



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Tadeu Matos Henriques Nascimento

ÁLGEBRA TROPICAL
Uma Abordagem Introdutória

Aracaju-SE

2016

TADEU MATOS HENRIQUES NASCIMENTO

ALGEBRA TROPICAL
Uma Abordagem Introdutória

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. KALASAS VASCONCELOS DE ARAUJO

Aracaju-SE
2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

N244a Nascimento, Tadeu Matos Henriques
Álgebra Tropical: Uma abordagem introdutória / Tadeu
Matos Henriques Nascimento; orientador Kalasas Vasconcelos
de Araújo. - São Cristóvão, 2016.
86 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade
Federal de Sergipe, 2016.

1. Geometria algébrica. 2. Álgebra. 3. Matrizes
(Matemática). 4. Matemática. I. Araújo, Kalsas Vasconcelos
de, orient. II. Título.

CDU: 512.7



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

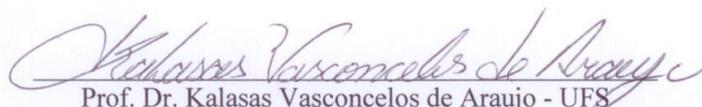


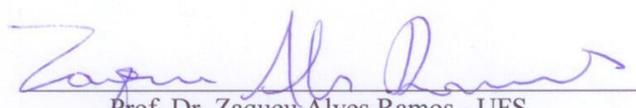
Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

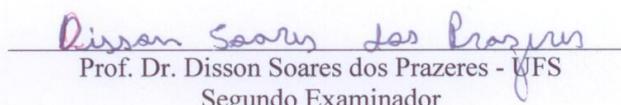
Álgebra Tropical: Uma Abordagem Introdutória
por

Tadeu Matos Henriques Nascimento

Aprovada pela Banca Examinadora:


Prof. Dr. Kalasas Vasconcelos de Araujo - UFS
Orientador


Prof. Dr. Zaquiel Alves Ramos - UFS
Primeiro Examinador


Prof. Dr. Disson Soares dos Prazeres - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 31 de Maio de 2016.

Dizem que não é possível exprimir sentimentos com a matemática. Discordo. Dedico este trabalho a Marisilda, minha esposa, companheira, cúmplice, meu esteio a mais de um quarto de século, e o faço no simbolismo da equação: $\rho = 1 - \sin \alpha$. A você, Marisilda, todo meu amor.

Agradecimentos

A Marisilda pela presença constante e sobretudo pela compreensão com as horas de dedicação aos estudos, mesmo quando isso significou diminuir a frequência de visita aos nossos filhos.

A meus filhos Daniela e Fábio, ainda que distantes fisicamente, por estarem sempre ao meu lado, apoiando e torcendo. Obrigado por entenderem a minha ausência e de sua mãe.

A meus pais, Carlos e Aloilda, que ainda encontram palavras de estímulo.

Aos Professores com os quais convivemos ao longo desses dois anos, pelos ensinamentos.

Em especial ao Prof. Kalasas, que além de me ter aceito como orientando, brindou-me com uma excelente sugestão de tema.

Aos Colegas que tornaram os períodos de estudos mais leves e agradáveis.

Lista de Figuras

1.1	Matemático Imre Simon	5
2.1	Gráfico de $a \odot x^i$ ($a + i.x$)	11
2.2	Gráfico de uma função polinomial tropical de uma variável	12
2.3	Zeros de uma função polinomial tropical de uma variável	13
2.4	Gráfico de um polinômio tropical de grau 1	14
2.5	Gráfico de um polinômio tropical de grau 2	14
2.6	Zeros da função $P(x) = 4 \oplus 3 \odot x^2$	16
2.7	Polígono de Newton associado a um $P(x)$ de grau 2	17
2.8	Polígono de Newton associado a um $P(x)$ de grau 2	17
2.9	Polígono de Newton associado a um $P(x)$ de grau "n"	18
2.10	Polígono de Newton da função	18
2.11	$f(x) = 2 \oplus 4 \odot x \oplus 2 \odot x^4$	19
2.12	$g(x) = 2 \oplus 4 \odot x \oplus 3 \odot x^2 \oplus 2 \odot x^4$	19
2.13	Polígono de Newton de $f(x)$	20
2.14	Polígono de Newton de $g(x)$	20
2.15	Polígono de Newton de $P(x) = \bigoplus a_i \odot x^i$	21
4.1	Reta tropical	31
4.2	$b \odot x \oplus c \odot y$	32
4.3	$a \oplus c \odot y$	32
4.4	$a \oplus b \odot x$	32
4.5	Polígono de Newton de uma reta tropical	32
4.6	Polígono de Newton de uma curva tropical	33
4.7	Cônicas Caso 6	40
4.8	Cônica tropical não-degenerada	56
4.9	Cônica tropical degenerada (1)	58
4.10	Polígono de Newton de uma cônica tropical degenerada e suas subdivisões, ainda possíveis(1)	58
4.11	Cônica tropical degenerada (2)	60

4.12 Polígono de Newton de uma cônica tropical degenerada e suas subdivisões, ainda possíveis(2)	61
4.13 Retas determinadas por $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (2, 3)$	65
4.14 Retas determinadas por $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (3, 2)$	65
4.15 Retas determinadas por $P_1 = (2, 1)$ e $P_2 = (2, 3)$	66
4.16 Cônica determinada por 5 pontos conhecidos	66
4.17 Interseção de retas tropicais em 1 único ponto	67
4.18 Interseção de retas tropicais em infinitos pontos	67
4.19 Polígono de Newton das cônicas geradas pela interseção de 2 retas tropicais	69
4.20 Cônica tropical definida por 5 pontos conhecidos	72

Lista de Tabelas

Resumo

Frequentemente a matemática é vista pelos alunos do ensino médio como uma ciência restrita à memorização de fórmulas e conceitos. Portanto, limitante em sua essência. O trabalho busca reverter tal visão através da apresentação de um novo campo de estudos: A Álgebra Tropical. Área relativamente nova da matemática que guarda a curiosa característica de tratar as operações de adição e multiplicação de forma diferente da tradicional, já apresenta resultados práticos interessantes. A Álgebra Tropical será apresentada de forma didática, comparando-a com a álgebra tradicional e mostrando as consequências das operações tropicais no estudo dos polinômios, matrizes e geometria, além de apresentar algumas aplicações práticas.

Palavras-chave: Álgebra tropical. Álgebra max-plus. Geometria tropical.

Abstract

Often mathematics is seen by high school students as a science restricted to memorizing formulas and concepts. Therefore limiting in its essence. The work seeks to reverse that view by submitting a new field of study: Tropical Algebra. Relatively new area of mathematics that keeps the curious feature to handle the operations of addition and multiplication differently from traditional, already presents interesting practical results. Tropical algebra will be presented in a didactic way, comparing it with the traditional algebra, showing the consequences of tropical operations in the study of polynomials, matrices and geometry, and presenting some practical applications.

Keywords: Tropical algebra. Max-plus algebra. Tropical geometry.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
Resumo	x
Abstract	xi
1 Apresentação	4
1.1 Motivação	4
1.2 Um pouco de história	5
1.3 Semi-anel	6
1.4 Álgebra max-plus e min-plus	6
1.4.1 Taboada Tropical	7
1.4.2 Propriedades	7
1.4.3 Demonstração das Propriedades	8
2 Polinômios	11
2.1 Conceitos Gerais	11
2.1.1 Monômio	11
2.1.2 Polinômios	11
2.2 Raízes	12
2.2.1 Polinômio com uma variável e grau 1	13
2.2.2 Polinômio com uma variável e grau 2	13
2.2.3 Polinômio com uma variável e grau "n"	16
2.3 Polinômios Equivalentes	19
2.4 Polinômio de Coeficientes Máximos	20
2.5 Teorema Fundamental da Algebra Tropical	21
3 Matrizes	23
3.1 Matrizes	23
3.1.1 Matriz nula e matriz identidade	23
3.1.2 Operações tropicais com matrizes	24

3.1.3	Propriedades	24
3.1.4	Demonstrações	24
3.1.5	Potência tropical de uma matriz	26
3.2	Determinantes	27
4	Geometria Tropical	29
4.1	Conceitos Gerais	29
4.2	Retas Tropicais	30
4.2.1	Reta tropical: $b \odot x \oplus c \odot y$	31
4.2.2	Reta tropical: $a \oplus c \odot y$	31
4.2.3	Reta tropical: $a \oplus b \odot x$	31
4.3	Polígono de Newton	31
4.4	Cônicas	33
4.4.1	Introdução	33
4.4.2	Análise algébrica de $P(x, y)$ com grau 2	34
4.4.3	Estudo dos Δ_{v_i}	36
4.4.4	Estudo das cônicas	40
4.4.5	Cônicas degeneradas	54
4.5	Curvas Tropicais - Generalidades	61
4.5.1	Determinação de uma curva tropical a partir de pontos conhecidos	61
4.5.2	Interseção de retas tropicais	66
4.5.3	Do literal ao numérico - análise de uma cônica tropical	69

Introdução

Este trabalho busca apresentar a Álgebra Tropical. Através de uma abordagem didática no plano serão introduzidos os conceitos que guiam esse novo campo de estudo da matemática.

A partir de sua principal característica, que é tratar de forma diferente a operações de adição e multiplicação, será construído, paulatinamente, o arcabouço teórico para o estudo de diversas estruturas matemáticas como os polinômios e as matrizes além de aplicações na geometria.

Pretende-se, com isso, estimular o estudo da matemática, mostrando que há muita coisa nova e interessante para se estudar e que é preciso desnudar-se de idéias pré-concebidas e ter a mente aberta a novos conhecimentos.

Ao admitirmos a possibilidade de realizarmos operações tão básicas e sedimentadas como adição e multiplicação, de outra forma, nos deparamos com um mundo novo de possibilidades.

No Capítulo 1 - Apresentação - introduziremos a Álgebra Tropical. Será feito um breve histórico e em seguida serão exibidos os conceitos básicos envolvendo as operações (adição e multiplicação) tropicais e demonstradas suas propriedades.

No Capítulo 2 - Polinômios - serão abordadas as consequências das operações matemáticas no estudo dos polinômios. Serão vistos os conceitos e forma de cálculo das raízes dos polinômios tropicais, o que vêm a ser polinômios equivalentes e polinômios de grau máximo. Por fim será enunciado o teorema fundamental da Álgebra Tropical.

No Capítulo 3 - Matrizes - serão estudadas as operações tropicais envolvendo matrizes, as propriedades dessas operações e principalmente o conceito de determinante tropical.

No Capítulo 4 - Geometria Tropical - apresentaremos a geometria tropical. A partir do estudo dos polinômios tropicais de 2 variáveis serão analisadas as equações que dão origem às retas tropicais. Será visto também o polígono de Newton associado às curvas tropicais e, a partir desta ferramenta, partiremos para o estudo das cônicas tropicais. Trataremos de algumas generalidades na área como determinação de retas e cônicas a partir de pontos conhecidos e interseção de retas tropicais. Por fim será feita a análise de uma cônica particular (exemplo numérico) para fixação dos conceitos apresentados.

Capítulo 1

Apresentação

1.1 Motivação

Frequentemente a matemática é vista pelos alunos do ensino médio como uma ciência restrita à memorização de fórmulas e conceitos. Portanto, limitante em sua essência.

Nada mais equivocado!

Ao comentar as palavras de Georg Cantor: "A essência da matemática está em sua liberdade", o matemático Edward Frenkel [17] afirma que "A matemática nos ensina a analisar a realidade com rigor, estudar os fatos, segui-los aonde quer que nos levem. Isso nos liberta de dogmas e preconceitos, fomenta a capacidade de inovação. Portanto, proporciona ferramentas que transcendem o próprio sujeito."

Neste trabalho será apresentada a Álgebra Tropical. Área relativamente nova da matemática que guarda a curiosa característica de tratar as operações de adição e multiplicação de forma diferente da tradicional.

Ao admitirmos a possibilidade de realizarmos operações tão básicas e sedimentadas como essas, de outra forma, nos deparamos com um mundo novo de possibilidades.

Apesar da formulação aparentemente exótica, os estudos já apresentam aplicações práticas interessantes.

Ao trazer a nova temática à baila, pretende-se estimular o estudo da matemática, mostrando que é preciso desnudar-se de idéias pré-concebidas e ter a mente aberta a novos conhecimentos.

...
*O essencial é saber ver,
 Saber ver sem estar a pensar,
 Saber ver quando se vê,
 E nem pensar quando se vê
 Nem ver quando se pensa.
 Mas isso (tristes de nós que trazemos a alma vestida!),
 Isso exige um estudo profundo,
 Uma aprendizagem de desaprender*
 ...
 (Alberto Caeiro, in "O Guardador de Rebanhos - Poema XXIV"
 Heterônimo de Fernando Pessoa)

O campo tem atraído os estudiosos pela força dos resultados já alcançados.

Será feita uma apresentação da teoria comparando-a com a álgebra tradicional.

Através de uma abordagem didática pretende-se mostrar as consequências das operações tropicais no estudo dos polinômios, matrizes e até mesmo geometria. Por fim serão vistas algumas aplicações da nova teoria.

1.2 Um pouco de história

Álgebra Tropical é a álgebra max-plus e min-plus que teve o termo "tropical" sido adotado em homenagem ao Matemático IMRE SIMON.



Figura 1.1: Matemático Imre Simon

Húngaro de nascimento, o professor brasileiro Imre Simon graduou-se em Engenharia Eletrônica na USP (1966) e fez importantes contribuições na teoria dos semi-grupos.

O termo "tropical" não tem nenhum significado especial além da visão que os franceses, que cunharam a terminologia, tinham do Brasil.

Segundo Speyer e Sturmfels [36], o "adjetivo tropical foi cunhado por matemáticos franceses, incluindo Jean-Eric Pin, em homenagem ao colega brasileiro Imre Simon".

Outros matemáticos como Dominique Perrin e Christian Choffrut também são citados como responsáveis pela homenagem.

1.3 Semi-anel

Definição 1.1 *Semi-anel é uma estrutura algébrica dotada das operações de adição e multiplicação que satisfazem as seguintes condições:*

- *Associatividade*
- *Comutatividade*
- *Elemento neutro*
- *Distributividade da multiplicação sobre a adição*

São exemplos de semi-anel [23]:

- $(\mathbb{N} \cup \infty, mdc, \times)$
- $(\mathbb{N} \cup \infty, min, +)$
- $(\mathbb{R} \cup -\infty, max, +)$
- (\mathbb{I}, max, min) onde $\mathbb{I} = [0, 1]$

1.4 Álgebra max-plus e min-plus

Álgebra max-plus e/ou álgebra min-plus é a álgebra desenvolvida no conjunto \mathbb{T} , que é o conjunto dos reais estendidos, munidos de duas operações: adição e multiplicação.

Na álgebra tropical, as operações de adição e multiplicação realizam-se de maneira diversa da tradicional.

O resultado da adição é o maior ou menor valor entre aqueles envolvidos na operação enquanto a multiplicação é a soma tradicional.

- Álgebra max-plus

$$\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Adição: representada pelo símbolo \oplus

$$\text{onde: } a \oplus b = \max \{a, b\}$$

Multiplicação: representada pelo símbolo \odot ou \otimes

$$\text{onde: } a \odot b = a + b$$

- Álgebra min-plus

$$\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Adição: representada pelo símbolo \oplus

onde: $a \oplus b = \min \{a, b\}$

Multiplicação: representada pelo símbolo \odot ou \otimes

onde: $a \odot b = a + b$

Neste trabalho apresentaremos a teoria para a álgebra max-plus. Para sua correlata os conceitos são análogos.

1.4.1 Taboada Tropical

Com essas regras anteriormente expostas temos a seguinte "Taboada Tropical":

\oplus	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	2	3	4	5	6	7	8	9
3	3	3	3	4	5	6	7	8	9
4	4	4	4	4	5	6	7	8	9
5	5	5	5	5	5	6	7	8	9
6	6	6	6	6	6	6	7	8	9
7	7	7	7	7	7	7	7	8	9
8	8	8	8	8	8	8	8	8	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

\odot	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

1.4.2 Propriedades

Para todo $a, b, c \in \mathbb{T}$ e $m, n \in \mathbb{N}$ valem as seguinte propriedades, que podem ser verificadas e aprofundadas em [5], [14], [16], [18], [22], [31], [35].

Adição

1. Elemento neutro - $a \oplus (-\infty) = a$
2. Associatividade - $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
3. Comutatividade - $a \oplus b = b \oplus a$
4. Idempotência - $a \oplus a = a$

Multiplicação

5. Elemento neutro - $a \odot 0 = a$
6. Inverso multiplicativo - $a \neq -\infty \Rightarrow \exists! b, a \odot b = 0$

7. Associatividade - $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
8. Comutatividade - $a \odot b = b \odot a$
9. Distributividade em relação à adição - $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$
10. Elemento absorvente - $a \odot (-\infty) = -\infty$

Potência

11. $a^n = n.a$
12. $a^m \odot a^n = a^{m \odot n}$
13. $(a^m)^n = a^{(m^n)}$
14. $a^m \odot b^m = (a \odot b)^m$

1.4.3 Demonstração das Propriedades

Propriedade 1: O elemento neutro da adição na álgebra tropical é $-\infty$, também denotado como ϵ

$$a \oplus (-\infty) = \max\{a, -\infty\} = a$$

Propriedade 2: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus c) &= \max\{a, (b \oplus c)\} \\ &= \max\{a, \max(b, c)\} \\ &= \max\{a, b, c\} \\ &= \max\{\max(a, b), c\} \\ &= \max\{(a \oplus b), c\} \\ &= (a \oplus b) \oplus c \end{aligned}$$

Propriedade 3: $a \oplus b = b \oplus a$

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max\{a, b\} \\ &= \max\{b, a\} \\ &= b \oplus a \end{aligned}$$

Propriedade 4: $a \oplus a = a$

$$\begin{aligned} a \oplus a &= \max\{a, a\} \\ &= a \end{aligned}$$

Propriedade 5: O elemento neutro da multiplicação na álgebra tropical é 0, também denotado como e

$$a \odot 0 = a + 0 = a$$

Propriedade 6: $a \neq -\infty \Rightarrow \exists! b, a \odot b = 0$

Propriedade 7: $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus c$

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a + (b + c) \\ &= a + b + c \\ &= (a + b) + c \\ &= (a \odot b) \oplus c \end{aligned}$$

Propriedade 8: $a \odot b = b \odot a$

$$\begin{aligned} a \odot b &= a + b \\ &= b + a \\ &= b \odot a \end{aligned}$$

Propriedade 9: $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a + \max\{b, c\} \\ &= \max\{a \odot b, a \odot c\} \\ &= \max\{a + b, a + c\} \\ &= (a + b) \oplus (a + c) \\ &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) \end{aligned}$$

Propriedade 10: $a \odot (-\infty) = -\infty = (-\infty) \odot a$

Propriedade 11: $a^n = n.a$

$$\begin{aligned} a^n &= \underbrace{a \odot a \odot \cdots \odot a \odot a}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{a + a + \cdots + a + a}_{n \text{ vezes}} \\ &= n.a \end{aligned}$$

Propriedade 12: $a^m \odot a^n = a^{m \odot n}$

$$\begin{aligned} a^m \odot a^n &= \underbrace{a \odot a \odot \cdots \odot a \odot a}_{m \text{ vezes}} \odot \underbrace{a \odot a \odot \cdots \odot a \odot a}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{a + a + \cdots + a + a}_{m \text{ vezes}} + \underbrace{a + a + \cdots + a + a}_{n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{a + a + \cdots + a + a}_{m+n \text{ vezes}} \\ &= \underbrace{a \odot a \odot \cdots \odot a \odot a}_{m \odot n \text{ vezes}} \\ &= a^{m \odot n} \end{aligned}$$

Propriedade 13: $(a^m)^n = a^{(m^n)}$

$$\begin{aligned}
 (a^m)^n &= \underbrace{(a^m) \odot (a^m) \odot \cdots \odot (a^m) \odot (a^m)}_{n \text{ vezes}} \\
 &= \underbrace{a \odot \cdots \odot a \odot \cdots \odot a \odot \cdots \odot a}_{m \text{ vezes} \quad m \text{ vezes}} \\
 &= \underbrace{a \odot a \odot \cdots \odot a \odot a}_{m \odot \cdots \odot m \text{ vezes}} \\
 &= \underbrace{a \odot a \odot \cdots \odot a \odot a}_{m^n \text{ vezes}} \\
 &= a^{(m^n)}
 \end{aligned}$$

Propriedade 14: $a^m \odot b^m = (a \odot b)^m$

$$\begin{aligned}
 a^m \odot b^m &= \underbrace{a \odot a \odot \cdots \odot a \odot a}_{m \text{ vezes}} \odot \underbrace{b \odot b \odot \cdots \odot b \odot b}_{m \text{ vezes}} \\
 &= \underbrace{a + a + \cdots + a + a}_{m \text{ vezes}} + \underbrace{b + b + \cdots + b + b}_{m \text{ vezes}} \\
 &= \underbrace{(a + b) + (a + b) + \cdots + (a + b) + (a + b)}_{m \text{ vezes}} \\
 &= \underbrace{(a \odot b) \odot (a \odot b) \odot \cdots \odot (a \odot b) \odot (a \odot b)}_{m \text{ vezes}} \\
 &= (a \odot b)^m
 \end{aligned}$$

Capítulo 2

Polinômios

2.1 Conceitos Gerais

2.1.1 Monômio

Monômio é uma expressão algébrica composta pelo produto de um coeficiente e variáveis (literais). Mais precisamente: $ax^i y^j z^k$, $a, i, j, k \in \mathbb{N}$

Na álgebra tropical o monômio do exemplo acima adquire a forma $a \odot x^i \odot y^j \odot z^k$, o que equivale, na álgebra tradicional, a: $a + i.x + j.y + k.z$.

Ou seja, um monômio tropical é uma função linear com coeficientes inteiros.

Seja, então, o monômio tropical de uma variável: $a \odot x^i$. Na álgebra tradicional $P(x) = a + i.x$. Graficamente, o monômio estará representado na figura 2.1.

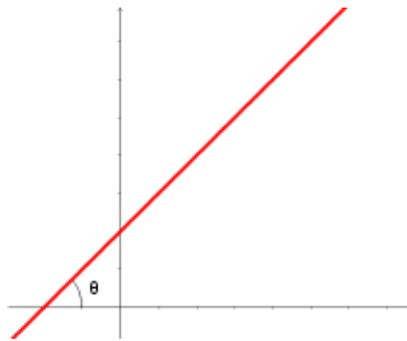


Figura 2.1: Gráfico de $a \odot x^i$ ($a + i.x$)

onde $\tan \theta = i$

Ou seja, o coeficiente a do monômio é o ponto no qual a reta intersecta o eixo OY e o expoente (i) da variável é o coeficiente angular da reta.

Como $i \geq 0$, a função definida pelo monômio tropical é não-decrescente.

2.1.2 Polinômios

Um polinômio tropical, por sua vez, é uma combinação de monômios tropicais:

$$P(x_1, \dots, x_n) = a \odot x_1^{i_1} \odot x_2^{i_2} \cdots \odot x_n^{i_n} \oplus b \odot x_1^{j_1} \odot x_2^{j_2} \cdots \odot x_n^{j_n} \oplus \dots$$

$$a, b, i, j \in \mathbb{N}$$

Observação 2.1 Assim como na álgebra tradicional, um polinômio tropical em uma variável representa uma função $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ que possui a seguinte forma:

$$P(x) = \bigoplus_{i=0}^n a_i \odot x^i$$

Ou seja, na álgebra tradicional $P(x) = \max_{i=0}^n \{a_i + i \cdot x\}$.

Logo, uma função polinomial tropical é uma função afim por partes e poderá ser representada graficamente como na figura 2.2.

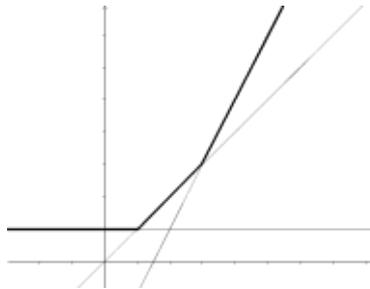


Figura 2.2: Gráfico de uma função polinomial tropical de uma variável

2.2 Raízes

Na álgebra tradicional, as raízes de uma função polinomial $P(x)$ são os pontos x tais que $P(x) = 0$.

Isso não se aplica à álgebra tropical. De fato, observe a seguinte função:

$$P(x) = 4 \oplus 3 \odot x^2 \tag{2.1}$$

Se usássemos da analogia, as raízes seriam os pontos tais que $P(x) = -\infty$. Para a equação proposta, contudo, não há solução possível. Senão, vejamos:

$$P(x) = 4 \oplus 3 \odot x^2$$

$$P(x) = \max\{4, 3 + 2x\}$$

$$P(x) \geq 4$$

Ou seja, $P(x)$ nunca será $-\infty$.

Definição 2.1 As raízes de um polinômio tropical $P(x) = \bigoplus_{i=0}^n a_i \odot x^i$ são os números x_0 para os quais existem i e j , distintos, tais que $P(x) = a_i + ix_0 = a_j + jx_0$.

Ou seja, o máximo de $P(x)$ é atingido pelo menos duas vezes em x_0

Definição 2.2 A multiplicidade de uma raiz é dada pela diferença entre as inclinações das retas que se encontram neste ponto.

Graficamente, as raízes de uma função polinomial tropical são os pontos para os quais o gráfico de $P(x)$ tem uma “quina”. Ou ainda, as raízes são os pontos nos quais a função muda a inclinação (ver figura 2.3).

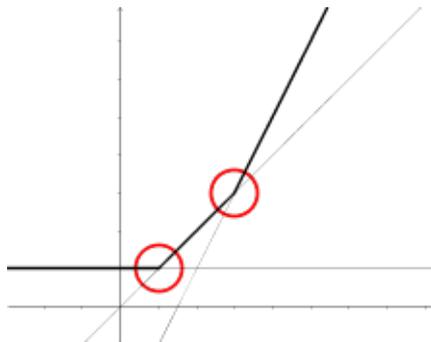


Figura 2.3: Zeros de uma função polinomial tropical de uma variável

Passemos, então, a calcular as raízes de polinômios tropicais de uma variável.

2.2.1 Polinômio com uma variável e grau 1

Seja o polinômio $P(x) = a \oplus b \odot x$

Então

$$P(x) = \max\{a, b + x\}$$

Como a raiz é o ponto comum entre as funções afins que compõem o polinômio temos:

$$a = b + x \Rightarrow x = a - b$$

2.2.2 Polinômio com uma variável e grau 2

Seja o polinômio $P(x) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot x^2$

Então

$$P(x) = \max\{a, b + x, c + 2x\}$$

Logo, para cálculo das raízes temos as seguintes equivalências:

$$\begin{cases} a = b + x \geq c + 2x & \text{(I)} \\ a = c + 2x \geq b + x & \text{(II)} \\ b + x = c + 2x \geq a & \text{(III)} \end{cases}$$

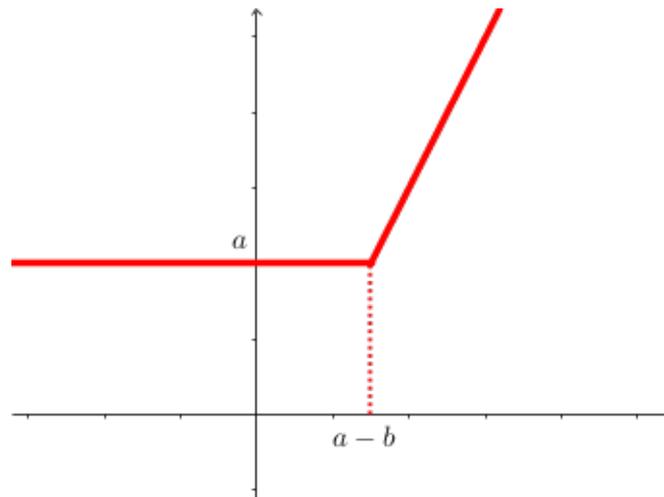


Figura 2.4: Gráfico de um polinômio tropical de grau 1

Por se tratar de um polinômio de grau 2, serão 2 raízes ou 1 raiz de multiplicidade 2. Análise das situações possíveis:

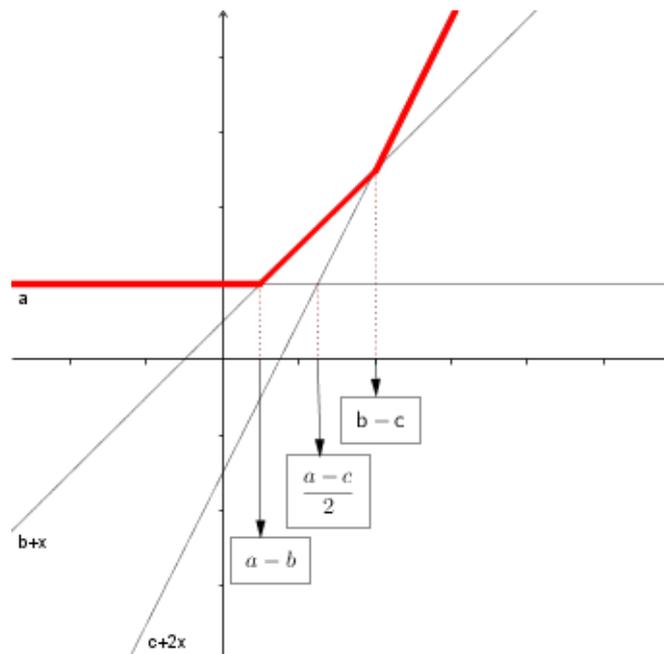


Figura 2.5: Gráfico de um polinômio tropical de grau 2

- Condição (I)

$$a = b + x \Rightarrow \boxed{x = a - b}$$

$$a \geq c + 2x$$

$$a \geq c + 2(a - b)$$

$$a \geq c + 2a - 2b$$

$$\boxed{a \leq 2b - c}$$

- Condição (II)

$$a = c + 2x \Rightarrow \boxed{x = \frac{a - c}{2}}$$

$$a \geq b + x$$

$$a \geq b + \frac{a - c}{2}$$

$$2a \geq 2b + a - c$$

$$\boxed{a \geq 2b - c}$$

- Condição (III)

$$b + x = c + 2x \Rightarrow \boxed{x = b - c}$$

$$b + x \geq a$$

$$b + b - c \geq a$$

$$\boxed{a \leq 2b - c}$$

Assim, podem ser atendidas simultaneamente as condições I e III ou a condição II. No primeiro caso as raízes do polinômio serão $x_1 = a - b$ e $x_2 = b - c$. No segundo caso haverá uma raiz de multiplicidade 2, $x = \frac{a - c}{2}$.

Analisando o polinômio 2.1 temos:

$$P(x) = 4 \oplus 3 \odot x^2 = 4 \oplus -\infty + x \oplus 3 \odot x^2$$

ou seja,

$$P(x) = \max\{4, -\infty + x, 3 + 2x\}$$

onde: $a = 4, b = -\infty, c = 3$

- Condição I e II

$$a \leq 2b - c$$

$$4 \leq 2 \cdot (-\infty) - 3 \text{ (FALSO)}$$

Condição NÃO ATENDIDA

- Condição III

$$a \leq 2b - c$$

$$4 \leq 2 \cdot (-\infty) - 3 \text{ (VERDADEIRO)}$$

Condição ATENDIDA

Então $P(x) = 4 \oplus 3 \odot x^2$ possui uma única raiz de multiplicidade 2, $x = \frac{a - c}{2}$.

$$x = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2}$$

Graficamente:

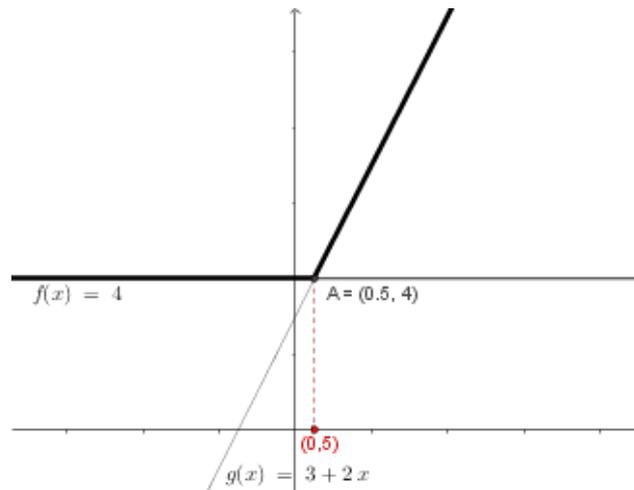


Figura 2.6: Zeros da função $P(x) = 4 \oplus 3 \odot x^2$

2.2.3 Polinômio com uma variável e grau "n"

À medida que o grau "n" do polinômio cresce, mais rapidamente cresce o número de equações e inequações a serem analisadas para que se obtenha algebricamente as raízes do polinômio.

Para tais casos utiliza-se então o polígono de Newton.

Definição 2.3 O polígono de Newton associado a um polinômio tropical $P(x) = \bigoplus_{i=0}^n a_i \odot x^i$ é a envoltória superior convexa dos pontos (i, a_i) .

Tomemos como exemplo o polinômio de grau 2: $P(x) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot x^2$.

Ao plotarmos os pontos $(1, a)$, $(2, b)$ e $(3, c)$ para construir o polígono de Newton associado a $P(x)$, nos deparamos com duas possibilidades de envoltória superior convexa, conforme se vê nas figuras 2.7 e 2.8.

Se observarmos o estudo apresentado na seção 2.2.2 veremos que foram exatamente duas as possibilidades de configuração do polinômio com uma variável e grau 2. Isso porque existe uma bijeção entre o polinômio e seu polígono de Newton associado.

Vejamos inicialmente o caso apresentado na figura 2.7.

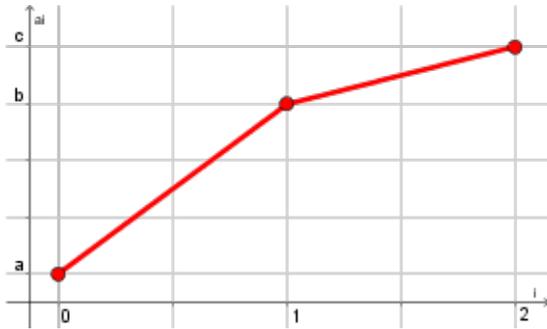


Figura 2.7: Polígono de Newton associado a um $P(x)$ de grau 2

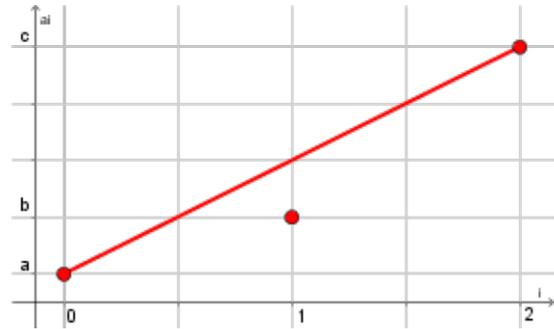


Figura 2.8: Polígono de Newton associado a um $P(x)$ de grau 2

Neste caso $b > \frac{a+c}{2}$. Os três pontos (i, a_i) estão sobre a envoltória do polígono de Newton.

Cada ponto equivale a um monômio que em algum momento foi o máximo de $P(x) = \max_{i=1}^n \{a_i + ix\}$.

Também podemos notar que o polígono de Newton é composto por dois segmentos e o polinômio possui 2 raízes.

No caso da figura 2.8 em que $b < \frac{a+c}{2}$, o polígono de Newton possui um único segmento e o polinômio uma única raiz.

Ou seja, cada raiz do polinômio corresponde a um segmento do polígono de Newton associado, de tal modo que as raízes do polinômio podem ser definidas pela aresta correspondente do polígono de Newton.

Pode-se mostrar que as raízes de um polinômio tropical são o inverso da inclinação de cada um dos segmentos de reta que compõem o polígono de Newton associado.

Por exemplo, no caso da figura 2.7 temos as seguintes inclinações:

$$\tan \theta_1 = \frac{b-a}{1-0} = b-a$$

$$\tan \theta_2 = \frac{c-b}{2-1} = c-b$$

As raízes serão, portanto, " $a-b$ " e " $b-c$ ", exatamente o calculado na seção 2.2.2.

De igual modo, para o caso da figura 2.8, temos:

$$\tan \theta_3 = \frac{c-a}{2-0} = \frac{c-a}{2}$$

Logo a raiz será $\frac{a-c}{2}$, também como já visto na seção 2.2.2.

Assim, o polígono de Newton associado a um polinômio $P(x)$ de grau " n " terá a forma geral da figura 2.9.

Verificamos, portanto, que é mais simples estudar o polinômio com sua variável e grau " n " através de seu polígono de Newton associado.

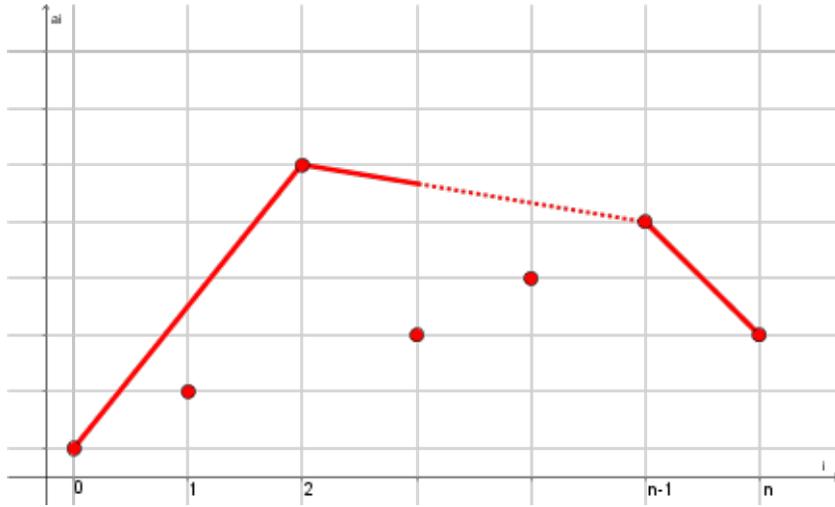


Figura 2.9: Polígono de Newton associado a um $P(x)$ de grau "n"

Obviamente o polígono de Newton associado a um polinômio de grau "n" terá, no máximo, "n" segmentos. Sendo o número de segmentos menor do que "n", significa a existência de multiplicidade de raízes.

Como consequência da definição 2.2 a multiplicidade da raiz será dada pela diferença entre as abscissas dos lados que compõem o respectivo polígono.

Ou seja, tomando $P(x) = \bigoplus_{i=0}^6 a_i \odot x^i$, tal que o polígono de Newton associado seja o gráfico 2.10, temos um polinômio com três raízes, já que o polígono de Newton associado é formado por três segmentos.



Figura 2.10: Polígono de Newton da função

Como a raiz é o inverso da inclinação do segmento de reta, então:

$$r_1 = -\frac{a_2 - a_0}{2 - 0} = -\frac{a_2 - a_0}{2}$$

$$r_2 = -\frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = -\frac{a_5 - a_2}{3}$$

$$r_3 = -\frac{a_6 - a_5}{6 - 5} = -(a_6 - a_5)$$

Observe que, apesar do grau do polinômio ser 6, foram encontradas “apenas” três raízes, isso porque existe multiplicidade.

Então a multiplicidade será dada por:

$$m_1 = 2 - 0 = 2$$

$$m_2 = 5 - 2 = 3$$

$$m_3 = 6 - 5 = 1$$

Ou seja, este polinômio possui raízes r_1, r_2 e r_3 com multiplicidade 2, 3 e 1, respectivamente.

2.3 Polinômios Equivalentes

Definição 2.4 *Dois polinômios tropicais são ditos equivalentes quando, apesar de diferentes, representam a mesma função polinomial tropical.*

Vejamos o exemplo:

$$f(x) = 2 \oplus 4 \odot x \oplus 2 \odot x^4 \tag{2.2}$$

$$g(x) = 2 \oplus 4 \odot x \oplus 3 \odot x^2 \oplus 2 \odot x^4 \tag{2.3}$$

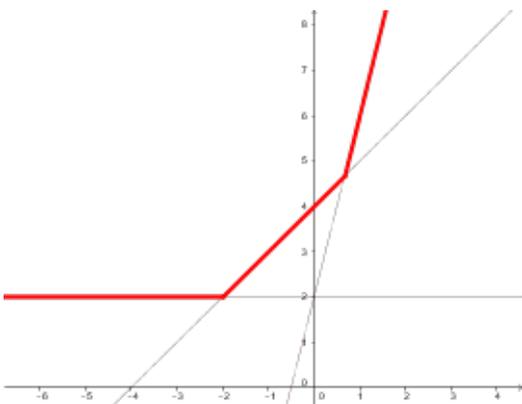


Figura 2.11: $f(x) = 2 \oplus 4 \odot x \oplus 2 \odot x^4$

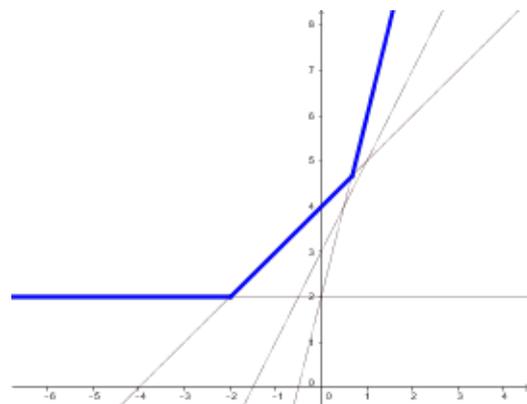


Figura 2.12: $g(x) = 2 \oplus 4 \odot x \oplus 3 \odot x^2 \oplus 2 \odot x^4$

Observe que, apesar de $f(x)$ e $g(x)$ serem diferentes, representam a mesma função polinomial e possuem, portanto, a mesma representação gráfica. Diz-se que $f(x)$ é equivalente a $g(x)$ ou simplesmente $(f \sim g)$.

Analisemos agora $f(x)$ e $g(x)$ utilizando o polígono de Newton.

Observação 2.2 *Polinômios tropicais equivalentes possuem o mesmo polígono de Newton associado.*

Utilizando os exemplos 2.2 e 2.3 temos os polígonos de Newton das figuras 2.13 e 2.14.



Figura 2.13: Polígono de Newton de $f(x)$

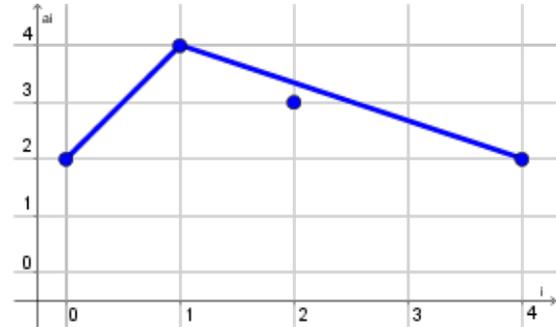


Figura 2.14: Polígono de Newton de $g(x)$

Podemos observar que o polígono é o mesmo. O que seria de se esperar, já que, como visto anteriormente (figuras 2.11 e 2.12), ambas as funções possuem as mesmas raízes.

De forma genérica, considerando um polinômio qualquer, verifica-se que, o acréscimo, supressão ou simples modificação de pontos, que não altere a envoltória do polígono de Newton associado não alterará também as raízes da função polinomial.

2.4 Polinômio de Coeficientes Máximos

Definição 2.5 *O coeficiente a_i de um polinômio tropical $P(x)$ é dito coeficiente máximo se, para qualquer $b > a_i$, o polinômio $Q(x)$ formado pela substituição de a_i por b não for equivalente a $P(x)$.*

Definição 2.6 *Polinômio de grau máximo é o polinômio cujos coeficientes são todos coeficientes máximos.*

Todo polinômio tropical é equivalente a um único polinômio de coeficientes máximos e as raízes desse polinômio são as raízes do polinômio de coeficientes máximos equivalente.

Passemos então a calcular os coeficientes máximos de um polinômio tropical.

Tomemos o polinômio $P(x) = \bigoplus a_i \odot x^i$ cujo polígono de Newton está representado na figura 2.15.

Observe que os pontos que definem a envoltória $\{r, j, k, n\}$ não podem sofrer variação sob pena de modificarem o polígono. Eles já são pontos de máximo. Então, a_r, a_j, a_k e a_n são coeficientes máximos. Há que se enfatizar que os pontos extremos $\{r, n\}$, são pontos de máximos, ou seja, os coeficientes dos monômios de menor e maior grau do polinômio são coeficientes máximos.

Se a_j e a_k , $k > j$ são coeficientes máximos, então, tomando-se i , tal que $j < i < k$, teremos a_i situado no segmento $\overline{(j, a_j)(k, a_k)}$ ou abaixo dele no polígono de Newton associado.

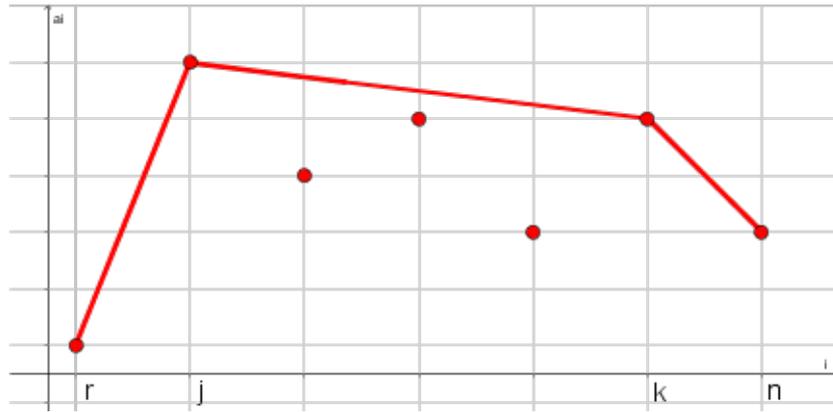


Figura 2.15: Polígono de Newton de $P(x) = \bigoplus a_i \odot x^i$

Ou seja, a_i será coeficiente máximo ou será no máximo o valor calculado na seguinte equação obtida pela relação entre triângulos equivalentes:

$$\frac{a_j - a_i}{i - j} = \frac{a_j - a_k}{k - j}$$

Desenvolvendo temos:

$$a_j - a_i = \frac{(a_j - a_k)(i - j)}{k - j}$$

$$a_i = \frac{(a_k - a_j)(i - j)}{k - j} + a_j$$

$$a_i = \frac{a_k(i - j) - a_j(i - j) + a_j(k - j)}{k - j}$$

$$a_i = \frac{a_k(i - j) - a_j(k - j - i + j)}{k - j}$$

$$a_i = \frac{a_k(i - j) - a_j(k - i)}{k - j}$$

Logo, o coeficiente máximo do polinômio será obtido por:

$$a_i = \max \left\{ \{a_i\} \cup \left\{ \frac{a_k(i - j) - a_j(k - i)}{k - j} \mid r \leq j < i < k \leq n \right\} \right\}$$

2.5 Teorema Fundamental da Álgebra Tropical

Na seção anterior vimos os conceitos de polinômio de coeficientes máximos e funções polinomiais tropicais equivalentes.

Com base nesses conceitos passemos a enunciar o Teorema Fundamental da Álgebra Tropical, cuja prova pode ser encontrada em [37].

Teorema 2.1 *Se $P(x) = \bigoplus_{i=0}^n a_i \odot x^i$ e é um polinômio de coeficientes máximos, então $P(x)$ pode ser escrito, de forma única, como:*

$$P(x) = a_n \odot \left(x \oplus \frac{a_{i_r-1} - a_{i_r}}{i_r - i_{r-1}} \right)^{i_r - i_{r-1}} \odot \cdots \odot \left(x \oplus \frac{a_{i_1} - a_{i_2}}{i_2 - i_1} \right)^{i_2 - i_1}$$

Como todo polinômio tropical é equivalente a um único polinômio de coeficientes máximos, então, todo polinômio tropical só pode ser fatorado de forma única como produto de fatores lineares.

Esse teorema não se aplica a polinômios com mais de uma variável.

Capítulo 3

Matrizes

3.1 Matrizes

As matrizes tropicais, tal qual na álgebra tradicional, compõem-se de um conjunto de elementos dispostos ordenadamente em uma tabela com linhas e colunas bem definidas.

O que a álgebra tropical traz de mudanças são alguns tipos de matrizes e as operações, que serão vistas a seguir.

3.1.1 Matriz nula e matriz identidade

A matriz nula é uma matriz formada por elementos iguais a zero. Ocorre que, na álgebra tropical (max-plus), o elemento neutro da adição não é zero e sim $-\infty$.

Então a matriz nula terá a seguinte configuração:

$$[-\infty] := \begin{bmatrix} -\infty & \cdots & -\infty \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & \cdots & -\infty \end{bmatrix}$$

De modo análogo, a matriz identidade é aquela na qual a diagonal principal é formada por elementos iguais a 1 e os demais iguais a zero.

O 1, que é o elemento neutro da multiplicação tradicional, será substituído por 0 que é o elemento neutro desta operação tropical.

A matriz identidade será:

$$[I] := \begin{bmatrix} 0 & -\infty & \cdots & -\infty \\ -\infty & 0 & \cdots & -\infty \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\infty & -\infty & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

3.1.2 Operações tropicais com matrizes

Da mesma forma que na álgebra linear teremos as seguintes operações com matrizes, para $\alpha \in \mathbb{T}$ e $A, B \in \mathbb{T}^{n \times n}$

- Adição

$$A \oplus B := (A_{ij} \oplus B_{ij}) = \max\{A_{ij}, B_{ij}\}, \text{ para } 1 \leq i, j \leq n$$

- Produto por escalar

$$\alpha \odot A := (\alpha \odot A_{ij}) = (\alpha + A_{ij}), \text{ para } 1 \leq i, j \leq n$$

- Produto matricial

$$A \otimes B := \left(\bigoplus_{k=1}^n (A_{ik} \otimes B_{kj}) \right) = (\max\{A_{ik} + B_{kj}\}), \text{ para } 1 \leq i, j \leq n$$

3.1.3 Propriedades

Dadas as matrizes $A, B, C \in \mathbb{T}^{m \times n}$ e $\alpha \in \mathbb{T}$, temos as seguintes propriedades, que podem ser avistadas, juntamente com suas respectivas demonstrações, em [6], [5]:

1. Existe uma matriz nula tal que $A \oplus [-\infty] = A$
2. $A \oplus B = B \oplus A$
3. $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
4. $\alpha \odot A = A \odot \alpha$
5. $\alpha \odot (A \oplus B) = (\alpha \odot A) \oplus (\alpha \odot B)$

Sejam A uma matriz $m \times n$, B uma matriz $n \times p$, C uma matriz $p \times q$. Então:

6. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
7. $\alpha \odot (A \otimes B) = A \otimes (\alpha \odot B) = (A \otimes B) \odot \alpha$

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Então:

8. $A \otimes I = I \otimes A = A$

3.1.4 Demonstrações

Propriedade 1:

$$A \oplus [0] = \max\{A_{ij}, -\infty\} = A$$

Propriedade 2:

$$A \oplus B = \max\{A_{ij}, B_{ij}\} = \max\{B_{ij}, A_{ij}\} = B \oplus A$$

Propriedade 3:

$$\begin{aligned} A \oplus (B \oplus C) &= \max\{A_{ij}, \max\{B_{ij}, C_{ij}\}\} = \max\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}\} = \\ &= \max\{\max\{A_{ij}, B_{ij}\}, C_{ij}\} = (A \oplus B) \oplus C \end{aligned}$$

Propriedade 4:

$$\alpha \odot A =$$

$$\begin{aligned} \alpha \odot \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha + A_{11} & \cdots & \alpha + A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha + A_{m1} & \cdots & \alpha + A_{mn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} + \alpha & \cdots & A_{1n} + \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} + \alpha & \cdots & A_{mn} + \alpha \end{bmatrix} = A \odot \alpha \end{aligned}$$

Propriedade 5:

$$\alpha \odot (A \oplus B) =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \alpha + \max\{A_{11}, B_{11}\} & \cdots & \alpha + \max\{A_{1n}, B_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha + \max\{A_{m1}, B_{m1}\} & \cdots & \alpha + \max\{A_{mn}, B_{mn}\} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \max\{\alpha + A_{11}, \alpha + B_{11}\} & \cdots & \max\{\alpha + A_{1n}, \alpha + B_{1n}\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max\{\alpha + A_{m1}, \alpha + B_{m1}\} & \cdots & \max\{\alpha + A_{mn}, \alpha + B_{mn}\} \end{bmatrix} = \\ &= (\alpha \odot A) \oplus (\alpha \odot B) \end{aligned}$$

Propriedade 6:

$$\begin{aligned}
 (A \otimes B) \otimes C &= \bigoplus_{l=1}^p \left(\left(\bigoplus_{k=1}^n (A_{ik} \otimes B_{kl}) \right)_{il} \otimes C_{lj} \right) = \\
 &= \max_{1 \leq l \leq p} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \{A_{ik} + B_{kl}\} + C_{lj} \right\} = \\
 &= \max_{1 \leq l \leq p} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \{A_{ik} + B_{kl} + C_{lj}\} \right\} = \\
 &= \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \max_{1 \leq l \leq p} \{A_{ik} + B_{kl} + C_{lj}\} \right\} = \\
 &= \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ A_{ik} + \max_{1 \leq l \leq p} \{B_{kl} + C_{lj}\} \right\} = \\
 &= \bigoplus_{k=1}^n \left(A_{ik} \otimes \left(\bigoplus_{l=1}^p (B_{kl} \otimes C_{lj}) \right)_{kj} \right) = \\
 &= A \otimes (B \otimes C)
 \end{aligned}$$

Propriedade 7:

$$\begin{aligned}
 \alpha \odot (A \otimes B) &= \alpha + \max\{A_{ik} + B_{kj}\} = \\
 &= \max\{A_{ik} + \alpha + B_{kj}\} = A \otimes (\alpha \odot B)
 \end{aligned}$$

Como pela propriedade 4 $\alpha \odot (A \otimes B) = (A \otimes B) \odot \alpha$

então:

$$\alpha \odot (A \otimes B) = A \otimes (\alpha \odot B) = (A \otimes B) \odot \alpha$$

3.1.5 Potência tropical de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Então:

$$\begin{aligned}
 A^{\otimes k} &= \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{k \text{ vezes}} \\
 A^{\otimes k} &= \bigoplus_{i_1=1}^n \bigoplus_{i_2=1}^n \cdots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^n [A_{i_1 i_1} \otimes A_{i_1 i_2} \otimes \cdots \otimes A_{i_{k-1} j}] \\
 &= \max \left\{ \sum_{l=0}^{k-1} A_{i_l i_{l+1}} : \begin{array}{l} 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n \\ i_0 = 1, i_k = j \end{array} \right\} \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

Prova:

Por indução temos que, para $k = 2$:

$$A \otimes A = \left(\bigoplus_{i_1=1}^n (A_{ii_1} \otimes A_{i_1j}) \right)$$

a equação é válida.

Para $k = 3$:

$$A^{\otimes 3} = A \otimes A \otimes A = A \otimes (A \otimes A)$$

$$A^{\otimes 3} = \bigoplus_{i_1=1}^n \left(A_{ii_1} \otimes \left(\bigoplus_{i_2=1}^n (A_{i_1i_2} \otimes A_{i_2j}) \right) \right)$$

$$A^{\otimes 3} = \bigoplus_{i_1=1}^n \bigoplus_{i_2=1}^n [A_{ii_1} \otimes A_{i_1i_2} \otimes A_{i_2j}]$$

a equação também é válida.

Supondo válida para algum k :

$$A^{\otimes k} = \bigoplus_{i_1=1}^n \bigoplus_{i_2=1}^n \cdots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^n [A_{ii_1} \otimes A_{i_1i_2} \otimes \cdots \otimes A_{i_{k-1}j}]$$

$$A^{\otimes k+1} = A \otimes A^{\otimes k}$$

$$A^{\otimes k+1} = \bigoplus_{i_1=1}^n \left(A_{ii_1} \otimes \left(\bigoplus_{i_2=1}^n \bigoplus_{i_3=1}^n \cdots \bigoplus_{i_{k-1}=1}^n [A_{i_1i_2} \otimes A_{i_2i_3} \otimes \cdots \otimes A_{i_{k-1}j}] \right) \right)$$

$$A^{\otimes k+1} = \bigoplus_{i_1=1}^n \bigoplus_{i_2=1}^n \cdots \bigoplus_{i_k=1}^n [A_{ii_1} \otimes A_{i_1i_2} \otimes \cdots \otimes A_{i_kj}]$$

ou seja, é válida para $k + 1$, logo é válida $\forall k$.

Convencionou-se que $A^{\otimes 0} = [I]$

3.2 Determinantes

Na álgebra tradicional o determinante de uma matriz A é calculado da seguinte forma:

$$\det[A] = \sum_{\rho} \left((-1)^J \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right)$$

Onde:

ρ : Todas as $n!$ permutações possíveis entre os índices i .

J : Número de permutações para determinada configuração do conjunto $\sigma_{(i)}$.

$\sigma_{(i)}$: Conjunto contendo todos os índices permutados.

Ou seja, no caso de uma matriz 3 x 3, teremos $\rho = 3! = 6$:

ρ	$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\sigma(3)$	J
1	1	2	3	0
2	1	3	2	1
3	2	3	1	2
4	2	1	3	1
5	3	1	2	2
6	3	2	1	1

Então:

$$\det[A]_{3 \times 3} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

Como na álgebra tropical não tem sentido falar em subtração, então o termo $(-1)^J$ desaparece e o determinante tropical passará a ter a seguinte fórmula geral:

$$\text{tropdet}[A] = \bigoplus_{\rho} \left(\bigodot_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right)$$

Para uma matriz $[A]_{3 \times 3}$ o determinante tropical será:

$$\text{tropdet}[A]_{3 \times 3} = \max\{a_{11} + a_{22} + a_{33}, a_{11} + a_{23} + a_{32}, a_{12} + a_{23} + a_{31}, a_{12} + a_{21} + a_{33}, a_{13} + a_{21} + a_{32}, a_{13} + a_{22} + a_{31}\}$$

Se o máximo for atingido 2 ou mais vezes diz-se tratar-se de um determinante SINGULAR.

As propriedades do determinante tradicional a seguir não se aplicam ao determinante tropical:

- $\det[A + B] = \det[A] + \det[B]$
- $\det[A \cdot B] = \det[A] \cdot \det[B]$

Capítulo 4

Geometria Tropical

4.1 Conceitos Gerais

Quando abordamos o tema "polinômios", o fizemos para 1 variável apenas.

Se agora tomarmos um polinômio com 2 variáveis:

$$P(x, y) = \bigoplus_{i,j} a_{ij} \odot x^i \odot y^j$$

A representação gráfica dessa função polinomial será uma curva tropical.

Na álgebra tradicional $P(x, y) = \max_{i,j} \{a_{ij} + ix + jy\}$.

Definição 4.1 A curva tropical C definida por $P(x, y)$ é o conjunto dos pontos (x_0, y_0) tais que existam $(i, j) \neq (k, l)$ que verifiquem $P(x_0, y_0) = a_{ij} + ix_0 + jy_0 = a_{kl} + kx_0 + ly_0$.

Esta definição será melhor explorada algébrica e graficamente mais adiante.

Faz-se necessário, inicialmente, introduzir alguns conceitos:

- Aresta (e)

Trecho da curva tropical C , onde

$$a_{ij} + ix_0 + jy_0 = a_{kl} + kx_0 + ly_0$$

- Vértice (v_i)

É o ponto onde duas ou mais arestas se encontram. É uma raiz do polinômio.

- Peso da aresta (ω)

O peso da aresta de C será dado por:

$$\omega = MDC(|i - k|, |j - l|)$$

- Grau

$$\text{Grau}(P(x, y)) = \max\{i + j\}, \forall a_{ij} \neq -\infty$$

4.2 Retas Tropicais

Seja o polinômio $P(x, y) = a \oplus b \odot x \oplus c \odot y$. $P(x, y)$ é uma função polinomial de duas variáveis que pode ser reescrita como:

$$P(x, y) = a_{00} \odot x^0 \odot y^0 \oplus a_{10} \odot x^1 \odot y^0 \oplus a_{01} \odot x^0 \odot y^1$$

Ou seja, é uma função de grau 1.

Na álgebra tradicional a função será dada por:

$$P(x, y) = \max\{a, b + x, c + y\}$$

Utilizando-se desta igualdade e das definições da seção anterior temos:

$$\begin{cases} a = b + x \geq c + y & \text{(I)} \\ a = c + y \geq b + x & \text{(II)} \\ b + x = c + y \geq a & \text{(III)} \end{cases}$$

- Condição (I)

$$x = a - b$$

$$y \leq a - c$$

- Condição (II)

$$y = a - c$$

$$x \leq a - b$$

- Condição (III)

$$y = x + (b - c)$$

$$\begin{cases} x \geq a - b \\ y \geq a - c \end{cases}$$

Logo, o vértice da curva é $(a - b, a - c)$.

Todas as arestas possuem peso 1.

Graficamente temos a forma geométrica representada na figura 4.1 e denominada "reta tropical".

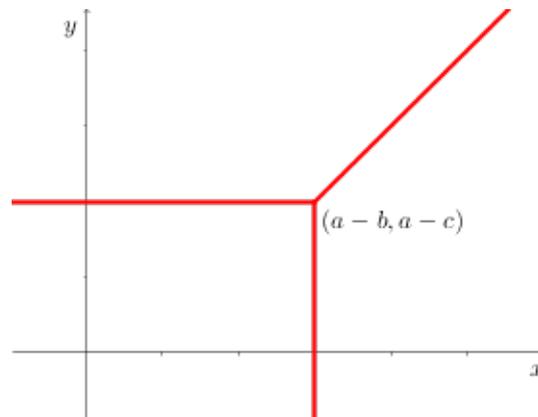


Figura 4.1: Reta tropical

Abordemos, agora, algumas situações que podem ocorrer em função dos coeficientes da função.

4.2.1 Reta tropical: $b \odot x \oplus c \odot y$

Como $a = -\infty$, então

$$b + x = c + y$$

$$\boxed{y = x + (b - c)}$$

Representação gráfica: Figura 4.2

4.2.2 Reta tropical: $a \oplus c \odot y$

Como $b = -\infty$, então

$$a = c + y$$

$$\boxed{y = a - c}$$

Representação gráfica: Figura 4.3

4.2.3 Reta tropical: $a \oplus b \odot x$

Como $c = -\infty$, então

$$b + x = a$$

$$\boxed{x = a - b}$$

Representação gráfica: Figura 4.4

4.3 Polígono de Newton

O polígono de Newton é uma ferramenta utilizada no estudo de polinômios.

Na seção 2.2.3 já fizemos uso dele. Naquela oportunidade, o polígono associado ao polinômio de 1 variável era formado pela envoltória superior convexa dos pontos (i, a_i) .

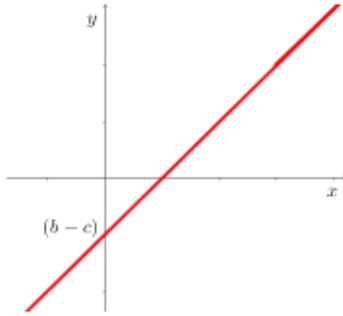


Figura 4.2: $b \odot x \oplus c \odot y$

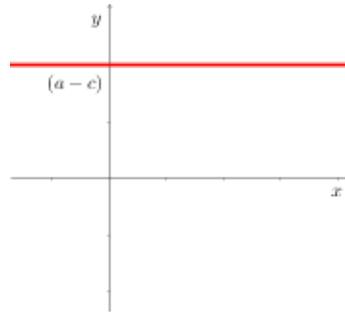


Figura 4.3: $a \oplus c \odot y$

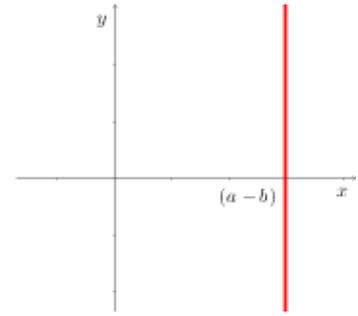


Figura 4.4: $a \oplus b \odot x$

Desta feita utilizaremos o polígono definido pelos pontos (i, j) dos monômios que compõem o polinômio a ser estudado.

Definição 4.2 O triângulo dual associado ao vértice $v = (x_0, y_0)$ de uma curva C definida pelo polinômio tropical $P(x, y)$ e denotado por Δ_v é a envoltória convexa formada pelos pontos (i, j) tal que $P(x_0, y_0) = a_{ij} + ix_0 + jy_0$.

Vamos iniciar analisando uma função polinomial de 2 variáveis e grau 1.

$$P(x, y) = \bigoplus_{i,j} a_{ij} \odot x^i \odot y^j$$

Como $i + j \leq 1$, então:

$$P(x, y) = \max\{a_{00}, a_{10} + x, a_{01} + y\}$$

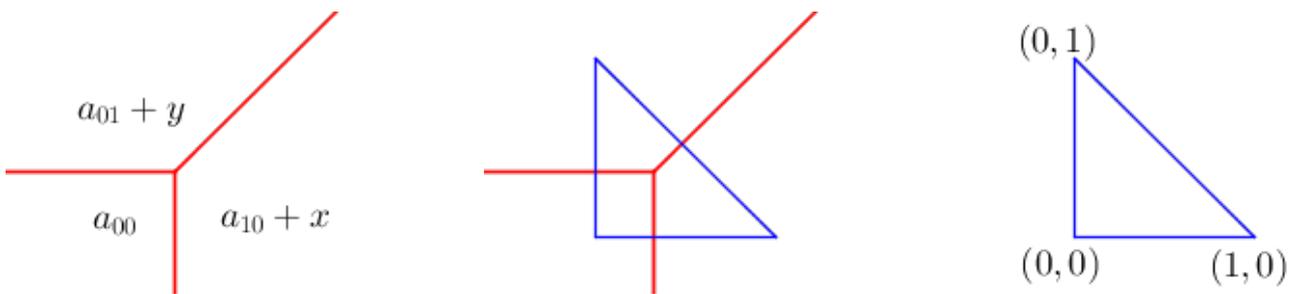


Figura 4.5: Polígono de Newton de uma reta tropical

Observe na figura 4.5 que cada uma das áreas delimitadas pelas arestas da curva corresponde a um dos monômios do polinômio e que o expoente de cada um deles formará um conjunto de pontos (i, j) tal que, se plotados, definirão um triângulo.

Note, ainda, que cada lado do triângulo corresponde a uma aresta da curva, sendo perpendicular a ela.

Esse triângulo é o polígono de Newton associado à curva tropical C e será denotado por Δ_C .

Se extrapolarmos e generalizarmos essa idéia para uma curva tropical de grau d , teremos que o polígono de Newton associado será Δ_d , já que $i + j \leq d$. Os pontos definidores de Δ_d serão $(0, 0)$, $(d, 0)$ e $(0, d)$, se $a_{ij} \neq -\infty$.

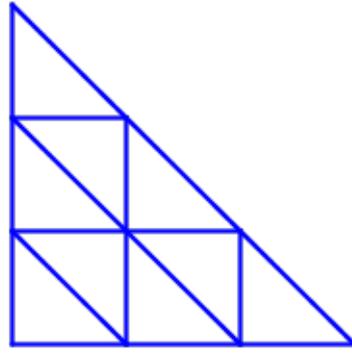


Figura 4.6: Polígono de Newton de uma curva tropical

Definição 4.3 A subdivisão dual de uma curva C definida pelo polinômio tropical $P(x, y)$ de grau d é a união dos triângulos Δ_v para cada vértice v de C .

$$\Delta_d = \bigcup \Delta_{v_i} \tag{4.1}$$

A figura 4.6 nos mostra uma divisão dual de um polígono de Newton e determina a forma da curva tropical associada além de outras informações sobre ela.

O Teorema a seguir aplica-se à construção dos polígonos de Newton associados a curvas tropicais. Maiores detalhes do mesmo encontra-se disponível em [32].

- Teorema 4.1**
1. Dois segmentos de Δ_d não se interceptam, exceto nos vértices ou se são coincidentes.
 2. Toda envoltória de Δ_d é convexa.
 3. Cada envoltória Δ_{v_i} corresponde a 1 vértice v_i

4.4 Cônicas

4.4.1 Introdução

Cônica tropical é a figura geométrica determinada por uma função polinomial tropical de duas variáveis e grau 2.

Assim, uma cônica tropical terá a seguinte forma geral:

$$P(x, y) = a \odot x^2 \oplus b \odot xy \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot x \oplus e \odot y \oplus f$$

Conforme já visto na seção 4.3, o polígono de Newton associado será Δ_2 , já que $i + j \leq 2$.

Δ_2 terá como vértices de sua envoltória: $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$ e como vértices internos: $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$

Esses vértices podem se combinar de diversas formas, sempre com $a_{ij} \neq -\infty$ e respeitando o teorema 4.1.

Como forma de identificar as curvas, utilizaremos a classificação adaptada de [15], e adotaremos a seguinte notação:

$$\text{Caso } Xy \{ \theta_1, \dots, \theta_n \}$$

onde:

X - é o número de coeficientes de $P(x, y)$ diferentes de $-\infty$

y - coeficiente(s)(literal) de $P(x, y) = -\infty$

θ_i - é o coeficiente angular das semi-retas e segmentos que representam os monômios de $P(x, y)$

4.4.2 Análise algébrica de $P(x, y)$ com grau 2

Considere-se o polinômio tropical:

$$P(x, y) = a \odot x^2 \oplus b \odot xy \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot x \oplus e \odot y \oplus f$$

Então

$$P(x, y) = \max\{a + 2x, b + x + y, c + 2y, d + x, e + y, f\}$$

Conforme definição 4.1, os termos da expressão anterior combinar-se-ão em igualdade dois a dois e serão maiores que os demais termos.

Como são seis termos, ter-se-ão C_2^6 possibilidades.

Passemos a analisar cada uma delas e definamos as condicionantes geradas:

$$\text{Situação 1: } a + 2x = b + x + y > \begin{cases} c + 2y \\ d + x \\ e + y \\ f \end{cases} \quad \text{Condicionante} \Rightarrow \{ 2b > c + a$$

$$\text{Situação 2: } a + 2x = c + 2y > \begin{cases} b + x + y \\ d + x \\ e + y \\ f \end{cases} \quad \text{Condicionante} \Rightarrow \{ 2b < c + a$$

$$\text{Situação 3: } a + 2x = d + x > \begin{cases} b + x + y \\ c + 2y \\ e + y \\ f \end{cases} \quad \text{Condicionante} \Rightarrow \{ 2d > f + a$$

$$\text{Situação 4: } a + 2x = e + y > \begin{cases} b + x + y \\ c + 2y \\ d + x \\ f \end{cases} \quad \text{Condicionantes} \Rightarrow \begin{cases} b - a < e - d \\ 2e > f + c \\ c - a < 2(e - d) \\ f - a < 2(e - b) \end{cases}$$

$$\text{Situação 5: } a + 2x = f > \begin{cases} b + x + y \\ c + 2y \\ d + x \\ e + y \end{cases} \quad \text{Condicionante} \Rightarrow \{ 2d < a + f$$

$$\text{Situação 6: } b + x + y = c + 2y > \begin{cases} a + 2x \\ d + x \\ e + y \\ f \end{cases} \quad \text{Condicionante} \Rightarrow \{ 2b > a + c$$

$$\text{Situação 7: } b + x + y = d + x > \begin{cases} a + 2x \\ c + 2y \\ e + y \\ f \end{cases} \quad \text{Condicionantes} \Rightarrow \begin{cases} 2b > c + a \\ d - a > e - b \\ 2d > f + a \end{cases}$$

$$\text{Situação 8: } b + x + y = e + y > \begin{cases} a + 2x \\ c + 2y \\ d + x \\ f \end{cases} \quad \text{Condicionantes} \Rightarrow \begin{cases} 2b > a + c \\ d - b < e - c \\ 2e > f + c \end{cases}$$

$$\text{Situação 9: } b + x + y = f > \begin{cases} a + 2x \\ c + 2y \\ d + x \\ e + y \end{cases} \quad \text{Condicionantes} \Rightarrow \begin{cases} 2b > c + a \\ b - d > \frac{c - f}{2} \\ e - b < \frac{f - a}{2} \\ e - b < f - d \end{cases}$$

$$\text{Situação 10: } c + 2y = d + x > \begin{cases} a + 2x \\ b + x + y \\ e + y \\ f \end{cases} \quad \text{Condicionantes} \Rightarrow \begin{cases} 2d > f + a \\ 2d > f + 2b - c \\ d + c > e + b \\ 2d + c > 2e + a \end{cases}$$

$$\text{Situação 11: } c + 2y = e + y > \begin{cases} a + 2x \\ b + x + y \\ d + x \\ f \end{cases} \quad \text{Condicionante} \Rightarrow \{ 2e > f + c$$

$$\text{Situação 12: } c + 2y = f > \begin{cases} a + 2x \\ b + x + y \\ d + x \\ e + y \end{cases} \text{ Condicionantes } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2e < f + c \end{array} \right.$$

$$\text{Situação 13: } d + x = e + y > \begin{cases} a + 2x \\ b + x + y \\ c + 2y \\ f \end{cases} \text{ Condicionantes } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2d > f + a \\ f - d < e - b \\ 2e > f + c \end{array} \right.$$

$$\text{Situação 14: } d + x = f > \begin{cases} a + 2x \\ b + x + y \\ c + 2y \\ e + y \end{cases} \text{ Condicionante } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2d > a + f \end{array} \right.$$

$$\text{Situação 15: } e + y = f > \begin{cases} a + 2x \\ b + x + y \\ c + 2y \\ d + x \end{cases} \text{ Condicionante } \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2e > c + f \end{array} \right.$$

4.4.3 Estudo dos Δ_{v_i}

De acordo com a equação 4.1 podemos estudar Δ_d a partir dos Δ_{v_i} que o compõe. Ademais, pelo teorema 4.1 sabemos que cada vértice da curva tropical depende exclusivamente de seu Δ_{v_i} associado.

Assim passaremos a estudar os diversos Δ_{v_i} mínimos, que podem compor alguma das combinações de Δ_2 .

Ora, como Δ_2 possui 6 vértices, então existem $C_3^6 - 3$ combinações de Δ_{v_i} mínimo possíveis. (As 3 exclusões referem-se às combinações que levam a pontos (i, j) colineares).

1. Δ_{abd}

Coordenadas: $(2, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} a + 2x = d + x \\ b + x + y = d + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = d - a \\ y = d - b \end{cases}$$

Inclinações (θ) : $\{1, 0, -\infty\}$

Pesos (ω) : $\{1, 1, 1\}$

2. Δ_{abe}

Coordenadas: $(2, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} a + 2x = e + y \\ b + x + y = e + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e - b \\ y = a + e - 2b \end{cases}$$

Inclinações (θ) : $\{1, -\infty, 2\}$

Pesos (ω): $\{1, 1, 1\}$

3. Δ_{abf}

Coordenadas: $(2, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} a + 2x = f \\ b + x + y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{f - a}{2} \\ y = \frac{f - a - 2b}{2} \end{cases}$$

Inclinações (θ): $\{1, -1, -\infty\}$

Pesos (ω): $\{1, 1, 2\}$

4. Δ_{acd}

Coordenadas: $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(1, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} a + 2x = d + x \\ c + 2y = d + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = d - a \\ y = \frac{2d - a - c}{2} \end{cases}$$

Inclinações (θ): $\left\{1, \frac{1}{2}, -\infty\right\}$

Pesos (ω): $\{2, 1, 1\}$

5. Δ_{ace}

Coordenadas: $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} a + 2x = e + y \\ c + 2y = e + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2e - c - a}{2} \\ y = e - c \end{cases}$$

Inclinações (θ): $\{1, 0, 2\}$

Pesos (ω): $\{2, 1, 1\}$

6. Δ_{acf}

Coordenadas: $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} a + 2x = f \\ c + 2y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{f - a}{2} \\ y = \frac{f - c}{2} \end{cases}$$

Inclinações (θ): $\{1, 0, -\infty\}$

Pesos (ω): $\{2, 2, 2\}$

7. Δ_{ade}

Coordenadas: $(2, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} a + 2x = e + y \\ d + x = e + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = d - a \\ y = 2d - a - e \end{cases}$$

Inclinações (θ): $\{-\infty, 1, 2\}$

Pesos (ω): $\{1, 1, 1\}$

8. Δ_{aef}

Coordenadas: $(2, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} a + 2x = f \\ e + y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{f - a}{2} \\ y = f - e \end{cases}$$

Inclinações (θ): $\{2, 0, -\infty\}$

Pesos (ω): $\{1, 1, 2\}$

9. Δ_{bcd}

Coordenadas: $(1, 1)$, $(0, 2)$ e $(1, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} b + x + y = d + x \\ c + 2y = d + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c + d - 2b \\ y = d - b \end{cases}$$

Inclinações (θ): $\left\{1, \frac{1}{2}, 0\right\}$

Pesos (ω): $\{1, 1, 1\}$

10. Δ_{bce}

Coordenadas: $(1, 1)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} b + x + y = e + y \\ c + 2y = e + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e - b \\ y = e - c \end{cases}$$

Inclinações (θ): $\{1, 0, -\infty\}$

Pesos (ω): $\{1, 1, 1\}$

11. Δ_{bcf}

Coordenadas: $(1, 1)$, $(0, 2)$ e $(0, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} b + x + y = f \\ c + 2y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{f + c - 2b}{2} \\ y = \frac{f - c}{2} \end{cases}$$

Inclinações (θ): $\{1, 0, -1\}$

Pesos (ω): $\{1, 2, 1\}$

12. Δ_{bde}

Coordenadas: $(1, 1)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} b + x + y = e + y \\ d + x = e + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e - b \\ y = d - b \end{cases}$$

Inclinações (θ): $\{0, 1, -\infty\}$

Pesos (ω): $\{1, 1, 1\}$

13. Δ_{bdf} Coordenadas: $(1, 1)$, $(1, 0)$ e $(0, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} b + x + y = f \\ d + x = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f - d \\ y = d - b \end{cases}$$

Inclinações (θ) : $\{0, -\infty, -1\}$ Pesos (ω) : $\{1, 1, 1\}$ 14. Δ_{bef} Coordenadas: $(1, 1)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} b + x + y = f \\ e + y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e - b \\ y = f - e \end{cases}$$

Inclinações (θ) : $\{-\infty, 0, -1\}$ Pesos (ω) : $\{1, 1, 1\}$ 15. Δ_{cde} Coordenadas: $(0, 2)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} c + 2y = e + y \\ d + x = e + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2e - c - d \\ y = e - c \end{cases}$$

Inclinações (θ) : $\left\{\frac{1}{2}, 1, 0\right\}$ Pesos (ω) : $\{1, 1, 1\}$ 16. Δ_{cdf} Coordenadas: $(0, 2)$, $(1, 0)$ e $(0, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} c + 2y = f \\ d + x = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f - d \\ y = \frac{f - c}{2} \end{cases}$$

Inclinações (θ) : $\left\{\frac{1}{2}, -\infty, 0\right\}$ Pesos (ω) : $\{1, 1, 2\}$ 17. Δ_{def} Coordenadas: $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$

$$\text{Vértice}(v) = \begin{cases} d + x = f \\ e + y = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = f - d \\ y = f - e \end{cases}$$

Inclinações (θ) : $\{1, 0, -\infty\}$ Pesos (ω) : $\{1, 1, 1\}$

4.4.4 Estudo das cônicas

Iniciaremos o estudo das cônicas pela forma genérica mais completa, qual seja:

$$P(x, y) = a \odot x^2 \oplus b \odot xy \oplus c \odot y^2 \oplus d \odot x \oplus e \odot y \oplus f$$

com $a, b, c, d, e, f \neq -\infty$

Neste caso teremos o Δ_2 composto por 6 pontos e as combinações possíveis são as representadas na figura 4.7

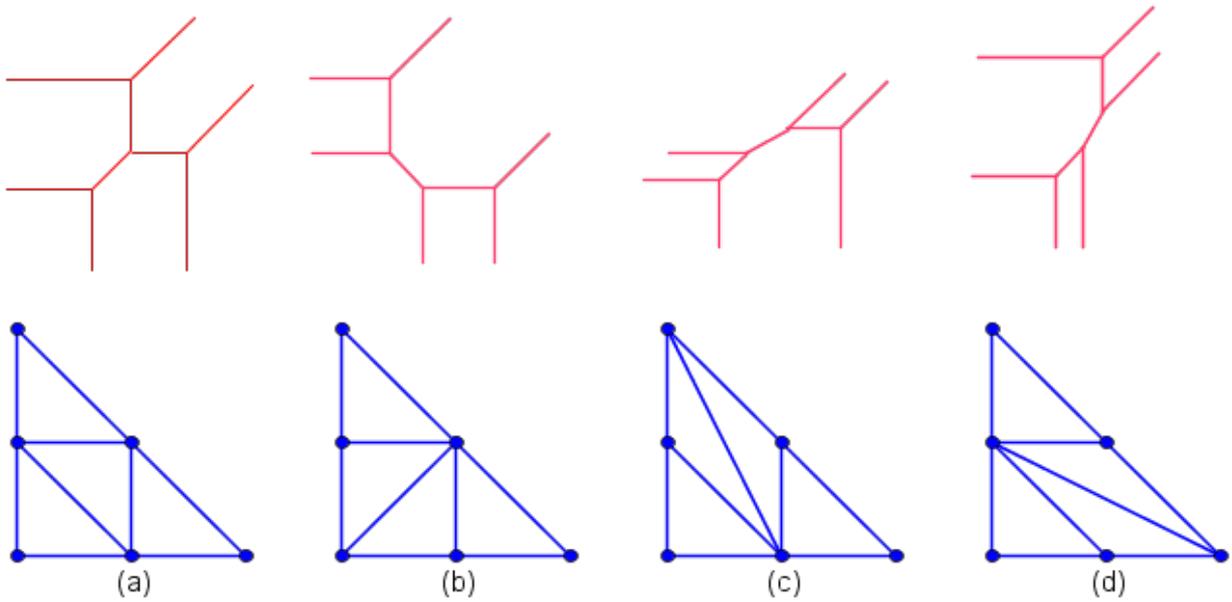


Figura 4.7: Cônicas Caso 6

Tomemos a primeira situação e passemos a analisá-la.

Note que $\Delta_2 = \Delta_{def} \cup \Delta_{bde} \cup \Delta_{abd} \cup \Delta_{bce}$

Como pelo teorema 4.1 cada Δ_{v_i} corresponde a um vértice da curva. Esta terá, então, 4 vértices que já foram calculados na seção 4.4.3. São eles:

$$V_1 = \begin{cases} x = f - d \\ y = f - e \end{cases}, V_2 = \begin{cases} x = e - b \\ y = d - b \end{cases}, V_3 = \begin{cases} x = d - a \\ y = d - b \end{cases}, V_4 = \begin{cases} x = e - b \\ y = e - c \end{cases}$$

De igual modo estão também definidos os pesos(ω) - todos iguais a 1 - e as inclinações $\theta = \{0, 1, -\infty\}$.

Assim, usando a classificação proposta podemos identificar esta cônica, representada na figura 4.7(a), como Caso 6 $\{0, 1, -\infty\}$.

Estas informações, contudo, não são suficientes para a identificação da cônica tropical. Lembremos que com todos os coeficientes diferentes de $-\infty$ temos 4 possibilidades distintas de forma geométrica.

Para diferenciá-las, faz-se então, necessário o estudo sobre as relações entre os coeficientes.

Identifiquemos, pois, as arestas que compõem a curva:

1. $a + 2x = b + x + y$
2. $a + 2x = d + x$
3. $b + x + y = c + 2y$
4. $b + x + y = d + x$
5. $b + x + y = e + y$
6. $c + 2y = e + y$
7. $d + x = e + y$
8. $d + x = f$
9. $e + y = f$

Ou seja, a cônica tropical que vem sendo analisada, foi classificada como Caso 6 $\{0, 1, -\infty\}$ pois sua forma era previamente conhecida. Caso conheça-se apenas sua equação deve-se analisar a relação entre seus coeficientes, conforme já visto na seção 4.4.2. No caso em apreço os coeficientes devem atender às seguintes condicionantes:

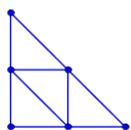
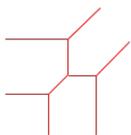
- $2b > c + a$
- $2d > f + a$
- $2e > f + c$
- $d - a > e - b$
- $d - b < e - c$
- $f - d < e - b$

Idêntica análise pode ser feita para as outras 3 combinações do Caso 6 ou para qualquer outra. Sugere-se a consulta a [15] para mais detalhes sobre a definição das condicionantes.

Apresentamos, a seguir, o resumo das características das cônicas tropicais não-degeneradas.

- Caso 6 $\{-\infty, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bce} \cup \Delta_{bde} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

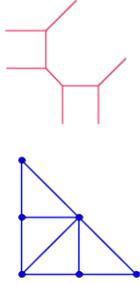
- $V_1 = (d - a, d - b)$
- $V_2 = (e - b, e - c)$
- $V_3 = (e - b, d - b)$
- $V_4 = (f - d, f - e)$

Condicionantes:

- $a, b, c, d, e, f \neq -\infty$
- $2b > c + a$
- $2d > f + a$
- $2e > f + c$
- $d - a > e - b$
- $d - b < e - c$
- $f - d < e - b$

- Caso 6 $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bce} \cup \Delta_{bdf} \cup \Delta_{bef}$$



Vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b)$$

$$V_2 = (e - b, e - c)$$

$$V_3 = (f - d, d - b)$$

$$V_4 = (e - b, f - e)$$

Condiciones:

$$a, b, c, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$d - b < e - c$$

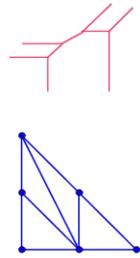
$$2(b - d) > c - f$$

$$2(e - b) < f - a$$

$$e - b < f - d$$

- Caso 6 $\{-\infty, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bcd} \cup \Delta_{cde} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b)$$

$$V_2 = (c + d - 2b, d - b)$$

$$V_3 = (2e - c - d, e - c)$$

$$V_4 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$a, b, c, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$2(d - b) > f - c$$

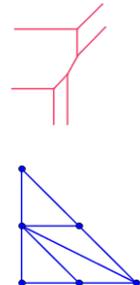
$$d + c > e + b$$

$$2d + c > 2e + a$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 6 $\{-\infty, 0, 1, 2\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abe} \cup \Delta_{ade} \cup \Delta_{bce} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$$

$$V_2 = (d - a, 2d - a - e)$$

$$V_3 = (e - b, e - c)$$

$$V_4 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$a, b, c, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$b - a < e - d$$

$$2e > f + c$$

$$c - a < 2(e - d)$$

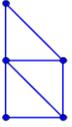
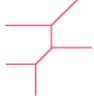
$$f - a < 2(e - b)$$

$$d - b < e - c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 5a $\{-\infty, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{bce} \cup \Delta_{bde} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = (e - b, e - c)$$

$$V_2 = (e - b, d - b)$$

$$V_3 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$a = -\infty \text{ e } b, c, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

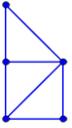
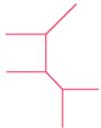
$$d - a > e - b$$

$$d - b < e - c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 5a $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{bce} \cup \Delta_{bdf} \cup \Delta_{bef}$$



Vértices:

$$V_1 = (e - b, e - c)$$

$$V_2 = (f - d, d - b)$$

$$V_3 = (e - b, f - e)$$

Condiciones:

$$a = -\infty \text{ e } b, c, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$d - b < e - c$$

$$2(b - d) > c - f$$

$$2(e - b) < f - a$$

$$e - b < f - d$$

- Caso 5a $\{-\infty, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{bcd} \cup \Delta_{cde} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = (c + d - 2b, d - b)$$

$$V_2 = (2e - c - d, e - c)$$

$$V_3 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$a = -\infty \text{ e } b, c, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$2(d - b) > f - c$$

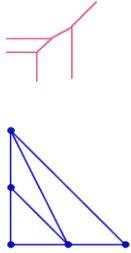
$$d + c > e + b$$

$$2d + c > 2e + a$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 5b $\{-\infty, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{acd} \cup \Delta_{cde} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = \left(d - a, \frac{2d - a - c}{2} \right)$$

$$V_2 = (2e - c - d, e - c)$$

$$V_3 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$b = -\infty \text{ e } a, c, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b < c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$2(d - b) > f - c$$

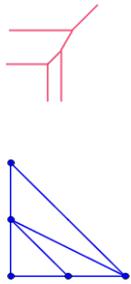
$$d + c > e + b$$

$$2d + c > 2e + a$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 5b $\{-\infty, 0, 1, 2\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{ace} \cup \Delta_{ade} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = \left(\frac{2e - c - a}{2}, e - c \right)$$

$$V_2 = (d - a, 2d - a - e)$$

$$V_3 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$b = -\infty \text{ e } a, c, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b < c + a$$

$$2d > f + a$$

$$b - a < e - d$$

$$2e > f + c$$

$$c - a < 2(e - d)$$

$$f - a < 2(e - b)$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 5c $\{-\infty, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bde} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b)$$

$$V_2 = (e - b, d - b)$$

$$V_3 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$c = -\infty \text{ e } a, b, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$d - b < e - c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 5c $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bdf} \cup \Delta_{bef}$$

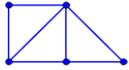


Vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b)$$

$$V_2 = (f - d, d - b)$$

$$V_3 = (e - b, f - e)$$



Condiciones:

$$c = -\infty \text{ e } a, b, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$d - b < e - c$$

$$2(b - d) > c - f$$

$$2(e - b) < f - a$$

$$e - b < f - d$$

- Caso 5c $\{-\infty, 0, 1, 2\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abe} \cup \Delta_{ade} \cup \Delta_{def}$$

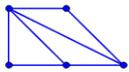


Vértices:

$$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$$

$$V_2 = (d - a, 2d - a - e)$$

$$V_3 = (f - d, f - e)$$



Condiciones:

$$c = -\infty \text{ e } a, b, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$b - a < e - d$$

$$2e > f + c$$

$$c - a < 2(e - d)$$

$$f - a < 2(e - b)$$

$$d - b < e - c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 5d $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abf} \cup \Delta_{bce} \cup \Delta_{bef}$$

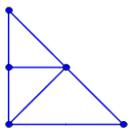


Vértices:

$$V_1 = \left(\frac{f - a}{2}, \frac{f - a - 2b}{2} \right)$$

$$V_2 = (e - b, e - c)$$

$$V_3 = (e - b, f - e)$$



Condiciones:

$$d = -\infty \text{ e } a, b, c, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2e > f + c$$

$$2d < a + f \text{ e } d - b < e - c$$

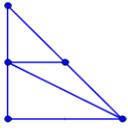
$$2(b - d) > c - f$$

$$2(e - b) < f - a$$

$$e - b < f - d$$

- Caso 5d $\{-\infty, 0, 1, 2\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abe} \cup \Delta_{aef} \cup \Delta_{bce}$$



Vértices:

$$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$$

$$V_2 = \left(\frac{f - a}{2}, f - e \right)$$

$$V_3 = (e - b, e - c)$$

Condiciones:

$$d = -\infty \text{ e } a, b, c, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$b - a < e - d$$

$$2e > f + c$$

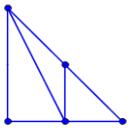
$$c - a < 2(e - d)$$

$$f - a < 2(e - b)$$

$$2d < a + f \quad d - b < e - c$$

- Caso 5e $\{-\infty, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bcd} \cup \Delta_{cdf}$$



Vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b)$$

$$V_2 = (c + d - 2b, d - b)$$

$$V_3 = \left(f - d, \frac{f - c}{2} \right)$$

Condiciones:

$$e = -\infty \text{ e } a, b, c, d, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$d - a > e - b$$

$$2(d - b) > f - c$$

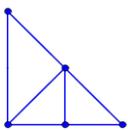
$$d + c > e + b$$

$$2d + c > 2e + a$$

$$2e < f + c$$

- Caso 5e $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bcf} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b)$$

$$V_2 = \left(\frac{f + c - 2b}{2}, \frac{f - c}{2} \right)$$

$$V_3 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$e = -\infty \text{ e } a, b, c, d, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$2(b - d) > c - f$$

$$2(e - b) < f - a$$

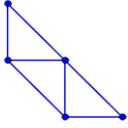
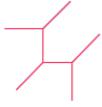
$$e - b < f - d$$

$$2e < f + c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 5f $\{-\infty, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bce} \cup \Delta_{bde}$$



Vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b)$$

$$V_2 = (e - b, e - c)$$

$$V_3 = (e - b, d - b)$$

Condiciones:

$$f = -\infty \text{ e } a, b, c, d, e \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

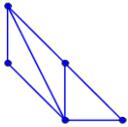
$$d - a > e - b$$

$$d - b < e - c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 5f $\{-\infty, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bcd} \cup \Delta_{cde}$$



Vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b)$$

$$V_2 = (c + d - 2b, d - b)$$

$$V_3 = (2e - c - d, e - c)$$

Condiciones:

$$f = -\infty \text{ e } a, b, c, d, e \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$2(d - b) > f - c$$

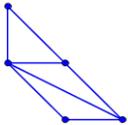
$$d + c > e + b$$

$$2d + c > 2e + a$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 5f $\{-\infty, 0, 1, 2\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abe} \cup \Delta_{ade} \cup \Delta_{bce}$$



Vértices:

$$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$$

$$V_2 = (d - a, 2d - a - e)$$

$$V_3 = (e - b, e - c)$$

Condiciones:

$$f = -\infty \text{ e } a, b, c, d, e \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$b - a < e - d$$

$$2e > f + c$$

$$c - a < 2(e - d)$$

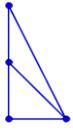
$$f - a < 2(e - b)$$

$$d - b < e - c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 4ab $\{-\infty, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{cde} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = (2e - c - d, e - c)$$

$$V_2 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$a = b = -\infty \text{ e } c, d, e, f \neq -\infty$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$2(d - b) > f - c$$

$$d + c > e + b$$

$$2d + c > 2e + a$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 4ac $\{-\infty, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{bde} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = (e - b, d - b)$$

$$V_2 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$a = c = -\infty \text{ e } b, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$d - b < e - c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 4ac $\{-\infty, -1, 0\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{bdf} \cup \Delta_{bef}$$



Vértices:

$$V_1 = (f - d, d - b)$$

$$V_2 = (e - b, f - e)$$

Condiciones:

$$a = c = -\infty \text{ e } b, d, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$d - b < e - c$$

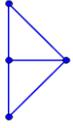
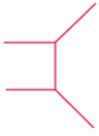
$$2(b - d) > c - f$$

$$2(e - b) < f - a$$

$$e - b < f - d$$

- Caso 4ad $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{bce} \cup \Delta_{bef}$$



Vértices:

$$V_1 = (e - b, e - c)$$

$$V_2 = (e - b, f - e)$$

Condiciones:

$$a = d = -\infty \text{ e } a, b, c, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - b < e - c$$

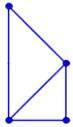
$$2(b - d) > c - f$$

$$2(e - b) < f - a$$

$$e - b < f - d$$

- Caso 4ae $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{bcf} \cup \Delta_{bdf}$$



Vértices:

$$V_1 = \left(\frac{f + c - 2b}{2}, \frac{f - c}{2} \right)$$

$$V_2 = (f - d, d - b)$$

Condiciones:

$$a = e = -\infty \text{ e } b, c, d, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$d - a > e - b$$

$$2(b - d) > c - f$$

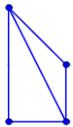
$$2(e - b) < f - a$$

$$e - b < f - d$$

$$2e < f + c$$

- Caso 4ae $\{-\infty, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{bcd} \cup \Delta_{cdf}$$



Vértices:

$$V_1 = (c + d - 2b, d - b)$$

$$V_2 = \left(f - d, \frac{f - c}{2} \right)$$

Condiciones:

$$a = e = -\infty \text{ e } b, c, d, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$d - a > e - b$$

$$2(d - b) > f - c$$

$$d + c > e + b$$

$$2d + c > 2e + a$$

$$2e < f + c$$

- Caso 4af $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{bcd} \cup \Delta_{cde}$$



Vértices:

$$V_1 = (c + d - 2b, d - b)$$

$$V_2 = (2e - c - d, e - c)$$

Condiciones:

$$a = f = -\infty \text{ e } b, c, d, e \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$2(d - b) > f - c$$

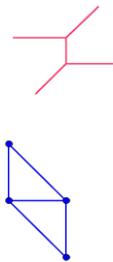
$$d + c > e + b$$

$$2d + c > 2e + a$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 4af $\{-\infty, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{bce} \cup \Delta_{bde}$$



Vértices:

$$V_1 = (e - b, e - c)$$

$$V_2 = (e - b, d - b)$$

Condiciones:

$$a = f = -\infty \text{ e } b, c, d, e \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$d - b < e - c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 4bc $\{-\infty, 0, 1, 2\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{ade} \cup \Delta_{def}$$



Vértices:

$$V_1 = (d - a, 2d - a - e)$$

$$V_2 = (f - d, f - e)$$

Condiciones:

$$b = c = -\infty \text{ e } a, d, e, f \neq -\infty$$

$$2d > f + a$$

$$b - a < e - d$$

$$2e > f + c$$

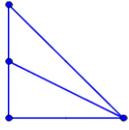
$$c - a < 2(e - d)$$

$$f - a < 2(e - b)$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 4bd $\{-\infty, 0, 1, 2\}$

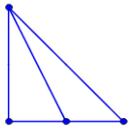
$$\Delta_2 = \Delta_{ace} \cup \Delta_{aef}$$



Vértices:
 $V_1 = \left(\frac{2e - c - a}{2}, e - c \right)$
 $V_2 = \left(\frac{f - a}{2}, f - e \right)$

Condiciones:
 $b = d = -\infty$ e $a, c, e, f \neq -\infty$
 $2b < c + a$
 $b - a < e - d$
 $2e > f + c$
 $c - a < 2(e - d)$
 $f - a < 2(e - b)$
 $2d < a + f$

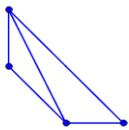
- Caso 4be $\{-\infty, 0, \frac{1}{2}, 1\}$
 $\Delta_2 = \Delta_{acd} \cup \Delta_{cdf}$



Vértices:
 $V_1 = \left(d - a, \frac{2d - a - c}{2} \right)$
 $V_2 = \left(f - d, \frac{f - c}{2} \right)$

Condiciones:
 $b = e = -\infty$ e $a, c, d, f \neq -\infty$
 $2b < c + a$
 $2d > f + a$
 $2(d - b) > f - c$
 $d + c > e + b$
 $2d + c > 2e + a$
 $2e < f + c$

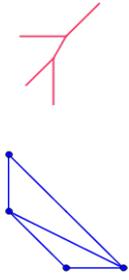
- Caso 4bf $\{-\infty, 0, \frac{1}{2}, 1\}$
 $\Delta_2 = \Delta_{acd} \cup \Delta_{cde}$



Vértices:
 $V_1 = \left(d - a, \frac{2d - a - c}{2} \right)$
 $V_2 = (2e - c - d, e - c)$

Condiciones:
 $b = f = -\infty$ e $a, c, d, e \neq -\infty$
 $2b < c + a$
 $2d > f + a$
 $2e > f + c$
 $2(d - b) > f - c$
 $d + c > e + b$
 $2d + c > 2e + a$
 $f - d < e - b$

- Caso 4bf $\{-\infty, 0, 1, 2\}$
 $\Delta_2 = \Delta_{ace} \cup \Delta_{ade}$



Vértices:

$$V_1 = \left(\frac{2e - c - a}{2}, e - c \right)$$

$$V_2 = (d - a, 2d - a - e)$$

Condicionantes:

$$b = f = -\infty \text{ e } a, c, d, e \neq -\infty$$

$$2b < c + a$$

$$2d > f + a$$

$$b - a < e - d$$

$$2e > f + c$$

$$c - a < 2(e - d)$$

$$f - a < 2(e - b)$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 4cd $\{-\infty, 0, 1, 2\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abe} \cup \Delta_{aef}$$



Vértices:

$$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$$

$$V_2 = \left(\frac{f - a}{2}, f - e \right)$$

Condicionantes:

$$c = d = -\infty \text{ e } a, b, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$b - a < e - d$$

$$2e > f + c$$

$$c - a < 2(e - d)$$

$$f - a < 2(e - b)$$

$$2d < a + f \text{ e } d - b < e - c$$

- Caso 4cd $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abf} \cup \Delta_{bef}$$



Vértices:

$$V_1 = \left(\frac{f - a}{2}, \frac{f - a - 2b}{2} \right)$$

$$V_2 = (e - b, f - e)$$

Condicionantes:

$$c = d = -\infty \text{ e } a, b, e, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2e > f + c$$

$$2d < a + f \text{ e } d - b < e - c$$

$$2(b - d) > c - f$$

$$2(e - b) < f - a$$

$$e - b < f - d$$

- Caso 4ce $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

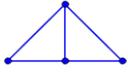
$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bdf}$$



Vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b)$$

$$V_2 = (f - d, d - b)$$



Condiciones:

$$c = e = -\infty \text{ e } a, b, d, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$d - a > e - b$$

$$2(b - d) > c - f$$

$$2(e - b) < f - a$$

$$e - b < f - d$$

- Caso 4cf $\{-\infty, 0, 1\}$

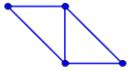
$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bde}$$



Vértices:

$$V_1 = (d - a, d - b)$$

$$V_2 = (e - b, d - b)$$



Condiciones:

$$c = f = -\infty \text{ e } a, b, d, e \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$2e > f + c$$

$$d - a > e - b$$

$$d - b < e - c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 4cf $\{-\infty, 1, 2\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abe} \cup \Delta_{ade}$$



Vértices:

$$V_1 = (e - b, a + e - 2b)$$

$$V_2 = (d - a, 2d - a - e)$$



Condiciones:

$$c = f = -\infty \text{ e } a, b, d, e \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$b - a < e - d$$

$$2e > f + c$$

$$c - a < 2(e - d)$$

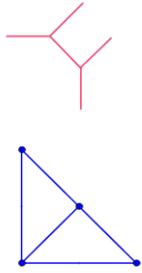
$$f - a < 2(e - b)$$

$$d - b < e - c$$

$$f - d < e - b$$

- Caso 4de $\{-\infty, -1, 0, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abf} \cup \Delta_{bcf}$$



Vértices:
 $V_1 = \left(\frac{f-a}{2}, \frac{f-a-2b}{2} \right)$
 $V_2 = \left(\frac{f+c-2b}{2}, \frac{f-c}{2} \right)$

Condicionantes:

$$d = e = -\infty \text{ e } a, b, c, f \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d < a + f \quad 2(b-d) > c - f$$

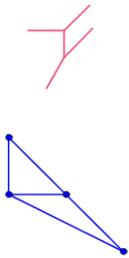
$$2(e-b) < f - a$$

$$e - b < f - d$$

$$2e < f + c$$

- Caso 4df $\{-\infty, 0, 1, 2\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abe} \cup \Delta_{bce}$$



Vértices:
 $V_1 = (e - b, a + e - 2b)$
 $V_2 = (e - b, e - c)$

Condicionantes:

$$d = f = -\infty \text{ e } a, b, c, e \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$b - a < e - d$$

$$2e > f + c$$

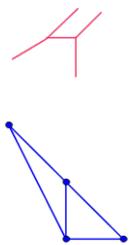
$$c - a < 2(e - d)$$

$$f - a < 2(e - b)$$

$$d - b < e - c$$

- Caso 4ef $\{-\infty, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

$$\Delta_2 = \Delta_{abd} \cup \Delta_{bcd}$$



Vértices:
 $V_1 = (d - a, d - b)$
 $V_2 = (c + d - 2b, d - b)$

Condicionantes:

$$e = f = -\infty \text{ e } a, b, c, d \neq -\infty$$

$$2b > c + a$$

$$2d > f + a$$

$$d - a > e - b$$

$$2(d - b) > f - c$$

$$d + c > e + b$$

$$2d + c > 2e + a$$

4.4.5 Cônicas degeneradas

O estudo realizado até agora destinou-se à análise das cônicas tropicais não-degeneradas.

Definição 4.4 *Uma curva tropical é dita não-degenerada quando o polígono de Newton a ela associado não pode ser mais subdividido.*

Vejamos um exemplo numérico onde possamos aplicar o conteúdo exposto:

Exemplo 4.1 Considere o seguinte polinômio tropical e a cônica por ele definida:

$$P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot xy \oplus 2 \odot y^2 \oplus 3 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 1$$

Então

$$P(x, y) = \max\{2 + 2x, 3 + x + y, 2 + 2y, 3 + x, 3 + y, 1\}$$

Vê-se, facilmente que todos os coeficientes são diferentes de $-\infty$ ($a = 2, b = 3, c = 2, d = 3, e = 3, f = 1$), logo, trata-se de uma curva do Caso 6.

Analisemos as condicionantes:

Caso 6	$\{0, 1, -\infty\}$		Caso 6	$\{-1, 0, 1, -\infty\}$	
$2b > c + a$	$6 > 4$	Atende	$2b > c + a$	$6 > 4$	Atende
$2d > f + a$	$6 > 3$	Atende	$2d > f + a$	$6 > 3$	Atende
$2e > f + c$	$6 > 3$	Atende	$2e > f + c$	$6 > 3$	Atende
$d - a > e - b$	$1 > 0$	Atende	$d - a > e - b$	$1 > 0$	Atende
$d - b < e - c$	$0 < 1$	Atende	$d - b < e - c$	$0 < 1$	Atende
$f - d < e - b$	$-2 < 0$	Atende	$2(b - d) > c - f$	$0 > 1$	NÃO ATENDE
			$2(e - b) < f - a$	$0 < -1$	NÃO ATENDE
			$e - b < f - d$	$0 < -2$	NÃO ATENDE

Caso 6	$\{0, \frac{1}{2}, 1, -\infty\}$		Caso 6	$\{0, 1, 2, -\infty\}$	
$2b > c + a$	$6 > 4$	Atende	$2b > c + a$	$6 > 4$	Atende
$2d > f + a$	$6 > 3$	Atende	$2d > f + a$	$6 > 3$	Atende
$2e > f + c$	$6 > 3$	Atende	$b - a < e - d$	$1 < 0$	NÃO ATENDE
$d - a > e - b$	$1 > 0$	Atende	$2e > f + c$	$6 > 3$	Atende
$2(d - b) > f - c$	$0 > -1$	Atende	$c - a < 2(e - d)$	$0 < 0$	NÃO ATENDE
$d + c > e + b$	$5 > 6$	NÃO ATENDE	$f - a < 2(e - b)$	$-1 < 0$	Atende
$2d + c > 2e + a$	$8 > 8$	NÃO ATENDE	$d - b < e - c$	$0 < 1$	Atende
$f - d < e - b$	$-2 < 0$	Atende	$f - d < e - b$	$-2 < 0$	Atende

Então $P(x, y)$ atende às condicionantes do Caso 6 $\{0, 1, -\infty\}$.

Calculando os vértices temos:

$$V_1 = (d - a, d - b) = (3 - 2, 3 - 3) = (1, 0)$$

$$V_2 = (e - b, e - c) = (3 - 3, 3 - 2) = (0, 1)$$

$$V_3 = (e - b, d - b) = (3 - 3, 3 - 3) = (0, 0)$$

$$V_4 = (f - d, f - e) = (1 - 3, 1 - 3) = (-2, -2)$$

Temos na figura 4.8 a representação da cônica e de seu polígono de Newton associado.

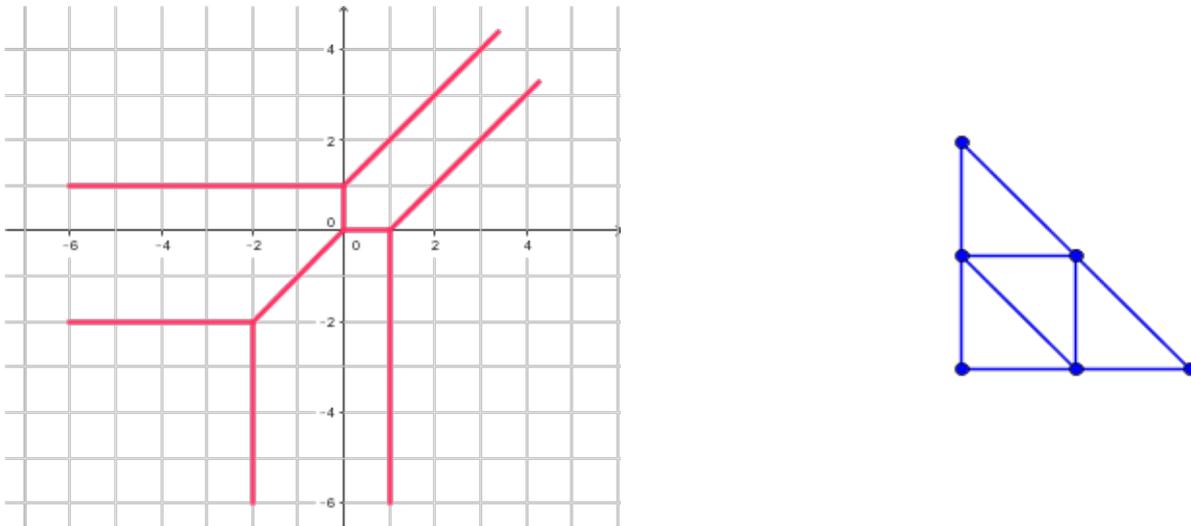


Figura 4.8: Cônica tropical não-degenerada

Observe, agora, um outro exemplo:

Exemplo 4.2 Considere o seguinte polinômio tropical e a cônica por ele definida:

$$P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 3 \odot xy \oplus 2 \odot y^2 \oplus 2 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 1$$

Então

$$P(x, y) = \max\{2 + 2x, 3 + x + y, 2 + 2y, 2 + x, 3 + y, 1\}$$

Tal qual o exemplo 1, trata-se de um Caso 6, já que todos os coeficientes são diferentes de $-\infty$ ($a = 2, b = 3, c = 2, d = 2, e = 3, f = 1$).

Entretanto, vejamos o que acontece quando analisamos as condicionantes:

Caso 6	$\{0, 1, -\infty\}$		Caso 6	$\{-1, 0, 1, -\infty\}$	
$2b > c + a$	$6 > 4$	<i>Atende</i>	$2b > c + a$	$6 > 4$	<i>Atende</i>
$2d > f + a$	$4 > 3$	<i>Atende</i>	$2d > f + a$	$4 > 3$	<i>Atende</i>
$2e > f + c$	$6 > 3$	<i>Atende</i>	$2e > f + c$	$6 > 3$	<i>Atende</i>
$d - a > e - b$	$0 > 0$	NÃO ATENDE	$d - a > e - b$	$0 > 0$	NÃO ATENDE
$d - b < e - c$	$-1 < 1$	<i>Atende</i>	$d - b < e - c$	$-1 < 1$	<i>Atende</i>
$f - d < e - b$	$-1 < 0$	<i>Atende</i>	$2(b - d) > c - f$	$2 > 1$	<i>Atende</i>
			$2(e - b) < f - a$	$0 < -1$	NÃO ATENDE
			$e - b < f - d$	$0 < -1$	NÃO ATENDE

Caso 6	$\{0, \frac{1}{2}, 1, -\infty\}$		Caso 6	$\{0, 1, 2, -\infty\}$	
$2b > c + a$	$6 > 4$	<i>Atende</i>	$2b > c + a$	$6 > 4$	<i>Atende</i>
$2d > f + a$	$4 > 3$	<i>Atende</i>	$2d > f + a$	$4 > 3$	<i>Atende</i>
$2e > f + c$	$6 > 3$	<i>Atende</i>	$b - a < e - d$	$1 < 1$	NÃO ATENDE
$d - a > e - b$	$0 > 0$	NÃO ATENDE	$2e > f + c$	$6 > 3$	<i>Atende</i>
$2(d - b) > f - c$	$-2 > -1$	NÃO ATENDE	$c - a < 2(e - d)$	$0 < 2$	<i>Atende</i>
$d + c > e + b$	$4 > 6$	NÃO ATENDE	$f - a < 2(e - b)$	$-1 < 0$	<i>Atende</i>
$2d + c > 2e + a$	$6 > 8$	NÃO ATENDE	$d - b < e - c$	$-1 < 1$	<i>Atende</i>
$f - d < e - b$	$-1 < 0$	<i>Atende</i>	$f - d < e - b$	$-1 < 0$	<i>Atende</i>

Nota-se que a curva em apreço não se enquadra em nenhuma das possibilidades do Caso 6.

Se observarmos a forma geométrica da cônica e seu polígono de Newton associado (figura 4.9) veremos que a mesma possui tão somente 3 vértices (e não 4, como seria de se esperar) e seu polígono ainda poderia ser subdividido conforme figura 4.10.

Esta curva é, pois, uma CÔNICA DEGENERADA.

Se essa curva tivesse seu polígono de Newton subdividido conforme mostrado na figura 4.10 teríamos uma das seguintes relações:

$$1. \Delta_2 = \Delta_{bce} \cup \Delta_{def} \cup \Delta_{bde} \cup \Delta_{abd}$$

ou

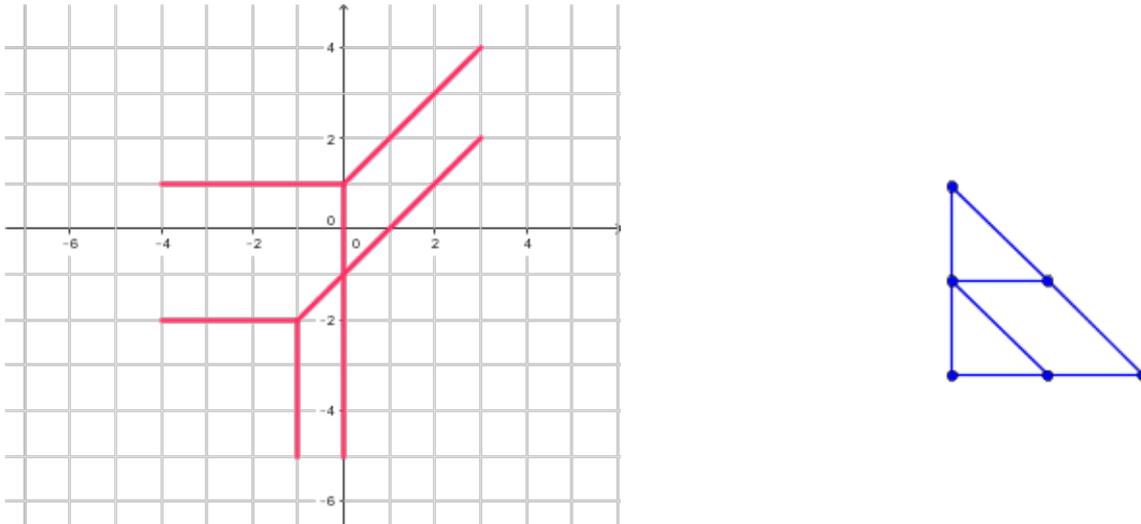


Figura 4.9: Cônica tropical degenerada (1)



Figura 4.10: Polígono de Newton de uma cônica tropical degenerada e suas subdivisões, ainda possíveis(1)

$$2. \Delta_2 = \Delta_{bce} \cup \Delta_{def} \cup \Delta_{abe} \cup \Delta_{ade}$$

De acordo com o visto na seção 4.4.3 temos os seguintes vértices para cada um dos Δ_{v_i}

- $\Delta_{bce} \Rightarrow V = (e - b, e - c) = (0, 1)$
- $\Delta_{def} \Rightarrow V = (f - d, f - e) = (-1, -2)$
- $\Delta_{bde} \Rightarrow V = (e - b, d - b) = (0, -1)$
- $\Delta_{abd} \Rightarrow V = (d - a, d - b) = (0, -1)$
- $\Delta_{abe} \Rightarrow V = (e - b, a + e - 2b) = (0, -1)$
- $\Delta_{ade} \Rightarrow V = (d - a, 2d - a - e) = (0, -1)$

Note que qualquer que seja a subdivisão adotada o vértice delas será $(0,-1)$.

De fato, observe que nesse ponto há igualdade de 4 monômios:

$$2 + 2x = 3 + x + y = 2 + x = 3 + y$$

Vejamoss mais uma situação, para consolidar os conceitos apresentados:

Exemplo 4.3 *Considere o seguinte polinômio tropical e a cônica por ele definida:*

$$P(x, y) = 2 \odot x^2 \oplus 2 \odot xy \oplus 2 \odot y^2 \oplus 3 \odot x \oplus 3 \odot y \oplus 1$$

Então

$$P(x, y) = \max\{2 + 2x, 2 + x + y, 2 + 2y, 3 + x, 3 + y, 1\}$$

Mais uma vez a curva em estudo é um Caso 6, mas que não se enquadra em nenhuma de suas possibilidades. Senão vejamos:

Caso 6	$\{0, 1, -\infty\}$		Caso 6	$\{-1, 0, 1, -\infty\}$	
$2b > c + a$	$4 > 4$	NÃO ATENDE	$2b > c + a$	$4 > 4$	NÃO ATENDE
$2d > f + a$	$6 > 3$	Atende	$2d > f + a$	$6 > 3$	Atende
$2e > f + c$	$6 > 3$	Atende	$2e > f + c$	$6 > 3$	Atende
$d - a > e - b$	$1 > 1$	NÃO ATENDE	$d - a > e - b$	$1 > 1$	NÃO ATENDE
$d - b < e - c$	$1 < 1$	NÃO ATENDE	$d - b < e - c$	$1 < 1$	NÃO ATENDE
$f - d < e - b$	$-2 < 1$	Atende	$2(b - d) > c - f$	$-2 > 1$	NÃO ATENDE
			$2(e - b) < f - a$	$2 < -1$	NÃO ATENDE
			$e - b < f - d$	$1 < -2$	NÃO ATENDE

Caso 6	$\{0, \frac{1}{2}, 1, -\infty\}$		Caso 6	$\{0, 1, 2, -\infty\}$	
$2b > c + a$	$4 > 4$	NÃO ATENDE	$2b > c + a$	$4 > 4$	NÃO ATENDE
$2d > f + a$	$6 > 3$	Atende	$2d > f + a$	$6 > 3$	Atende
$2e > f + c$	$6 > 3$	Atende	$b - a < e - d$	$0 < 0$	NÃO ATENDE
$d - a > e - b$	$1 > 1$	NÃO ATENDE	$2e > f + c$	$6 > 3$	Atende
$2(d - b) > f - c$	$2 > -1$	Atende	$c - a < 2(e - d)$	$0 < 0$	NÃO ATENDE
$d + c > e + b$	$5 > 5$	NÃO ATENDE	$f - a < 2(e - b)$	$-1 < 2$	Atende
$2d + c > 2e + a$	$8 > 8$	NÃO ATENDE	$d - b < e - c$	$1 < 1$	NÃO ATENDE
$f - d < e - b$	$-2 < 1$	Atende	$f - d < e - b$	$-2 < 1$	Atende

Desta feita, a forma geométrica da curva (figura 4.11) traz, além de um número menor de vértices (2) do que os 4 esperados, um número menor de semi-retas componentes (5 ao invés de 6).

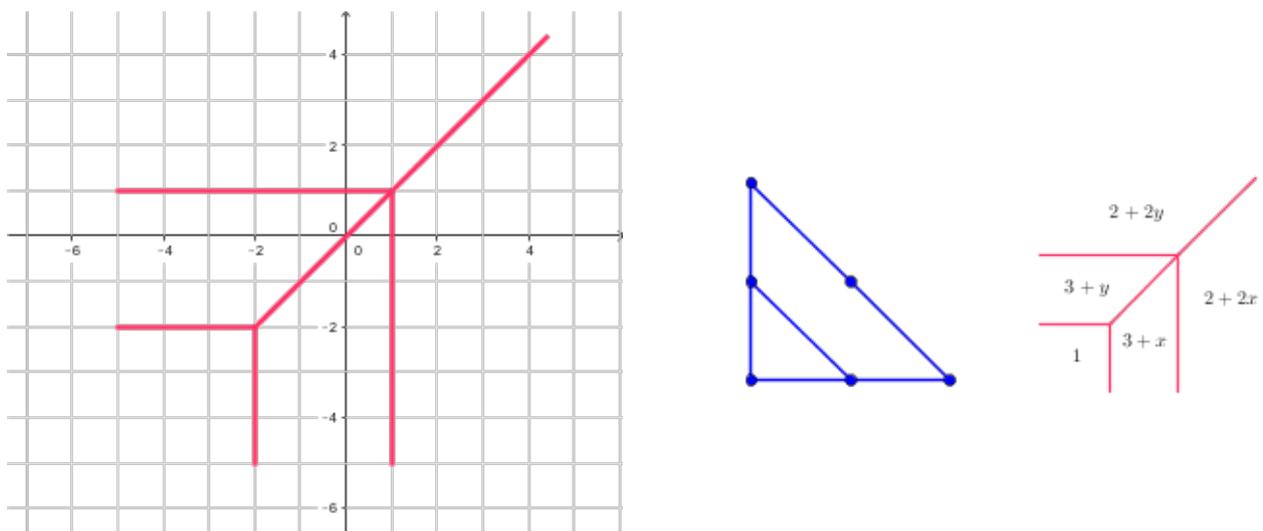


Figura 4.11: Cônica tropical degenerada (2)

Essa também é uma CÔNICA DEGENERADA. Observe as subdivisões ainda possíveis na figura 4.12

Note que o monômio "2 + x + y" não define nenhuma área no gráfico. Ou seja, ele não definirá, em tempo algum, o máximo do polinômio (figura 4.11).

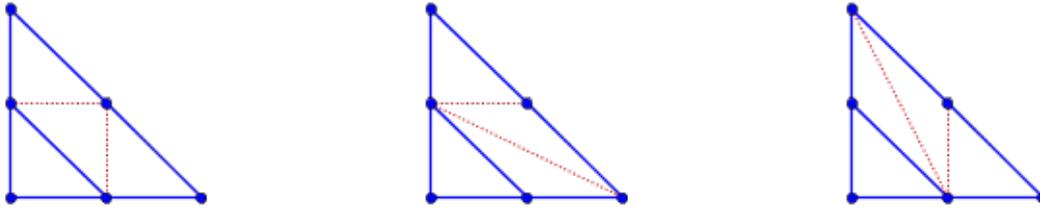


Figura 4.12: Polígono de Newton de uma cônica tropical degenerada e suas subdivisões, ainda possíveis(2)

4.5 Curvas Tropicais - Generalidades

4.5.1 Determinação de uma curva tropical a partir de pontos conhecidos

- Reta Tropical

Do mesmo modo que na álgebra tradicional, é possível definir uma reta tropical a partir de dois pontos conhecidos. Vejamos como proceder para determinar sua equação. (Para mais detalhes ver [34])

Dados $P_1 = (l_1, m_1)$ e $P_2 = (l_2, m_2)$, a reta que os contém será dada pelo determinante tropical:

$$\text{tropdet} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & 0 \\ l_2 & m_2 & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

Logo

$$r := \max\{(l_1 + m_2) + z, m_1 + x, l_2 + y, (l_2 + m_1) + z, m_2 + x, l_1 + y\}$$

$$r := [(l_1 \odot m_2) \oplus (l_2 \odot m_1)] \oplus (m_1 \oplus m_2) \odot x \oplus (l_2 \oplus l_1) \odot y$$

De fato, como $P_1 \in r$, então, neste ponto, o máximo será atingido pelo menos duas vezes:

$$P_1 = (l_1, m_1) \Rightarrow r := [(l_1 \odot m_2) \oplus (l_2 \odot m_1)] \oplus (m_1 \oplus m_2) \odot l_1 \oplus (l_2 \oplus l_1) \odot m_1$$

$$r := \max\{\max\{(l_1 + m_2), (l_2 + m_1)\}, \max\{(m_1 + l_1), (m_2 + l_1)\}, \max\{(l_2 + m_1), (l_1 + m_1)\}\}$$

$$r := \max\{(l_1 + m_2), (l_2 + m_1), (m_1 + l_1), (m_2 + l_1), (l_2 + m_1), (l_1 + m_1)\}$$

Observação: É interessante notar que se o determinante tropical for singular, os dois pontos

definirão não apenas uma, mas infinitas retas.

Vejamos em que condições a singularidade ocorre e qual a equação genérica em cada caso.

Condição 1: $(l_1 + m_2) = (l_2 + m_1)$

Note que o determinante é singular, já que, para a variável "z", o máximo é atingido duas vezes.

$$(l_1 + m_2) = (l_2 + m_1) \Rightarrow (l_1 - l_2) = (m_1 - m_2)$$

Logo, $\overline{P_1 P_2}$ tem inclinação igual a 1 ($\theta = \frac{\pi}{2}$), ou seja, os pontos P_1 e P_2 localizar-se-ão sobre a aresta inclinada da reta tropical. Como tal aresta é definida pelos pontos tais que $\beta + x = \gamma + y$ (vide figura 4.5), então qualquer reta tropical formada por esta semi-reta e cujo vértice $V(v_1, v_2)$ seja tal que $v_1 \leq \min\{l_1, l_2\}$ e $v_2 \leq \min\{m_1, m_2\}$ conterá P_1 e P_2 .

$$v_1 = \alpha - \max\{m_1, m_2\}$$

$$\alpha - \max\{m_1, m_2\} \leq \min\{l_1, l_2\}$$

$$\alpha \leq \min\{l_1, l_2\} + \max\{m_1, m_2\}$$

Quando $l_i < l_2 \Rightarrow m_2 > m_1$, então

$$\min\{l_1, l_2\} + \max\{m_1, m_2\} = (l_1 + m_2) = (l_2 + m_1)$$

$$\text{Logo } \alpha \leq (l_1 + m_2)$$

A equação da reta tropical nesse caso será:

$$r := \alpha \oplus (m_1 \oplus m_2) \odot x \oplus (l_2 \oplus l_1) \odot y, \quad \forall \alpha \leq (l_1 + m_2)$$

Condição 2: $m_1 = m_2$

Neste caso o determinante é singular, pois, para a variável "x", o máximo é atingido duas vezes.

Os pontos estarão localizados na aresta paralela ao eixo X. Como tal aresta é definida pelos pontos tais que $\alpha = \gamma + y$ (vide figura 4.5), então qualquer reta tropical formada por esta semi-reta e cujo vértice $V(v_1, v_2)$ seja tal que $v_1 \geq \max\{l_1, l_2\}$ e $v_2 = m_1$ conterá P_1 e P_2 .

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \max\{(l_1 + m_2), (l_2 + m_1)\} - \beta \\
 \max\{(l_1 + m_2), (l_2 + m_1)\} - \beta &\geq \max\{l_1, l_2\} \\
 m_1 = m_2 &\Rightarrow \max\{(l_1 + m_2), (l_2 + m_1)\} = m_1 + \max\{l_1, l_2\} \\
 \text{Logo } \beta &\leq m_1
 \end{aligned}$$

A equação da reta tropical nesse caso será, pois:

$$r := [(l_1 \odot m_2) \oplus (l_2 \odot m_1)] \oplus \beta \odot x \oplus (l_2 \oplus l_1) \odot y, \quad \forall \beta \leq m_1$$

Condição 3: $l_1 = l_2$

Neste caso o determinante é singular, pois, para a variável "y", o máximo é atingido duas vezes.

Ante tal condição, os pontos estarão localizados na aresta paralela ao eixo Y. Esta aresta é definida pelos pontos tais que $\alpha = \beta + x$ (vide figura 4.5), então qualquer reta tropical formada por esta semi-reta e cujo vértice $V = (v_1, v_2)$ seja tal que $v_1 = l_1$ e $v_2 \geq \max\{m_1, m_2\}$ conterá P_1 e P_2 .

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \max\{(l_1 + m_2), (l_2 + m_1)\} - \gamma \\
 \max\{(l_1 + m_2), (l_2 + m_1)\} - \gamma &\geq \max\{m_1, m_2\} \\
 l_1 = l_2 &\Rightarrow \max\{(l_1 + m_2), (l_2 + m_1)\} = l_1 + \max\{m_1, m_2\} \\
 \text{Logo } \gamma &\leq l_1
 \end{aligned}$$

A equação da reta tropical nesse caso será:

$$r := [(l_1 \odot m_2) \oplus (l_2 \odot m_1)] \oplus (m_1 \oplus m_2) \odot x \oplus \gamma \odot y, \quad \forall \gamma \leq l_1$$

- Cônica Tropical

Também em [34] pode ser encontrada a prova que 5 pontos definem uma cônica tropical.

A equação da cônica poderá ser obtida do mesmo modo que para a reta tropical. Há que se observar como será formada a matriz cujo determinante originará a equação da curva.

Observe que o suporte para as cônicas tropicais é

$$\{(2, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 2, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$$

Então, se o ponto dado tem a forma $P = (l, m, 0)$, a linha equivalente a ele na matriz será $(2l, l + m, 2m, l, m, 0)$ e a última linha será $(x^2, xy, y^2, xz, yz, z^2)$.

Obtém-se os coeficientes do polinômio tropical representativo da curva aplicando-se a regra de Cramer. Ou seja, a_i é o determinante tropical da matriz 5×5 que se obtém excluindo-se a coluna i . [33]

Desenvolvamos alguns exemplos para melhor fixação do conteúdo.

Exemplo 4.4 *Dados os pontos $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (2, 3)$, determine a reta tropical que passa pelos dois pontos.*

$$r := \text{tropdet} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

$$r := \max\{4 + z, 2 + x, 2 + y, 4 + z, 3 + x, 4 + y\}$$

Assim, $r := 4 \oplus 3x \oplus 4y$ e está graficamente representada em vermelho na figura 4.13. Observe, contudo, que quaisquer das retas representadas em azul também contêm os pontos dados. Ou seja, os pontos atendem à condição 1. Então, genericamente, $r := \alpha \oplus 3x \oplus 4y, \forall \alpha \leq 4$.

Exemplo 4.5 *Dados os pontos $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (3, 2)$, determine a reta tropical que passa pelos dois pontos.*

$$r := \text{tropdet} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

$$r := \max\{3 + z, 2 + x, 3 + y, 5 + z, 2 + x, 1 + y\}$$

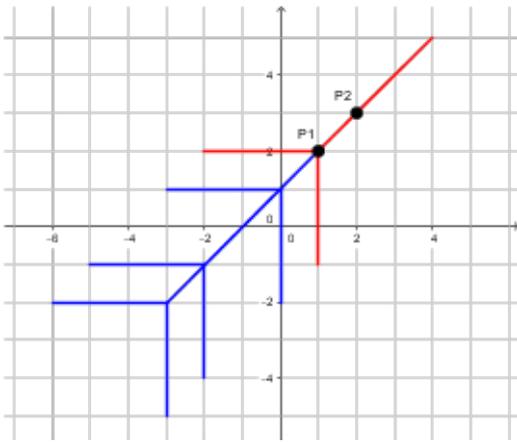


Figura 4.13: Retas determinadas por $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (2, 3)$

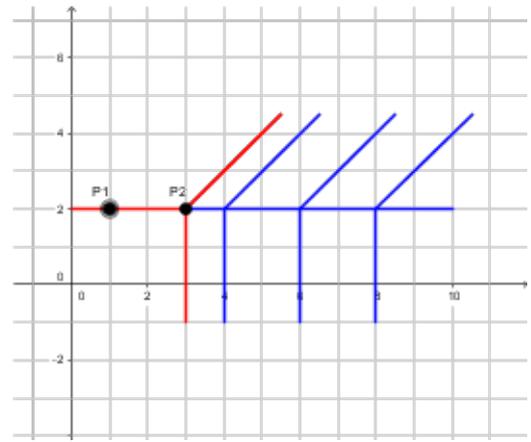


Figura 4.14: Retas determinadas por $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (3, 2)$

Note que o determinante é singular, já que para a variável "x" o máximo é atingido duas vezes. Assim, $r := 5 \oplus 2x \oplus 3y$ e está graficamente representada em vermelho na figura 4.14. Observe, contudo, que quaisquer das retas representadas em azul também contêm os pontos dados. Ou seja genericamente $r := 5 \oplus \beta x \oplus 3y, \forall \beta \leq 2$.

Exemplo 4.6 *Dados os pontos $P_1 = (2, 1)$ e $P_2 = (2, 3)$, determine a reta tropical que passa pelos dois pontos.*

$$r := \text{tropdet} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

$$r := \max\{5 + z, 1 + x, 2 + y, 4 + z, 3 + x, 2 + y\}$$

Note que o determinante é singular, já que para a variável "y" o máximo é atingido duas vezes. Assim, $r := 5 \oplus 3x \oplus 2y$ e está graficamente representada em vermelho na figura 4.15. Observe, contudo, que quaisquer das retas representadas em azul também contêm os pontos dados. Ou seja genericamente $r := 5 \oplus 3x \oplus \gamma y, \forall \gamma \leq 2$.

Exemplo 4.7 *Dados os pontos $P_1 = (-2, 3), P_2 = (3, 5), P_3 = (2, 1), P_4 = (-1, -3)$ e $P_5 = (-3, -1)$, determine a cônica tropical que passa por esses pontos.*

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 & -2 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & 10 & 3 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & -1 & -3 & 0 \\ -6 & -4 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ x^2 & xy & y^2 & x & y & z^2 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante tropical obteremos a seguinte equação:

$$1 \otimes x^2 \oplus 2 \otimes x \otimes y \oplus 0 \otimes y^2 \oplus 3 \otimes x \oplus 3 \otimes y \oplus 2$$

cuja representação gráfica está na figura 4.16.

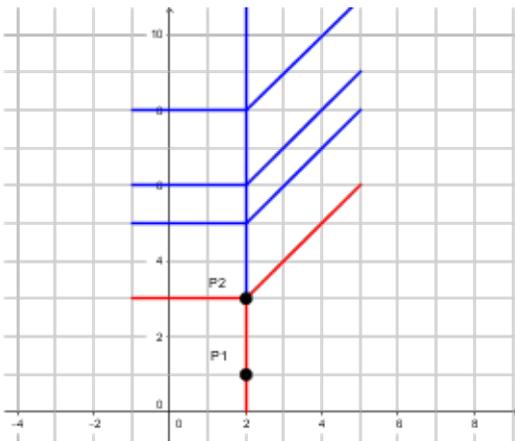


Figura 4.15: Retas determinadas por $P_1 = (2, 1)$ e $P_2 = (2, 3)$

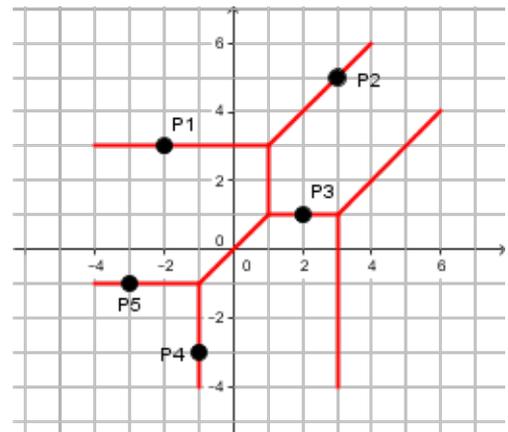


Figura 4.16: Cônica determinada por 5 pontos conhecidos

4.5.2 Interseção de retas tropicais

A interseção de duas curvas tropicais define uma nova curva tropical.

Assim, duas curvas tropicais C_1 e C_2 , definidas pelas funções $F(x, y)$ e $G(x, y)$, ao se intersectarem originarão a curva tropical C_3 definida por $P(x, y)$, tal que $C_3 = C_1 \cup C_2$ e $P(x, y) = F(x, y)G(x, y)$

Se $F(x, y)$ e $G(x, y)$ representarem retas tropicais, então, serão, necessariamente polinômios de grau 1 e seu produto $P(x, y)$ será um polinômio de grau 2.

Logo, a interseção de duas retas tropicais originará uma cônica tropical.

Importante realçar que duas retas tropicais se interceptam em 1 único ponto ou em infinitos pontos.

Observe nas figuras 4.17 e 4.18 as possíveis configurações das interseções.

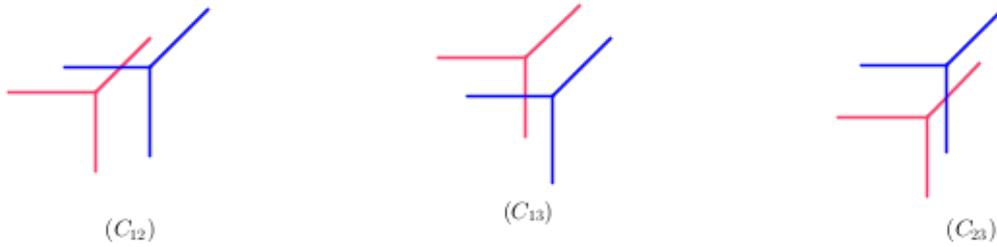


Figura 4.17: Interseção de retas tropicais em 1 único ponto

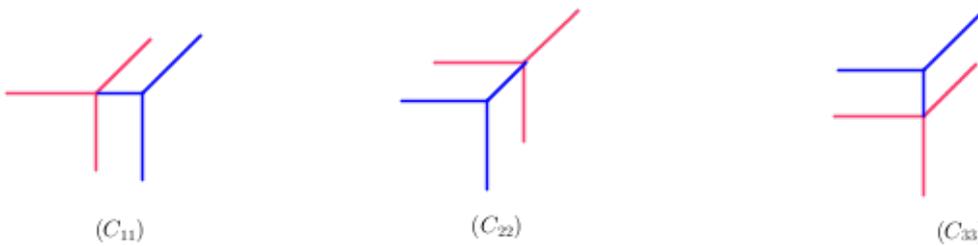


Figura 4.18: Interseção de retas tropicais em infinitos pontos

Passemos a analisar, genericamente, a interseção entre duas retas tropicais. Para tanto, tomemos as seguintes retas:

$$F(x, y) = t \oplus r \odot x \oplus s \odot y \quad \text{com } r, s, t \neq -\infty$$

$$G(x, y) = w \oplus l \odot x \oplus m \odot y, \quad \text{com } l, m, w \neq -\infty$$

Logo a cônica tropical gerada será:

$$\begin{aligned} P(x, y) = & (r \odot l) \odot x^2 \\ & \oplus [(s \odot l) \oplus (m \odot r)] \odot xy \\ & \oplus (s \odot m) \odot y^2 \\ & \oplus [(l \odot t) \oplus (r \odot w)] \odot x \\ & \oplus [(t \odot m) \oplus (s \odot w)] \odot y \\ & \oplus (t \odot w) \end{aligned}$$

Se utilizássemos a notação até então adotada, teríamos os seguintes coeficientes de $P(x, y)$:

$$a = (r \odot l)$$

$$b = [(s \odot l) \oplus (m \odot r)]$$

$$c = (s \odot m)$$

$$d = [(l \odot t) \oplus (r \odot w)]$$

$$e = [(t \odot m) \oplus (s \odot w)]$$

$$f = (t \odot w)$$

Como $a, b, c, d, e, f \neq -\infty$ trata-se de um Caso 6.

Se compararmos as figuras 4.17 e 4.18 com os possíveis gráficos do Caso 6 veremos que não se enquadrarão em nenhum caso. Isso porque tratam-se de cônicas degeneradas.

Observe que, no caso das curvas representadas na figura 4.17, em todas há um vértice composto por 4 arestas.

Lembremos que pela bijetividade existente entre a cônica tropical e sua subdivisão dual (polígono de Newton) cada vértice da curva corresponderá a uma área do polígono e cada aresta a um dos lados dos polígono que define a região interna. Se temos uma região formada por quatro lados sabemos que esta região do polígono ainda pode ser subdividida, o que é precisamente a definição de curva degenerada.

No caso das curvas representadas na figura 4.18, além da existência de um vértice composto por 4 arestas, temos que a curva é composta por apenas 5 semi-retas, quando seria de se esperar 6.

Ou seja, a interseção de duas retas tropicais gerará uma CÔNICA TROPICAL DEGENERADA.

Atente-se, contudo, que apesar da forma geométrica semelhante (vide curvas dos exemplos 2 e 3 da seção 4.4.5), NEM SEMPRE uma cônica tropical degenerada é composta por duas retas tropicais.

Vamos analisar agora os vértices da cônica gerada. Para tanto, vejamos na figura 4.19 como ficam as possíveis subdivisões duais.

A partir da figura 4.19 observe que, para cálculo dos vértices nas regiões não-degeneradas, precisamos apenas estudar Δ_{abd} , Δ_{bce} e Δ_{def} . Tal estudo já foi apresentado na seção 4.4.3.

Resta, então, calcular o vértice nas regiões degeneradas. Atente que Δ_{bde} compõe todas elas. Logo, basta calcular o vértice nela.

O vértice de Δ_{bde} calculado na seção 4.4.3 foi $V = (e - b, d - b)$. Trazendo para a cônica em

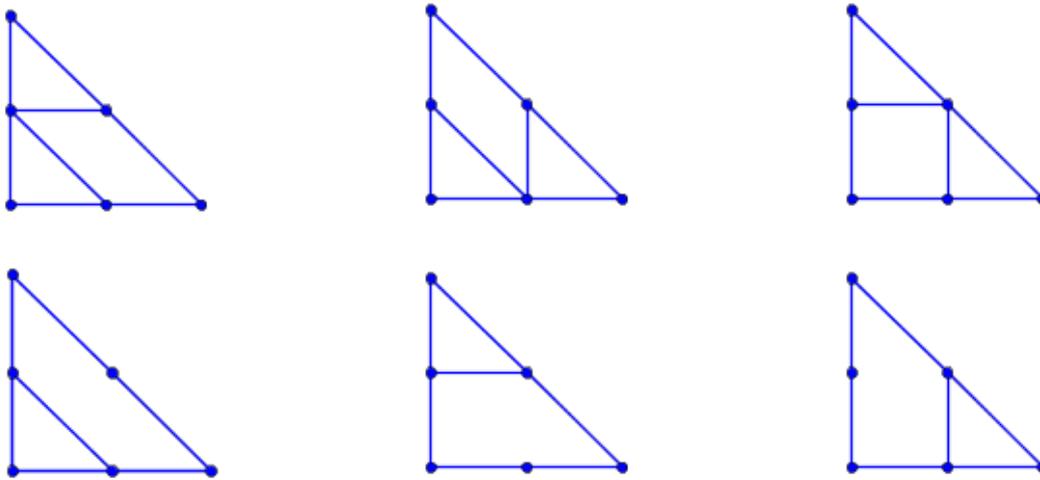


Figura 4.19: Polígono de Newton das cônicas geradas pela interseção de 2 retas tropicais

estudo temos:

$$V = (\max\{t + m, s + w\} - \max\{s + l, m + r\}, \max\{l + t, r + w\} - \max\{s + l, m + r\})$$

4.5.3 Do literal ao numérico - análise de uma cônica tropical

Nas seções anteriores foram analisadas, por partes, as características das curvas tropicais. Tal análise, deu-se, genericamente, utilizando-se da forma literal do polinômio tropical representativo da curva.

Para melhor compreensão do quanto exposto passemos ao estudo numérico de uma cônica tropical.

Exemplo 4.8 Analise a cônica tropical que contém os pontos $P_1 = (-2, 7), P_2 = (4, 5), P_3 = (-3, -1), P_4 = (3, 8)$ e $P_5 = (1, -2)$

A cônica tropical que contém os pontos será definida pelo determinante tropical da matriz:

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 & 14 & -2 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 10 & 4 & 5 & 0 \\ -6 & -4 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 6 & 11 & 16 & 3 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ x^2 & xy & y^2 & x & y & z^2 \end{bmatrix}$$

Então $c := 6 \odot x^2 \oplus 5 \odot x \odot y \oplus 0 \odot y^2 \oplus 7 \odot x \oplus 7 \odot y \oplus 6$

Inicialmente convém pontuar que o monômio "0y²" não é nulo, já que na álgebra tropical "0" é o elemento neutro da multiplicação.

$$c = \max\{6 + 2x, 5 + x + y, 2y, 7 + x, 7 + y, 6\}$$

Como todos os coeficientes são diferentes de $-\infty$, então, trata-se de um Caso 6 e o polígono de Newton associado possui todas as arestas da envoltória de Δ_2 .

Precisamos então analisar as subdivisões duais interiores.

Sabemos que a existência de aresta no polígono de Newton implica na existência de aresta na curva tropical (perpendiculares uma à outra).

Sabemos também que as arestas do polígono não se interceptam (teorema 4.1).

As possíveis arestas internas do polígono são: \overline{ae} , \overline{bd} , \overline{be} , \overline{bf} , \overline{cd} e \overline{ed} .

Passemos a analisá-las.

Para a existência de \overline{ae} deve-se ter:

$$6 + 2x = 7 + y > \begin{cases} 5 + x + y \\ 2y \\ 7 + x \\ 6 \end{cases}$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

$$7 + y > 5 + x + y \Rightarrow x < 2$$

$$7 + y > 2y \Rightarrow x < 4$$

$$7 + y > 7 + x \Rightarrow x > 1$$

$$7 + y > 6 \Rightarrow x > 0$$

Logo $\boxed{1 < x < 2}$

Como \overline{ae} existe, e pelo Teorema 4.1 duas arestas do polígono não podem se cruzar, as arestas \overline{bd} , \overline{bf} e \overline{cd} , não existem.

Analisemos, então, a aresta \overline{be} :

$$5 + x + y = 7 + y > \begin{cases} 6 + 2x \\ 2y \\ 7 + x \\ 6 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$7 + y > 6 + 2x \Rightarrow y > 3$$

$$7 + y > 2y \Rightarrow y < 7$$

$$7 + y > 7 + x \Rightarrow y > 2$$

$$7 + y > 6 \Rightarrow y > -1$$

$$\boxed{3 < y < 7}, \text{ ou seja, } \overline{be} \text{ existe.}$$

Por fim analisemos a aresta \overline{ed} .

$$7 + x = 7 + y > \begin{cases} 6 + 2x \\ 5 + x + y \\ 2y \\ 6 \end{cases}$$

$$\boxed{x = y}$$

$$7 + x > 6 + 2x \Rightarrow x < 1$$

$$7 + x > 5 + x + y \Rightarrow x < 2$$

$$7 + x > 2y \Rightarrow x < 7$$

$$7 + y > 6 \Rightarrow x > -1$$

$$\boxed{-1 < x < 1}, \text{ ou seja, } \overline{ed} \text{ também existe.}$$

Logo, o polígono de Newton com as subdivisões duais da curva em análise terá a forma da figura 4.7 (d), e

$$\Delta_2 = \Delta_{abe} \cup \Delta_{ade} \cup \Delta_{bce} \cup \Delta_{def}$$

Note que além de nos certificarmos da existência das arestas internas também determinamos os segmentos de reta que as formam:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 & \text{com } 1 < x < 2 \\ x = 2 & \text{com } 3 < y < 7 \\ x = y & \text{com } -1 < x < 1 \end{cases}$$

Observe, ainda, que as extremidades dos segmentos de reta são justamente os vértices da curva. (Veja figura 4.20)

$$\begin{cases} y = 2x - 1 & \Rightarrow (1, 1) \text{ e } (2, 3) \\ x = 2 & \Rightarrow (2, 3) \text{ e } (2, 7) \\ x = y & \Rightarrow (-1, -1) \text{ e } (1, 1) \end{cases}$$

Como vimos inicialmente que a envoltória externa de Δ_2 existe, basta que racemos, a partir dos vértices, semi-retas perpendiculares às arestas do polígono de Newton. A curva desejada está representada graficamente na figura 4.20.

Esta metodologia analítica poderia perfeitamente ter sido substituída pela consulta direta às tabelas de condicionantes e vértices disponíveis no trabalho.

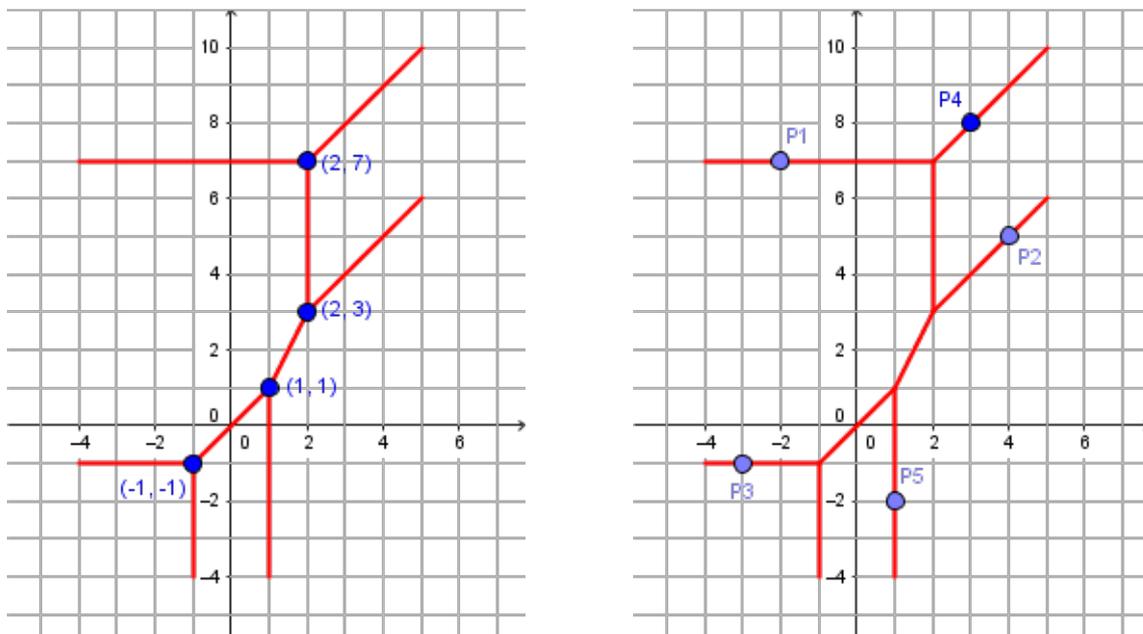


Figura 4.20: Cônica tropical definida por 5 pontos conhecidos

Referências Bibliográficas

- [1] AKIAN, M. - Majorisation inequalities for valuations eigenvalues. Birmingham. May, 2013.
- [2] AMORIM, E., VAINSENCHE, I. - Introdução às Curvas Tropicais. Universidade Federal de Minas Gerais. Agosto, 2008.
- [3] ANDERSEN, M.H. - Max-plus Algebra: Properties and applications. Laramie, WY. May 2002.
- [4] BACELLI, F., COHEN, G., OLSDER, G.J., QUADRAT J., synchronization and Linearity. An Algebra for Discret Event System. Outubro, 2001
- [5] BARAVIERA, A. T., BRANCO, F. M., Introdução à Álgebra Max-Plus, III Colóquio de Matemática da Região Sul, 2014.
- [6] BARAVIERA, A., LEPLAIDER, R., LOPES, A., Ergodic Optimization, Zero Temperature Limits and the Max-Plus Algebra, 29º. Colóquio Brasileiro de Matemática, 2013.
- [7] BOLDRINI, J., COSTA, S., FIGUEIREDO, W., WETZLER, H. Álgebra Linear, Ed. HARBRA, 3a. edição, 1986.
- [8] BOUILLARD, A. - Introduction to tropical mathematics and some applications – June, 2013.
- [9] BRUGALLÉ, E., SHAW, K. - A bit of tropical geometry.
- [10] BRUGALLÉ, E., Tropical Curves. Disponível em <http://erwan.brugalle.perso.math.cnrs.fr/articles/Trop>
Acesso em 26/07/2015.
- [11] BRUGALLÉ, E., Um Pouco de Geometria Tropical. Revista Matemática Universitária no. 46, pp 27-40, 2009.

- [12] CHUNG, M. - Eigenvalues and Eigenvectors in the Max-Plus Algebra. University of Colorado. Denver. 1995.
- [13] DINITZ, T., HARTMAN, M., SOPRUNOVA, J. - Tropical Determinant of Integer Doubly-Stochastic Matrices. May 2010.
- [14] ELLIS, A. - Tropical Algebra. November, 2005.
- [15] ELLIS, A., Classification of Conics in the Projective Plane, Brigham Young University - Provo, 2005
- [16] FARLOW, K. G., Max-Plus Algebra, Abril, 2009.
- [17] FRENKEL, E. Amor e Matemática - o coração da realidade escondida, Ed. Casa da Palavra, 2014.
- [18] GARIBALDI, E., GOMES, J.T.A., Otimização de Médias sobre Grafos Orientados, 29º. Colóquio Brasileiro de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Julho, 2013.
- [19] GAUBERT, S., Max-plus Algebra ... a guided tour, SIAM Conference on Control and its Applications, Colorado, 2009.
- [20] GRIGG, N.B. - Factorization of Tropical Polynomials in One and Several Variables. Brigham Young University. June, 2007.
- [21] GRIGORIEV, D., SHPILRAIN, V. - Tropical Cryptography.
- [22] HEIDERGOTT, B. - Max Plus Algebra and Queues. Vrije Universiteit, Amsterdam, The Netherlands.
- [23] HOORN, T. Tropical Geometry. Universiteit Utrecht, 2011
- [24] KOTOV, M., URSHAKOV, A. - Analysis of a key exchange protocol based on tropical matrix algebra. September, 2015.
- [25] KRIVULIN, N. - Explicit Solution of a Tropical Optimization Problem with Application to Project Scheduling. Saint Petersburg State University.

- [26] LAFACE, A. - Introducción a la geometria tropical.
- [27] MATHEWS, B. - Introduction to Tropical Mathematics. Azusa Pacific University, Los Angeles Math Circle. November, 2010.
- [28] NOFERINI, V., SHARIFY, M., TISSEUR, F. - Tropical roots as approximations to eigenvalues of matrix polynomials. Manchester Institute for Mathematics Sciences. March, 2013.
- [29] NOWAK, A. - The Tropical Eigenvalue-vector Problem from Algebraic, Graphical, and Computational Perspectives. Bates College, Maine, March 2014.
- [30] POLKING, J. - Tropical Mathematics – An Interesting and Useful Variant of Ordinary Arithmetic. Rice University.
- [31] PRIETO, D.L.S. - Introducción a la Geometria Tropical. Pontificia Universidad Javeriana. Bogotá, Colômbia; June, 2010.
- [32] REICH, R. - The Newton Polygon: II. Lecture 8
- [33] RICHTER-GEBERT, J., STURMFELS, B., THEOBALD, T. - First Steps in Tropical Geometry. Disponível em <http://arxiv.org/pdf/math/0306366.pdf>. Acesso em 22/07/2015.
- [34] RIMMASCH, G., Complete Tropical Bezouts theorem and Intersection Theory in the Tropical Projective Plane, Brigham Young University, August 2008.
- [35] SILVEIRA, V.M.G., BRANCO, F.M. - Álgebra Max-Plus. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. 2014
- [36] SPEYER, D. , STURMFELS, B. Tropical Mathematics, 2004. Disponível em <http://arxiv.org/pdf/math/0408099>. Acesso em 13/09/2015.
- [37] STURMFELS, B. - A Combinatorial Introduction to Tropical Geometry.
- [38] STURMFELS, B.- Tropical Mathematics.University of California at Berkeley.
- [39] STURMFELS, B., SPEYER, D. - Tropical Mathematics. University of California at Berkeley.
- [40] TRAN, N.M. - Topics em Tropical Algebra and Applied Probability – University of California, Berkeley. 2013.