 faces. Nesse caso a relação não é observada e a característica de Euler-Poincaré é igual a 16 – 32 + 16 = 0.

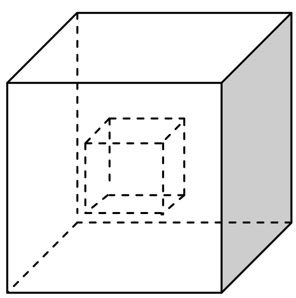
c)



Desenho 38 Um prisma hexagonal regular de onde foi retirado internamente outro prisma hexagonal menor

É outro sólido em que o teorema de Euler-Cauchy não se verifica. Tem 24 vértices, 32 arestas e 16 faces e, assim, k = 8.

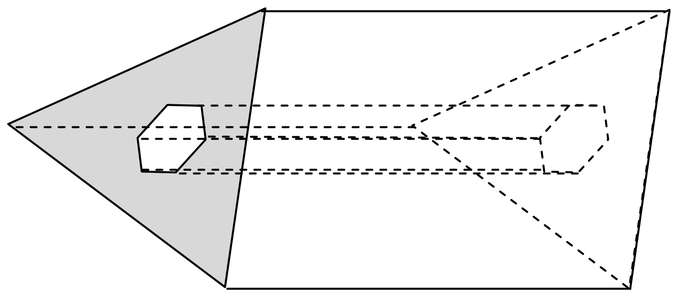
d)



Desenho 39 Um cubo tem como parte oca outro cubo

Caso semelhante ao exposto em (c) em que a característica de Euler-Poincaré igual a 8 – 28 + 16 = -4.

Sólidos homeomorfos ao toro:

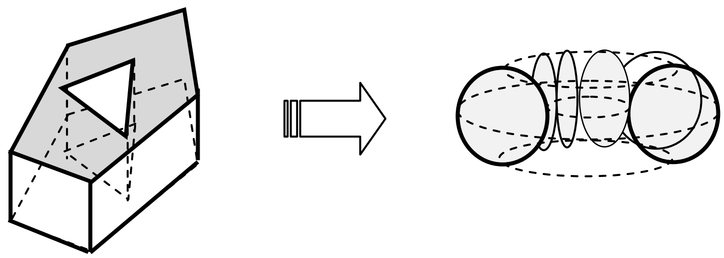


Desenho 40 Prisma triangular com furo hexagonal

Sólidos com um único furo são homeomorfos ao toro. O sólido acima não pode ser chamado poliedro pelo fato de ter faces que não são polígonos. No desenho, um prisma triangular é transpassado por um furo hexagonal.

Figura 28 Exemplo de sólido homeomorfo ao toro: um prisma retangular de onde se retirou outro prisma. Foi gerado, assim, um furo na peça

Para explicar aos alunos os sólidos que são homeomorfos ao toro, imagina-se que o sólido seja feito de um material elástico, e que podemos inflá-lo obtendo um toro, conforme representação abaixo.



Desenho 41 Sólido homeomorfo ao toro

Caso esse sólido, além de homeomorfo ao toro, seja um poliedro, então a sua característica de Euler será k = 2. No exemplo do Desenho 37 temos que todas as faces são polígonos convexos e k=2. Isso não ocorre no caso do sólido do Desenho 40.

Muitas outras variações são possíveis e deve-se deixar claro aos alunos que o assunto pode ser aprofundado.

Figura 29 Um sólido com dois furos: Um prisma retangular foi atravessado por outros dois prismas retangulares. Sólido homeomorfo ao bitoro, não é um poliedro

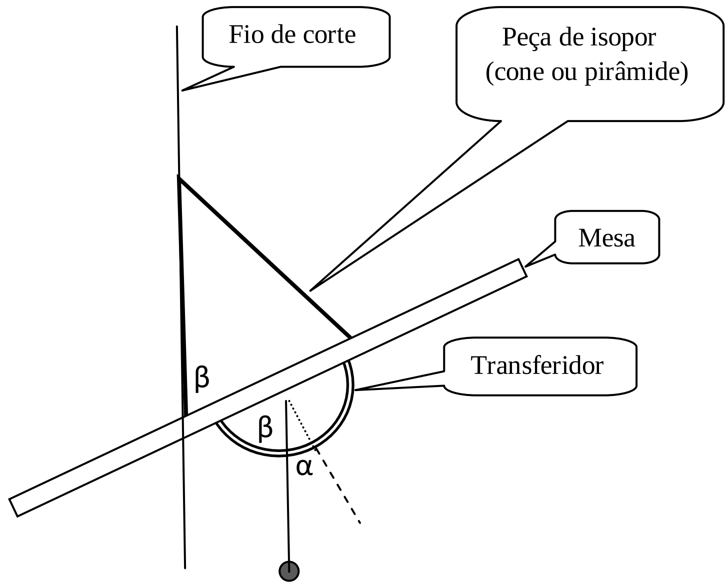
Ao final das atividades relacionadas ao teorema, todos devem estar convencidos de que a relação de Euler, com k = 2, sempre vale para poliedros convexos e vale, também, para diversos tipos de poliedros não convexos, aqueles que são homeomorfos à esfera.

No Ensino Médio, costuma-se definir apenas que a relação é válida para poliedros convexos, conforme Cauchy. Entretanto, é interessante que o aluno perceba que, como existem poliedros não convexos que satisfazem a relação, o teorema poderia ser mais geral, sem a restrição de que é imperativo que o sólido seja, de antemão, um poliedro convexo.

Tais considerações devem servir para instigar os alunos a futuros estudos sobre o assunto. A obra *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias*, de Elon Lages Lima é indicada como leitura complementar para os que se sentirem prontos a aprofundar o assunto. (LIMA, 1987).

A relação de Euler, verificada nessa primeira proposta e realizada por meio de sólidos manipulados pelo próprio aluno, torna-se palpável. Espera-se que a retenção dos conceitos relacionados às relações entre os elementos dos sólidos seja consolidada para os casos em que k = 2. Novas práticas podem ser preparadas para aprofundamento do estudo que incluam a variação da característica de Euler-Poincaré, caso haja espaço para esses estudos complementares ainda no Ensino Médio.

11.3 Determinando ângulos internos dos sólidos



Desenho 42 Uma forma de medir ângulos internos de sólidos

Na representação do desenho, a regulagem da inclinação da mesa é determinada por meio de um transferidor em cujo centro é fixada uma das extremidades de uma linha flexível. Na outra ponta do fio coloca-se um pequeno peso para que a linha permaneça esticada. Assim, sempre paralela ao fio de corte, ela determina o ângulo α e, consequentemente, o seu complementar β. A secção triangular vista na figura trata-se de um triângulo isósceles e pode ser o corte de uma pirâmide ou de um cone reto. Assim, o ângulo Θ é facilmente determinado, pois $\Theta + 2\beta = 180^o$.

Proposições aos alunos: Expostos algumas pirâmides e cones regulares sobre uma bancada, é informado aos presentes que cada grupo deverá utilizar um deles para determinar o que se pede.

Utilizando as regulagens da inclinação da mesa de corte e o transferidor, determinar:

a) o ângulo formado entre duas geratrizes opostas de um cone reto.

   Nesse caso, espera-se que os alunos leiam o ângulo α, calculem o seu complementar β e, por meio da soma dos ângulos internos do triângulo, determinem Θ, que é o ângulo requerido.

b) o ângulo entre uma face e a base de uma pirâmide hexagonal regular.

   Qualquer pirâmide reta tem como secção que contém a sua altura um triângulo e, nesse caso, a medida do ângulo requerido é o valor de β.

c) a área da base de um cone reto cuja geratriz meça 15 cm.

   É necessário que, aqui, se determine o raio R da base do cone, cuja área é a de uma circunferência ($A = \pi R^2$). Na mesa, com a leitura do valor de α, encontramos $\beta = 180^o - \alpha$. A geratriz G, a altura H e o raio R da base de um cone reto formam um triângulo retângulo em que $\cos \beta = R/G$. Portanto, dado G = 15 e determinado β, encontra-se R e calcula-se a área da base requerida.

d) o volume de uma pirâmide regular de base quadrada se a altura de um de seus lados é igual a 18 cm.

   Observado o valor de α no transferidor quando o fio de corte fica paralelo a um lado da pirâmide, calcula-se β. Tem-se que $\cos \beta = (a/2)/h$ onde a é o lado da base e $h = 18$ é a altura lateral da pirâmide. Assim, determina-se “a”. Ainda tem-se que a altura da pirâmde é dada por $H = sen\ \beta/h$. Por meio dos valores da altura H e do lado da base a, determina-se o volume: $V = (a.a.H)/3$.

e) a área lateral de um cone reto com raio da base igual a 8 cm.

A área lateral de ou cone reto é obtida da fórmula $A_l = \pi RG$, onde R é o raio da base e G é a sua geratriz. Com a geratriz do cone paralela ao fio de corte da mesa determina-se α e, consequentemente, β. Pelas relações trigonométricas no triângulo retângulo, temos que R/G = cos β. Determina-se, assim, o valor de G = 8 / cos β. De posse dos dados necessários, encontra-se o valor da área lateral Al.

No desenvolvimento dessa segunda prática, ao possibilitar a determinação de ângulos variados nos poliedros estudados, além de melhorar a capacidade do aluno de relacionar conteúdos da Trigonometria com a Geometria, aspira-se ao desenvolvimento da capacidade de visualização tridimensional. Na realização das propostas aqui apresentadas é indispensável que o aluno enxergue um plano intersectando os sólidos por ele analisados.

11.4 Analisando cônicas

Apolônio de Perga e Arquimedes são exemplos de matemáticos do século III A.C. que realizaram estudos importantes sobre as cônicas. O primeiro é conhecido como "pai das cônicas". Apolônio é o responsável pela nomenclatura ainda hoje utilizada para elipse, parábola e hipérbole, possíveis interceptações entre um plano e um cone de dupla face.

A seguir, para a realização da prática, deve-se lembrar aos estudantes que as cônicas aparecem em nosso cotidiano. É importante que o assunto abordado não seja desligado dos saberes e experiências do seu dia a dia. Assim, relacionando os conteúdos a outros conhecimentos, prepara-se o educando para a recepção das novas informações.

Exemplos de Elipses:

Figura 30 Num copo d’água, ao ser inclinado, a superfície da água tem a forma de uma elipse. O copo pode ser considerado aqui como um tronco de cone ou um cilindro

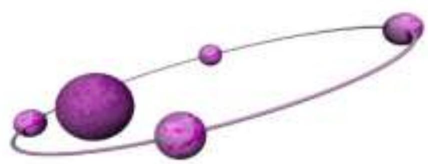


Figura 31 O movimento dos planetas, no sistema solar, é elíptico

Parábolas no dia a dia:

Figura 32 Os mais diversos modelos de antenas parabólicas concentram os sinais que chegam à bacia no equipamento receptor localizado no foco

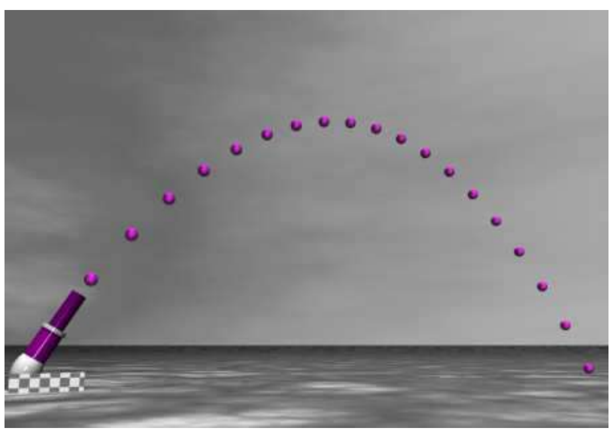


Figura 33 O lançamento de uma bala de canhão (ou qualquer outro projétil lançado com um ângulo entre 0^o e 90^o em relação ao solo) tem como trajetória uma parábola

Exemplos de hipérboles:

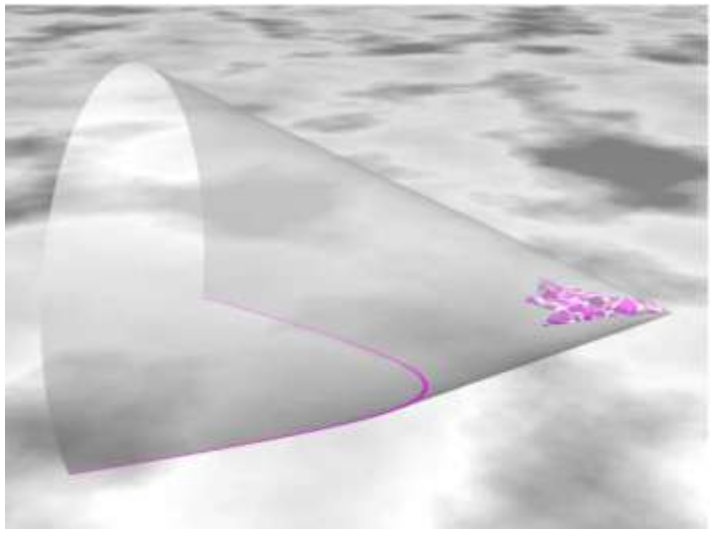


Figura 34 As ondas de choque de um jato supersônico intersectando a superfície do planeta em hipérboles

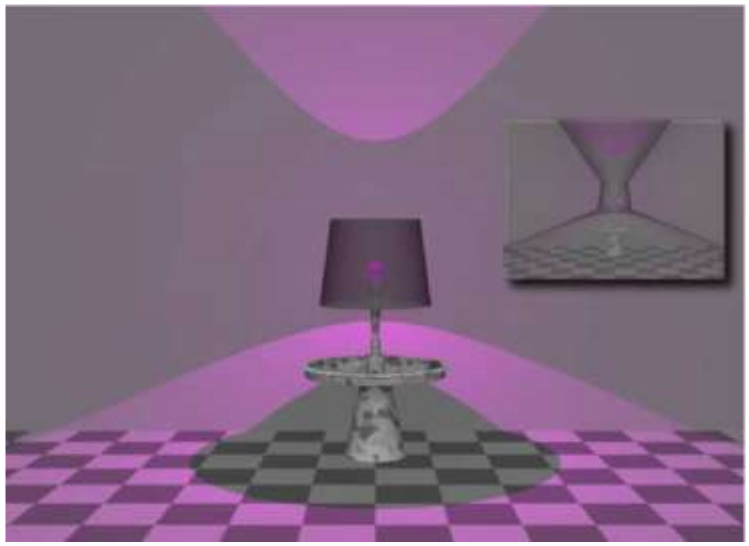
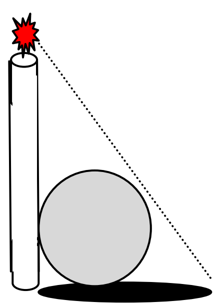
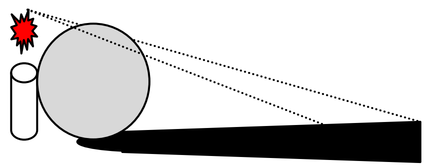


Figura 35 Cones de luz intersectando uma parede podem formar hipérboles variadas

A introdução ao estudo de cônicas, com uma abordagem mais superficial, pode ser dada ainda na educação básica. Como mais um exemplo de visualização, sugere-se:



Desenho 43 Ao ir se queimando, a vela diminui a sua altura e promove uma sombra cada vez mais comprida. Essa sombra é uma elipse, desde que a vela seja mais alta do que a bola

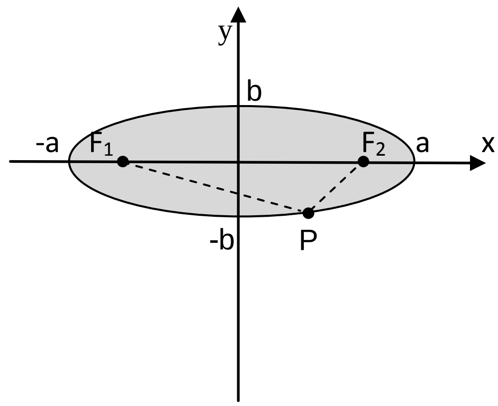


Desenho 44 Se a vela se torna menor do que a bola, a sombra se estende infinitamente e é uma parábola

Uma visão mais precisa deve mostrar cortes em superfícies cônicas, conforme ilustrado a seguir. Cortes transversais perpendiculares ao eixo do cone produzem circunferências cujos raios e as áreas são tanto maiores quanto mais distantes os planos de corte estiverem do seu vértice.

As elipses são obtidas com cortes transversais não perpendiculares ao eixo do cone e que atravessam a superfície, conforme ilustração a seguir.

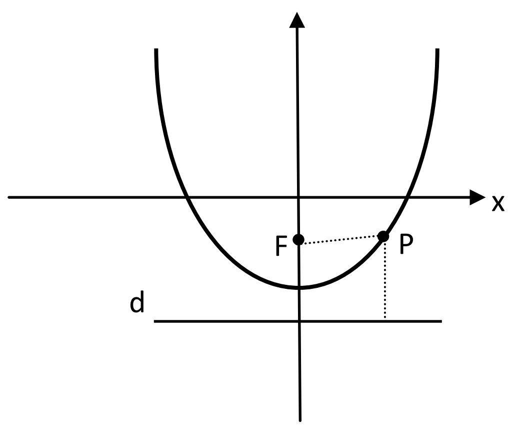
Figura 36 Elipse



Desenho 45 Representada em um plano cartesiano, a elipse é o conjunto dos pontos P cuja soma das distâncias aos dois focos se mantém constante

Parábolas são curvas planas abertas que se obtêm quando da interceptação de um cone circular reto com um plano paralelo à sua geratriz. É uma curva plana aberta cujos pontos distam igualmente de um ponto fixo, seu foco, e de uma reta fixa, a diretriz. Esse plano não corta transversalmente toda a superfície e não é paralelo ao seu eixo.

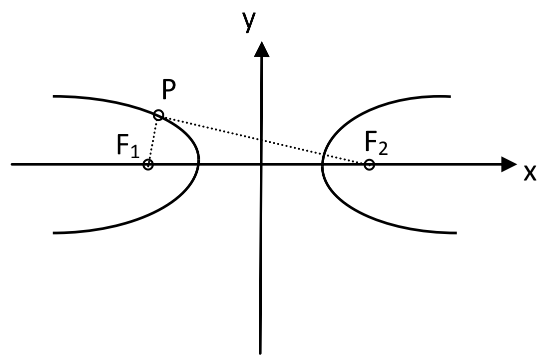
Figura 37 Parábola



Desenho 46 A parábola, no plano xy, é o conjunto de todos os pontos P equidistantes de um foco F e de uma reta diretriz d

Hipérbole é a curva cônica obtida por meio da intersecção da superfície de um cone reto de dupla face com um plano paralelo ao seu eixo e que não passa pelo seu vértice.

Figura 38 Hipérbole



Desenho 47 Em uma superfície plana, hipérbole é o conjunto dos pontos P para os quais a diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante

Deve-se considerar que, no Ensino Médio, elipses e hipérboles são estudadas bastante superficialmente. As parábolas são vistas como representação gráfica de equações quadráticas. É necessário que os alunos se familiarizem com as seguintes equações cartesianas de cônicas cujos centros são coincidentes com a origem do plano cartesiano:

Parábola: $ax^2 + bx + c = y$

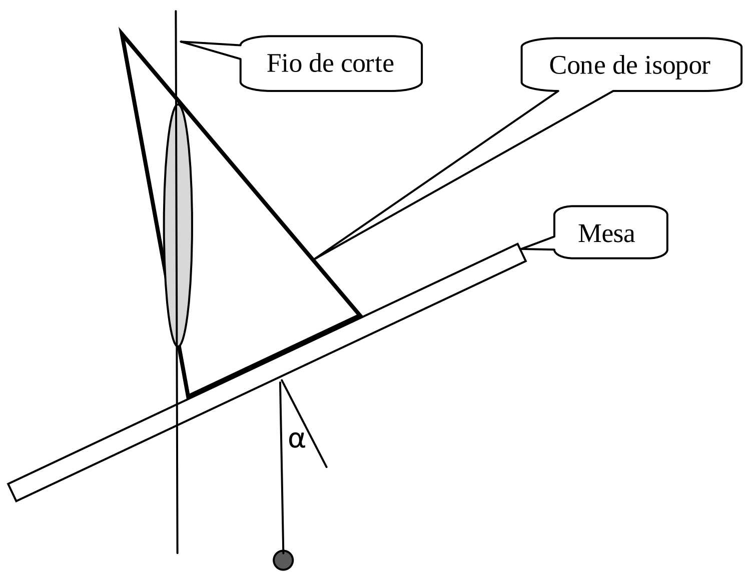
Elipse: $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$

Hipérbole: $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

A partir dessas considerações, propõe-se aos alunos uma aula prática com material manipulável em que sejam realizadas atividades com as cônicas. A seguir apresentam-se atividades com a elipse.

11.4.1 Atividade com cônicas

Cada grupo de alunos escolhe um dos cones em isopor à disposição sobre uma bancada. Então, escolhendo um ângulo α adequado na inclinação da mesa de corte, cada grupo fará uma secção no sólido escolhido de forma que seja obtida uma elipse, conforme desenho.



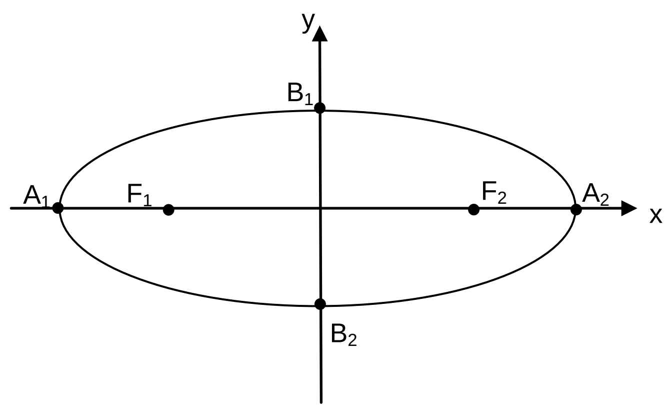
Desenho 48 Obtenção da elipse através de corte no cone

Em seguida, o grupo realizará medições e encontrará os valores de “a” e “b” a que se refere a equação $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$, supondo a elipse centrada em um plano cartesiano.

Considerando que os cones sejam diferentes, espera-se que os valores encontrados para “a” e “b” sejam diferentes em cada grupo. Além disso, é bastante provável que haja estranheza com relação aos valores encontrados na prática, raramente números inteiros. Encontradas as medidas requeridas, deverá ser obtida a equação da elipse. Em seguida, os vários grupos devem realizar uma comparação dos resultados obtidos.

Nas atividades envolvendo elipses, com a determinação empírica das equações torna-se possível a determinação dos seus principais elementos: focos, vértices e excentricidade. Para a equação $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$, supondo $a > b$, são válidas as seguintes igualdades:

$a^2 = b^2 + c^2$; Excentricidade: $e = c / a$; Focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$; Vértices na reta focal: $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$; Vértices na reta não focal: $B_1 = (0, b)$ e $B_2 = (0, -b)$.



Desenho 49 Vértices e focos da elipse centralizada no plano cartesiano

Na elipse temos as seguintes distâncias:

$d(A_1,A_2) = 2a$, $d(F_1, F_2) = 2c$ e $d(B_1, B_2) = 2b$

Atividades similares, com a determinação de equações e elementos principais de outras elipses, parábolas e hipérboles podem ser desenvolvidas de forma parecida.

Elipses obtidas de cortes em cilindros, conforme figuras abaixo, também podem se revelar objetos de investigação em aulas práticas.

Figura 39 Um cilindro que foi partido transversalmente com o uso de esquadro

Figura 40 Secção transversal é uma elipse. Qualquer que seja o ângulo do corte, a distância entre dois vértices de um de seus eixos se mantém constante e igual ao diâmetro do cilindro

Outros tipos de materiais podem ser processados na máquina com os mesmos resultados alcançados na construção de sólidos de isopor. A seguir, cilindro seccionado transversalmente permite a visualização da elipse.

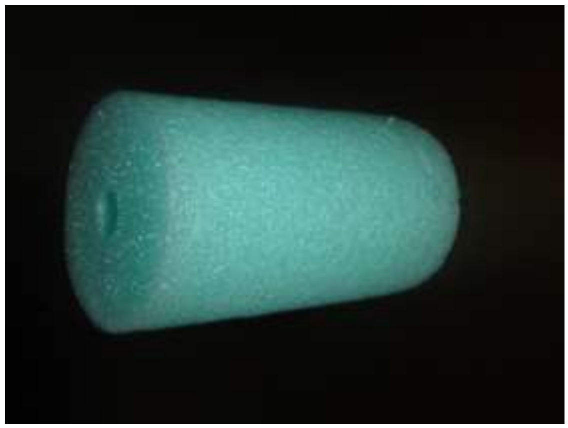


Figura 41 Outro material que pode ser cortado na mesa: macarrão de piscina

Figura 42 Corte oblíquo realizado com o uso de esquadro

12 CONCLUSÕES

Apresentando uma forma dinâmica e participativa de abordar conteúdos relacionados à Geometria Espacial, as práticas propostas nesse trabalho têm como expectativa o aguçamento da curiosidade dos estudantes do Ensino Médio e a consequente melhora na retenção e na compreensão dos assuntos tratados. Espera-se, ainda, que a relação da Geometria com outras áreas da Matemática e que a ligação entre os conteúdos abordados e os objetos da vida cotidiana do aluno se verifiquem com maior clareza para os participantes.

De forma geral, para cada uma das práticas aqui propostas é possível variações e interpretações diversas para o aprofundamento dos assuntos abordados. Portanto, verificando o interesse e a disposição dos envolvidos, novas práticas podem ser desenvolvidas visando, sempre, o aprofundamento e a maior compreensão dos conteúdos.

Importante nas práticas educativas, a realização de trabalhos em grupo trazem a socialização do conhecimento e das descobertas efetuadas. A interação entre os grupos e mesmo o número de alunos por grupo poderão sofrer alteração e são pontos que devem receber constante atenção do professor. Sempre visando à participação de todos e à disseminação das descobertas efetuadas pelos alunos da turma, visa-se, sempre, o alcance do objetivo maior- o aprendizado mais eficaz.

REFERÊNCIAS

COSTA, A. C. Análise do ensino de geometria espacial. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. **Anais**... Ijuí: 2009.

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil.** Campinas: Unicamp, 1995.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática**. Boletim da SBEM de educação matemática**, São Paulo, v. 4, n. 7, 1990.

GUIMARÃES, H. M. Por uma matemática nova nas escolas secundárias: perspectivas e orientações curriculares da matemática moderna. In: MATOS, J. M.; VALENTE, W. (Org.). **A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal**: primeiros estudos. São Paulo: PMMPB, 2007. p. 21-45.

LIMA, E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias.** SBM, 1987.

LIMA, E. L. **O teorema de Euler sobre poliedros.** Disponível em: <http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n02/n02_Artigo03.pdfM>. Acesso em: 10 dez. 2012.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino da matemátia.** Campinas: Autores Associados, 2006.

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Educação Matemática em Revista,** Porto Alegre, v. 9, n. 9/10, 2004-2005.

ORGANIZAÇÃO EUROPEIA PARA A COOPERAÇÃO ECONÓMICA. **Mathématiques Nouvelles.** Paris, 1961b.

ORGANIZAÇÃO EUROPEIA PARA A COOPERAÇÃO ECONÓMICA. Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignment secondaire. Paris, 1961b.

PINTO, A. H. **Educação matemática e formação para o trabalho: práticas escolares na Escola Técnica de Vitória de 1960 a 1990**. 2006. Tese (Doutorado em Educação em Matemática-Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão**.** REVEMAT: **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, 2012. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187 >. Acesso em: 10 dez. 2012.

SHAW, G. L. Modernização do Ensino de Ciências e Matemática no Ginásio Sagrado Coração – Senhor do Bonfim/Bahia (1950-1976)" Universidade Federal da Bahia-UFBA/Universidade Estadual de Feira de Santana-UEFS. In: COLÓQUIO INTERNACIONAL EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE, 4., 2010, Laranjeiras. **Anais**... Laranjeiras, SE: 2010.

SOARES, F. S. **Movimento da matemática moderna no Brasil:** avanço ou retrocesso? Rio de Janeiro: PUC/RJ, 2001.

WAGNER, E. **Poliedros.** Disponível em: <http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2005>. Acesso em: 10 dez. 2012.