Universidade Estadual de Santa Cruz
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

Números Algébricos e Transcendentes

Uma abordagem para o Ensino Básico

por:

Alexandre Amaral Silvares

Orientador:
Prof. *Dr*. **Romenique da Rocha Silva**

S586 Silvares, Alexandre Amaral.
Números algébricos e transcendentes: uma abordagem para o ensino básico / Alexandre Amaral Silvares. – Ilhéus, BA: UESC, 2016.
42f. : il.

Orientador: Romenique da Rocha Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática.
Inclui referências e apêndice.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Números reais. 3. Polinômios. 4. Números transcendentes. I. Título.

CDD 510.7

ALEXANDRE AMARAL SILVARES

Números Algébricos e Transcendentes
Uma abordagem para o Ensino Básico

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção do título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 23 de março de 2016.

Prof. Dr. Romenique da Rocha Silva(UESC)

Prof. Dr. Vinicius Augusto Takahashi Arakawa(UESC)

Josaphat Ricardo Ribeiro Gouveia Júnior

Prof. Dr. Josaphat Ricardo Gouveia Júnior (IFBA)

Dissertação de Mestrado

Números Algébricos e Transcendentes

Uma abordagem para o Ensino Básico

por:

Alexandre Amaral Silvares

Dissertação de Mestrado apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, ofertado pela Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. *Dr*. **Romenique da Rocha Silva**

ILHÉUS - BA
2016

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao Pedro Henrique, ao João Augusto, à Ana Luiza e à Marcela, que souberam transformar suor e lágrimas em vitórias.

AGRADECIMENTOS

Os meus sinceros agradecimentos à Deus em primeiro lugar, aos meus pais Marlene Amaral e Gisélio Silvares que souberam guiar meus passos, minha esposa Marcela Neves e filhos Pedro Henrique Neves Silvares, João Augusto Neves Silvares e Ana Luiza Neves Silvares que compreenderam as ausências, os finais de semana longe. Ao professor Romenique Silva pela atenção dedicada à orientação do presente trabalho, a Welton Dutra pelo apoio, discussões frutíferas e indagações que fez no transcorrer desta etapa e aos companheiros de estudos e viagens Danilo Rusciolelli, Ivanildo Porto, Gedeilton Maciel e Welton Dutra com os quais criamos intrínsecos laços durante este período de curso, a todos os demais colegas de curso da turma de 2012 e desta nova turma de 2015, à Dulcinéia Lima, à Rozana Rodrigues Lima coordenadoras que souberam compreender e apoiar nas adversidades que surgiram durante o curso e trabalho. E a todos direta e indiretamente que colaboraram para que este trabalho pudesse ser realizado.

A uma antiga mestra, professora Maria Aranha Ruas, que me aguçou a Matemática em meu coração.

[...]
No dia seguinte, o professor Weisbrod, ensinou que π *era igual a aproximadamente* $\frac{22}{7}$*, ou cerca de 3,1416. Na verdade, porém, se a pessoa desejasse exatidão, era um número decimal que continuava crescendo a vida toda, sem parar, nunca repetindo a sequência de algarismos. A vida toda pensou Ellie. Levantou a mão. Estavam no começo do ano letivo e ela não havia feito nenhuma pergunta naquela aula.*
"Como é que se pode saber que os decimais continuam a vida toda, sem acabar?"
"É assim porque é", disse o professor, com certa rispidez.
"Mas por quê? Como é que o senhor sabe? Como se pode contar casas decimais a vida toda?"
"Srta. Arroway."O professor estava consultando a lista de chamada. "Essa pergunta é boba. Está nos fazendo perder tempo."

Contato - Carl Sagan

Números Algébricos e Tanscendentes

Uma abordagem para o Ensino Básico

RESUMO

Na presente dissertação, iniciou-se com os números inteiros e reais, aritmética em $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$, tratamos de polinômios e equações polinomiais e procurou-se estabelecer uma série de pressupostos básicos para a compreensão da divisão em números algébricos e transcendentes. Foram propostas atividades para concluintes e egressos do médio, buscando fatos históricos e problemas orientadores de toda a teoria.

Em nosso trabalho transcrevemos uma prova para a transcendência de e, para ilustrar a riqueza da Teoria Transcendente.

Palavras-Chave: Números, Polinômios, Números Algébricos e Números Transcendentes.

Algebraic and Transcendental Numbers

One approach to Primary Education

ABSTRACT

Algebraic and Transcendent numbers: An approach to primary education This work began with integer and real numbers, arithmetic in $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{R}$, we deal with polynomials and polynomial equations and tried to establish a number of basic assumptions for the understanding of division into algebraic and transcendental numbers. It proposed activities for graduates and high school regressed students, seeking historical facts and guiding problems of the whole theory. In our work we transcribe evidence for the transcendence of e to illustrate the richness of Transcendent Theory.

Keywords: Numbers, Polynomials, Algebraic numbers and Transcendent numbers.

LISTA DE TABELAS

Página

LISTA DE FIGURAS

Página

SUMÁRIO

Página

.

Introdução

"Os números governam o mundo."

Platão

A História da Matemática se confunde com a História humana, haja vista que o desenvolvimento do homem se deu com o respectivo desenvolvimento e aprimoramento da Matemática, tanto como linguagem quanto ciência. Muitas foram as contribuições de civilizações inteiras à Matemática, mas individualmente cada grande nome concatenou as ideias vigentes de sua época e consolidou uma abordagem de um determinado problema. Sendo assim, cada teoria desenvolvida por um matemático, teve em certo momento a contribuição dos seus pares.

Quando olhamos ao nosso redor, observamos que os números governam nossas ações diárias de tal forma, que no seio de nossa família somos compelidos a começar neste fascinante mundo da Matemática desde a tenra idade, a contagem e a sequência numérica natural fazem parte de brincadeiras e jogos infantis. Mostrando como a Matemática sempre estará presente em todas as nossas ações.

Podemos observar nos Parâmetros Curriculares Nacionais [13] que a etapa final do ensino básico deve construir no indivíduo certas competências, a investigação e a compreensão, a representação e a comunicação e contextualização das ciências. A proposta dos PCNEM é que o currículo da escola não seja uma lista de assuntos, mas seja uma escolha criteriosa de temas com relevância e que sejam formativos. É indicado também aprofundar o conhecimento dos estudantes desta etapa nos temas números e operações. Recomenda ainda que os "números irracionais devem se ligar ao trabalho com geometria e medidas", mas não contempla outra classificação para os números reais.

Com contribuições de diversos matemáticos, cada teoria pode ser aprimorada tanto na forma como no conteúdo, a ciência se faz assim, com contínuo aperfeiçoamento de cada uma de suas proposições. A construção de segmentos de reta, e a verificação da comensurabilidade entre os segmentos é uma forma de construção dos números reais. Mas isso se dá após a aceitação da existência dos mesmos.

Podemos efetuar a classificação do conjunto dos números reais de duas formas distintas:

i. como números racionais ou irracionais, que é a divisão mais comum;

ii. ou, como número algébricos ou transcendentes, a classificação que iremos utilizar.

Definição 0.1. Um número real α é dito algébrico se é raiz de um polinômio, não nulo, com coeficientes inteiros. Caso contrário é chamado de transcendente.

Observamos assim que todos os números racionais são algébricos, pois são soluções de equações polinomiais do primeiro grau, do tipo $a \cdot x + b = 0$, com a, $b \in \mathbb{Z}$. Apesar de podermos definir número transcendente, porém não quer dizer que exista número transcendente, em Figueiredo [3] a demonstração da existência de número transcendente é creditada a Liouville que construiu uma classe desses números. Para entendimento de algumas passagens referentes como a demonstração da transcendência de e é necessário ao leitor noções básicas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

No final do século XIX, Hermite provou a transcendência de e e ainda no mesmo século Lindermann provou também a transcendência de π. Em consequência da transcendência de π torna-se impossível responder a questão da quadratura do círculo.

A principal motivação ao escrever esse trabalho foi perceber a dificuldade de estudantes de diversos níveis de ensino com a compreensão dos números reais $\mathbb{R}$, bem como sua caracterização e utilização. Com o objetivo de expor mais uma vertente de classificação dos números reais $\mathbb{R}$, dirigimos esta dissertação àqueles professores que buscam uma abordagem diferente dos textos didáticos tradicionais.

No capítulo 1, temos uma breve introdução histórica e de forma sucinta uma revisão dos números inteiros relativos $\mathbb{Z}$, módulo e propriedades da adição e multiplicação também são abordados. A aritmética em $\mathbb{Z}$ traz alguns conceitos que são utilizados no critério de Eisenstein para determinação de polinômios de coeficientes inteiros e irredutíveis sobre $\mathbb{Q}(x)$. Os números reais são tratados como uma das finalidades do trabalho, pois a sua construção no ensino básico é bastante conturbada. Sendo assim pensou-se numa perspectiva de agregar mais uma forma de classificação para $\mathbb{R}$,e também tratamos dos polinômios, um dos pontos da Teoria Transcendente, pois definem-se os algébricos como as raízes de polinômios de coeficientes inteiros e irredutíveis. As equações polinômiais bem como suas propriedades são descritas no texto.

No capítulo 2, tratamos dos números algébricos e transcendentes, uma nota histórica sobre os números irracionais trazem a importância de observarmos como os antigos lidavam com problemas que hoje consideramos triviais, sem nos atentarmos para o fato de que alguns conceitos foram construídos à duras penas. Versamos sobre os números algébricos em algumas propriedades e definições. Transcrevemos uma prova da transcendência de e como fechamento do capítulo, neste item é importante salientar que demonstrações como esta fogem ao escopo da Matemática no ensino médio.

No capítulo 3 a proposta para a sala de aula, apresentando alguns transcendentes e outros que se conjecturam que o são, buscou-se alicerçar nas metodologias de jogos e de resolução de problemas. Citamos o sétimo problema de Hilbert e o teorema de Gelfond-Schneider.

Na sequência didática proposta, temos momentos com o objetivo de construir ao longo do final do ensino básico uma noção mais sólida acerca de $\mathbb{R}$. Os exercícios foram selecionados para que ao final desta etapa a abordagem dos números transcendentes seja algo corriqueiro ao ser trabalhado os números reais em sala de aula.

CAPÍTULO 1

Números e Polinômios

"Nota-se, entre os matemáticos, uma imaginação assombrosa... Repetimos: havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes que na de Homero."

Voltaire

Neste capítulo veremos na primeira seção o conjunto dos números inteiros relativos, parte da aritmética em $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números reais e parte da aritmética em $\mathbb{R}$. E na segunda seção estudaremos os polinômios, seu grau, operações e definiremos equações polinomiais. Para caracterizarmos os números algébricos determinamos para um número algébrico α um único polinômio P_α.

Diversos povos da antiguidade colaboraram para que a nossa cultura matemática desenvolvesse, notadamente podemos citar: os babilônicos, os egípcios, os gregos, os hindus, enfim, uma grande lista com diversos nomes.

Os povos pré-colombianos mantiveram também um apurado senso matemático, com notações próprias. Os egípcios também tinham notações para o sistema de numeração. Podemos perceber que as civilizações antigas tinham uma preocupação em estabelecer símbolos para os conceitos e ideias relacionadas às ciências, sobretudo à Matemática.

1.1 Números Inteiros

Os números inteiros foram definidos a partir da subtração de números naturais - $\mathbb{N}$. Assim, situações onde o minuendo é menor do que o subtraendo são agora possíveis. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, a diferença $a - b \in \mathbb{Z}$, mesmo que $a \leq b$.

Podemos representar o conjunto dos números inteiros relativos da seguinte forma: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$. Em $\mathbb{Z}$ são possíveis duas operações: a adição $(+)$ e a multiplicação $(\cdot)$.

O conceito de módulo é uma das ideias centrais em Matemática. O módulo ou valor absoluto de um número inteiro relativo é representado por:

$$|a| = \begin{cases} a, & se\ a \geq 0 \\ -a, & se\ a < 0 \end{cases}$$

O valor absoluto, possui as seguintes propriedades, sendo a, $b \in \mathbb{Z}$, temos:

i. $|a| = |-a|$;

ii. $-|a| \leq a \leq |a|$;

iii. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

iv. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

As operações aritméticas formam a estrutura básica de relações entre os números. O atributo especial das operações aritméticas denominamos por propriedade. A adição em $\mathbb{Z}$ goza das seguintes propriedades, dados a, b, $c \in \mathbb{Z}$, temos:

a_1. $a + b \in \mathbb{Z}$ (fechamento);

a_2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa);

a_3. $a + b = b + a$ (comutativa);

a_4. $a + 0 = 0 + a = a$ (elemento neutro);

a_5. Se $a + b = 0$, de maneira análoga podemos dizer que $b = -a$ (simétrico ou oposto).

Proposição 1.1. *Sejam a, b, $c \in \mathbb{Z}$, se $a + c = b + c$, então $a = b$.*

Demonstração. $a+c = b+c \Rightarrow (a+c)+(-c) = (b+c)+(-c) \Rightarrow a+[c+(-c)] = b+[c+(-c)] \Rightarrow a = b$.

∎

Em $\mathbb{Z}$, podemos definir uma operação, a subtração, que denotamos por $(-)$, assim, se a, $b \in \mathbb{Z}$, então $a - b = a + (-b)$. A subtração em $\mathbb{Z}$ consiste em somar a com o oposto de b.

A operação de multiplicação pode ser entendida como: soma de parcelas iguais, disposição retangular, comparação e combinatória. Por sua vez a multiplicação em $\mathbb{Z}$ possui as seguintes propriedades, dados a, b, $c \in \mathbb{Z}$:

m_1. o produto $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ (fechamento);

m_2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associativa);

m_3. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutativa);

m_4. $a \cdot 1 = a$ (elemento neutro);

m_5. $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$ (integridade);

m_6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributiva).

Proposição 1.2. *Sejam a, b, $c \in \mathbb{Z}$, teremos:*

i. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$*;*

ii. $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -a \cdot b$*;*

iii. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$*;*

iv. $a \cdot c = b \cdot c$ *(com* $c \neq 0$*)* $\Rightarrow a = b$.

Demonstração. De (iv): $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a \cdot c - b \cdot c = 0 \Rightarrow c \cdot (a - b) = 0 \Rightarrow a - b = 0$ logo $a = b$.

■

Para podermos comparar números devemos ter em mente a relação de ordem, esta checagem deve ser trivial, no sentido de que para efetuar tal checagem escolhemos qual das relações se enquadra entre os valores. Em $\mathbb{Z}$ a relação de menor que ($<$), maior que ($>$), menor que ou igual a ($\leq$) ou maior que ou igual a ($\geq$), possui as mesmas propriedades de $\mathbb{N}$, ou seja, possuem relação de ordem total sobre $\mathbb{Z}$. A relação de ordem possui propriedades interessantes. Dados a, b, $c \in \mathbb{Z}$:

o_1. $a \leq a$ (reflexiva);

o_2. se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$ (antissimétrica);

o_3. se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$ (transitiva);

o_4. ou $a \leq b$ ou $b \leq a$ (a relação $\leq$ é total);

o_5. se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$ ($\leq$ é compatível com a adição);

o_6. se $a \leq b$ e $c > 0$, então $a \cdot c \leq b \cdot c$ ($\leq$ é compatível com a multiplicação).

As proporiedades o_2 e o_4 garantem o que podemos chamar de Lei da Tricotomia, a saber: se $a, b \in \mathbb{Z}$, então $a = b$ ou $a < b$ ou $a > b$. Nesse sentido, ou é utilizado com o significado de exclusão.

1.1.1 Aritmética em $\mathbb{Z}$

Dizemos que um número inteiro m é múltiplo de outro número inteiro a se existe um $r \in \mathbb{Z}$ tal que $m = a \cdot r$. Podemos definir o conjunto de todos os múltiplos de a por $M_a = \{n \in \mathbb{Z} | n = a \cdot k, \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$.

Denominamos por divisor ao número inteiro $a \neq 0$ tal que se b inteiro, tenhamos $b = a \cdot c$ para algum c inteiro.

A divisão pode ser compreendida como partilha ou medida. Em $\mathbb{Z}$ dizemos que a *divide* b, se e somente se, $b \in M_a$. Denotamos este fato por $a \mid b$ e quando $b \notin M_a$, por $a \nmid b$. A Aritmética, que envolverá a divisão, em $\mathbb{Z}$ goza de algumas propriedades. Dados a, b, c, d, m, $n \in \mathbb{Z}$:

d_1. $a \mid a$ (reflexiva);

d_2. $a \mid b$ e $b \mid a \Rightarrow a = \pm b$;

d_3. $a \mid b$ e $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (transitiva);

d_4. $a \mid b$ e $a \mid c \Rightarrow a \mid bm + cn$ (linearidade);

d_5. $a \mid b \Rightarrow |a| \mid |b|$;

d_6. se $a = b + c$ e $d \mid c$, então $d \mid a$ se, e somente se $d \mid b$.

A divisão em $\mathbb{Z}$ pode ser sempre efetuada mesmo que deixando um resto, assim enunciamos o Algoritmo de Euclides. Se a, $b \in \mathbb{Z}$ e $b > 0$, então existem únicos inteiros q e r, denominados por: dividendo, divisor, quociente e resto respectivamente, representados por:

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < b.$$

Entre dois números inteiros quaisquer estabelecemos uma relação onde os dois números possuam divisores em comum, sendo que o maior destes é denominado *máximo divisor comum*, e denotado por mdc. Portanto, o $\text{mdc}(a, b) = \text{máx } D_a \cap D_b$, onde D_a e D_b representam o conjunto dos divisores de a, $b \in \mathbb{Z}$ respectivamente.

O máximo divisor comum $d \in \mathbb{N}$ de dois números inteiros a e b deve satisfazer os seguintes critérios:

i. $d \mid a$ e $d \mid b$;

ii. $c \mid a$ e $c \mid b \Rightarrow c \mid d$.

Proposição 1.3. *Se* $a \mid b$, *então* $\text{mdc}(a, b) = |a|$.

Demonstração. Se a divide b, observamos que $|a| \in \mathbb{N}$ é divisor comum de a e b, e, considerando $c \in \mathbb{N}$ mdc de a e b, então c divide $|a|$, segue que $|a| = \text{mdc}(a, b)$.

■

Proposição 1.4 (Lema de Euclides). *Se* $a = bq + r$, *então* $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$.

Demonstração. Sejam $d = \text{mdc}(a, b)$ e $d_0 = \text{mdc}(b, r)$. Como $d \mid a$ e $d \mid b$, d divide qualquer combinação linear envolvendo a e b, logo $d \mid r$ pois $r = a - bq$, e sendo d um divisor de b e r podemos concluir que $d \mid d_0$. Agora, do mesmo modo que fizemos para d podemos observar que d_0 divide $a = bq + r$ pois é uma combinação linear de b e r, e de maneira análoga temos que $d_0 \mid d$.

Como $d \mid d_0$ e $d_0 \mid d$, segue que $d = \pm d_0$ e concluímos que $d = d_0$, pois $d, d_0 \in \mathbb{N}$

■

Proposição 1.5 (Identidade de Bézout)**.** *Se* $d = \text{mdc}(a, b)$*, então, existem* m*,* $n \in \mathbb{Z}$ *tais que* $d = a \cdot m + b \cdot n$*.*

Demonstração. Seja o conjunto $CL = \{a \cdot m + b \cdot n,$ das combinações lineares de a e $b\}$ e um elemento

$$k = a \cdot m_0 + b \cdot n_0 \tag{1.1}$$

desse conjunto, sendo k o menor elemento positivo de CL.

Suponhamos que $k \nmid a$,então existem dois inteiros q e r de modo que possamos escrever $a = k \cdot q + r$ e tenhamos $0 < r < k$.

Escrevendo

$$r = a - k \cdot q \tag{1.2}$$

e substituindo a expressão (1.1) na expressão (1.2) obtemos $r = a \cdot (1 - m_0 \cdot q) + b \cdot (-n_0 \cdot q)$. Sendo assim $r \in CL$, mas k é o menor elemento de CL e não r, o que é absurdo, pelo fato de que $0 < r < k$.

Portanto $k \mid a$, e de maneira análoga podemos escrever que $k \mid b$. Sendo assim k é um divisor comum de a e b.

Agora, falta verificar que k é o maior divisor comum de a e b.
Sendo $d = \text{mdc}(a, b)$ podemos escrever $a = d \cdot q'$ e $b = d \cdot q''$ com $q', q'' \in \mathbb{Z}$. Substituindo as duas igualdades anteriores em (1.1) temos uma nova expressão $k = d \cdot q'm_0 + d \cdot q''n_0$. Colocando d em evidência na expressão anterior, $k = d \cdot (q'm_0 + q''n_0)$ que nos leva ao fato de $d \mid k$, acarretando $d \leqslant k$, mas d é o maior divisor comum de a e b e k é divisor comum de a e b e portanto $d = k$. Logo, podemos escrever d como combinação linear de a e b.

■

Chamamos de múltiplo comum entre dois inteiros a e b, ao número m que é simultaneamente múltiplo de a e de b. O *mínimo múltiplo comum* de a e b é o menor inteiro $m \geq 0$ que é múltiplo comum de a e b. Neste caso, denotamos $m = \text{mmc}(a, b)$.

Proposição 1.6. *Para termos* $m = \text{mmc}(a, b)$*, o inteiro* m *deve possuir as seguintes propriedades:*

i. $m \geq 0$*;*

ii. *Se* c *é múltiplo de* a *e* b*, então* $m \mid c$*.*

Para a demonstração da proposição 1.9, considere os lemas 1.7 e 1.8.

Lema 1.7. *Quaisquer que sejam* a, b, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{mdc}(n \cdot a, n \cdot b) = n \cdot \mathrm{mdc}(a, b)$.

Lema 1.8. *Sejam* a, b *e* c *números inteiros. Se* $a \mid bc$ *e* $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, *então* $a \mid c$.

Proposição 1.9. *Sejam* a, $b \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{mdc}(a, b) \cdot \mathrm{mmc}(a, b) = |a| \cdot |b| = |a \cdot b|$.

Demonstração. Considere $d = \mathrm{mdc}(a, b)$. Como d divide a e b, existem a' e b' inteiros, tais que

$$a = d \cdot a' \text{ e } b = d \cdot b'. \tag{1.3}$$

Deste modo $\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \in \mathbb{Z}$, e consequentemente $a \mid \frac{a \cdot b}{d}$ e $b \mid \frac{a \cdot b}{d}$. Logo, $\frac{a \cdot b}{d}$ é múltiplo comum de a e b, e o mesmo podemos dizer de $\frac{|a \cdot b|}{d}$. Mostraremos que este último número divide qualquer múltiplo comum de a e b.

De fato, usando as igualdades de (1.3) e o Lema 1.7, observe que

$$\begin{aligned} d &= \mathrm{mdc}(a, b) \\ &= \mathrm{mdc}(d \cdot a', d \cdot b') \\ &= d \cdot \mathrm{mdc}(a', b') \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{mdc}(a', b') = 1. \tag{1.4}$$

Agora, se m é um múltiplo comum de a e b, existem $x, y \in \mathbb{Z}$ de maneira que $m = a \cdot x = b \cdot y$, e de (1.3) escrevemos

$$m = d \cdot a' \cdot x = d \cdot b' \cdot y, \tag{1.5}$$

dividindo por d, obtemos

$$a' \cdot x = b' \cdot y$$

Desta última igualdade temos que $b' \mid a' \cdot x$, mas do Lema (1.8) e de (1.4) segue que $b' \mid x$. Escrevendo $x = b' \cdot k$ com $k \in \mathbb{Z}$, e observando a expressão (1.5) chegamos a $m = d \cdot a' \cdot b' \cdot k$, assim $d \cdot a' \cdot b' \mid m$. Note que

$$d \cdot a' \cdot b' = \frac{d \cdot a' \cdot d \cdot b'}{d} = \frac{a \cdot b}{d},$$

ou seja, $\frac{a \cdot b}{d} \mid m$, logo $\frac{|a \cdot b|}{d} \mid m$. Mostramos assim, que $\frac{|a \cdot b|}{d} \geq 0$ é um múltiplo comum de a e b, e divide qualquer outro inteiro m que seja múltiplo comum de a e b. Portanto, $\frac{|a \cdot b|}{d} = \mathrm{mmc}(a, b)$ e consequentemente

$$\mathrm{mdc}(a, b) \cdot \mathrm{mdc}(a, b) = d \cdot \frac{|a \cdot b|}{d} = |a \cdot b|.$$

■

1.1.2 Números Reais

O conjunto dos números reais é uma parte delicada no estudo das séries finais do ensino fundamental, todo o ensino médio e no ensino superior, utilizamos com frequência suas propriedades. Mas muitos estudantes em diversos níveis ainda não compreendem em toda a sua complexidade sua construção, seus teoremas e propriedades. As notações dos números confundem os estudantes, por exemplo:

i. A representação decimal infinita, periódica ou não de um número pode ser entendida apenas como racional.

ii. Quando se pede o exemplo de número real, instintivamente há apenas a relação com o subconjunto dos números naturais.

iii. Não há entendimento da representação decimal do número real por uma aproximação racional.

No intuito de construir os número reais podemos partir de diversas vertentes. A História remonta o fato de que na escola pitagórica, o conceito de incomensurabilidade gerou uma crise, creditado à Pitágoras, essa descoberta abalou fortemente a estrutura de sua sociedade. Números como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots$, pareceram necessitar de uma nova teoria das proporções, em que haja independência da comensurabilidade. Ou seja, já não podia expressar a razão entre dois segmentos com uma unidade em comum. Adotamos essa postura para introduzir os números reais, por parecer mais intuitivo esta construção e de mais fácil entendimento e serve como base para uma elaboração mais formal.

Na etapa final de Ensino Fundamental, os números reais são tratados sem rigor matemático e geralmente aborda-se algumas operações com raízes quadradas, cúbicas, entre outras aproximadas de números inteiros. E ao final diz-se que a cada ponta de uma reta está associado um número real. Como existem pontos que não estão associados a números racionais, fica claro que existem números que estão associados a esses pontos mas não são racionais, os quais chamamos de irracionais.

De modo geral, pode-se contruir rigorosamente os números reais a partir dos números racionais com sias propriedades algébricas e aritméticas, em Ferreira [2] defini-se a noção de corte devida a Dedekind, a relação de ordem e operações com cortes, a representação decimal dos números reais e finaliza com o fato de que $\mathbb{R}$ não é enumerável.

1.1.3 Aritmética em $\mathbb{R}$

O conjunto dos números reais é uma estrutura algébrica munida de duas operações: a adição $(+)$ e a multiplicação $(\cdot)$. As quais gozam das seguintes propriedades, dados a, b, $c \in \mathbb{R}$, temos :

i. a soma $a + b$ e o produto $a \cdot b$ pertencem aos números reais;

ii. para a soma $a + b = b + a$ e para o produto $a \cdot b = b \cdot a$;

iii. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

iv. $a + 0 = 0 + a = a$ e $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$;

v. se $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$;

vi. Para todo a real exite b tal que $a + b = 0$;

vii $a \cdot b = 1$.

1.2 Polinômios

Os polinômios podem ser observados como representação algébrica de certas funções, ou seja, podemos aproximar uma curva por uma representação polinomial, em que seus coeficientes sejam reais ou complexos.

1.2.1 Definições

Seja K um conjunto numérico, e uma sequência $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ onde $a_i \in K$ e os índices $i \in \mathbb{N}$.

Um polinômio $P(x)$ com coeficientes em K, é uma expressão do tipo:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

ou resumidamente, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$.

Denotamos por $K[x]$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes em K.

Um número $P(a)$ é a imagem de um número a real pelo polinômio $P(x)$, se:

$$P(a) = a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + a_{n-2} \cdot a^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot a + a_0$$

Caso um número a seja tal que $P(a) = 0$ denominamos a sendo a *raiz* do polinômio $P(x)$.

O polinômio $P(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x + 0 = 0$ é denominado polinômio nulo. Caso $P(x) = 0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x + k$,$P(x)$ é chamado polinômio constante.

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$, serão ditos *iguais* se seus coeficientes correspondentes forem iguais, isto é, dados $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ e $Q(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + b_1 \cdot x + b_0$, tivermos $a_i = b_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

1.2.2 Grau

Dado um polinômio $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ com $a_n \neq 0$ não nulo, ao número natural n, denominamos *grau* do polinômio e representamos por ∂P. Não definimos grau para o polinômio nulo, e para o polinômio constante seu grau é igual a zero.

O polinômio é dito *mônico* se o coeficiente do termo de maior grau for 1, isto é,

$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$, onde $a_n = 1$.

1.2.3 Operações

Adição

Dadas as sequências $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ e $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ a soma de todos os coeficientes dos termos semelhantes é $s_i = a_i + b_i$, quando $a_k = 0$ omitimos o termo $a_k x^k$.

Multiplicação

O produto de dois ou mais polinômios segue a regra da propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação. Dessa maneira, o produto é determinado da seguinte maneira:

$$M(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

sendo $M(x) = m_\alpha \cdot x^\alpha + m_{\alpha-1} \cdot x^{\alpha-1} + m_{\alpha-2} \cdot x^{\alpha-2} + \cdots + m_1 \cdot x + m_0$, os coeficientes m_k, são tais que $m_k = \displaystyle\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} a_i \cdot b_j$.

Teorema 1.10. *O grau do polinômio $M(x) = P(x) \cdot Q(x)$ é igual à soma dos graus dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$.*

Demonstração. Sejam os polinômios $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $Q(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ de graus n e m respectivamente. De modo que $M(x) = P(x) \cdot Q(x)$. Como os coeficientes de $M(x)$ são denotados por

$$m_k = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \geq 0}} a_i \cdot b_j,$$

temos assim para o coeficiente líder de $M(x)$, $m_\alpha = a_n \cdot b_m$. Portanto, $\alpha = m + n$.

■

Definição 1.11 (Neto [10])**.** Um polinômio $P \in K[x] \backslash K$ é *irredutível* sobre K se P não puder ser escrito como um produto de dois ou mais polinômios não constantes e com coeficientes em K. Um polinômio $P \in K[x] \backslash K$ que não é irredutível é dito *redutível* sobre K.

Exemplo 1.12. Exemplo de polinômios irredutível e redutível.

i. $P(x) = x^4 + 6x^2 + 12$ é irrdedutível sobre $\mathbb{Q}$.

ii. $Q(x) = x^6 + 7x^4 + 18x^2 + 12$ é redutível, pois $Q(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^4 + 6x^2 + 12)$

$$
\begin{array}{cccc|c}
x^4 & -2x^2 & +5x & +7 & 3x^2+1 \\ \hline
-x^4 & -\frac{1}{3}x^2 & & & \frac{1}{3}x^2 \\ \hline
 & -\frac{7}{3}x^2 & +5x & +7 & \frac{1}{3}x^2-\frac{7}{9} \\ \cline{1-4}
 & \frac{7}{3}x^2 & & +\frac{7}{9} & \\ \cline{1-4}
 & & +5x & +\frac{70}{9} &
\end{array}
$$

Tabela 1.1: Divisão de polinômios. Fonte: Neto [10].

Divisão

Considere dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ de forma que $Q(x) \not\equiv 0$. Efetuar a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ significa determinar um único par de polinômios $B(x)$ (quociente) e $R(x)$(resto) tais que sejam averiguadas as seguintes condições:

i. $P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$;

ii. $\partial R < \partial Q$.

Nem sempre é possível efetuar a divisão entre dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$. Isto porque, o dispositivo prático para a divisão de polinômios segue o algoritmo para a divisão euclidiana para números inteiros. Assim, sejam $P(x)$, $D(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$, dividendo, divisor, quociente e resto, respectivamente, o algoritmo da divisão euclidiana diz que podemos efetuar a divisão até que $\partial R < \partial Q$, ou tenhamos $R(x) \equiv 0$. O método dos coeficientes a determinar, ou, método de Descartes, consiste em utilizar do algoritmo: $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$, sendo que os coeficientes de $Q(x)$ e $R(x)$ sejam determinados a partir dessa igualdade, montando um sistema linear.

i. Determina-se ∂Q e ∂R;

ii. Explicitamos os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, com seus coeficientes como incógnitos;

iii. Estabelecemos os coeficientes a partir da igualdade $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$.

Exemplo 1.13. Algoritmo da divisão para polinômios.

Teorema 1.14. *Se um polinômio $P(x)$ for dividido por $x - \alpha$, então o resto é $P(\alpha)$.*

Demonstração. Seja $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + r(x)$. Tomando $x = \alpha$, escrevemos $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + r(\alpha)$ que resulta em $P(\alpha) = r(\alpha)$.

$\blacksquare$

1.2.4 Equações Polinomiais

Dadas duas funções polinomiais, $P(x)$ e $Q(x)$, denominamos de *equação polinomial*, também chamada de *equação algébrica*, à sentença aberta $P(x) = Q(x)$. Os valores que são as raízes do polinômio $P(x)$ são também as *raízes da equação polinomial* associada. Ao conjunto formado pelas raízes do polinômio $P(x)$, chamamos de *conjunto verdade* ou *conjunto solução.* Resolver uma equação polinomial é obter seu conjunto solução, através de expressões fechadas ou métodos numéricos.

Raízes de polinômios

Para as equações de primeiro e segundo graus, temos expressões algébricas envolvendo os coeficientes, mas o que dizer de equações de 3º ou graus maiores? No século XVI, alguns matemáticos como Scipione del Ferro, Tartaglia e Cardano,

> [...]Tartaglia resolveu diversas equações cúbicas, em particular as do tipo que escrevemos hoje como $x^3 + mx^2 = n$, considerada com coeficientes exclusivamente numéricos. Um terceiro matemático italiano, Girolamo Cardano, que parece ter obtido a fórmula de Tartaglia prometendo mantê-la em sigilo, acabou por publicá-la em 1545 no livro Ars magna (Grande arte)[...].
> (Roque[11], 2012).

Observando que o número de soluções é sempre igual ao grau da equação. Também puderam notar a falta de expressões fechadas para a resolução de equações de grau 4. Contudo, certos métodos auxiliam enormemente a determinação das raízes.

O Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 1.15. *Toda equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$, admite pelo menos uma raiz complexa.*

Sua demonstração foi a tese de doutoramento de Gauss em 1798. O admitiremos sem demonstrações para não fugir do propósito do presente texto.

Podemos escrever um polinômio em sua forma fatorada, que é a decomposição em fatores mais simples da expressão que forma o polinômio.

Consideremos um polinômio de grau $n \geq 1$, e n números reais denotados por $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$, de forma que sejam as raízes de $P(x)$ e tais que:

$$P(x) = a_n \cdot (x - z_n) \cdot \cdots \cdot (x - z_1)$$

Raízes múltiplas

Dada uma equação polinomial de grau n, e n raízes, $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n$.

i. Caso alguma raiz r_i, apareça apenas uma vez na decomposição em fatores do polinômio, dizemos que r_i, é *raiz simples* da equação.

ii. Agora, caso alguma raiz r_i, tenha aparecido m vezes na decomposição em fatores do polinômio, dizemos que r_i, é raiz *múltipla* de *multiplicidade* m da equação.

Raízes reais e racionais

Chama-se raiz ou zero da equação algébrica ou polinomial todo número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(\alpha) = 0$ seja uma sentença verdadeira, ou seja,

$$\alpha \text{ é raiz de} f \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

Proposição 1.16. *Se $f \in K[x]\backslash\{0\}$ e $\alpha \in K$, então:*

i. α é raiz de f se, e somente se $(x - \alpha) \mid f(x)$ em $K[x]$.

ii Se α for raiz de f, existe um maior inteiro positivo m tal que $(x - \alpha)^m \mid f$.

Exemplo 1.17. (Neto [10]) Sendo $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ um polinômio de coeficientes reais, temos que 2 é raiz dupla e 3 é raiz simples de f. Para $x = 2$, temos:

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 12 \\ f(2) &= 8 - 28 + 32 - 12 \\ f(2) &= 0 \end{aligned}$$

Para $x = 3$, temos:

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 7 \cdot 3^2 + 16 \cdot 3 - 12 \\ f(3) &= 27 - 63 + 48 - 12 \\ f(3) &= 0 \end{aligned}$$

Assim podemos escrever $f(x) = (x - 2)^2 \cdot (x - 3)$.

CAPÍTULO 2

Números Irracionais, Algébricos e Transcendentes

"Os conceitos mais simples são os mais abstratos."

Ostwald

Neste capítulo estudaremos o critério de Eisenstein que permite identificar polinômios com coeficientes inteiros irredutíveis sobre $\mathbb{Q}[x]$, também contemplaremos os números irracionais numa perspectiva histórica, e, comentaremos sobre a classificação em números algébricos e transcendentes. Para classificarmos um número em algébrico ou transcendente alguns conceitos devem ser levados em consideração: métodos para determinação de raízes de polinômios e o conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral para a demonstração da transcendência de e.

De acordo com Marques [9], o conjunto dos números algébricos é denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$. Notação que é bastante útil para se tratar em sala de aula de modo que o estudante se familiarize com essa nova classe de números.

2.1 Números Irracionais

Historicamente, os números irracionais, tem uma caracterização de difícil compreensão, entretanto a convivência humana com essa classe de números seja bem antiga, a pouco menos de dois séculos é que formalizaram-se teorias em torno desse tema. De acordo com Roque em [11] "os números irracionais eram manipulados livremente sem que o problema de sua natureza matemática precisasse ser investigado". Ainda prevalecia uma ideia de que não eram números mas apenas símbolos.

Quando observamos o conjunto dos números racionais, definimos que entre dois racionais existe uma infinidade de números, também racionais, assim parece não haver, na reta numérica, espaço para que encaixemos os números irracionais.

Ao escolhermos de forma aleatória uma sequência de algarismos para compor um número haverá uma enorme possibilidade de que este número formado não seja racional. Os números irracionais são caracterizados por não possuírem representação fracionária e serem dízimas não periódicas.

2.2 Números Algébricos e Transcendentes

Definição 2.1. Um número real α é *algébrico* se for a raiz de um polinômio de coeficientes inteiros. Dessa forma será *transcendente* caso não for a raiz de um polinômio de coeficientes inteiros.

Há três séculos os números transcendentes estão no foco dos trabalhos que versam sobre teoria dos números. Contudo segundo Marques [9]: "se quase todos os números são transcendentes, por que demonstrar a transcendência de um dado número é, em geral, uma tarefa tão complicada?"O quão misteriosos são estes números? Tanto é que temos poucas provas de transcendências dos números, e há ainda muitos problemas em aberto.

Muitos matemáticos contribuíram para a Teoria dos Números Transcendentes: Cantor, Euler, Hermite, Hilbert, Lindermann, Liouville, Siegel e Weierstrass. Com pouca atenção, pode-se creditar ao fato de sua metodologia residir na definição direta apenas dos números algébricos, enquanto que os transcendentes são definidos pelo que não são. Novamente devido a Euler, que trabalhou em problemas envolvendo teoria dos números, classificou os números em algébricos e transcendentes.

Liouville constrói um exemplo de um número transcendente, sendo um dos mais importantes teoremas dentro da Teoria Transcendente, o Teorema de Hermite-Lindermann permite deduzir a transcendência de vários números que estão ligados às funções exponenciais, logarítmicas e trigonométricas, números reais podem ser expressos como uma série fatorial[1], Baker confirmou a conjectura a partir de se $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$, então sua dependência linear sobre $\mathbb{Q}$ e $\overline{\mathbb{Q}}$ são equivalentes, então esse resultado seria válido para uma quantidade arbitrária de logaritmos.

2.2.1 O Critério de Eisenstein

O matemático alemão Ferdinand Gotthold Max Einsestein, que apesar de uma trajetória curta e turbulenta foi especialista em teoria dos números e análise matemática. O critério de Eisenstein nos fornece uma maneira de identificar polinômios com coeficientes inteiros irredutíveis sobre $\mathbb{Q}[x]$.

O critério nos diz que um polinômio de coeficientes inteiros é classificado como irredutível apenas analisando seus coeficientes. (critério de Eisenstein)Considere o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

[1] No Apêndice tratamos do teorema A.6 de séries fatoriais

onde $a_k \in \mathbb{Z}$ e seja p primo de modo que:

i. $p \mid a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$;

ii. $p \nmid a_n$;

iii. $p^2 \nmid a_0$.

Então $P(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Exemplo 2.2. Seja $P(x) = x^4 + 6x^2 + 12$. Basta tomar $p = 3$ primo, de modo que:

i. $3 \mid a_3 = 0, a_2 = 6, a_1 = 0$ e $a_0 = 12$;

ii. $3 \nmid a_4 = 1$;

iii. $3^2 = 9 \nmid a_0 = 12$.

Portanto, pelo critério de Eisentein, $P(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Definição 2.3. Um número real α é *algébrico* se for a raiz de um polinômio de coeficientes inteiros. Dessa forma será *transcendente* caso não for a raiz de um polinômio de coeficientes inteiros.

Isto é, um número real α é algébrico se, e somente se, existe um polinômio

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

com $a_i \in \mathbb{Z}$, tal que

$$P(\alpha) = a_n \cdot \alpha^n + a_{n-1} \cdot \alpha^{n-1} + a_{n-2} \cdot \alpha^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot \alpha + a_0 = 0.$$

Definição 2.4 (Neto [10])**.** Dado α algébrico sobre $\mathbb{Q}$, um polinômio $P_\alpha \in \mathbb{Q}[x] \backslash \{0\}$, mônico, de grau mínimo e tendo α por raiz é denominado um polinômio minimal de α.

Proposição 2.5. *Se α é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ e P_α é um polinômio minimal de α, então:*

i. P_α é irredutível sobre $\mathbb{Q}$

ii. Se $f \in \mathbb{Q}[x]$ é tal que $f(\alpha) = 0$, então $P_\alpha \mid f$ em $\mathbb{Q}[x]$

Em particular, P_α é unicamente determinado por α.

Um número algébrico α tem grau definido pelo grau de seu polinômio minimal.

Exemplo 2.6. Seja o número $\sqrt{2}$, ele é algébrico de grau 2, pois seu polinômio minimal é $P(x) = x^2 - 2$.

De acordo com Figueiredo em [3] o conjunto dos números algébricos é enumerável, ou seja, existe uma bijeção entre os elementos do conjunto dos números algébricos e o conjunto dos números naturais, podemos estabelecer uma sequência onde $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots)$. Fato curioso, é dado que muitos números são não algébricos.

Definem-se duas operações em $\overline{\mathbb{Q}}$: adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$. Considere dois números $\alpha,\ \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$, temos:

i. $\alpha \pm \beta$ é algébrico;

ii. $\alpha \cdot \beta$ é algébrico;

iii. Se $\alpha \neq 0$, então $\dfrac{1}{\alpha}$ é algébrico.

Podemos encontrar as demonstrações das afirmações acima em Figueiredo [3], que o autor faz de modo bem claro. Um conjunto, que possua as operações acima é denominado corpo[2] quando atende a certos axiomas da adição e multiplicação.

O conjunto dos números racionais tem a característica de ser denso na reta real, ou seja, podemos tomar uma aproximação bastante razoável de um número real por um racional, na qual podemos determinar o erro existente entre o valor do número real e a sua aproximação racional.

A origem dos números transcendentes remonta aos antigos gregos com o problema da duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo com régua e compasso. Assim como o desconhecimento dos irracionais, os transcendentes levaram muito tempo até poder ocupar um lugar dentro da teoria dos números.

Em Marques [9] vemos várias classificações para os números, citamos inicialmente a de Mahler em A-número, S-número, U-número e T-número, onde "A-número"denota os números algébricos. As letras S, T e U não tem um significado claro.

Teorema 2.7. *Existem números transcendentes e o conjunto formado por todos eles é não enumerável.*

Demonstração. Os algébricos formam um conjunto enumerável, enquanto que o conjunto dos números reais é não enumerável, logo o conjunto dos números transcendentes deva ser não enumerável. Caso o conjunto dos números transcendentes seja enumerável, conjunto dos números reais seria a união de dois conjuntos enumeráveis, portanto seria enumerável, o que contraia o fato de $\mathbb{R}$ ser não enumerável. Portanto o conjunto dos números transcendentes é não enumerável.(Figueiredo[3], página 17.)

■

Podemos encontrar a demonstração da transcendência de π em [3], enquanto que a transcendência de e é apresentada como solução de exercícios. No ano de 1873 Hermite mostrou a transcendência de e. Em [4] podemos ver uma prova da transcendência de e, que o leitor necessitará de conhecimento de cálculo envolvendo limites e de derivadas que não abordaremos em detalhes pois foge ao objetivo do presente trabalho.

Teorema 2.8. *e é transcendente.*

Demonstração. Na prova usaremos a notação padrão $f^{(i)}(x)$ para denotar a i-ésima derivada de f em relação a x. Suponhamos que f é um polinômio de grau r com coeficientes reais. Observe que $f^{(r+1)}(x) = 0$ e defina $F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(r)}(x)$, deste modo

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(r)}(x) \\ F'(x) &= F(x) - f(x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

[2]No Apêndice tratamos da definição e dos axiomas de corpo

Agora calculamos a derivada da função $e^{-x}F(x)$ e usamos (2.1)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) &= -e^{-x}F(x) + e^{-x}F'(x) \\ &= -e^{-x}(F(x) - F'(x)) \\ &= -e^{-x}(F(x) - (F(x) - f(x)) \\ &= -e^{-x}f(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

O Teorema do Valor Médio (TVM) afirma que, se g é uma função contínua no intervalo fechado $[x_1, x_2]$ e diferenciável no intervalo aberto (x_1, x_2) então existe um número $x_1 + \theta \cdot (x_2 - x_1) \in (x_1, x_2)$ com $0 < \theta < 1$, tal que

$$g(x_2) - g(x_1) = g'(x_1 + \theta \cdot (x_2 - x_1)) \cdot (x_2 - x_1).$$

Aplicamos o TVM à função $e^{-x}F(x)$ com $x_1 = 0$ e $x_2 = i \in \mathbb{N}$. E usando (2.2) obtemos $e^{-i}F(i) - F(0) = -e^{-\theta_i i}f(\theta_i i)i$, onde θ_i depende de i e é um número real entre 0 e 1. Multiplicando por e^i, obtemos $F(i) - e^iF(0) = -ie^{i(1-\theta_i)}f(i\theta_i)$. Escrevendo-o explicitamente para valores distintos de i:

$$\begin{array}{rcl} F(1) - eF(0) = & -e^{(1-\theta_1)}f(\theta_1) = & \epsilon_1 \\ F(2) - e^2F(0) = & -2e^{2(1-\theta_2)}f(2\theta_2) = & \epsilon_2 \\ & \vdots & \\ F(n) - e^nF(0) = & -ne^{n(1-\theta_n)}f(n\theta_n) = & \epsilon_n \end{array} \tag{2.3}$$

Suponhamos agora que e seja um número algébrico, então satisfará alguma relação da forma

$$c_ne^n + c_{n-1}e^{n-1} + \cdots + c_1e + c_0 = 0, \tag{2.4}$$

onde $c_i \in \mathbb{Z}$ e $c_0 > 0$. Nas relações (2.3), multipliquemos a primeira equação por c_1, a segunda por c_2 e assim sucessivamente. Efetuando o somatório obtemos:

$$c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) - F(0)(c_1e + c_2e^2 + \cdots + c_ne^n) = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + \cdots + c_n\epsilon_n. \tag{2.5}$$

Em vista de (2.4), $c_1e + c_2e^2 + \cdots + c_ne^n = -c_0$, onde a equação anterior se simplifica até tomar a forma:

$$c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) = c_1\epsilon_1 + \cdots + c_n\epsilon_n. \tag{2.6}$$

Toda esta discussão é válida para a função $F(x)$ construída a partir de um polinômio arbitrário $f(x)$. Veremos agora o que isto tudo implica para um polinômio muito particular, um polinômio que Hermite foi o primeiro a usar, a saber:

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p \cdots (n-x)^p. \tag{2.7}$$

Aqui, p pode ser qualquer número primo escolhido de forma que $p > n$ e $p > c_0$. Partindo deste polinômio examinaremos atentamente $F(0), F(1), \cdots, F(n)$ e faremos uma estimativa da magnitude de $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_n$. Quando desenvolvemos, $f(x)$ é um polinômio da forma:

$$\frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{a_0 x^p}{(p-1)!} + \frac{a_1 x^{p+1}}{(p-1)!} + \cdots, \text{ onde } a_i \in \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Quando $i \geq p$ afirmamos que $f^{(i)}(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros, todos os quais múltiplos de p. Assim pois, para qualquer inteiro j, $f^{(i)}(j)$, para $i \geq p$ é um inteiro e é um múltiplo de p.

Agora, da definição dada em (2.7), $f(x)$ tem uma raiz de multiplicidade p em $x = 1, 2, \cdots, n$. Logo para $j = 1, 2, \cdots, n, f(j) = 0, \cdots, f^{(p-1)}(j) = 0$. Mas $F(j) = f(j) + f'(j) + \cdots + f^{(p-1)}(j) + f^{(p)}(j) + \cdots + f^{(r)}(j)$ pela discussão anterior para $j = 1, 2, \cdots, n, F(j)$ é um inteiro e múltiplo de p. Escrevendo de outra maneira:

$$j = 1, 2, \cdots, n \Longrightarrow p \mid F(j). \tag{2.9}$$

O que dizer sobre F(0)? Como $f(x)$ tem uma raiz de multiplicidade $p-1$ em $x = 0, f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(p-2)}(0) = 0$. Para $i \geq p, f^{(i)}(0)$ é um inteiro que por sua vez é um múltiplo de p. Mas, observando (2.8) vemos que $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ e como $p > n$ e é um número primo, $p \nmid (n!)^p$ de forma que $f^{(p-1)}(0)$ é um inteiro não divisível por p.

$$\begin{aligned} F(0) &= f(0) + f'(0) + \cdots + f^{(p-2)}(0) + f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \cdots + f^{(r)}(0) \\ &= f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \cdots + f^{(r)}(0) \end{aligned}$$

concluímos que $F(0)$ é um inteiro não divisível por p, pois é a soma de um inteiro, $f^{(p-1)}(0)$, que não é divisível por p com outro, $f^{(p)}(0) + \cdots + f^{(r)}(0)$, que é. Como $c_0 > 0$ e $p > c_0$ e como $p \nmid F(0)$ enquanto que de (2.9) $p \mid F(1), p \mid F(2), \cdots, p \mid F(n)$, podemos afirmar que $c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n)$ é um inteiro e não é divisível por p.

Mas de acordo com (2.6) $c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) = c_1\epsilon_1 + \cdots + c_n\epsilon_n$. Vejamos o que pode ser dito em relação a ϵ_i. De (2.3) e (2.7) segue que

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= -ie^{i(1-\theta_i)}f(i\theta_i) \\ &= \frac{-ie^{i(1-\theta_i)}(i\theta_i)^{p-1}(1-i\theta_i)^p(2-i\theta_i)^p \cdots (n-i\theta_i)^p}{(p-1)!} \end{aligned}$$

com $0 < \theta_i < 1$ e $i = 1, 2, \ldots, n$, logo $0 < i\theta < n$, deste modo

$$\begin{aligned} |\epsilon_i| &= \frac{|-i|e^{i(1-\theta_i)}|(i\theta_i)|^{p-1}|(1-i\theta_i)|^p|(2-i\theta_i)|^p \cdots |(n-i\theta_i)|^p}{(p-1)!} \\ &\leq \frac{ne^n n^{p-1} n n^p}{(p-1)!} \\ &\leq \frac{e^n n^{2p+1}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

Quando $p \to \infty$ (usando métodos como o teste da razão para calcular o limite da sequência)

$$\frac{e^n n^{2p+1}}{(p-1)!} \to 0.$$

De onde resulta que podemos encontrar um número primo maior que c_0 e n e suficientemente grande para que $|c_1\epsilon_1 + \cdots + c_n\epsilon_n| < 1$. Mas $c_1\epsilon_1 + \cdots + c_n\epsilon_n = c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n)$, logo é um inteiro; como tem módulo menor do que 1 nossa única conclusão possível é que $c_1\epsilon_1 + \cdots + c_n\epsilon_n = 0$. Em consequência, $c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) = 0$. Mas isto é sem sentido, já que sabemos que $p \nmid (c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n))$, enquanto que $p \mid 0$. Esta contradição surge da hipótese de que e seja um número algébrico. Portanto concluímos que e é transcendente.

$\blacksquare$

CAPÍTULO 3

Proposta para Sala de Aula

"De que irei me ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?."

Cauchy

O objetivo deste capítulo é o de desenvolver uma proposta didática para docentes se pautarem ao abordar a Teoria Transcendente em sala de aula com discentes do ensino básico ou concluintes para um pequeno aprofundamento da teoria dos números e em particular caracterizar os números reais.

Podemos notar que o egresso do ensino básico, domina poucas ferramentas e competências para discutir e interagir de modo consciente na sociedade para qual ele foi supostamente preparado para atuar. E ainda há uma falta de sincronia entre o que a escola produz e o que o mercado de trabalho requer, a falta de competências e habilidades por parte dos egressos é um entrave para a sua colocação na vida profissional, o que gera nos mais jovens grande insatisfação.

Para podermos dirimir estes entraves, devemos utilizar de diversas metodologias e observar o que diz [8], Matemática não se aprende passivamente. É necessário pois estar a postos com uma boa quantidade de folhas de papel, exercitar a maior variedade possível de um tema é imprescindível.

A utilização da metodologia de jogos é interessante pois de acordo com [13][. . .] jogos são ações que (elas) repetem sistematicamente mas que possuem um sentido funcional (jogos de exercícios), isto é, são fontes de significado e, portanto, possibilitam compreensão, geram insatisfação, formam hábitos que se estruturam num sistema[...], assim fica claro que o fazer matemático necessita também essa observação dos padrões e das estruturas.

Pois de acordo com [13], Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente [...] A discussão juntamente com os estudantes sobre a História da Matemática pode gerar um grande ganho de empatia para com a Matemática por parte dos mesmos, percebendo que se trata de uma construção humana e necessita de pessoas para tal.

Uma busca rápida e podemos encontrar os 15 números transcendentes mais famosos:

1. π
2. e
3 Constante de Euler-Mascheroni $\gamma = 0,577215\ldots$ (não demonstrado)
4. Constante de Catalan $G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$
5. Constante de Liouville $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$
6. Constante de Chaitin ω (que não é calculável) Mas na base 10 pode ser $\omega = 0,0078749960078123844\ldots$
7. Número de Champernowne $0,1234567891011121314151617181920\ldots$
8. Certos valores da função ζ de Riemann, como $\zeta(3)$, onde $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$
9. $ln(2)$
10. O número de Hilbert $2^{\sqrt{2}}$
11. e^{π}
12. π^e (não demonstrado)
13. O número de Morse-Thue 0,01101001...
14. $i^i = 0,207879576\ldots$
15. Os números de Feigenbaum[1](não demonstrado): $\delta = 4,66920160910\ldots$ $\alpha = -2,502907875\ldots$

3.1 O sétimo problema de Hilbert

Com o objetivo de apresentar problemas que de enunciado simples geram uma bela teoria dentro da Matemática, e mostrar que a cada dia, cada pesquisador, estudioso faz sua contribuição. Em suma o problema é gerador de conhecimentos. No início do século XX, David

[1]Ou constantes de Feigenbaum são quocientes que aparecem nos limites de sequências do tipo $x_{n+1} = \lambda f(x_n)$, onde f é uma função real, diferenciável.

Hilbert propôs, a o que ao seu ver, constituíam problemas que seriam objeto de estudo dos matemáticos durante aquele século. A ideia é estabelecer a resolução de problemas com eixo central do trabalho matemático. Um dos problemas consistiam em determinar se certos números como $2^{\sqrt{2}}$ são algébricos ou transcendentes. No corrente século temos problemas que igualmente irão ocupar os matemáticos.

3.2 O Teorema de Gelfond-Schneider

Com trabalhos distintos, o matemático russo Alexander Osipovich Gelfond (1906 - 1968) e o matemático alemão Theodor Schneider (1911 - 1988) relacionam a uma grande classe de números a sua transcendência. Que responde ao sétimo problema proposto por Hilbert.

Teorema 1. Seja α um número algébrico, diferente de 0 e de 1, e β algébrico não racional, então α^β é transcendente.

Com resultados como estes podemos estabelecer diversas relações entre vários números. Em Marques [9] encontramos uma tabela com algumas potenciações.

z	w	z^w	Natureza Aritmética
2	$\log 3/\log 2$	3	algébrico
2	$\sqrt{2}\log 3/\log 2$	$3^{\sqrt{2}}$	transcendente
$2^{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}\log 3/\log 2$	9	algébrico
e	π	e^π	transcendente
$2^{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	4	algébrico
$2^{\sqrt{2}}$	2	$4^{\sqrt{2}}$	transcendente

Tabela 3.1: Possibilidades para z^w quando z ou w é transcendente. Fonte Marques [9].

3.3 Proposta Didática

Para a abordagem do tema em sala de aula, podemos estabelecer o público alvo sendo os discentes do primeiro ano do Ensino Médio. Com o objetivo geral de estabelecer a construção dos conjuntos numéricos dos naturais, inteiros e racionais. A saber, especificamente a ideia de pertinência, ordenação e operações.

Num primeiro momento: contextualizar com uma história lúdica o início da contagem feita pelo homem e utilizá-la como requisito para o surgimento da necessidade dos números naturais. Definir a sequência numérica, fazer corresponder na reta numérica os números naturais como um conjunto de pontos discretos e as operações de adição e multiplicação.

1. Série: 1º Ano Ensino Médio e 6º Ano Ensino Fundamental
2. Quantidade de aulas: 02 aulas
3. Material: Cópias das atividades e papel A4 para resolução das atividades

Noção de Conjuntos

A uma coleção de objetos que possuem uma propriedade em comum ou satisfazem uma determinada condição damos o nome de conjunto. Para nomeá-los utilizaremos uma letra maiúscula de nosso alfabeto e para os elementos são denotados pelas letras minúsculas. A representação de um conjunto se dará por umas das seguintes maneiras:

- Listagem: escrevemos de modo explícito os elementos do conjunto numa lista entre chaves e separando os elementos por vírgulas.
- Propriedade: escrevemos entre chaves uma propriedade ou uma condição a que estão sujeitos os elementos do conjunto.
- Diagrama de Euler-Venn: escrevemos os elementos e os circulamos com uma curva fechada.

Relação de Pertinência

Entre um conjunto e um elemento só pode haver uma das duas alternativas: o elemento pertence ou o elemento não pertence ao conjunto. Considere o conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$

Linguagem Simbólica Matemática	Linguagem Corrente
$a \in A$	O elemento a pertence ao conjunto A
$b \notin A$	O elemento b não pertence ao conjunto A

Tabela 3.2: Relação de Pertinência

Conjuntos Numéricos

A ideia de número é central na Matemática e seu surgimento se mistura com a História humana. Contar se tornou necessidade cotidiana e muitos povos criaram uma forma de registrar os números. Os mais estudados são: os romanos, os egípcios e os hindu-arábicos. São exemplos de números naturais os números utilizados em contagens.

$\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$

Efetuar as operações aritméticas, expressões numéricas e localizar os números na reta numérica real associando-os com alguns pontos da mesma.

- Determinar três números naturais consecutivos cuja soma seja 27.
- Obter o valor numérico da expressão $(a - b)^3 + a^3 + b^3$ para $a = 5$ e $b = 1$.
- Escreva os elementos do conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\}$.
- A média aritmética das idades de 35 estudantes de uma turma é de 15 anos. Qual é a soma dessas idades?

Para a associação de $\mathbb{N}$ com pontos da reta utilizamos uma semirreta sobre a qual marcamos pontos equidistantes a partir da origem.

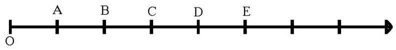

Figura 3.3.1: Reta Numérica - Pontos Associados aos Números Naturais

A cada ponto marcado na figura 3.3.1 fazemos corresponder de modo ordenado os números naturais, como mostra a figura 3.3.2 a seguir.

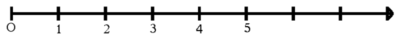

Figura 3.3.2: Reta Numérica - Pontos Associados aos Números Naturais

No segundo momento: Diante da impossibilidade de se efetuar a subtração em todos os casos com os números naturais, formaliza-se o conjunto dos números inteiros relativos. Localizando-os na reta numérica e efetuando as operações entre inteiros. Construir a regra de multiplicação entre os sinais dos números inteiros.

1. Série: 1º Ano Ensino Médio e 7º Ano Ensino Fundamental
2. Quantidade de aulas: 02 aulas
3. Material: Cópias das atividades e papel A4 para resolução das atividades

Iniciar com uma situação problema (adaptado): Em Urupema - SC, na Serra, fez seis graus Celsius negativos, a temperatura mais baixa do ano, segundo Epagri/Ciram. À tarde com o aparecimento do sol a temperatura subiu, fez três graus Celsius negativos. Como podemos representar essas temperaturas utilizando símbolos matemáticos? Para representarmos os números inteiros numa reta, recorremos à uma reta orientada estabelecendo um sentido positivo e uma origem que representa o 0 (zero); a partir deste ponto (origem) no sentido positivo, marcamos um segmento a de tamanho previamente escolhido, o qual denominaremos unidade e cuja extremidade representará o número inteiro 1; para marcarmos os demais inteiros k, a partir da origem marcamos um segmento de tamanho ka para representar o número inteiro k, no sentido positivo representa $+k$ e no sentido negativo representa $-k$.

Responda:

- Quais os números naturais entre -4 e 4?
- Quais os números inteiros entre -4 e 4?

FUVEST-SP - Adaptado Qual o valor da expressão $a^3 - 3a^2x^2y^2$ para $a = 10,\ x = 2$ e $y = 1$.

No terceiro momento: Observar que a divisão entre dois números inteiros - com o segundo diferente de zero - nem sempre é um número inteiro. Dividir números inteiros sem resto, alternar entre as formas fracionárias e decimais, e, resolver expressões numéricas.

Escreva a representação decimal de:

- $\frac{13}{5}$.

- $-\frac{3}{2}$.

- $\frac{57}{99}$.

Represente na forma de fração, simplificando quando possível:

- 0,05.

- 3,2.

- - 5,4.

No quarto momento: Dízimas periódicas e não periódicas. Calcular a representação decimal de diversas frações, observar que algumas frações resultam em decimais exatos e outras não. Neste momento mostrar que apenas os decimais exatos e as dízimas periódicas possuem representação fracionária.

1. Série: 1º Ano Ensino Médio e 7º Ano Ensino Fundamental

2. Quantidade de aulas: 01 aula

3. Material: Cópias das atividades e papel A4 para resolução das atividades

Apresentar dízimas não periódicas e o fato de não obter uma reprodução fracionária. E a partir desse fato apresentar os números irracionais.
Escrever sob forma de fração: 0,222...
dízima periódica simples
período: 2

$$\begin{aligned}
\text{Fazendo } x &= 0,222..., \\
\text{Efetuando a multiplicação por 10:} & \\
10x &= 2,222... \\
\text{Então, temos:} & \\
10x - x &= 2,222... - 0,222... \\
9x &= 2 \\
x &= \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Escrever sob forma de fração: 0,6555...
dízima periódica composta
período: 5 e parte não periódica: 6

$$
\begin{aligned}
\text{Então } 0,6555... &= \frac{6,555...}{10} \\
&= \frac{6+0,555...}{10} \\
&= \frac{6+\frac{5}{9}}{10} \\
&= \frac{\frac{59}{9}}{10} \\
&= \frac{59}{90}
\end{aligned}
$$

Calcular o valor aproximado de π. Para tal, com o auxílio de um barbante mensura-se recipientes e objetos circulares tanto o seu comprimento C quanto o seu diâmetro D. Então determina-se o valor aproximado para π com a expressão $\frac{C}{D}$.

No quinto momento: Calcular o valor de diversas expressões numéricas.

1. Série: 1º Ano Ensino Médio e 8º Ano Ensino Fundamental
2. Quantidade de aulas: 02 aulas
3. Material: Cópias das atividades e papel A4 para resolução das atividades

Na tabela 3.3 podemos perceber diversas expressões matemáticas tanto numéricas quanto algébricas.

Expressões Numéricas	Expressões Algébricas
4 + 5 - 3	$2k - 3ab$
$4 \cdot 9 + 1$	$x^2 - 5x + 6$
$(4,5)^3 - 7,7 \cdot 8,01$	$6t^2 - \frac{9k^7}{10}$

Tabela 3.3: Expressões Matemáticas

Muitas vezes é necessário obtermos o valor numérico de uma expressão algébrica, para determinarmos tal, devemos proceder da seguinte forma:

1º Substituir as variáveis pelos números dados.

2º Efetuar as operações indicadas, devendo obedecer à seguinte ordem:

i. Potenciação e radiciação;

ii. Multiplicação e divisão;

iii. Adição e subtração.

Calcular o valor numérico de $-3a + \frac{2b}{3} - 6ab + \frac{a^3}{10b}$, para $a = -4$ e $b = 2,3$.

No sexto momento: Determinar o valor numérico de vários polinômios. Efetuar operações com polinômios.

1. Série: 8º Ano Ensino Fundamental e 3º Ano Ensino Médio
2. Quantidade de aulas: 02 aulas
3. Material: Cópias das atividades e papel A4 para resolução das atividades

Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 26x^2 + 223x - 630$, calcular $\dfrac{P(2) - 2P(-1)}{P\left(\dfrac{1}{2}\right)}$.

Sabendo que -2 é raiz de $x^3 + ax^2 - 4x + 4$, determine o valor de a.

Sabendo-se que $\dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-1} = \dfrac{3x - \dfrac{1}{2}}{x^2 - 3x + 1}$.

Considere os polinômios $P(x) = x^2 - 5x + 6$ e $Q(x) = 2x^2 + 8x - 1$. Calcule:

a. $P(x) + Q(x)$.

b. $P(x) - Q(x)$ e $Q(x) - P(x)$.

c. $P(x) \cdot Q(x)$.

Dados os polinômios $F(x) = 3x^3 - 2x^2 - 11$, $G(x) = x^3 - 2x - 1$ e $H(x) = x + 1$, determine:

a. o polinômio $P(x) = (F(x) - 3G(x)) : H(x)$.

b. o grau do polinômio $F(x) \cdot G(x)$.

No sétimo momento: Determinar raízes de polinômios.

1. Série: 3º Ano Ensino Médio
2. Quantidade de aulas: 01 aula
3. Material: Cópias das atividades e papel A4 para resolução das atividades

Sabendo que 1 e 3 são raízes da equação $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 15 = 0$, determine o seu conjunto solução.

(**F. Carlos Chagas - SP**) Sabendo que 1 é raiz dupla da equação polinomial $x^3 + ax^2 - 2x + b$, calcule o valor de $a + b$.

Resolver o exemplo 4.9 de Neto [10].

As raízes do polinômio $f(X) = X^3 - 7X^2 + 14X - 6$ são os comprimentos dos lados de um triângulo. Calcule a área do mesmo. No oitavo momento:Jogo

1. Série: Ensino Fundamental e Médio
2. Quantidade de aulas: 01 aula
3. Material: Papel A4 para resolução da atividade

Propor um jogo no qual se pode usar apenas as operações de adição, subtração e multiplicação. Do seguinte modo: escolhe-se um número e por meio das operações aritméticas reduz-se o valor à zero. Em seguida ao se representar o número escolhido por x encontra-se um polinômio associado ao mesmo.

Número	Operações	Forma Polinomial
7	7 - 7 = 0	$x - 7$
$\sqrt[3]{5}$	$(\sqrt[3]{5})^3 - 5 = 0$	$x^3 - 5$
$\sqrt{7} + \sqrt{10}$	$((\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 - 149)^2 - 70 = 0$	$x^4 - 298x^2 + 22131$
$2i$	$(2i)^2 + 4 = 0$	$x^2 + 4$

Tabela 3.4: Jogo Aritmético

No nono momento: Escrevendo números algébricos e transcendentes

1. Série: 3º Ano Ensino Médio
2. Quantidade de aulas: 02 aulas
3. Material: Cópias das atividades e papel A4 para resolução das atividades

Definir números algébricos como sendo raízes de polinômios de coeficientes inteiros e transcendentes àqueles que não sejam raízes de polinômios de coeficientes constantes, o sétimo problema de Hilbert e o teorema de Gelfond-Schneider.

Um número algébrico é qualquer número que seja raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros.

Determinar as raízes das seguintes equações polinomiais:

$$\begin{aligned} x^3 - 3 &= 0 \\ x^2 - 5 &= 0 \\ x^4 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Determine se os seguintes polinômios são irredutíveis, utilizando o critério de Eisenstein.

a. $P(x) = x^4 + 10x^3 + 20x^2 + 30x + 40.$

b. $P(x) = 8x^3 + 6x^2 - 28x - 36.$

Construir o número de Champernowne obtendo-o com a sequência de números inteiros de base decimal.

Construir o número de Liouville obtendo-o com a expansão da expressão $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$.

Apresentar o sétimo problema de Hilbert e o Teorema de Gelfond-Schneider com a tabela 3.1.

Determinar o grau do polinômio minimal de $\sqrt{4 - 3\sqrt{7}}$.

CAPÍTULO 4

Considerações Finais

"A coisa mais bela que o homem pode experimentar é o mistério. É essa emoção fundamental que está na raiz de toda ciência e toda arte."

Einstein

A Matemática como ciência e ferramenta da cidadania de acordo com Roque [11] esbarra na secção de classes:

> "A imagem da matemática como um saber superior, acessível a poucos,ainda é usada para distinguir as classes dominantes das subalternas, o saber teórico do prático."

Esta imposição da divisão social tem reflexos em vários âmbitos da sociedade como um todo. De modo que devemos desconstruir essa imagem elitista da Matemática e torná-la mais atrativa aos diversos segmentos da sociedade proporcionando um caminho para que todos possam usufruir dos benefícios de se ter uma alfabetização matemática. Vemos diversas ações nesse sentido, propostas de metodologias, mudanças curriculares e estruturais na disciplina de Matemática.

Com o presente trabalho procuramos conhecer um pouco mais sobre o corpo do conjunto dos números reais, em uma pequena parte. De acordo com a natureza aritmética dos números podemos classificá-los em racionais, irracionais algébricos e irracionais transcendentes. Espera-se refletir sobre o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

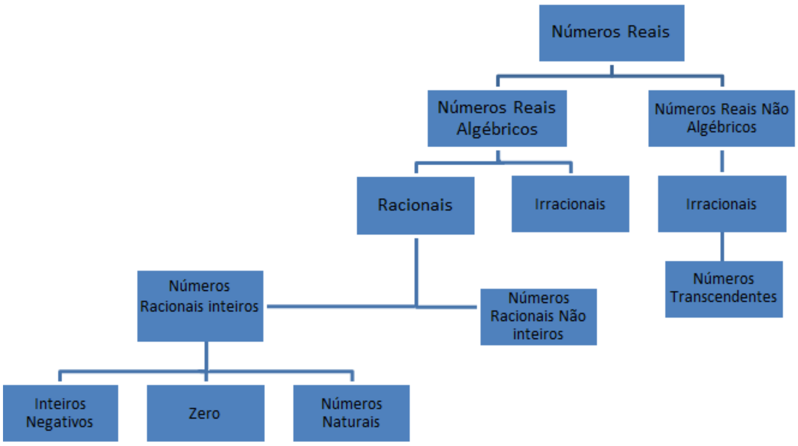

Figura 4.0.1: Tipos de Números

A figura 4.0.1 deixa claro as relações entre diversos tipos de números, estamos cientes que o conjunto dos números reais forma um aspecto delicado à formação básica pois para a sua completa compreensão carece de maior explanação.

O objetivo de abordar este conjunto nesta vertente foi de possibilitar mais uma ferramenta didática para munir o professor diante das novas necessidades da sala de aula.

Apesar do conteúdo programático atual do ensino básico não contemplar noções rudimentares de Cálculo Diferencial e Integral, uma boa atividade é a resolução dos problemas propostos em Figueiredo [3], para a determinação da transcendência de e. Em Marques [9] encontramos várias atividades de iniciação científica, problemas geradores de trabalhos acadêmicos e os teoremas de Liouville, de Hermite-Lindermann, Gelfond-Schneider e de Baker.

APÊNDICE A

Apêndice

Nesta parte do trabalho, consideraremos alguns conceitos importantes que foram utilizados no texto.

A.1 Teoremas

Em Marques [9] os teoremas de Liouville, de Hermite-Lindermann, Gelfond-Schneider e de Baker aparecem como capítulos de seu livro. Aqui o citamos para que o texto tenha uma significação maior.

A.1.1 O Teorema de Liouville

O pressuposto do qual Liouville partiu é bem simples: determinar uma propriedade comum a todos os algébricos. Então encontrar um número que não gozasse de tal propriedade.

Teorema A.1. *Seja α uma raiz real de um polinômio irredutível $P(x) \in \mathbb{Z}$ de grau $n > 2$. Então existe uma constante positiva $c(\alpha)$ tal que:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^n}$$

para todo racional $\frac{p}{q}$.

Teorema A.2. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Teorema A.3. *O conjunto dos números de Liouville tem medida nula em $\mathbb{R}$.*

Teorema A.4. *Todo número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville.*

A.1.2 O Teorema de Hermite-Lindermann

Relacionando as funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas, de acordo com Marques [9] o Teorema de Hermite-Lindermann é um dos mais importantes resultados dentro da Teoria Transcendente.

Teorema A.5. *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são números algébricos distintos, então $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_m}$ são linearmente independentes sobre o corpo dos algébricos.*

Teorema A.6. *Seja α representado por uma série fatorial $\alpha = \frac{a_1}{1!} + \frac{a_2}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{n!} + \cdots$ onde $a_n \in \{0, \ldots, n-1\}$ $\{$para $n = 2, 3, \ldots\}$, tal que a sequência de seus coeficientes $(a_n)_{n \geq 1}$ é infinita e periódica para todo n suficientemente grande. Então α é transcendente.*

A.1.3 O Teorema de Baker

O Teorema de Baker trata da combinação linear, finita e não nula de logaritmos de números algébricos.

Teorema A.7. *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são números algébricos não nulos tais que $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então $1, \log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ são linearmente independentes sobre o corpo de todos os números algébricos.*

Teorema A.8. *Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos, não nulos, e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ números algébricos tais que*

$$\beta_1 \log \alpha_1, \ldots, \beta_n \log \alpha_n \neq 0.$$

Então $\beta_1 \log \alpha_1, \ldots, \beta_n \log \alpha_n$ é um número transcendente.

Teorema A.9. *$e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ é transcendente para todos os números algébricos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ não nulos.*

Teorema A.10. *O número $\alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ é transcendente para todos os números algébricos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ diferentes de 0 e ou 1, e todos números algébricos $\beta_1, \ldots, \beta_n$ com $1, \beta_1, \ldots, \beta_n$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$.*

A.2 Conjuntos Enumeráveis

Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção f: $\mathbb{N} \to X$. No segundo caso, X diz-se infinito enumerável e, pondo-se $x_1 =$ f(1), $x_2 =$ f(2), ..., x_n = f(n), ..., tem-se $X = \{x_1, x_2, , x_n, \ldots\}$. Cada bijeção f: $\mathbb{N} \to X$ chama-se uma enumeração (dos elementos) de X.

Teorema A.11. *Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração. Considere uma função f: $\mathbb{N} \to X$, injetiva, por exemplo f(n)=x_n para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \in X$. Dessa forma, escolhemos um subconjunto não vazio $Y \subset X$, de modo que exista n_1, tal que $x_{x_1} \in Y$ e $x_{x_1} = x_n$ para algum n, então fazemos $Y = X - \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Sendo X infinito, Y não é vazio. Sendo assim $f(n+1) = x_{A_n}$.

■

Corolário A.12. *Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção f: $X \to Y$, de X sobre uma parte própria $Y \subset X$.*

Demonstração. De fato, não pode existir uma bijeção f:$X \to Y$ de um conjunto finito X sobre uma parte própria $Y \subset X$. Caso exista tal bijeção, dizemos que X será infinito. Por outro lado, observando o fato de X ser infinito, considere f: $X \to Y$ e f$(x) = nx$, onde $n \in \mathbb{N}$ e f seja bijetiva, de modo que $Y = \{x \in X | x = k_n\}$, donde $K \subset X$ e $K = \{k_1, \ldots, k_n, \ldots\}$.

■

Teorema A.13. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. De fato, se X for finito, é enumerável. Caso X seja infinito teremos que determinar uma bijeção f: $\mathbb{N} \to X$ por exemplo f$(n) = x_n$, que torna X enumerável.

■

Corolário A.14. *Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Ou, se f: $X \to Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável.*

Corolário A.15. *Dado um subconjunto infinito $X \subset \mathbb{N}$, existe uma bijeção crescente f: $\mathbb{N} \to X$.*

Teorema A.16. *Seja X um conjunto enumerável. Se f: $X \to Y$ é sobrejetiva, então, Y é enumerável.*

Demonstração. De fato, por f corresponde a cada elemento de X pelo menos um elemento de Y, como X é enumerável, segue que Y é enumerável de cardinalidade [1] menor ou igual a X.

■

Teorema A.17. *Sejam X, Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Demonstração. Considere $\xi : X \to \mathbb{N}$ e $\mu : Y \to \mathbb{N}$, de modo que $\tau : X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ seja sobrejetiva e $\tau(x, y) = (\xi(x), \mu(y))$. Observando o corolário A.14, basta mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. De fato, seja a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(\alpha, \beta) = p_1^\alpha \cdot p_2^\beta$, onde p_1 ep_2 são números primos, note que a decomposição em fatores primos é única, segue que f é injetiva. Logo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

■

Corolário A.18. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.*

Corolário A.19. *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ conjuntos enumeráveis. A reunião $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável.*

[1]A cardinalidade de um conjunto indica o total de elementos de um conjunto.

A.3 Corpos

Um corpo é um conjunto K não-vazio, munido de duas operações, chamadas de *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições, chamadas os *axiomas de corpo*. A adição faz corresponder a cada par de elementos $x, y \in K$ sua *soma* $x + y \in K$, enquanto a multiplicação associa a esses elementos o seu *produto* $x \cdot y \in K$. Os axiomas de corpo são os seguintes

A. Axiomas da adição

A1. Associatividade: quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A2. Comutatividade: quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x + y = y + x$.

A3. Elemento Neutro: existe $0 \in K$ tal que $x + 0 = x$, seja qual for $x \in K$, o elemento 0 chama-se *zero*.

A4. Simétrico: todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $x \in K$ tal que $x + (-x) = 0$.

B. Axioma da multiplicação

M1. Associatividade: quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

M2. Comutatividade: quaisquer que sejam $x, y \in K$, vale $x \cdot y = y \cdot x$.

M3. Elemento Neutro: existe $1 \in K$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, seja qual for $x \in K$, o elemento 1 chama-se *um*.

M4. Inverso Multiplicativo: todo $x \neq 0$ em K possui um inverso multiplicativo x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.

D1. Axioma da distributividade. Dados x, y, z quaisquer, em K, tem-se $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Referências Bibliográficas

[1] DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 2009.

[2] FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**.2 ed. Rio de Janeiro: SBM,2011.

[3] FIGUEIREDO, Djairo G de. **Números Irracionais e Transcendentes**.3 ed. Rio de Janeiro: SBM,2011.

[4] HERSTEIN, I. N. **Algebra Moderna**. 5ª Reimpressão. México: Editorial Trilhas: 1980.

[5] IEZZI, Gerson. **Fundamentos da Matemática Elementar**. Vol 6. 2 ed. São Paulo: Atual 1977.

[6] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática: 2º grau**. Vol 3. São Paulo: FTD.

[7] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR, José Ruy **Matemática fundamental: uma nova abordagem: ensino médio: volume único**. São Paulo: FTD 2002.

[8] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Vol 1. 14 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[9] MARQUES, Diego. **Teoria dos números transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[10] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: teoria dos números**.2 ed. Rio de Janeiro: SBM,2012.

[11] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Zahar

[12] **Polinômios** Brasil Escola. Disponível em: < http://www.brasilescola.com/matematica/polinomios.htm > . Acesso em: 02 dez. 2013.

[13] **Parâmetros Curriculares Nacionais** Site. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> . Acesso em: 13 dez. 2013.

[14] **Nombres transcendants et la diagonale de Cantor** Sítio da *internet*. Disponível em: < http://images.math.cnrs.fr/Nombres-transcendants-et-la.html>. Acesso em 03 jan. 2014

[15] **Números algebraicos y trascendentes. Los 15 números trascendentes más famosos**Sítio da *internet*. Disponível em: < http://gaussianos.com/numeros-algebraicos-y-trascendentes-los-15-numeros-trascendentes-mas-famosos/ >. Acesso em 03 de jan. 2014