



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ**  
**DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**  
**MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**ELIAS SANTOS NASCIMENTO**

**PROPRIEDADES DE REFLEXÃO DAS CÔNICAS: CONSTRUÇÃO DE  
UM CONCENTRADOR SOLAR E DE UM COMUNICADOR  
ACÚSTICO**

**ILHÉUS – BA**

**2016**

**ELIAS SANTOS NASCIMENTO**

**PROPRIEDADES DE REFLEXÃO DAS CÔNICAS: CONSTRUÇÃO DE  
UM CONCENTRADOR SOLAR E DE UM COMUNICADOR  
ACÚSTICO**

Dissertação de mestrado apresentada ao programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT ofertado pela Universidade Estadual de Santa Cruz e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito final à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Mirela Vanina de Mello

Coorientador: Prof. Me. Claudemir Mota da Cruz

**ILHÉUS – BA**

**2016**

510.7 Nascimento, Elias Santos.  
Propriedades de reflexão das cônicas : construção de um concentrador solar e de um comunicador acústico / Elias Santos Nascimento. – Ilhéus : UESC, 2016.  
78f. : il.  
Orientadora : Mirela Vanina de Melo.  
Coorientador : Claudemir Mota da Cruz.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Física – Estudo e ensino. 3. Cônicas. 4. Geometria analítica. 5. Energia solar. I. Mello, Mirela, Vanina. II. Cruz, Claudemir Mota da. III. Título.  
CDD – 510.7

ELIAS SANTOS NASCIMENTO

**PROPRIEDADES DE REFLEXÃO DAS CÔNICAS: CONSTRUÇÃO DE  
UM CONCENTRADOR SOLAR E DE UM COMUNICADOR  
ACÚSTICO**

Dissertação de mestrado apresentada ao programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT ofertado pela Universidade Estadual de Santa Cruz e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito final à obtenção do título de mestre em Matemática.

Trabalho aprovado em 23 de Março de 2016.

*Mirela Vanina de Mello*

\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Mirela Vanina de Mello

UESC - Orientadora

*Claudemir Mota da Cruz*

\_\_\_\_\_  
Prof. Me. Claudemir Mota da Cruz

UESC - Coorientador

*Roque da Silva Lyrio*

\_\_\_\_\_  
Prof. Me. Roque da Silva Lyrio

IFBA - Valença

ILHÉUS – BA

2016

A meus Pais que tanto se  
dedicaram em me ensinar o melhor  
caminho nessa vida.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, pelo sopro de vida que me deste.

Aos meus pais, que me instruíram para que chegasse onde estou.

A minha família que me incentiva a nunca desistir, especialmente à senhora Genice de Souza Oliveira.

Aos dedicados mestres e doutores que com empenho nos despertaram na busca contínua do conhecimento.

Ao meu grande amigo Alex Sandro Gabriel Pereira pelo incentivo e confiança depositados ao longo desta trajetória.

Aos caros amigos e colegas do curso que com companheirismo caminharam lado a lado comigo. Especialmente ao amigo Diego (In memoria).

Ao PROFMAT e todo corpo administrativo, discente e docente da UESC.

*“Entre os espíritos iguais e postos nas mesmas condições, o que conhece GEOMETRIA é superior aos outros e possui vigor especial.”*

Pascal

## RESUMO

A presente dissertação tem como principal objetivo propor a construção de dois dispositivos, um concentrador de raios solares e um comunicador acústico, que gozam das propriedades da reflexão em superfícies parabólicas, consequências das Leis Físicas da Reflexão, que poderão ser desenvolvidos por professores de Matemática e Física no exercício de sua função no intuito de inovarem suas aulas. Aborda um material complementar constituído por duas partes, sendo uma delas um levantamento histórico dos principais estudiosos sobre cônicas. Por outro lado, são abordados os conceitos das principais cônicas – elipse, parábola e hipérbole, que servirão como material suplementar na fundamentação teórica para a construção dos aparatos. Trás um capítulo riquíssimo no qual são abordadas importantíssimas aplicações das propriedades das cônicas. Por fim, segue-se um manual detalhado para a construção dos aparelhos propostos nesta dissertação, que servirão de incentivo aos alunos para que possam desenvolver o método científico com mais eficiência.

Palavras-chave: cônicas; reflexão; parabofone; forno.

## **ABSTRACT**

This work aims to propose the construction of two devices, a hub of sunlight and an acoustic communicator, which enjoy the properties of reflection on satellite surfaces consequences of Physical Laws of reflection, which could be developed for Mathematical and physics teachers in exercising its function in order to innovate their classes. It addresses a complementary material consisting of two parts, one being a historical survey of the leading scholars on conic. Moreover, the concepts are addressed major conic - ellipse, parabola and hyperbola, which serve as a supplementary material in the theoretical foundation for the construction of the apparatus. Behind a rich chapter in which are addressed very important applications of the conical property. Finally, here is a detailed manual for the construction of the proposed instruments in this work, which will encourage students so they can develop the scientific method more efficiently.

**Keywords:** conic; reflection; parabofone; oven.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Cônicas de Manaecmo – Fonte referência [14].	13
Figura 2: Variação da inclinação do plano com o cone duplo - Fonte referência [8].	14
Figura 3: Cone reto e cone oblíquo - Fonte referência [15].	14
Figura 4: Hexagrama místico de Pascal - Fonte referência [16].	15
Figura 5: Parabolóide de revolução - Fonte referência [17].	16
Figura 6: Reta de Newton no quadrilátero ABCD circunscrito a uma elipse - Fonte referência [18].	16
Figura 7: Reta de Newton no quadrilátero ABCD circunscrito a uma hipérbole - Fonte referência [18].	17
Figura 8: Reta de Newton no quadrilátero ABCD circunscrito a uma parábola - Fonte referência [18].	17
Figura 9: Eixos geradores do cone de revolução – Fonte referência [19].	18
Figura 10: Cônica de duas folhas – Fonte referência [19].	18
Figura 11: Elipse de focos $F_1$ e $F_2$ .	19
Figura 12: Propriedade refletora da elipse. Fonte referência [7].	21
Figura 13: Recorte do barbante para construção da elipse.	22
Figura 14: Barbante com pontas amarradas nos dois pregos.	22
Figura 15: Posicionamento dos pregos para construção da elipse.	23
Figura 16: Posicionamento adequado do lápis para construção da elipse.	23
Figura 17: Sequência de construção da primeira parte de uma elipse.	24
Figura 18: Construção da segunda parte da elipse.	24
Figura 19: Sequência de construção da segunda parte de uma elipse.	25
Figura 20: Hipérbole de focos $F_1$ e $F_2$ .	25
Figura 21: Elementos para demonstração da propriedade refletora da hipérbole – Fonte referência [20].	27
Figura 22: Demonstração da propriedade refletora da hipérbole – Fonte referência [20].	28
Figura 23: Perfurando a régua para construção da hipérbole.	29
Figura 24: Colagem da extremidade do barbante na extremidade oposta ao furo da régua.	29
Figura 25: Recorte do barbante para construção da hipérbole.	29
Figura 26: Extremidade livre do barbante amarrada no prego.	30
Figura 27: Marcação dos pontos representativos dos focos da hipérbole.	30
Figura 28: Fixação da régua em um dos focos.	31
Figura 29: Fixação do prego no segundo foco da hipérbole.	31
Figura 30: Construção de um dos ramos da hipérbole – ajuste do barbante.	31

Figura 31: Construção de um dos ramos da hipérbole.....	32
Figura 32: Completando o ramo da hipérbole.....	32
Figura 33: Construção do segundo ramo da hipérbole. ....	33
Figura 34: Hipérbole construída com régua e barbante. ....	33
Figura 35: Parábola segundo a definição. ....	34
Figura 36: Parábola com vértice na origem e concavidade voltada para a esquerda.....	36
Figura 37: Parábola com vértice na origem e concavidade voltada para cima. ....	36
Figura 38: Parábola com vértice na origem e concavidade voltada para baixo. ....	37
Figura 39: Propriedade refletora da parábola - Fonte referência [7]. ....	38
Figura 40: Colando o barbante no esquadro.....	38
Figura 41: Recorte do barbante com mesmo tamanho do lado do esquadro.....	39
Figura 42: Barbante amarrado no prego.....	39
Figura 43: Fixação do prego sobre a prancheta. Determinação do foco.....	40
Figura 44: Posicionamento do esquadro sobre a régua.....	40
Figura 45: Posicionamento do lápis sobre o esquadro para construção da parábola.....	41
Figura 46: Sequência de construção de um ramo da parábola. ....	41
Figura 47: Inversão do esquadro para construir o segundo ramo da parábola.....	42
Figura 48: Sequência de construção do segundo ramo da parábola. ....	43
Figura 49: Parábola construída com régua e compasso. ....	44
Figura 50: Johannes Kepler – Fonte referência [22].....	46
Figura 51: Tycho Brahe – Fonte Referência [24].....	47
Figura 52: Trajetória elíptica descrita por um planeta em torno do Sol - Fonte Referência [25]. .....	47
Figura 53: Geoide Terrestre – Fonte referência [26]. ....	48
Figura 54: Propriedade refletora da elipse. ....	49
Figura 55: Espelho odontológico de seção elíptica – Fonte referência [8] .....	50
Figura 56: Esquema simplificado de espelho odontológico – Fonte referência [9]. ....	50
Figura 57: Ondas geradas por um Litotriptor para pulverização de cálculo renal - Fonte referência [5]. ....	51
Figura 58: Esquema mostrando a localização dos focos da superfície elíptica - Fonte referência [31].....	51
Figura 59: Aplicação da propriedade refletora da elipse nas salas de sussurro.....	52
Figura 60: Interior do Teatro Nacional de São Carlos, Portugal – Fonte referência [32].....	53
Figura 61: Projeção planificada da sala de espetáculos do Teatro Nacional de São Carlos, Portugal – Fonte referência [8].....	53
Figura 62: Sistema de navegação hiperbólico – Fonte referência [21].....	54
Figura 63: Esquema da situação descrita por Dante – Fonte referência [3].....	55
Figura 64: Hiperboloide de folha dupla - Fonte referência [17].....	56
Figura 65: Hiperboloide de folha simples - Fonte referência [17]. ....	56
Figura 66: Superfície regrada $S$ . $r_p$ é uma reta contida em $S$ que passa por $P$ – Fonte referência [6].....	56
Figura 67: Torres hiperbólicas de superfície regrada em usinas Termonucleares - Fonte referência [17].....	57

Figura 68: Esquema simplificado de telescópio refletor com espelho hiperbólico – Fonte referência [20] e [9].	58
Figura 69: Propriedade refletora da parábola - Fonte referência [17].	59
Figura 70: Paraboloide de revolução - Fonte referência [17].	60
Figura 71: Farol de automóvel (1), projetor acústico (2) e refletor de foco (3) - Fonte referência [17].	60
Figura 72: Receptores parabólicos – Fonte referência [17].	61
Figura 73: Radares de comunicação bidirecional - Fonte referência [17].	62
Figura 74: Propriedade refletora da parábola - reflexão da luz em espelho parabólico - Fonte referência [17].	64
Figura 75: Forno solar. Odeillo, sul da França – Fonte referência [30].	65
Figura 76: Forno solar doméstico - Fonte referência [17].	65
Figura 77: Etapa 01 para construção do concentrador solar – Fonte referência [28].	66
Figura 78: Etapa 02 para construção do concentrador solar - Fonte referência [28].	66
Figura 79: Etapa 03 para construção do concentrador solar - Fonte referência [28].	67
Figura 80: Etapa final para construção do concentrador solar - Fonte referência [28].	67
Figura 81: Esquema simplificado de comunicação usando refletores parabólicos – Fonte referência [27].	68
Figura 82: Molde e peças de sustentação recortados conforme dados da tabela – Fonte referência [29].	69
Figura 83: Esquema de molde com coordenadas cartesianas nos lados do retângulo – Fonte referência [29].	70
Figura 84: Disco circular de raio 35 cm para fixação dos suportes – Fonte referência [29].	70
Figura 85: Disco circular com suportes já fixados – Fonte referência [29].	71
Figura 86: Suporte de sustentação vertical – Fonte referência [29].	71
Figura 87: Refletor acústico parcialmente montado – Fonte referência [29].	72
Figura 88: Recorte do papel cartão para refletor parabólico – Fonte referência [29].	72
Figura 89: Refletor parcialmente montado com o papel cartão – Fonte referência [29].	73

## SUMÁRIO

RESUMO .....	vii
ABSTRACT .....	viii
INTRODUÇÃO.....	11
UM BREVE HISTÓRICO SOBRE CÔNICAS .....	13
ESTUDO ANALÍTICO DAS CÔNICAS: ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA.....	18
2.1 Estudo Analítico da Elipse em coordenadas cartesianas $xOy$ .....	19
2.1.1 Propriedade refletora da elipse.....	21
2.1.2 Construindo uma elipse com material concreto.....	21
2.2 Estudo Analítico da Hipérbole em coordenadas cartesianas $xOy$ .....	25
2.2.1 Propriedade refletora da hipérbole.....	27
2.2.2 Construindo uma hipérbole com material concreto.....	28
2.3 Estudo Analítico da Parábola em coordenadas cartesianas $xOy$ .....	34
2.3.1 Propriedade refletora da parábola.....	37
2.3.2 Construindo uma parábola com material concreto.....	38
APLICAÇÕES DAS CÔNICAS NA FÍSICA.....	45
3.1 Aplicações da elipse.....	46
3.1.1 Primeira Lei de Kepler.....	46
3.1.2 Composição de Geodésias.....	48
3.2 Aplicações da propriedade refletora da elipse.....	49
3.2.1 Espelho Odontológico.....	50
3.2.2 Litotriptor Extracorpóreo.....	51
3.2.3 Salas de Sussurro.....	52
3.3 Aplicações da hipérbole.....	54
3.3.1 Sistema de localização LORAN.....	54
3.3.2 Hiperboloide na engenharia civil: Física Estática.....	55
3.4 Aplicações da propriedade refletora da hipérbole.....	57
3.4.1 Telescópio de Reflexão.....	57
3.5 Propriedade refletora da parábola.....	59
3.6 Refletores parabólicos.....	59
SUGESTÕES DE CONSTRUÇÃO DE UM CONCENTRADOR SOLAR E DE UM COMUNICADOR ACÚSTICO.....	63

4.1 Propriedade refletora da parábola e os espelhos parabólicos.....	64
4.2 Concentradores de raios solares .....	64
4.2.1 Guia de construção de um concentrador de raios solares: princípio dos fornos solares .....	65
4.3 Comunicadores acústicos.....	68
4.3.1 Guia de construção de um comunicador acústico.....	68
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	74
REFERÊNCIAS .....	76

## INTRODUÇÃO

*“Não é o ângulo reto que me atrai. Nem a linha reta, dura, inflexível, criada pelo homem. O que me atrai é a curva livre e sensual. A curva que encontro nas montanhas do meu País, no curso sinuoso dos seus rios, nas ondas do mar, nas nuvens do céu, no corpo da mulher preferida. De curvas é feito todo o Universo – o Universo curvo de Einstein”.*

*Oscar Niemeyer*

Os avanços ocorridos no campo tecnológico têm transformado significativamente as sociedades. A instantaneidade como as informações são transmitidas faz com que a busca pelo conhecimento seja imediata. Neste contexto, nós, docentes, temos que desempenhar o nosso papel, seguindo um sistema educacional que vem mostrando-se ineficaz diante de tantas tecnologias. Então perguntamos. O que fazer? A resposta é Inovar. Tendo em mente a ideia de inovação é que nortearei esta dissertação.

Minha prática docente como professor de Matemática e Física vem, nos últimos anos, me fazendo levantar hipóteses a respeito da maneira como conduzir as aulas e a explanação dos conteúdos. Dentro de uma proposta inovadora existe a possibilidade de incentivo para que estas duas disciplinas sejam trabalhadas em caráter cooperativo visando a formação de um cidadão mais ativo e participativo no meio social ao qual se encontra inserido.

Dentro de um contexto interdisciplinar, sem ferir a autonomia de cada disciplina, é possível conduzir aulas mais inovadoras uma vez que tanto a Matemática como a Física são disciplinas que têm seu ensino baseado na simples repetição de processos, ou mesmo, no máximo, à simples interpretação de um problema. Esta interdisciplinaridade se consolida nos textos dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), que atualmente rege o ensino de Matemática e Física no Brasil. Uma amostra desta situação, pode ser descrita a seguir no que tange o ensino de Física, não diferente ao que se refere o ensino de Matemática.

O ensino de Física tem-se realizado frequentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado. Privilegia a teoria e a abstração, desde o primeiro momento, em detrimento de um desenvolvimento gradual da abstração que, pelo menos, parta da prática e de exemplos concretos. Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo. Insiste na solução de exercícios repetitivos,

pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento através das competências adquiridas. Apresenta o conhecimento como um produto acabado, fruto da genialidade de mentes como a de Galileu, Newton ou Einstein, contribuindo para que os alunos concluam que não resta mais nenhum problema significativo a resolver. Além disso, envolve uma lista de conteúdos demasiadamente extensa, que impede o aprofundamento necessário e a instauração de um diálogo construtivo (BRASIL, 2000b, p. 22).

Frente ao exposto acima, o ensino de Matemática e de Física passa a ter um novo fazer pedagógico. Uma forma de ensinar que permita ao aluno desenvolver sua formação voltada à cidadania, que atue frente à sociedade e seja instrumentalizado para compreender o meio em que vive intervindo e participando ativamente nas mudanças em sua realidade cotidiana.

Diante do exposto até aqui percebemos a necessidade de se estruturar uma nova forma de ensinar Matemática e Física, de tal modo a não dissociá-las. Outro fato interessante é que estas duas disciplinas são historicamente interligadas, em que grandes mentes procuraram desenvolver suas teorias nos dois campos de tal maneira que uma estivesse sempre conectada à outra, mostrando o caráter interdisciplinar indissociável destas disciplinas. Sendo assim, tratar a Matemática aplicada à Física de maneira nenhuma pode se descartar a possibilidade interdisciplinar destas.

Não obstante, a necessidade de se partir da análise da realidade a partir do meio que nos rodeia, acaba nos direcionando a abstração. Tal abstração é coerente quando introduzimos os modelos matemáticos para descrever os fenômenos observados; é aí que surge a nossa problemática: **relacionar a realidade física ao conceito matemático por meio de suas propriedades, e sua recíproca.**

Dentre as diversas situações que nos permitem tal relação, destacaremos aqui as curvas derivadas de secções cônicas, em especial a **elipse**, a **hipérbole** e a **parábola**.

Primeiramente faremos um levantamento histórico das curvas, destacando os principais matemáticos a estudá-las. Definiremos cada uma, destacando suas principais propriedades e mostraremos como construí-las por meio da utilização de material concreto. A seguir destacaremos um capítulo exclusivamente às aplicações das cônicas nas diversas áreas da Física, por meio das suas propriedades.

## UM BREVE HISTÓRICO SOBRE CÔNICAS

Os primeiros estudos relacionados às cônicas datam por volta do início do século III a.C., na Grécia Antiga. Boa parte das investidas dos matemáticos a respeito dos estudos das cônicas se deu pelo favorecimento na tentativa de resolução dos três problemas clássicos da antiguidade. São eles: trissecção de um ângulo, quadratura do círculo e duplicação do cubo. Dentre os matemáticos da época, atribui-se a Manaecmo (380 a.C. – 320 a.C.) a condição de pioneiro na aplicação das cônicas na tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo.

A este mesmo, cabe a descoberta da elipse quando estudava as propriedades da parábola e da hipérbole. Ele acreditava que cada uma das curvas era obtida de cones circulares retos através de diferentes cortes, conforme destacamos na Figura 1. O plano seccionava o cone e a depender do ângulo formado com uma geratriz ser agudo, reto ou obtuso tínhamos curvas distintas.

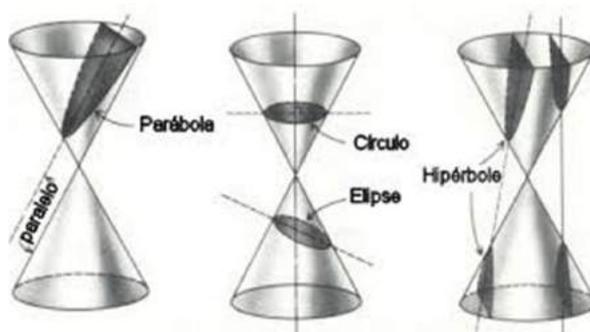


Figura 1: Cônicas de Manaecmo – Fonte referência [14].

Vale ressaltar que os escritos a respeito das cônicas são conhecidos antes de Euclides (aproximadamente 325 – 265 a.C.). Podem ser encontrados resultados de Apolônio, que viveu na cidade de Perga (262 – 190 a.C.), que apesar da maior parte das obras ter desaparecido atribui-se a ele as maiores obras sobre geometria. O que se pode saber das obras de Apolônio se deve a Pappus de Alexandria (séc IV a.C.). Sua obra prima é “Seções Cônicas” composta por 8 volumes (aproximadamente 400 proposições!). Apolônio conseguiu gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas apenas variando a inclinação do plano de interseção.

Nomeou as secções feitas em cones de cônicas e estudou exaustivamente cada uma delas. Introduziu os nomes elipse, parábola e hipérbole.

A seguir serão destacadas algumas descobertas feitas por Apolônio em sua obra.

- Como exposto anteriormente, Apolônio conseguiu gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas apenas variando a inclinação do plano de intersecção conforme Figura 2. Seja  $\beta$  o ângulo formado pela intersecção da geratriz com a base do cone e seja  $\alpha$  o ângulo formado pela intersecção do plano secante com a base do cone. Resultava, por meio da comparação de  $\alpha$  com  $\beta$ , num caso de hipérbole, parábola, elipse e circunferência (caso particular de elipse).

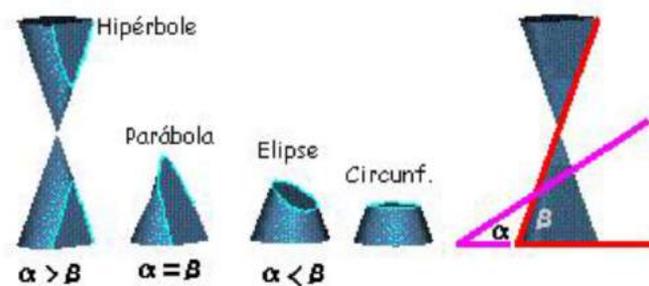


Figura 2: Variação da inclinação do plano com o cone duplo - Fonte referência [8].

- Diferente do que dispunha Manaecmo, Apolônio mostrou que o cone que origina as cônicas não deve ser necessariamente reto, pode ser escaleno ou oblíquo conforme disposto na Figura 3.

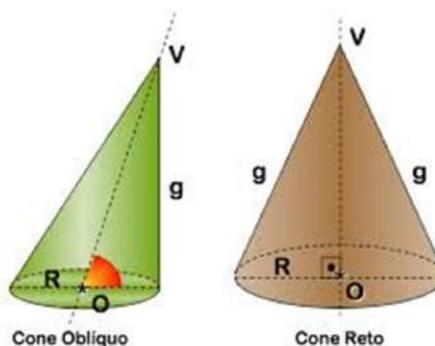


Figura 3: Cone reto e cone oblíquo - Fonte referência [15].

Outros estudiosos como Aristeu (370 a.C. – 300 a.C.) e Euclides de Alexandria (325 a.C. – 265 a.C.) também escreveram obras sobre secções cônicas. Infelizmente muitas das obras de Euclides, considerado “Pai da Geometria”, se perderam, inclusive “As Cônicas”.

Nesta lista de grandes matemáticos pode ser acrescentado Arquimedes (287-212 a.C.). Este foi um célebre cientista, matemático e inventor grego. Escreveu uma obra sobre a quadratura da parábola constituída por vinte e quatro proposições onde calculou a área de uma parábola usando o método de exaustão. Provou que a área da figura formada por um arco de parábola e um segmento de reta é igual a quatro terços da área de um triângulo inscrito de mesma base e de vértice no ponto onde a tangente é paralela a base.

Destacam-se ainda, mais algumas mentes brilhantes como Johannes Kepler (1571 – 1630) com a descrição das órbitas planetárias por meio de elipses, Gérard Desargues (1591 – 1661) que, mesmo tendo seus trabalhos negligenciados, motivou o notável Blaise Pascal (1623 – 1662) a escrever um manuscrito sobre secções cônicas baseado em seu trabalho. Em seu manuscrito Pascal aborda o *Teorema do Hexágono Místico* que leva seu nome. Segundo este teorema, se seis pontos arbitrários, A, B, C, D, E e F, são escolhidos sobre uma cônica e ordenados conforme os vértices de um hexágono, conforme Figura 4, então os três pares de lados opostos do hexágono (estendidos se necessário), se intersectam em três pontos (G, H, K) que são colineares. A demonstração deste Teorema pode ser encontrada na dissertação de mestrado de João Carlos Cataldo [2].

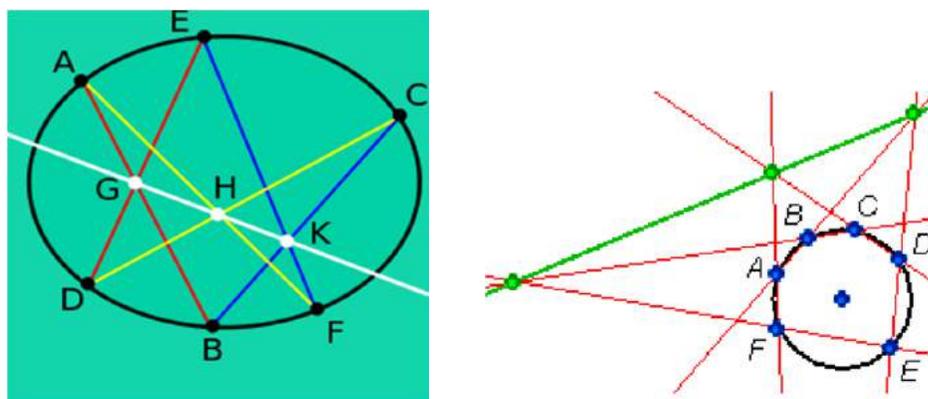


Figura 4: Hexagrama místico de Pascal - Fonte referência [16].

Discussões sobre elipse, hipérbole e parábola foram abordadas pelo fabuloso Pierre de Fermat (1601 – 1665) num artigo intitulado “*Isogoge ad lócus planos et sólidos*” (. Fermat criou as equações cartesianas para a circunferência, para a reta e equações cartesianas simples

para as cônicas. Correlacionou, no plano, equações de grau 1 (um) com retas e de grau 2 (dois) com parábolas, além de elaborar estudos de cônicas a partir de equações com duas variáveis.

Christiaan Huygens (1629 – 1695) deixou sua contribuição ao elaborar e publicar um trabalho sobre a quadratura de secções cônicas. Trabalho este que contribuiu para desenvolver estudos sobre análise infinitesimal das cônicas e o cálculo da superfície de um segmento de um parabolóide de revolução (Figura 5).

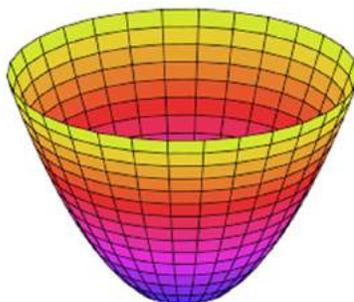


Figura 5: Parabolóide de revolução - Fonte referência [17].

O prodígio Isaac Newton (1643-1727) não poderia estar de fora desta lista de gênios. Ele continuou os trabalhos de Kepler, possibilitando o estudo analítico das cônicas e suas aplicações aos movimentos no espaço. Elaborou muitas das proposições que mais tarde compuseram o livro dos “*Principia*”, dentre elas, destacam-se:

- A propriedade de que *a reta que passa pelos pontos médios das diagonais de um quadrilátero circunscrito em uma cônica passa pelo centro da cônica* (Siqueira e Souza, 2011), conforme Figuras 6, 7 e 8.

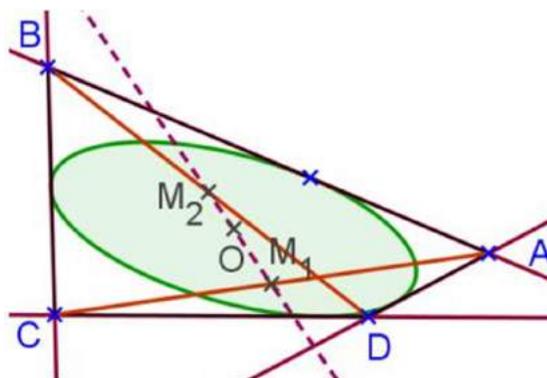


Figura 6: Reta de Newton no quadrilátero ABCD circunscrito a uma elipse - Fonte referência [18].

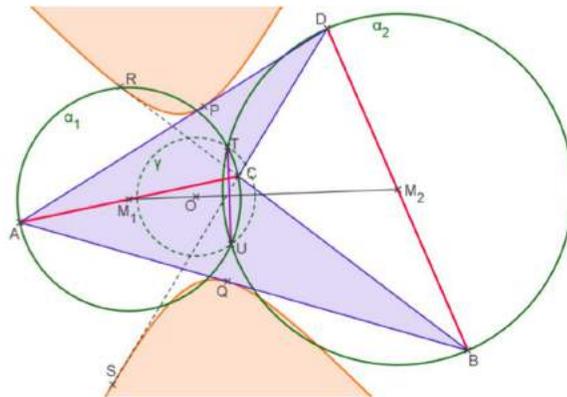


Figura 7: Reta de Newton no quadrilátero ABCD circunscrito a uma hipérbole - Fonte referência [18].

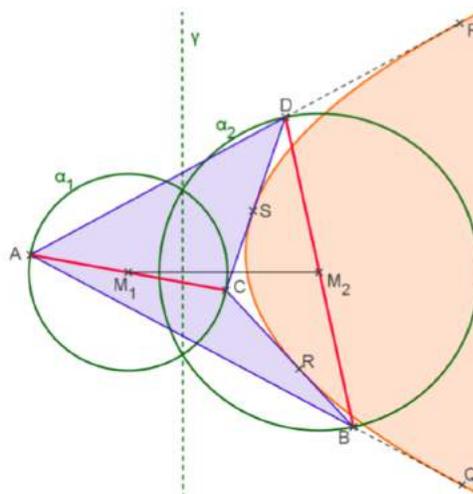


Figura 8: Reta de Newton no quadrilátero ABCD circunscrito a uma parábola - Fonte referência [18].

**ESTUDO ANALÍTICO DAS CÔNICAS: ELIPSE, HIPÉRBOLE E PARÁBOLA.**

A seguir, como seção principal, serão abordadas analiticamente cada uma das seções cônicas, destacando suas principais propriedades. Será mostrado, como seção secundária, a construção de cada cônica utilizando material concreto. Para tanto, será formalizada a definição de um cone de revolução.

Considere duas retas  $e$  e  $g$ , não perpendiculares e concorrentes em  $V$ , conforme Figura 9.

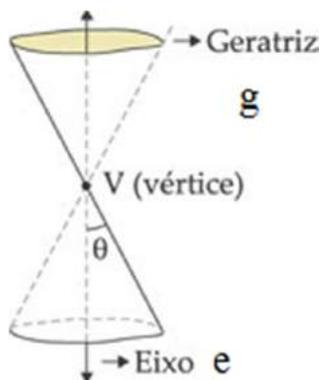


Figura 9: Eixos geradores do cone de revolução – Fonte referência [19].

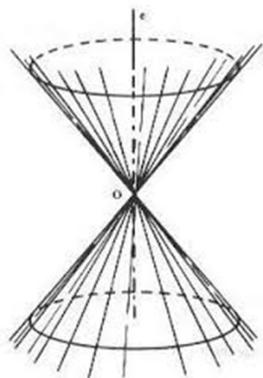


Figura 10: Cônica de duas folhas – Fonte referência [19].

Com a reta  $e$  fixa pelo ponto  $V$ , faz-se  $g$  girar  $360^\circ$  em torno de  $e$ , mantendo constante o ângulo  $\theta$  formado por elas. A reta  $g$  gera uma superfície denominada superfície cônica de duas folhas (Figura 10). A reta  $g$  é chamada geratriz dessa superfície. As cônicas são geradas pela intersecção dessa superfície cônica com um plano secante.

## 2.1 Estudo Analítico da Elipse em coordenadas cartesianas $xOy$ .

Será necessário, a seguir, dispor da definição de distância entre dois pontos ( $A$  e  $B$ ) no plano. Para tanto será utilizado a seguinte notação  $d_{AB} = B - A = AB$ .

**Definição 1:** Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos dados ( $F_1$  e  $F_2$ ) é constante e igual a  $2a$ , conforme observa-se na Figura 11. Os dois pontos são chamados de focos da elipse (AVRITZER, 2009) [1].

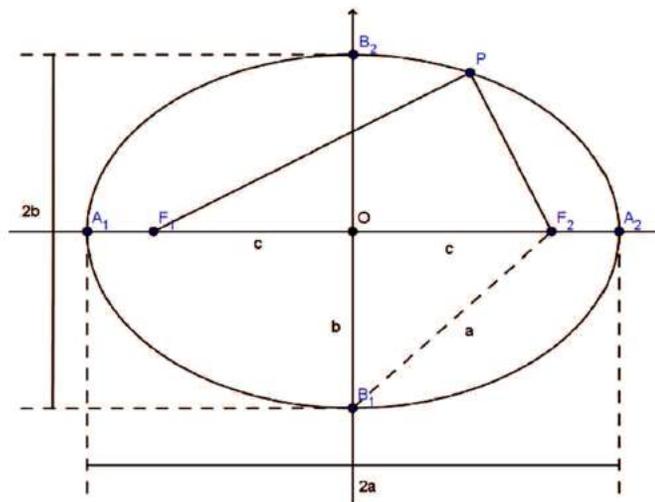


Figura 11: Elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

Os elementos da elipse são:

**Focos:** são os pontos  $F_1$  e  $F_2$ .

**Distância focal:** é a distância entre os focos  $F_1$  e  $F_2$ .

**Eixo maior:** é a distância entre os pontos  $A_1$  e  $A_2$  ( $A_1A_2=2a$ )

**Eixo menor:** é a distância entre os pontos  $B_1$  e  $B_2$  ( $B_1B_2=2b$ ).

**Centro:** é o ponto  $O$  ponto médio do segmento  $A_1A_2$ .

Seja P um ponto pertencente à elipse da Figura 11, cujas coordenadas cartesianas sejam  $(x, y)$ . Da Definição 1 tem-se que a soma das distâncias de P a  $F_1$  e de P a  $F_2$  é igual  $2a$ , com  $2a > 2c$ , isto é,

$$PF_1 + PF_2 = 2a . \quad (1)$$

Sejam ainda  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$  as coordenadas dos focos  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente, localizados sobre o eixo das abscissas. De (1) segue

$$\sqrt{(x - (-c))^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a,$$

ou ainda

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Elevando-se ambos os membros ao quadrado,

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo os quadrados fora da raiz, temos

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Simplificando teremos

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (2)$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os membros, agrupando e simplificando chegamos a

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (3)$$

Da Figura 11 temos que  $a^2 = b^2 + c^2$ , donde tiramos  $a^2 - c^2 = b^2$ . Dividindo a expressão (3) por  $a^2b^2 \neq 0$ , chegaremos à equação da elipse com eixo  $2a$  contido no eixo das abscissas e centro na origem dos eixos coordenados:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Analogamente podem ser encontradas as equações da elipse cujo eixo maior se encontra sobre o eixo das ordenadas e centro na origem do sistema cartesiano. Chegando a

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Não serão tratados nesta dissertação os casos de translação e rotação de eixos, uma vez que não é o foco desse estudo, cabendo ao leitor um aprofundamento a partir de outros recursos. Caso julgue necessário o leitor poderá consultar (LEHMANN, 1989) [7].

Será destacada a propriedade refletora da elipse. Esta propriedade será abordada no capítulo referente às aplicações das cônicas na Física por meio de suas principais propriedades.

### 2.1.1 Propriedade refletora da elipse.

Segundo Teorema 6 (LEHMANN, 1989) [7] página 187, a reta normal à elipse em qualquer um de seus pontos é bissetriz do ângulo formado pelos **raios vetores**<sup>1</sup> desse ponto. (Figura 12).

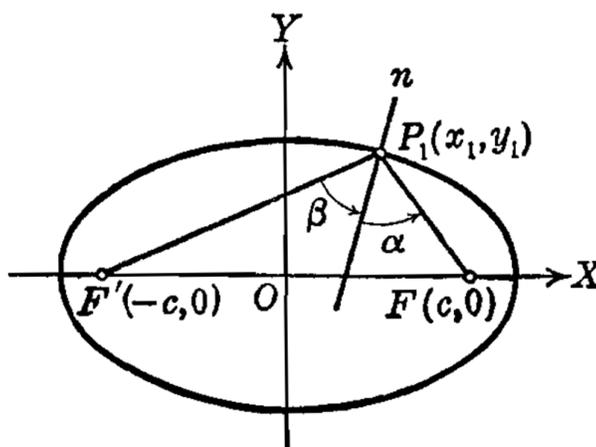


Figura 12: Propriedade refletora da elipse. Fonte referência [7].

Conseqüentemente se a partir de um dos focos,  $F'$  por exemplo, for traçado um segmento de reta qualquer ( $F'P_1$ ), este segmento encontra a elipse num ponto  $P_1$  que forma com a normal um ângulo  $\beta$ , e se a partir deste ponto for traçado outro segmento,  $FP_1$  por exemplo, que faça com a curva um ângulo  $\alpha$  igual ao do primeiro segmento, o segundo segmento passa pelo outro foco  $F$ .

### 2.1.2 Construindo uma elipse com material concreto.

A seguir será mostrado como construir uma elipse utilizando material concreto de fácil aquisição.

**Material necessário:** lápis, pedaço de barbante, dois pregos pequenos, uma prancheta para fixação, folhas de ofício (pode diversificar o material de acordo à realidade local).

<sup>1</sup> Segmento de reta com extremidades no foco e no ponto pertencente à elipse.

**Etapas da construção:**

1º) Recorte um pedaço de barbante entre 15 cm e 25 cm, conforme Figura 13 a seguir.

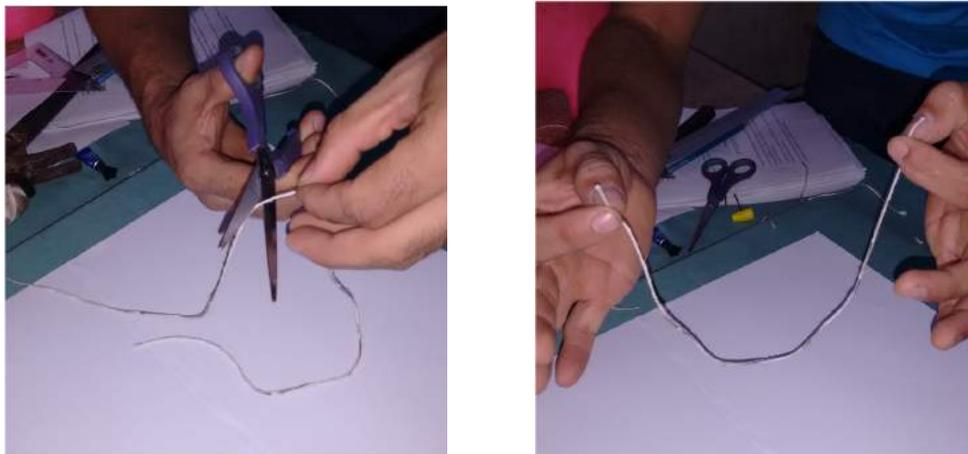


Figura 13: Recorte do barbante para construção da elipse.

2º) Amarre as pontas do barbante recortado em cada um dos pregos, conforme Figura 14.

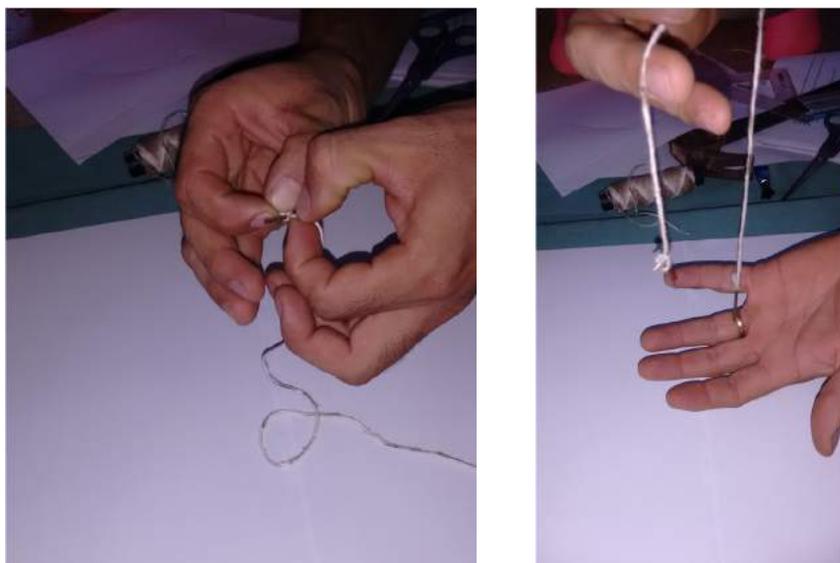


Figura 14: Barbante com pontas amarradas nos dois pregos.

3º) Com o papel ofício sobre a prancheta, fixe os pregos em dois pontos tais que a distância entre os pontos seja menor que o comprimento do barbante, conforme Figura 15. Os pontos de fixação dos pregos serão os focos da elipse.

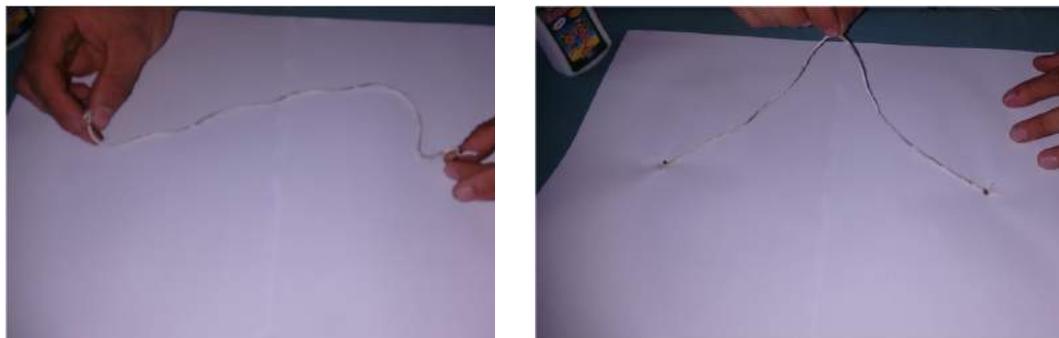


Figura 15: Posicionamento dos pregos para construção da elipse.

4º) Posicione o lápis com o barbante esticado e com a ponta de grafite sobre o papel, conforme Figura 16.

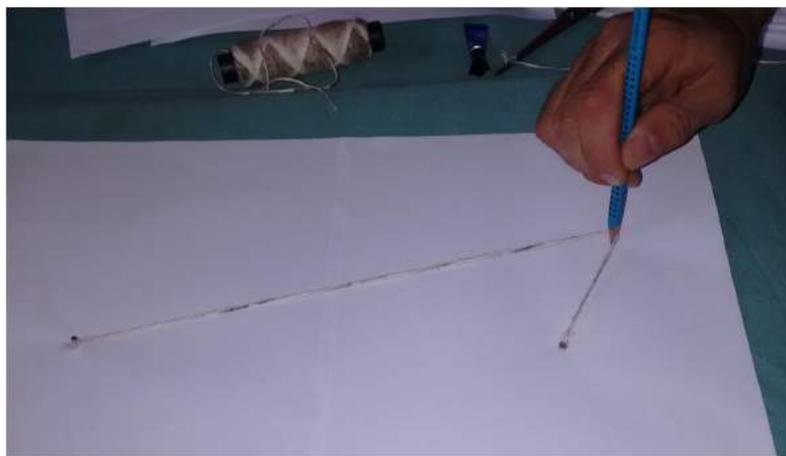


Figura 16: Posicionamento adequado do lápis para construção da elipse.

5º) Mantendo o barbante sempre esticado, desloque o lápis sobre o papel ofício conforme Figura 17 (sequência a-b-c-d). Determina-se assim uma parte da elipse.

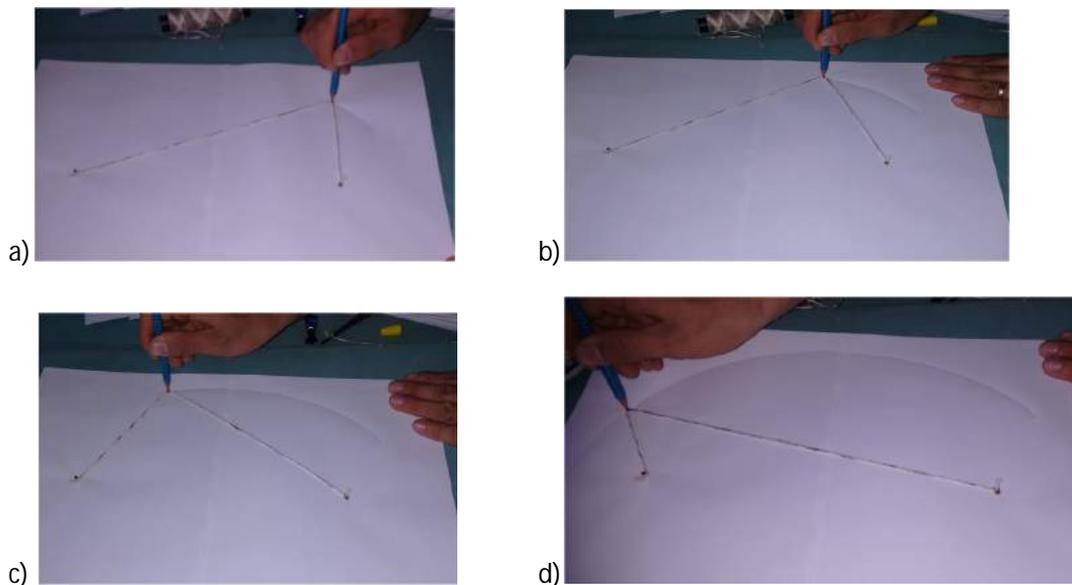


Figura 17: Sequência de construção da primeira parte de uma elipse.

6º) Invertendo a posição do lápis, repita o processo para construir a outra parte da elipse conforme Figura 18.



Figura 18: Construção da segunda parte da elipse.

7º) Mantendo o barbante sempre esticado, desloque o lápis sobre o papel ofício conforme Figura 19 (seqüência e-f-g-h). Determina-se assim a outra parte da elipse.

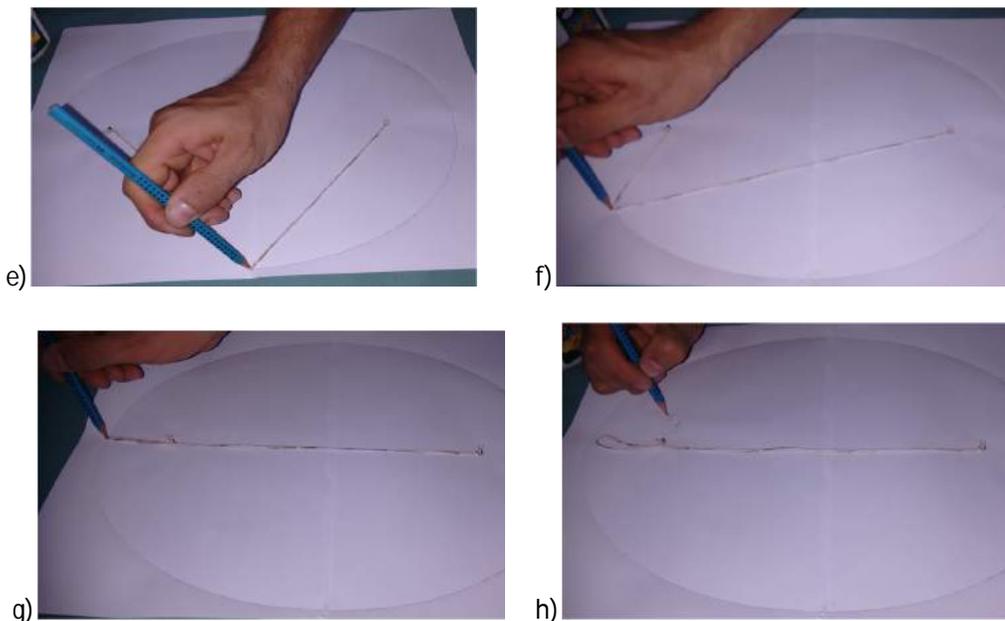


Figura 19: Seqüência de construção da segunda parte de uma elipse.

## 2.2 Estudo Analítico da Hipérbole em coordenadas cartesianas $xOy$ .

**Definição 2:** Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos dados é constante e menor que a distância entre  $F_1$  e  $F_2$ . Os dois pontos são chamados de focos da hipérbole (AVRITZER, 2009) [1].

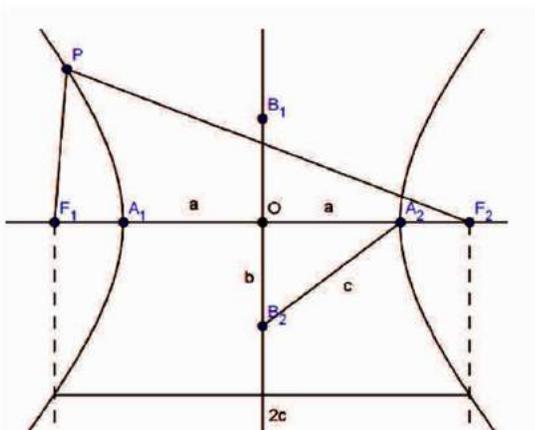


Figura 20: Hipérbole de focos  $F_1$  e  $F_2$ .

Os elementos da hipérbole são:

**Focos:** são os pontos  $F_1$  e  $F_2$ .

**Distância focal:** é a distância entre os focos  $F_1$  e  $F_2$ .

**Eixo real ou transverso:** é a distância entre os pontos  $A_1$  e  $A_2$  ( $A_1A_2=2a$ )

**Eixo imaginário ou conjugado:** é a distância entre os pontos  $B_1$  e  $B_2$  ( $B_1B_2=2b$ ).

**Centro:** é o ponto O ponto médio de  $A_1A_2$ .

Seja P um ponto pertencente à hipérbole da Figura 20, cujas coordenadas cartesianas sejam  $(x, y)$ . Da Definição 2 tem-se que o módulo da diferença das distâncias de P a  $F_1$  e de  $P_2$  a  $F_2$  é constante e igual a  $2a$ , com  $2a < 2c$ , isto é,

$$|PF_1 - PF_2| = 2a. \quad (4).$$

Sejam ainda  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$  as coordenadas dos focos  $F_1$  e  $F_2$ , localizados sobre o eixo das abscissas. De (4) segue,

$$\left| \sqrt{(x - (-c))^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \right| = 2a,$$

ou ainda

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Observando a propriedade de módulo. Elevando-se ambos os membros ao quadrado,

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2.$$

Desenvolvendo os quadrados fora da raiz

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Simplificando teremos

$$\pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Elevando novamente ao quadrado ambos os membros, agrupando e simplificando chegamos a

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \quad (5)$$

Da Figura 20 segue que  $c^2 = a^2 + b^2$ , donde pode ser tirado  $c^2 - a^2 = b^2$ . Dividindo a expressão (5) por  $a^2b^2 \neq 0$  chega-se à equação da hipérbole com eixo  $2a$  contido no eixo das abscissas e centro na origem dos eixos coordenados:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Analogamente podemos encontrar a equação da elipse cujo eixo maior se encontra sobre o eixo das ordenadas e centro na origem do sistema cartesiano chegando a

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

De modo semelhante não serão tratados os casos de translação e rotação de eixos coordenados. Caso julgue necessário o leitor poderá consultar (LEHMANN, 1989) [7]. Por outro lado destaca-se a propriedade refletora da hipérbole, propriedade esta que será abordada no estudo das aplicações na Física.

### 2.2.1 Propriedade refletora da hipérbole.

Segundo Teorema 7 (LEHMANN, 1989) [7] página 208 a propriedade refletora da hipérbole afirma que a reta tangente a uma hipérbole em qualquer um de seus pontos é bissetriz do ângulo formado pelos raios vetores desse ponto

Considere a reta  $PF_1$ , secante a um dos ramos de uma hipérbole e que contenha o foco  $F_1$ , conforme Figura 21.

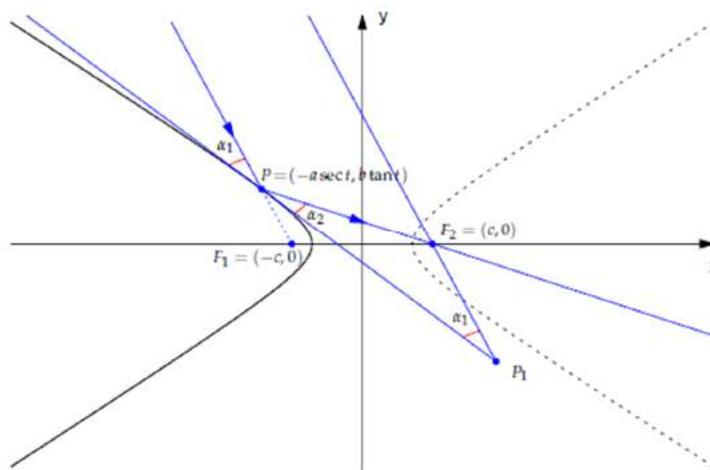


Figura 21: Elementos para demonstração da propriedade refletora da hipérbole – Fonte referência [20].

Seja ainda a reta  $PP_1$  tangente ao ramo da hipérbole em  $P$ . A reta  $PF_1$  forma com a reta  $PP_1$  um ângulo denotado por  $\alpha_1$ . Traçando a reta que forma o ângulo  $\alpha_2$  com a tangente  $PP_1$  e utilizando-se das propriedades de paralelismo, por construção conclui-se que a reta que forma  $\alpha_2$  com  $PP_1$  é a reta  $PF_2$ , conforme Figura 22.

Sendo  $F_2$  o segundo foco da hipérbole conclui-se que toda reta secante a um dos ramos da hipérbole que possui direção passando pelo foco, gera retas que possuem direção contendo o segundo foco da hipérbole.

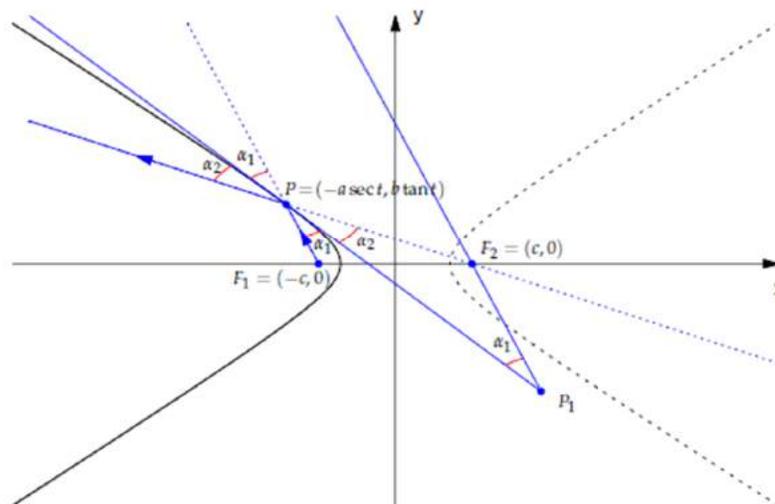


Figura 22: Demonstração da propriedade refletora da hipérbole – Fonte referência [20].

### 2.2.2 Construindo uma hipérbole com material concreto.

A seguir será mostrado como construir uma hipérbole utilizando material concreto de fácil aquisição.

**Material necessário:** lápis, pedaço de barbante, cola instantânea, dois pregos, uma régua de 30 cm de acrílico, prancheta para suporte de fixação dos pregos e papel ofício (pode diversificar o material de acordo à realidade local).

#### Etapas da construção:

1º) Com um prego aquecido perfure uma das extremidades da régua de acrílico conforme Figura 23.

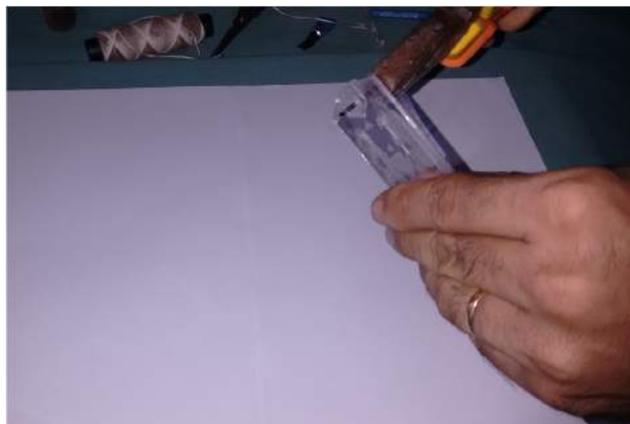


Figura 23: Perfurando a régua para construção da hipérbole.

2º) Utilizando cola instantânea cole uma extremidade do barbante na extremidade oposta ao furo da feito na régua, de tal modo que o barbante fique alinhado à marca graduada da régua conforme Figura 24.



Figura 24: Colagem da extremidade do barbante na extremidade oposta ao furo da régua.

3º) Tome, a partir da extremidade colada, um pedaço do barbante menor que o comprimento da régua (algo em torno de 14 cm) e recorte conforme Figura 25.



Figura 25: Recorte do barbante para construção da hipérbole.

4º) Amarre a extremidade livre do barbante em um dos pegos conforme Figura 26.



Figura 26: Extremidade livre do barbante amarrada no prego.

5º) Marque dois pontos sobre a prancheta de modo que distância entre eles obedeça a relação

$$0 < (\text{comprimento da régua}) - (\text{comprimento do barbante}) < F_1F_2,$$

o que dá algo em torno de 16 cm, conforme sequência (i-j-k-l) da Figura 27.

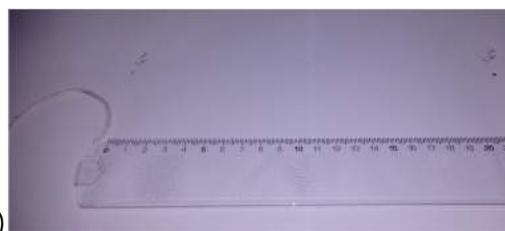
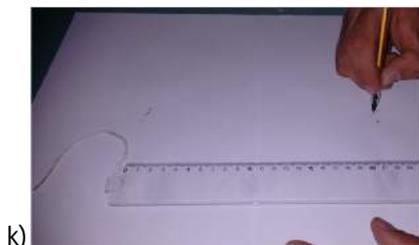
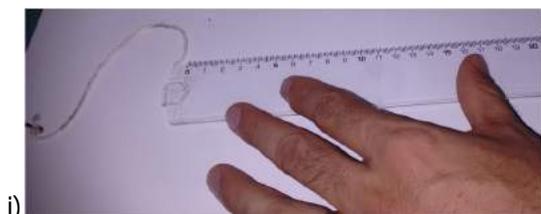


Figura 27: Marcação dos pontos representativos dos focos da hipérbole.

6º) Com o uso de um martelo prenda com um prego a extremidade da régua que contém o furo feito no início, em um dos pontos demarcados conforme Figura 28.

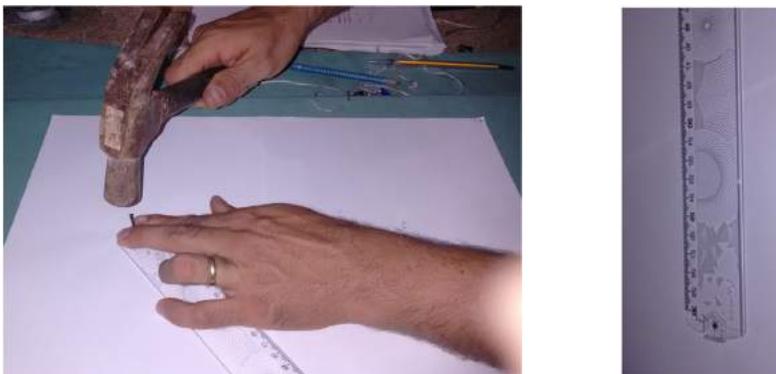


Figura 28: Fixação da régua em um dos focos.

7º) Fixe o prego que contém a extremidade do barbante no outro ponto demarcado. Esses pontos serão os focos da hipérbole. Observe o processo de fixação na Figura 29.

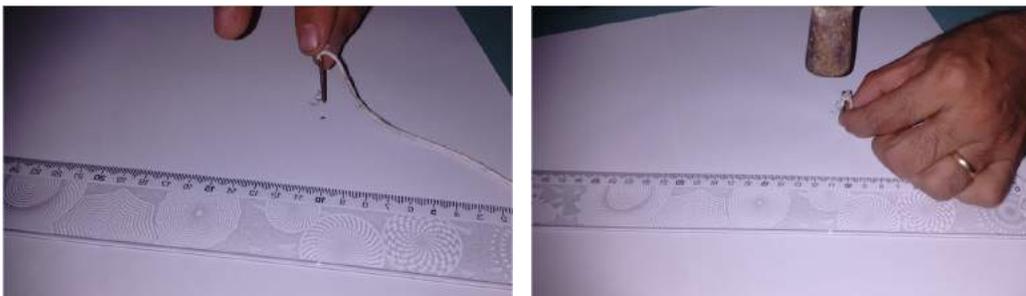


Figura 29: Fixação do prego no segundo foco da hipérbole.

8º) Com lápis ou algo similar, encoste o barbante junto à régua de modo que o barbante fique esticado, conforme Figura 30.

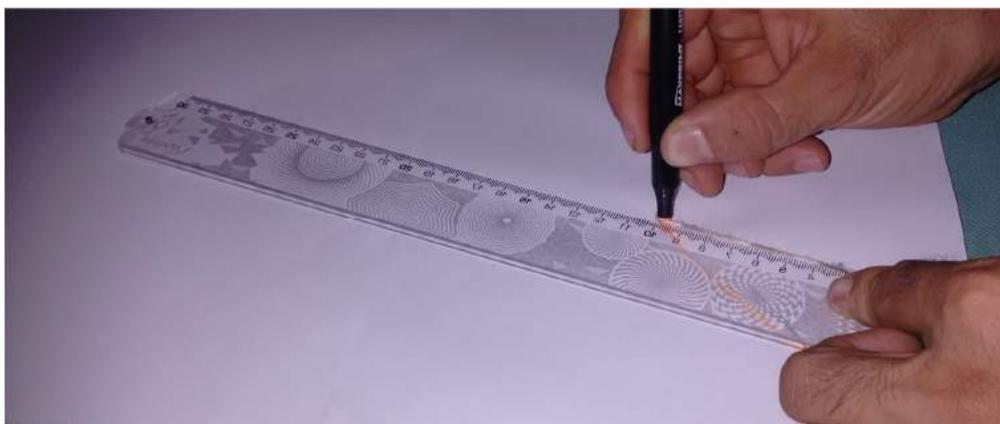


Figura 30: Construção de um dos ramos da hipérbole – ajuste do barbante.

9º) Gire a régua em torno do seu ponto fixo de modo que o barbante continue esticado junto à régua. A curva começará a aparecer naturalmente conforme Figura 31.

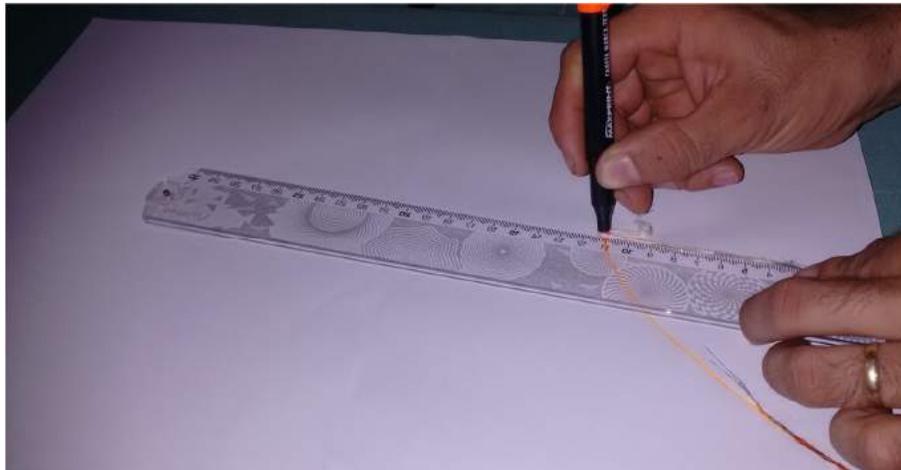


Figura 31: Construção de um dos ramos da hipérbole.

10º) Retire a régua e inverta a posição para completar o ramo da hipérbole conforme Figura 32.

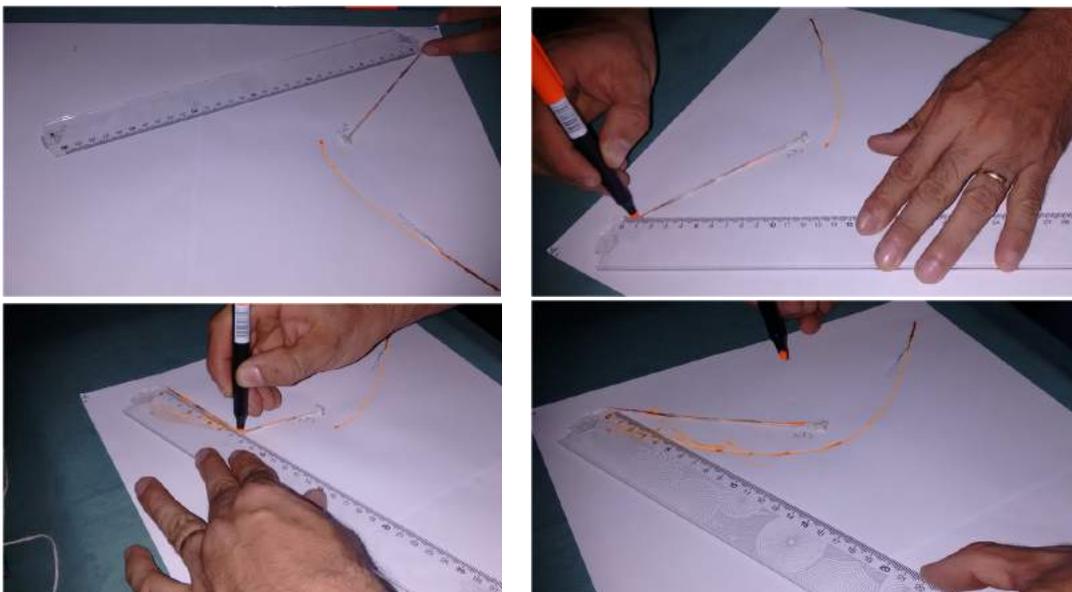


Figura 32: Completando o ramo da hipérbole.

11º) Repita todo o processo anterior, invertendo os pontos de fixação da régua e do prego preso ao barbante. No fim tem-se uma hipérbole com dois ramos conforme sequência da Figura 33.

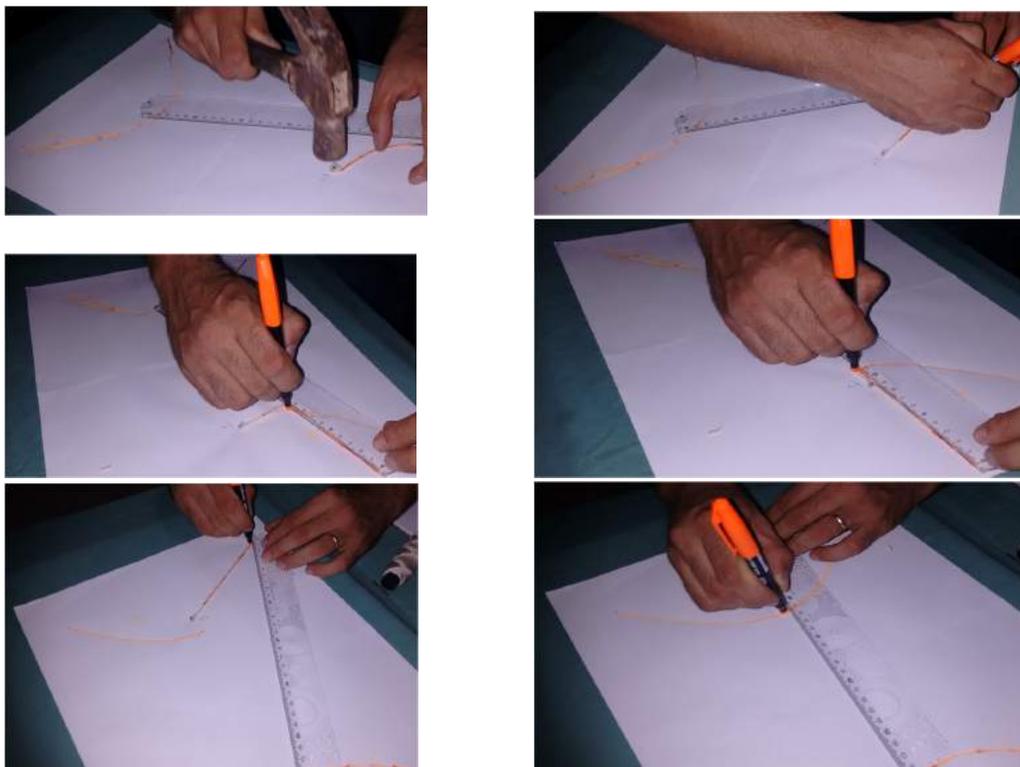


Figura 33: Construção do segundo ramo da hipérbole.

12º) Após todos os processos descrito, chega-se à hipérbole da Figura 34.



Figura 34: Hipérbole construída com régua e barbante.

### 2.3 – Estudo Analítico da Parábola em coordenadas cartesianas xOy.

**Definição 3:** Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que sua distância a um ponto fixo, chamado foco, é igual à sua distância a uma reta fixa, chamada diretriz (AVRITZER, 2009) [1]. Figura 35.

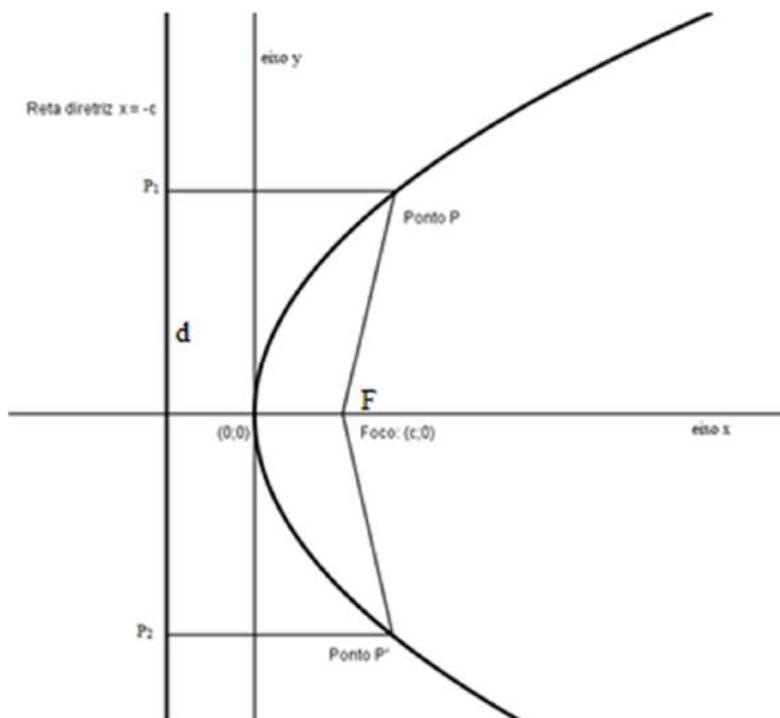


Figura 35: Parábola segundo a definição.

Os elementos da parábola são:

**Foco:** é o ponto F.

**Diretriz:** é a reta d.

**Reta focal:** é a reta que passa pelo foco e é perpendicular a diretriz. Esta reta também é chamada de reta de simetria da parábola, uma vez que, da definição, percebe-se que esta reta divide a parábola em dois ramos simétricos.

**Vértice:** é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

**Parâmetro da Parábola:** é a distância entre o foco e a diretriz.

Para encontrar a equação da parábola, sem perda de generalidade, considere uma parábola com eixo de simetria coincidente com o eixo das abscissas e concavidade voltada para a direita e com vértice coincidindo com a origem do sistema de coordenadas. Conforme Figura 35, toma-se inicialmente um ponto  $(c,0)$  que será denotado de foco da parábola e uma reta  $P_1P_2$  de equação  $x = -c$ , que será chamada de reta diretriz  $d$  da parábola.

Tome então um ponto  $P$ , de coordenadas  $(x, y)$  pertencente à parábola. Aplicando a Definição 3 tem-se que a distância entre o ponto  $P$  e o foco  $F$  é igual à distância entre o ponto  $P$  e a reta diretriz.

Da definição de distâncias entre pontos segue que a distância entre os pontos  $P$  e  $F$ , isto é,  $(x, y)$  e  $(c,0)$  é dada por

$$FP = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Da definição de distância entre ponto e reta segue que a distância entre o ponto  $P$  e a reta  $d$  é igual à distância entre o ponto  $P$  e a projeção ortogonal do ponto  $P$  sobre a reta  $d$ , isto é, entre o ponto  $P$  e o ponto  $P_1$ . Ou seja, entre  $(x, y)$  e  $(-c, y)$

$$P_1P = \sqrt{(x+c)^2}.$$

Segue-se daí que a distância entre o ponto  $P$  e o ponto  $F$  é igual à distância entre o ponto  $P$  e a reta diretriz, isto é,

$$FP = P_1P \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, chega-se a

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2.$$

Desenvolvendo os quadrados e simplificando encontra-se a equação  $y^2 = 4cx$ , que é a equação de uma parábola com reta focal coincidindo com o eixo das abscissas e foco de coordenadas  $(c,0)$  e vértice coincidindo com a origem, cuja concavidade está voltada para a direita. De modo análogo determinam-se as equações a seguir:

a) parábola com reta focal no eixo das abscissas e concavidade voltada para a esquerda (Figura 36):  $y^2 = -4cx$ .

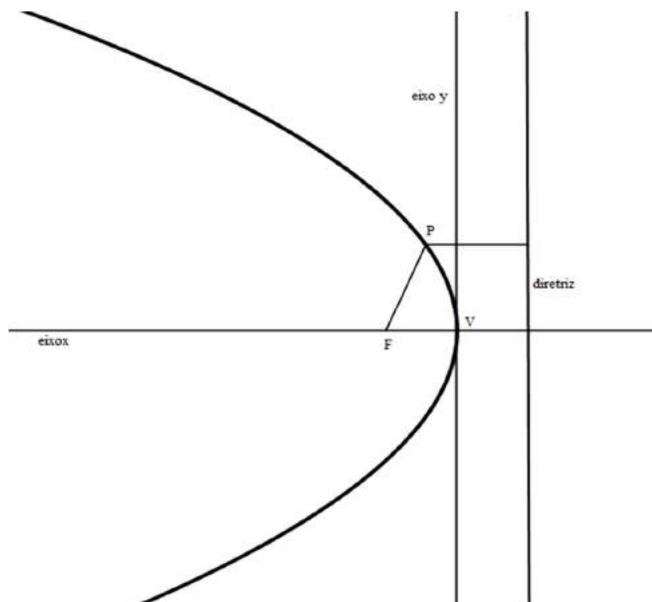


Figura 36: Parábola com vértice na origem e concavidade voltada para a esquerda.

b) parábola com reta focal no eixo das ordenadas e concavidade voltada para a cima (Figura 37):  $x^2 = 4cy$ .

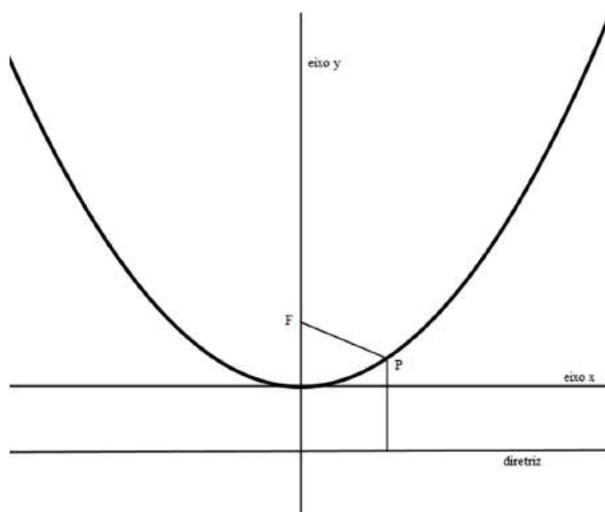


Figura 37: Parábola com vértice na origem e concavidade voltada para a cima.

c) parábola com reta focal no eixo das ordenadas e concavidade voltada para baixo (Figura 38):  $x^2 = -4cy$ .

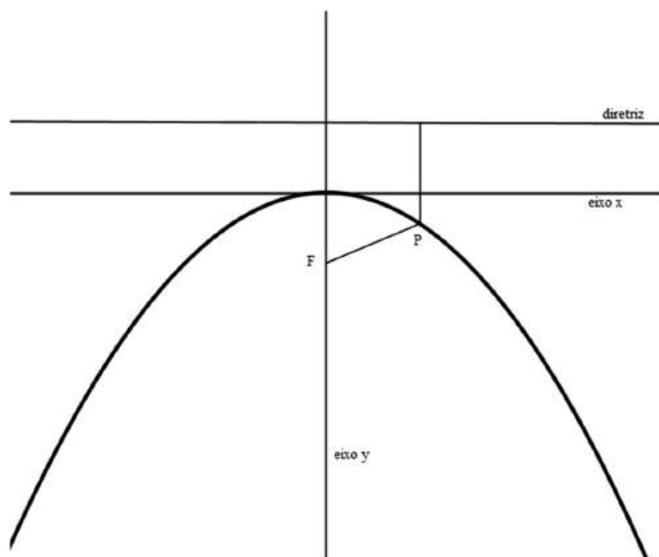


Figura 38: Parábola com vértice na origem e concavidade voltada para baixo.

Semelhantemente não serão tratados os casos de translação e rotação de eixos coordenados, caso julgue necessário o leitor poderá consultar (LEHMANN, 1989) [7]. Por outro lado será destacada a propriedade refletora da parábola, propriedade esta que será abordada no estudo das aplicações na Física.

### 2.3.1 Propriedade refletora da parábola.

De modo semelhante à elipse e hipérbole, a propriedade de reflexão associada à parábola é disposta como segue, segundo Teorema 7 (LEHMANN, 1989) [7] página 168 que diz que a reta normal à parábola em um ponto  $P_1(x_1, y_1)$  qualquer da parábola forma ângulos de medidas iguais com o raio vetor de  $P_1$  e a reta que passa por  $P_1$  e é paralela ao eixo focal da parábola conforme Figura 39. Conclui-se, a partir daí, que todas as retas incidentes na superfície parabólica numa direção paralela ao eixo focal, seguem numa direção que passa pelo foco F da parábola.

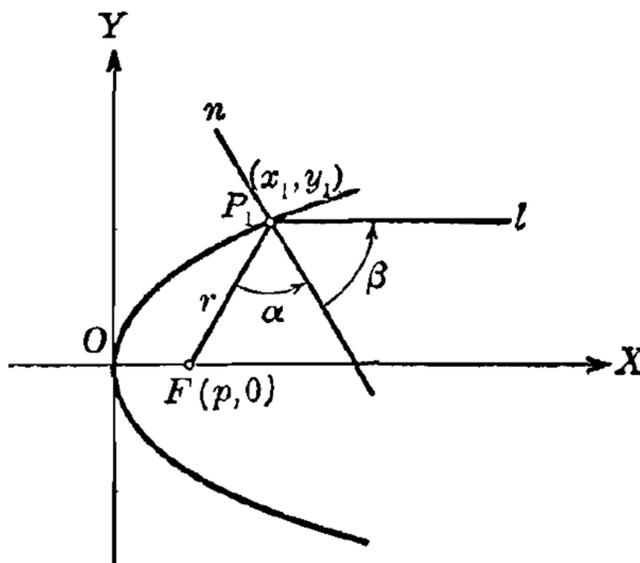


Figura 39: Propriedade refletora da parábola - Fonte referência [7].

### 2.3.2 Construindo uma parábola com material concreto.

A seguir será mostrado como construir uma parábola utilizando material concreto de fácil aquisição.

**Material necessário:** lápis, pedaço de barbante, um prego pequeno, régua, um esquadro de 45°, uma prancheta para fixação, papel ofício, cola instantânea (pode diversificar o material de acordo à realidade local).

#### **Etapas da construção:**

1º) Cole uma extremidade do barbante em uma das extremidades do esquadro equivalente a um dos ângulos de 45° de modo que o barbante fique alinhado à lateral do esquadro, conforme Figura 40.

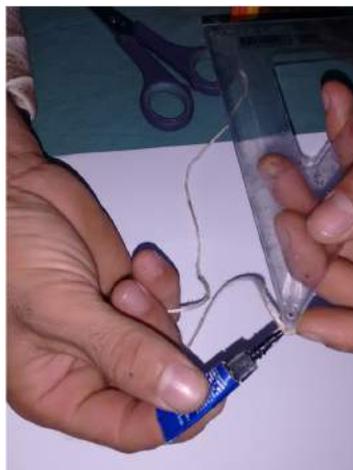


Figura 40: Colando o barbante no esquadro.

2º) Recorte o barbante de modo que fique com o comprimento igual ao comprimento do lado do esquadro referente à parte em que colou a extremidade do barbante, conforme Figura 41.

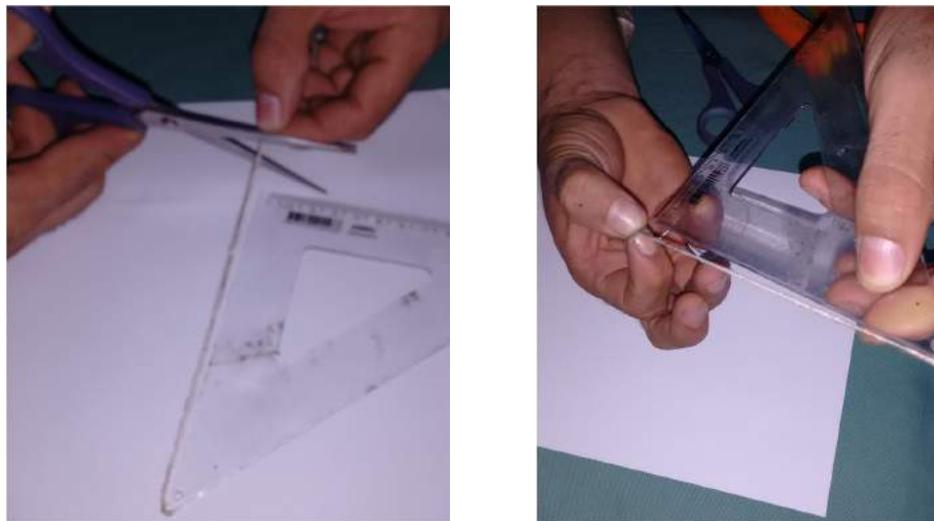


Figura 41: Recorte do barbante com mesmo tamanho do lado do esquadro.

3º) Amarre a extremidade livre do barbante em um prego pequeno conforme Figura 42.



Figura 42: Barbante amarrado no prego.

4º) Fixe o prego na prancheta conforme Figura 43. Este ponto de fixação será o foco da parábola.

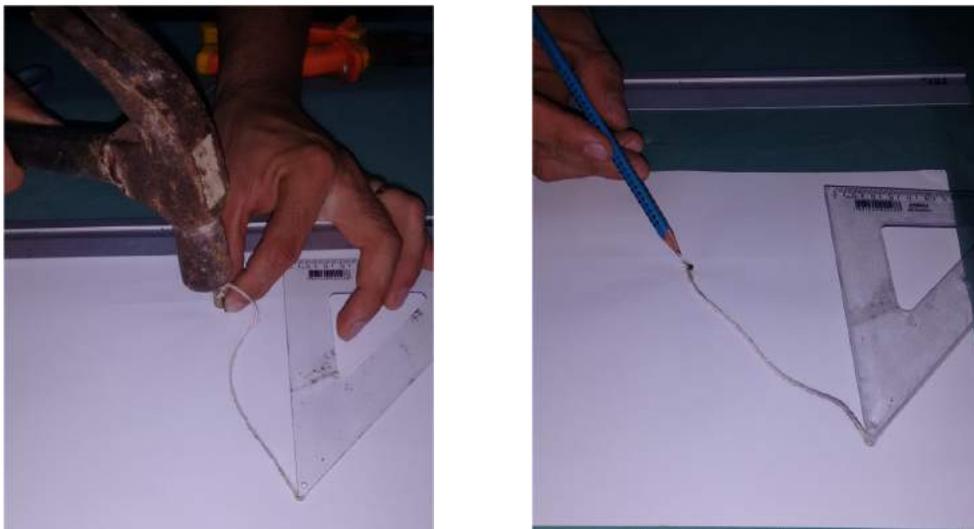


Figura 43: Fixação do prego sobre a prancheta. Determinação do foco.

5º) Posicione a régua horizontalmente abaixo do ponto em que o prego foi fixado e apoie o cateto que não contém o barbante sobre a régua, conforme Figura 44.



Figura 44: Posicionamento do esquadro sobre a régua.

6º) Encoste o lápis com o barbante no cateto do esquadro de modo que fique esticado conforme Figura 45.



Figura 45: Posicionamento do lápis sobre o esquadro para construção da parábola.

7º) Desloque o esquadro sobre a régua ao mesmo tempo em que o lápis é deslocado sobre o cateto do esquadro, cuidando para que o barbante permaneça sempre esticado, conforme sequência m-n-o-p-q-r da Figura 46.

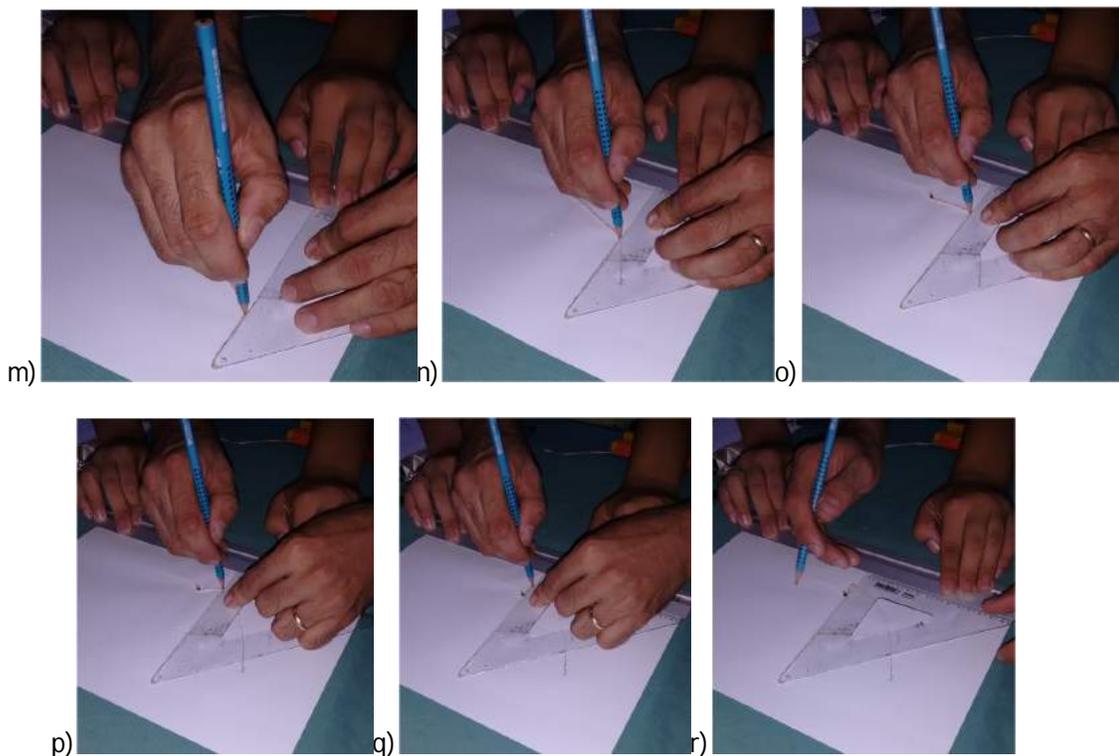
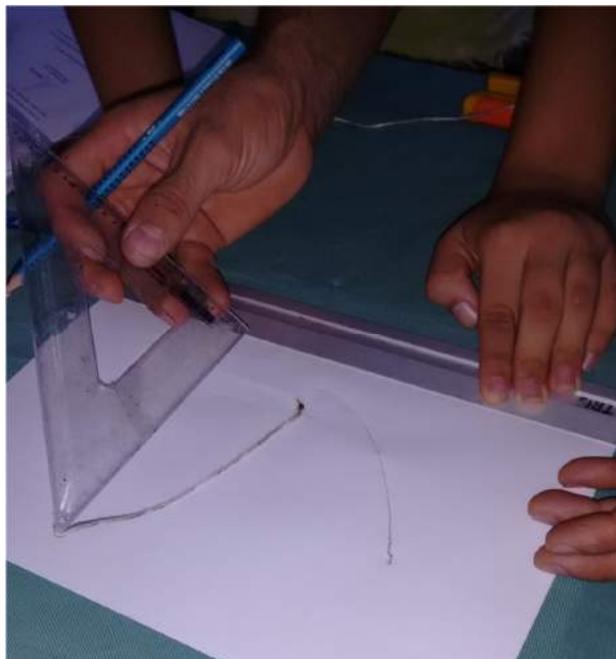


Figura 46: Sequência de construção de um ramo da parábola.

8º) Inverta a posição do esquadro e repita o processo para construir o segundo ramo da parábola, conforme Figura 47.



**Figura 47: Inversão do esquadro para construir o segundo ramo da parábola.**

9º) A sequência s-t-u-v-x-z da Figura 48 a seguir mostra a construção do segundo ramo da parábola.

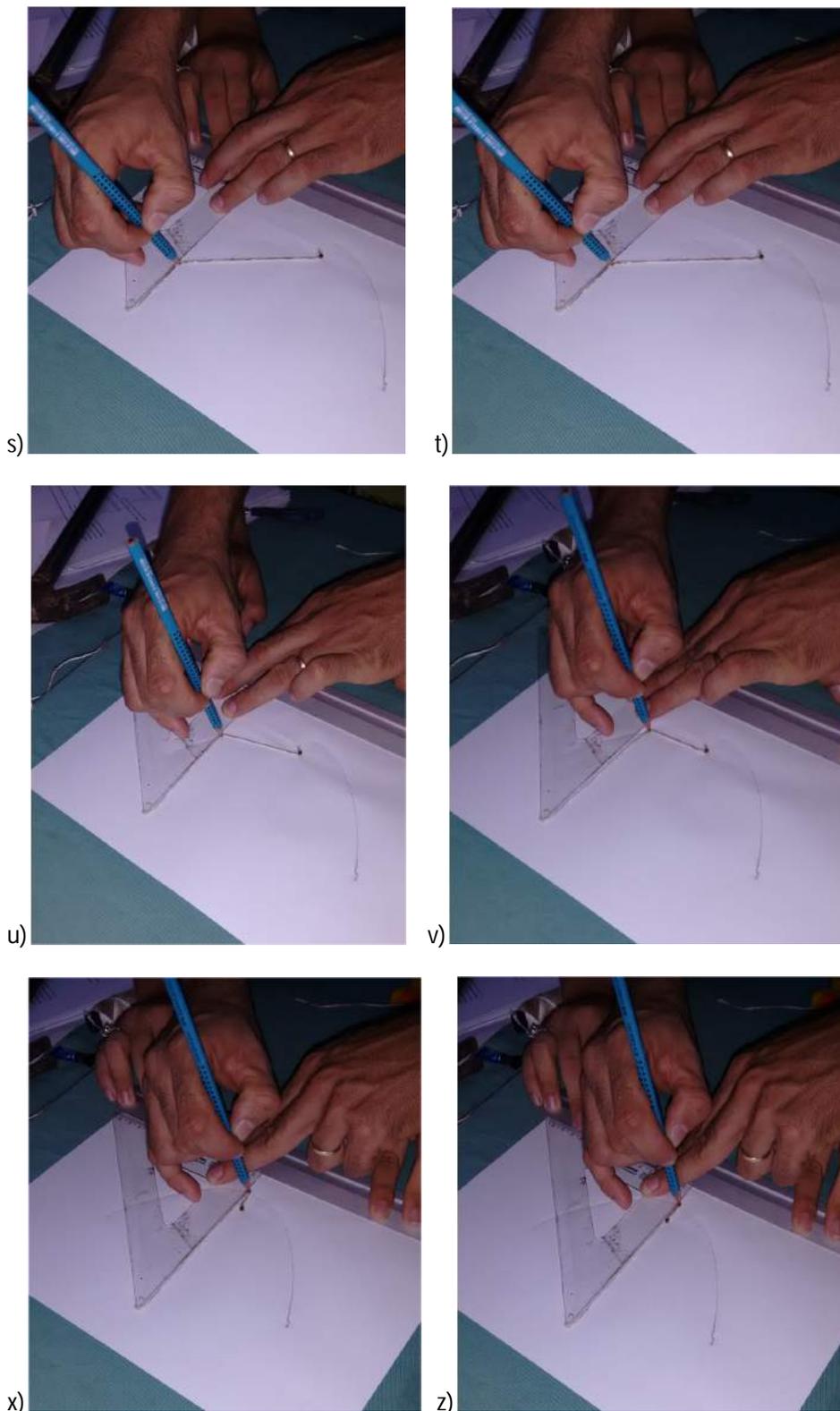


Figura 48: Sequência de construção do segundo ramo da parábola.

10º) A Figura 49 mostra a parábola completamente construída com régua e esquadro.

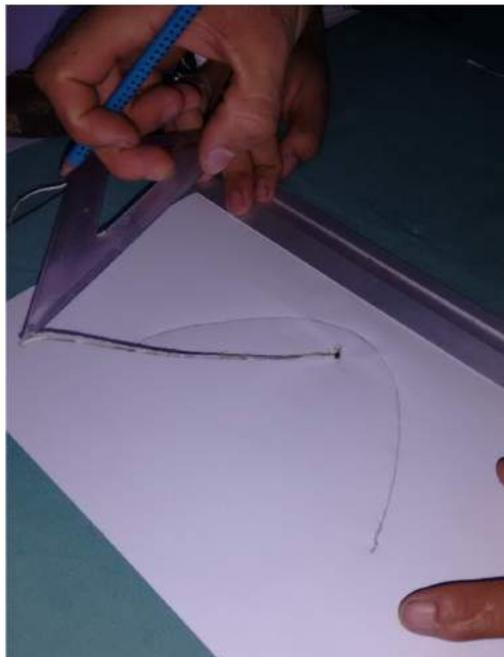


Figura 49: Parábola construída com régua e compasso.

Conclui-se esta primeira parte na qual foram estudadas, de forma simplificada, o desenvolvimento analítico das cônicas: elipse, parábola e hipérbole bem como algumas técnicas de construção utilizando aparatos simples. A seguir, serão abordadas situações que envolvem a utilização das cônicas até então descritas nesta dissertação.

## APLICAÇÕES DAS CÔNICAS NA FÍSICA

As cônicas são amplamente aplicáveis a diversas áreas do conhecimento humano. Serão destacadas algumas aplicações no campo da Física. Em Óptica podem ser encontradas aplicações de parábolas em espelhos de automóveis e em fornos solares; em telescópios de reflexão são encontradas aplicações de parábola e de hipérbole; em espelhos odontológicos encontram-se aplicações da elipse. Na Acústica encontramos as salas de sussurros em igrejas, auditórios e teatros, as conchas acústicas.

Na Astronomia aparecem na descrição de órbitas de planetas (1ª Lei de Johannes Kepler). Na Estática aplicada são aplicadas nas torres de refrigeração de usinas nucleares. Na Geofísica encontra-se a aplicação da elipse na composição da Geodésica. Na Ondulatória utilizam-se hipérbolas em sistemas de localização marítima como o LORAN<sup>2</sup>; em Biofísica a elipse está presente na construção do litotriptor extracorpóreo<sup>3</sup>, dentre outros.

Neste capítulo, serão abordadas cada uma das aplicações citadas acima. Cabe ressaltar que a intenção em descrever cada aplicação é dispor de um material que possa ser utilizado por professores que lecionam Matemática e Física visando a interdisciplinaridade e que possa levá-los a inovar suas aulas, uma vez que o ensino de Matemática e Física têm omitido todo desenvolvimento que tem sido realizado no século XX e que vem tratando de forma excessivamente dedutiva os conceitos tradicionais. Uma vez que se possa contextualizar de maneira dinâmica dentro da realidade do discente, dispõe-se aos mesmos, condições que os levem a desenvolver uma visão mais atual do mundo em que estão inseridos. Embora o foco desta dissertação seja apresentar as propriedades refletoras das cônicas e sua aplicabilidade de forma interdisciplinar entre Matemática e Física visando desenvolver aparatos que gozem de tais propriedades, é indispensável a apresentação de situações que envolvam aplicações de algumas cônicas.

---

<sup>2</sup> O sistema **LORAN** (Acrônimo de **L**ong **R**ange Navigation)

<sup>3</sup> Aparelho utilizado para tratamento de cálculo renal e uretral

### 3.1 Aplicações da eclipse

#### 3.1.1 Primeira Lei de Kepler

Desde os primórdios o homem tem sido fascinado pela beleza do cosmos. A necessidade de se estabelecer um referencial para determinação de épocas relacionadas ao plantio e colheita determinou a intensificação da observação do céu. Ao observar o céu, os nossos ancestrais perceberam que alguns astros descrevem um movimento regular, o que propiciou a eles obter uma noção de tempo e de épocas do ano. As primeiras hipóteses apontavam para a ideia de que o Sol e os demais planetas, até então catalogados, giravam em torno da Terra. Esta concepção da estrutura celeste ficou conhecida como modelo Geocêntrico. Por volta do século XVI, Nicolau Copérnico<sup>4</sup> (1473-1543) apresentou um modelo Heliocêntrico, em que o Sol estava no centro do universo, e os planetas descreviam órbitas circulares ao seu redor.

No século XVII, Johannes Kepler<sup>5</sup> (1571-1630), Figura 50, enunciou as leis que regem o movimento planetário, utilizando anotações do astrônomo Tycho Brahe<sup>6</sup> (1546-1601), Figura 51. Kepler formulou três leis que ficaram conhecidas como *Leis de Kepler*.

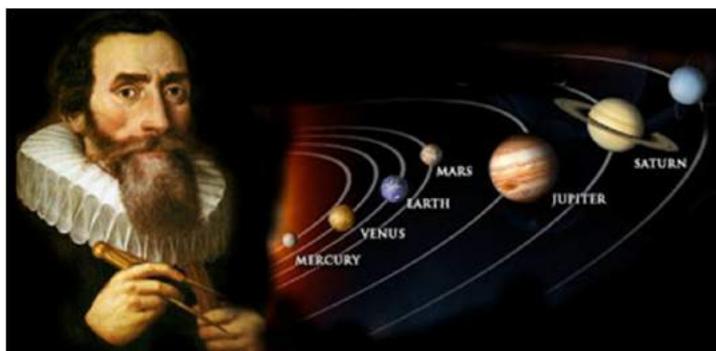


Figura 50: Johannes Kepler – Fonte referência [22].

<sup>4</sup> Nicolau Copérnico (Toruń, 19 de fevereiro de 1473 — Frauenburgo, 24 de maio de 1543) foi um astrônomo e matemático polaco que desenvolveu a teoria heliocêntrica do Sistema Solar.

<sup>5</sup> Johannes Kepler (Weil der Stadt, 27 de dezembro de 1571 — Ratisbona, 15 de novembro de 1630) foi um astrônomo e matemático alemão.

<sup>6</sup> Tycho Brahe (Skåne, Dinamarca, 14 de dezembro de 1546 — Praga, 24 de outubro de 1601) nascido Tyge Ottesen Brahe, foi um astrônomo dinamarquês.

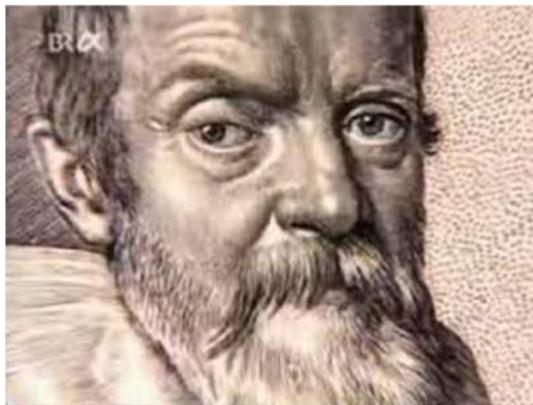


Figura 51: Tycho Brahe – Fonte Referência [24].

Destaca-se aqui a Primeira Lei de Kepler. Esta Lei afirma que, contrário ao que acreditava Copérnico, os planetas, ao descreverem suas órbitas em torno do Sol, as executam em trajetórias que possuem o formato de uma elipse em que o Sol se localiza em um dos focos desta elipse conforme Figura 52.

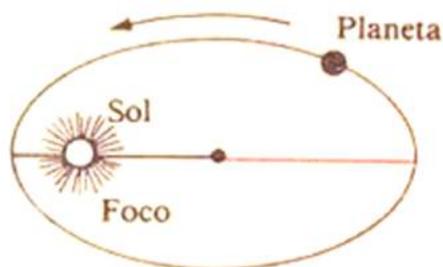


Figura 52: Trajetória elíptica descrita por um planeta em torno do Sol - Fonte Referência [25].

Uma sugestão de visualização da Lei das Órbitas de Kepler pode ser verificada por meio de um programa livre chamado *phet*<sup>7</sup>. Neste aplicativo é possível simular diversas órbitas e verificar as trajetórias elípticas dos planetas. O professor poderá levar os alunos ao laboratório de informática para verificarem a funcionalidade do programa.

<sup>7</sup>Phet – simulações interativas em Física e Matemática. Página consultada em 23/12/2015. <<https://phet.colorado.edu>>

### 3.1.2 - Composição de Geodésias

Define-se Geodésia como sendo a ciência que estuda as formas e as dimensões do planeta. Empenha-se também em determinar o campo gravitacional e a superfície oceânica. A definição proposta por Sevilla (1999) [11], diz que

Geodésia é uma das mais antigas ciências cultivadas pelo homem. O objeto de Geodésia é o estudo e determinação da forma e dimensões da Terra, o seu campo de gravidade e as suas variações temporais; É uma secção particularmente importante para determinar as posições de pontos sobre a sua superfície. Esta definição inclui a orientação da Terra no espaço.(P.1)

Esta ciência vem subdividida em três principais ramos: Geodésia Física, que estuda o campo gravitacional da Terra bem como a direção e a intensidade das forças que atuam sobre corpos mantendo-os na superfície terrestre; Geodésia Geométrica que estuda a determinação de coordenadas de pontos, comprimentos e azimutes de linhas da superfície da Terra; e por fim a Geodésia por Satélite que estuda as determinações de posição de pontos sobre a superfície da Terra ou em torno da mesma por meio da utilização de satélites artificiais.

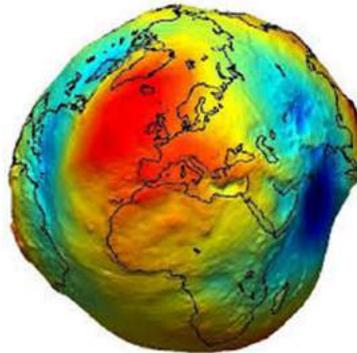


Figura 53: Geoide Terrestre – Fonte referência [26].

Para se entender em que contexto se aplica a elipse é necessário compreender o que venha ser o Geoide (Figura 53). Geoide é uma superfície que apresenta potencial comum sobre a superfície terrestre estendendo-se por todos os continentes. Não obstante, estas superfícies apresentam forma irregular devido à falta ou excesso de massas. Esta aproximação do Geoide para o elipsoide<sup>88</sup> garante o desenvolvimento de um modelo matemático necessário ao levantamento geodésico, mostrando uma aplicação útil da elipse.

<sup>88</sup> Sólido geométrico obtido pela rotação de uma elipse sobre um de seus eixos. No caso cartográfico, utiliza-se como geratriz o eixo de rotação terrestre.

### 3.2 Aplicações da propriedade refletora da elipse

A propriedade refletora da elipse abordada no Capítulo 2 desta dissertação afirma que ao traçar um segmento de reta que passa por um dos focos da elipse, seja  $F_1$  este foco, e intercepta a mesma num ponto P, pode-se traçar outro segmento a partir deste ponto e este segmento certamente terá direção que passará pelo segundo foco da elipse, seja  $F_2$  este foco, conforme Figura 54. Esta propriedade da elipse garante as Leis da Reflexão da Óptica Geométrica, estabelecidas a seguir:

**1ª Lei da Reflexão:** O raio Incidente, a reta Normal<sup>9</sup> e o raio Refletido são coplanares.

**2ª Lei da Reflexão:** O ângulo formado entre a o raio Incidente e a reta Normal é igual ao ângulo formado entre o raio Refletido e a reta Normal conforme Figura 54.

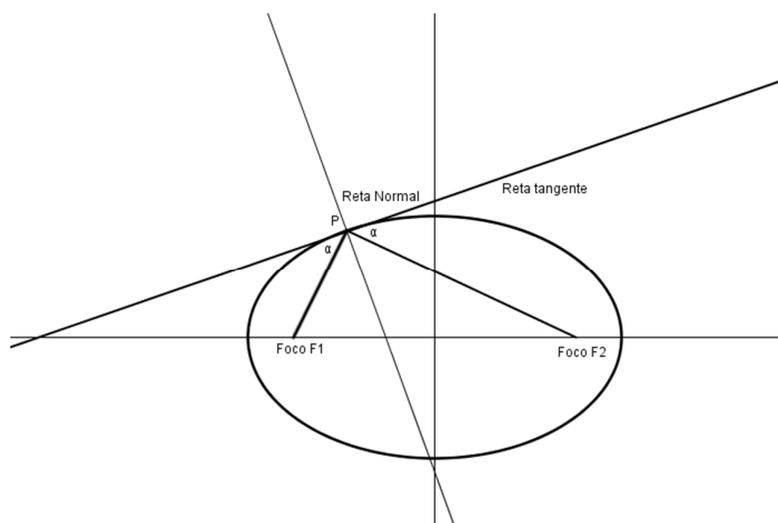


Figura 54: Propriedade refletora da elipse.

<sup>9</sup> Reta perpendicular à tangente a superfície no ponto de incidência que serve de referência para determinação dos ângulos de incidência e reflexão.

### 3.2.1 Espelho Odontológico

O espelho odontológico é uma ferramenta presente no cotidiano das pessoas. Neste encontra-se uma aplicação da propriedade óptica refletora da elipse. Segundo o professor João Filipe Queiró [9] da Universidade de Coimbra, em seu artigo afirma que:

Uma aplicação óptica vê-se no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada pelo espelho no outro foco, ajustando-se o dispositivo de forma a iluminar o ponto desejado.(P.1)

O que ocorre de fato é que, estando a lâmpada em um dos focos da superfície elíptica, pela propriedade refletora da elipse os raios luminosos emitidos pela lâmpada (fonte luminosa colocada no foco próximo à elipse) após incidirem na superfície elíptica refletem numa direção que contem o outro foco. Este outro foco localiza-se na região bucal do paciente, propiciando uma boa iluminação, conforme se visualiza na Figura 55.

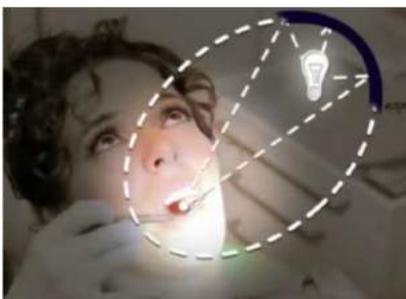


Figura 55: Espelho odontológico de secção elíptica – Fonte referência [8]

Como a fonte luminosa (lâmpada do aparelho) emite luz em todas as direções, é necessário colocar-se um anteparo para evitar que a luz que venha diretamente da lâmpada incida nos olhos do paciente, conforme Figura 56.

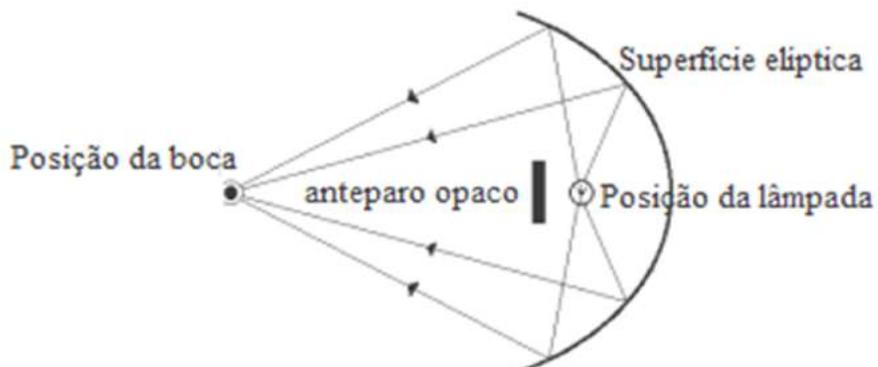


Figura 56: Esquema simplificado de espelho odontológico – Fonte referência [9].

Numa situação real o professor poderá levar um espelho elíptico e demonstrar esta propriedade óptica. A partir de dados coletados poderá, junto com os discentes, verificar a propriedade refletora da elipse.

### 3.2.2 Litotriptor Extracorpóreo

Segundo L. Fernández [5], a litotripsia extracorpórea é uma das técnicas mais eficientes para tratamento de cálculos renais e de uretra com eficiência em torno de 80%. Este método consiste em concentrar ondas de choque de alta frequência no cálculo renal ou uretral. Para tanto se utiliza da propriedade refletora da elipse. Em um dos focos (fora do corpo) é produzido uma onda de choque de alta frequência (Figura 57) que, ao ser refletida por uma superfície semi-elipsoidal, reflete sobre o cálculo (dentro do corpo) no outro foco conforme Figura 58, pulverizando-o e permitindo que este seja expelido durante a excreção. Com uma eficiência de 80% e com uma taxa de mortalidade de 0,01% torna este método um dos mais eficientes, como já fora dito anteriormente.



Figura 57: Ondas geradas por um Litotriptor para pulverização de cálculo renal - Fonte referência [5].

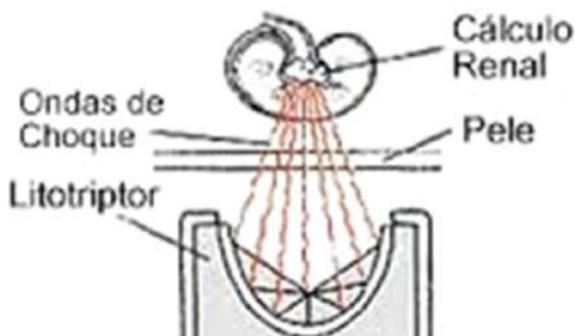


Figura 58: Esquema mostrando a localização dos focos da superfície elíptica - Fonte referência [31].

Uma possibilidade de verificação real poderá desencadear num projeto multidisciplinar com aulas de campo. Este projeto poderá contemplar uma visita a um centro de nefrologia ou a um centro hospitalar, contemplando não apenas a disciplina de Matemática e Física, como Biologia.

### 3.2.3 Salas de Sussurro

Dentre as diversas áreas da Física aplicáveis à construção cível, destacam a Estática de corpos extensos. Dentro do contexto desta dissertação, atribui-se à arquitetura uma aplicação eficaz das propriedades da elipse na construção das chamadas salas de sussurro. Estas salas são projetadas de tal maneira que uma pessoa possa se comunicar sem esforços com outra pessoa, sem que uma terceira pessoa possa ouvir. Isto é possível devido à propriedade refletora da elipse.

O que ocorre de fato é que, ao serem construídas, estas salas são projetadas com o formato de uma elipse, na qual são marcados dois pontos estratégicos (focos da elipse) em que as pessoas que irão se comunicar deverão ser dispostas conforme Figura 59.

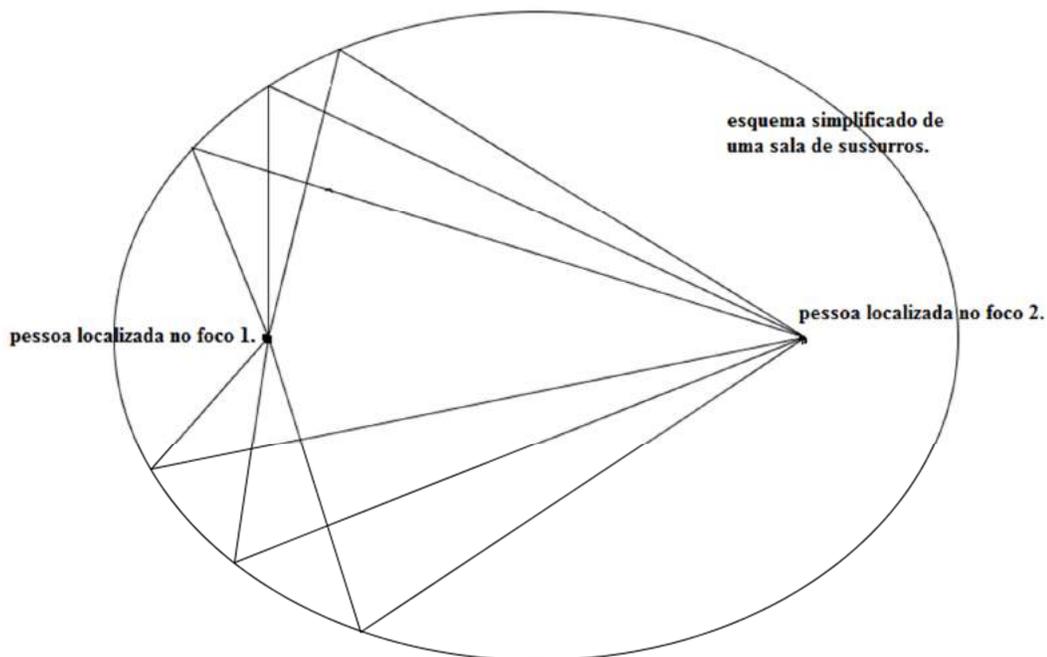


Figura 59: Aplicação da propriedade refletora da elipse nas salas de sussurro.

Estas salas podem ser encontradas em construções famosas como a sala de espetáculos do Teatro Nacional de São Carlos, em Portugal Figura 60.



Figura 60: Interior do Teatro Nacional de São Carlos, Portugal – Fonte referência [32]

Um esquema de vista superior desta sala pode ser visto na Figura 61.

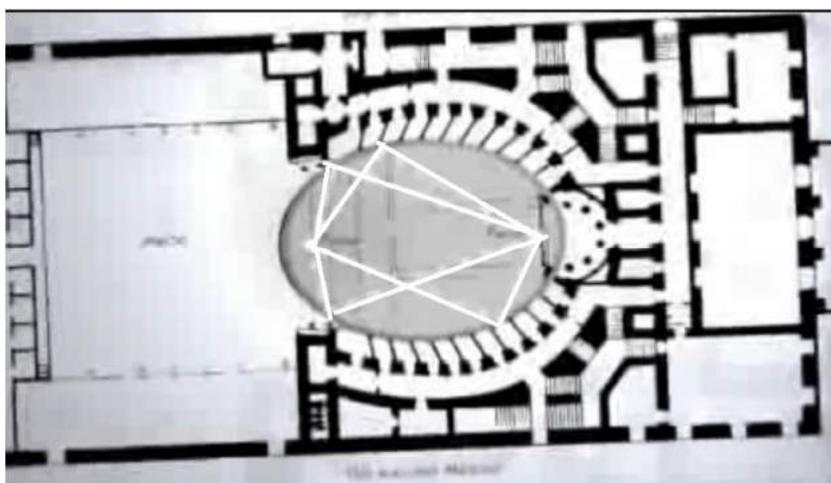


Figura 61: Projeção planificada da sala de espetáculos do Teatro Nacional de São Carlos, Portugal – Fonte referência [8]

### 3.3 Aplicações da hipérbole

#### 3.3.1 Sistema de localização LORAN

O sistema LORAN faz parte de um sistema de navegação chamada de Navegação Hiperbólica. Este tipo de navegação utiliza o método de diferença de distâncias a pontos determinados (estações que constituem o sistema) para que sejam obtidas as LDP<sup>10</sup> que servem para definir a posição de um navio ou avião. Existem outros métodos constituindo este tipo de sistema de navegação. Destacam-se o LORAN ou LORAN-c que tem como princípio a determinação por diferença de tempo. Observe a seguir como localizar um navio utilizando este método.

Para se determinar um ponto (local do navio) é necessário que sejam determinadas duas linhas de posição (LDP) hiperbólicas. A posição do navio estará no cruzamento das duas LDP. É preciso, portanto, dois grupos de estações. Na prática, usa-se uma estação Chefe ou Mestre controlando duas Secundárias ou Escravas (Figura 62). Para que se observem as diferenças de tempo entre as recepções dos sinais dos dois grupos, variam-se as frequências ou os atrasos de código.

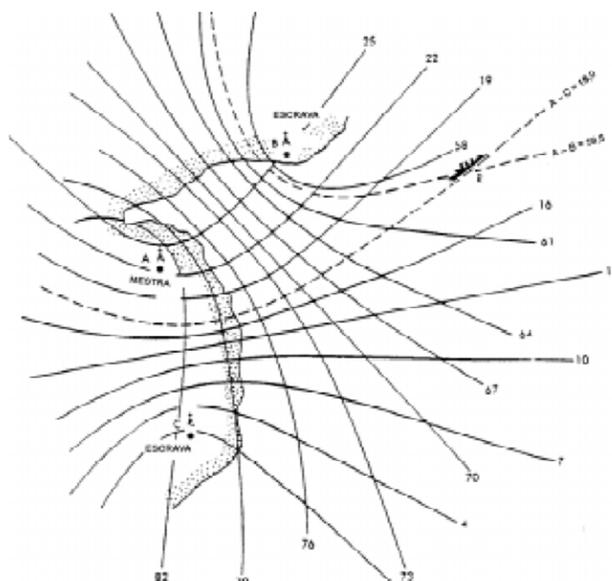


Figura 62: Sistema de navegação hiperbólico – Fonte referência [21].

<sup>10</sup> Linhas de Posição

Pode ser encontrado um exemplo mais claro em Dante [3]

O sistema LORAN (*Long Range Navigation*) permite aos navios determinar sua localização pelo rádio. Essencialmente, uma estação-chefe transmite pulsações com intervalos de 0,05 segundo e uma estação-escrava transmite pulsações 0,001 segundo mais tarde. Um navio tem equipamento que mede a demora entre a captação dos sinais das duas estações. Usando dois pares de estações ou uma estação-chefe e duas escravas, [...], o navio determina sua localização como uma intersecção de hipérbolas. Um navio em [...], por exemplo, recebe os sinais da estação-chefe 3 000 microssegundos (0,003 segundo) antes dos sinais da escrava 1 e 2 500 microssegundos antes dos sinais da escrava 2. Sua posição é a intersecção das hipérbolas sobre as quais esse tempo leva para ocorrer. (Os tempos de demora para a estação-chefe e a escrava 1 são constantes sobre as semihipérbolas traçadas com linhas tracejadas. Os tempos de demora para a estação-chefe e a escrava 2 são constantes sobre as semihipérbolas traçadas com linhas contínuas. Os tempos são medidos em microssegundos.) (p.77)

A situação descrita por Luiz Roberto Dante pode ser visualizada na Figura 63 a seguir.

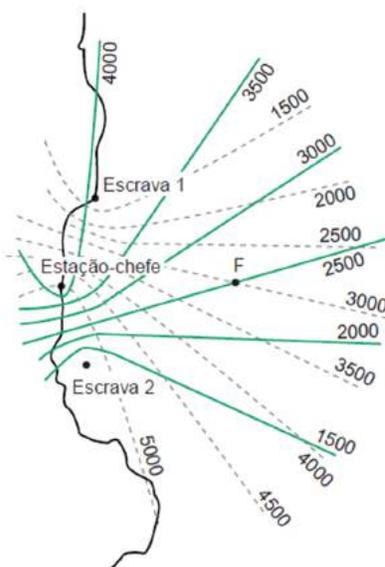


Figura 63: Esquema da situação descrita por Dante – Fonte referência [3].

### 3.3.2 - Hiperboloide na engenharia civil: Física Estática

Hiperboloides são superfícies geradas pela rotação de uma hipérbole em torno de um determinado eixo diretor. Dependendo do eixo adotado podemos obter tipos diferentes de hiperboloides dentre os quais destacamos o de folha dupla e de folha simples.

O hiperboloide de duas folhas pode ser obtido por rotação de uma hipérbole em relação ao seu eixo focal (Figura 64). Por outro lado, quando se rotaciona a hipérbole em relação ao seu eixo transversal, obtemos o hiperboloide de folha simples ou uma folha (Figura 65).

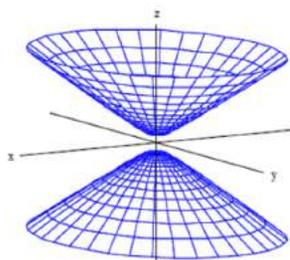


Figura 64: Hiperboloide de folha dupla - Fonte referência [17].

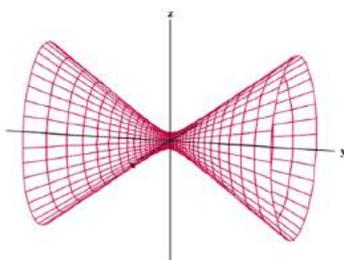


Figura 65: Hiperboloide de folha simples - Fonte referência [17].

Será enfatizado o hiperboloide de folhas simples, destacando o fato do mesmo poder ser gerado a partir de uma reta. Esta propriedade do hiperboloide de folha simples permite classificá-la como uma superfície regradada. Segundo definição dada por Lehmann (1989) [7], *uma superfície regradada é aquela que pode ser gerada por uma linha reta*. Em outras palavras, podemos dizer que uma superfície  $S$  é regradada (Figura 66), quando por todo ponto  $P$  pertencente a  $S$  passa pelo menos uma reta  $r_p$  inteiramente contida em  $S$ .

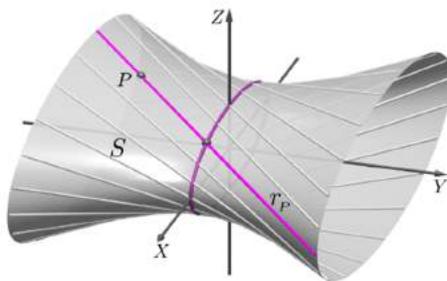


Figura 66: Superfície regradada  $S$ .  $r_p$  é uma reta contida em  $S$  que passa por  $P$  – Fonte referência [6].

Esta propriedade dos hiperboloides é destacada por SATO (2005) [10].

“podemos mostrar que o hiperboloide de uma folha gerado pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo transversal é também gerado por uma reta. Ou seja, ele pode ser considerado como sendo formado por uma união de retas (**superfície regrada**). Assim, seu formato é usado na construção de centrais de energia atômica, onde barras de aço retilíneas (que têm alta resistência) se cruzam para obter estruturas extremamente fortes.”(p.19)

Como observado anteriormente por Sato, este tipo de superfície confere alta resistência devido ao cruzamento das retas que formam a superfície regrada. Como destacado, uma aplicação direta está relacionada à construção de centrais de energia atômica (Figura 67).



Figura 67: Torres hiperbólicas de superfície regrada em usinas Termonucleares - Fonte referência [17].

### 3.4 Aplicações da propriedade refletora da hipérbole

Assim como na elipse, a propriedade refletora da hipérbole garante as Leis da Reflexão da óptica Geométrica. A seguir será mostrada uma importante aplicação desta propriedade.

#### 3.4.1 Telescópio de Reflexão

Sabe-se que os primeiros telescópios baseavam-se nas propriedades da refração luminosa. Há, portanto, uma desvantagem uma vez que o fenômeno da refração pode trazer situações desastrosas no momento da observação por meio das aberrações cromáticas. Levando em consideração o fato de que a reflexão luminosa não permite este tipo de

interferência e que após varias tentativas de se construir um telescópio mais eficiente e com menos distorções, conhecendo-se as propriedades refletoras da hipérbole é que o francês Cassegrain<sup>11</sup> o sugeriu na confecção de telescópios refletores.

A descrição sumária de como funciona esse tipo de telescópio pode ser encontrada no artigo do professor João Filipe Queiró [9] da Universidade de Coimbra. Segundo ele o telescópio refletor é construído com dois espelhos, um maior de forma parabólica (principal) e outro menor de forma hiperbólica (secundário). A disposição desses dois espelhos se daria de tal forma que os eixos da parábola e da hipérbole coincidissem e que o foco da primeira coincidissem com um dos focos da segunda. O princípio básico do telescópio refletor é o seguinte: os raios de luz ao encontrar a superfície parabólica são refletidos para o foco pela propriedade refletora da parábola. Como o foco da parábola coincide com o foco da hipérbole, os raios estarão automaticamente também no foco da hipérbole, que pela propriedade refletora da hipérbole, serão direcionados para a superfície hiperbólica e encaminhados para o outro foco da hipérbole. Os raios de luz passam por um orifício no centro do espelho maior onde uma lente corrige a trajetória da luz que chegará aos olhos do observador. Esses telescópios têm a vantagem de serem menores e mais leves.

A Figura 68 a seguir reforça o que foi descrito pelo professor Queiró. O telescópio Hubble goza desta propriedade.

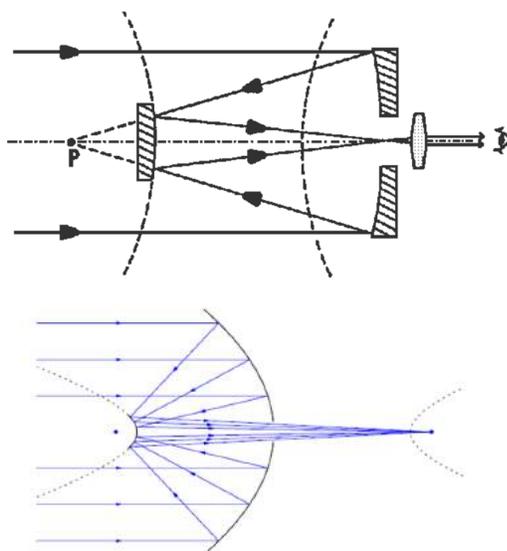


Figura 68: Esquema simplificado de telescópio refletor com espelho hiperbólico – Fonte referência [20] e [9].

<sup>11</sup> Laurent Giovanni Cassegrain - (1625 - 1712) Físico francês.

### 3.5 Propriedade refletora da parábola

A propriedade refletora da parábola garante as Leis da Reflexão da Óptica Geométrica. No entanto, existe uma diferença em relação à elipse e à hipérbole. Enquanto a elipse e a hipérbole possuem dois focos, a parábola possui apenas um. Na parábola, o conjunto de retas paralelas a seu eixo de simetria<sup>12</sup>, após incidir sobre a superfície parabólica, reflete na direção do seu foco conforme Figura 69.

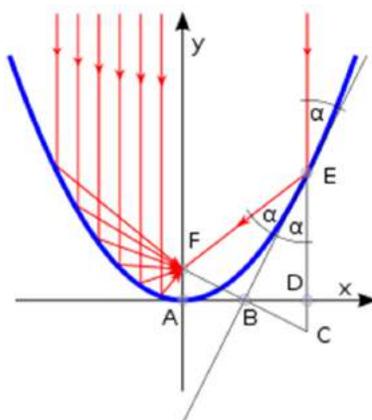


Figura 69: Propriedade refletora da parábola - Fonte referência [17].

A seguir serão mostradas algumas das diversas aplicações da parábola e de suas propriedades específicas que vão desde aplicações mais simples como as antenas parabólicas até as mais complexas como a fabricação de aparelhos como os telescópios e os radares.

### 3.6 Refletores parabólicos

Os refletores parabólicos são superfícies geradas pela rotação de uma parábola em torno de seu eixo de simetria. A superfície gerada é chamada de parabolóide (Figura 70) e mantém as mesmas propriedades refletoras da parábola. Seu uso é amplo, dentre os quais podem ser destacados segundo a sua funcionalidade/finalidade:

<sup>12</sup> Eixo de simetria de uma parábola é definido como a reta que passa por seu foco **F** e é perpendicular a sua reta diretriz **r**

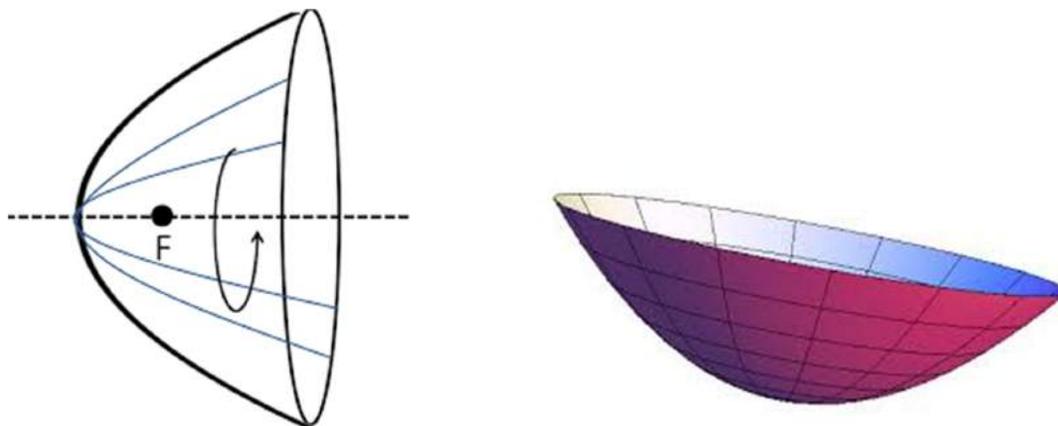


Figura 70: Parabolóide de revolução - Fonte referência [17].

a) Função emissora:

Os parabolóides com função emissora podem ser encontrados nos faróis de automóveis, em refletores de foco utilizados em iluminação de cenas em teatros e, por fim, em instrumentos musicais que tenham a finalidade de projetar o som numa direção específica. Veja Figura 71.



Figura 71: Farol de automóvel (1), projetor acústico (2) e refletor de foco (3) - Fonte referência [17].

Neste tipo de dispositivo a fonte, que pode ser luminosa ou acústica, se encontra no foco da superfície parabólica. Pela propriedade de reflexão da parábola, a luz ou o som emitidos, após reflexão na superfície, seguem numa direção paralela ao eixo focal da superfície, direcionando assim a luz ou o som em uma única direção.

b) Função receptora:

Os paraboloides com função receptora podem ser encontrados nos coletores de energia emitidos por fontes que estejam muito distantes como objetos celestes. São utilizados em radiotelescópios e em telescópios de reflexão. Também são encontrados em antenas parabólicas, cuja finalidade é concentrar radiações de baixa intensidade como os sinais de radio e televisão. Podem ser encontrados em coletores solares como os fornos solares, cuja finalidade é a concentração da luz solar. Em alguns dispositivos usados por ornitólogos<sup>13</sup> é possível a captação de sons distantes e de baixa intensidade. Veja Figura 72.

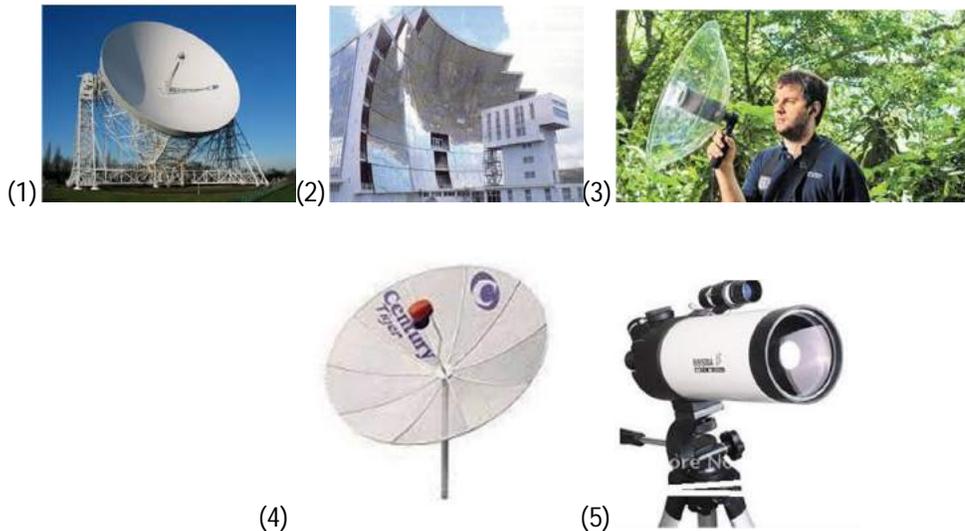


Figura 72: Receptores parabólicos – Fonte referência [17].

Nestes tipos de dispositivos a radiação eletromagnética (ondas de rádio e luminosas) e também acústicas são emitidas por fontes distantes. Este fato permite que as ondas cheguem à superfície refletora praticamente paralelas ao eixo focal das superfícies. Pela propriedade refletora, essa radiação após sofrer reflexão na superfície parabólica seguem numa direção que contem o foco, concentrando assim o sinal. Neste ponto de concentração é colocado o dispositivo receptor.

<sup>13</sup> Cientista que estuda os pássaros. Ornitologia.

c) Função emissora/receptora:

Os paraboloides que possuem esta dupla função podem ser encontrados em radares ou similares. Estes aparelhos utilizam a mesma antena para emissão e recepção de sinais eletromagnéticos. São encontrados ainda em antenas cuja finalidade é manter a comunicação bidirecional com satélites, sondas e naves espaciais que estejam localizadas a grandes distâncias. Veja Figura 73.



Figura 73: Radares de comunicação bidirecional - Fonte referência [17].

Alguns aparatos como os fornos solares e os projetores de som podem ser construídos com a finalidade de se mostrar na prática a aplicabilidade da propriedade refletora da parábola. No capítulo posterior serão abordadas algumas atividades que podem ser desenvolvidas durante as aulas de Matemática e Física e que mostram na prática as propriedades das cônicas aqui estudadas, especialmente a parábola.

O objetivo deste capítulo é mostrar a aplicabilidade das propriedades das cônicas no campo da Física buscando uma relação interdisciplinar com a Matemática, desde a construção de aparelhos de observação como os telescópios à construção de usinas Termonucleares. Conhecer de fato as aplicações destas propriedades pode levar o professor de Matemática e Física a dinamizar a maneira como suas aulas são desenvolvidas e, por outro lado, permite a introdução de aparatos que gozem de tais propriedades. Estes aparatos podem e dever ser construídos pelos próprios alunos (com auxílio do professor é claro), levando conseqüentemente à sistematização do conteúdo a partir de sua prática. Tais recursos podem permitir o alcance do que fora sugerido na introdução desta dissertação, que é a de tornar as aulas de Matemática e Física mais inovadoras.

## SUGESTÕES DE CONSTRUÇÃO DE UM CONCENTRADOR SOLAR E DE UM COMUNICADOR ACÚSTICO

*A melhor forma de aprender qualquer coisa é descobrindo-a por si próprio.*

*Deixa-os aprender adivinhando.*

*Deixa-os aprender provando.*

*Não reveles todo o teu segredo de uma vez – deixa-os adivinhar antes de o revelares.*

*Deixa-os descobrir por si próprio tanto quanto seja possível.*

*George Polya.*

A energia radiante está constantemente a nossa volta sob diversas modalidades. Elas vão desde as ondas eletromagnéticas, raios X, micro-ondas até as ondas sonoras. Dentre as ondas eletromagnéticas está a radiação solar, que por sua vez é abundante em nossa região. Esta radiação, apesar de ser abundante, não é concentrada para que venha ter um aproveitamento mais eficiente. Neste contexto pode ser introduzido o conceito de “forno solar” – dispositivo que concentra a luz solar. Neste tipo de aparato a radiação solar precisa ser concentrada para que o forno seja eficiente. Desta forma a propriedade de reflexão da parábola é essencial na construção destes fornos.

Outro dispositivo que utilizará da propriedade refletora da parábola é um tipo de dispositivo de comunicação muito interessante apelidado de “parabofone” – comunicador acústico. É um dispositivo eventualmente utilizado em feiras de iniciação científica que aguça a curiosidade dos espectadores.

Dentre as diversas aplicabilidades das cônicas abordadas até aqui, será enfatizado a propriedade refletora da parábola e sua aplicação na construção de dois dispositivos, citados anteriormente, que utilizam desta propriedade para seu funcionamento.

#### 4.1 Propriedade refletora da parábola e os espelhos parabólicos.

Considere um espelho formado por um parabolóide de revolução. Segundo o que foi visto no Capítulo 3 desta dissertação, o conjunto de raios luminosos que incide sobre a superfície parabolóide numa direção paralela ao seu eixo focal, após sofrer o fenômeno da reflexão, passam a se propagar numa direção que passa pelo foco do parabolóide conforme Figura 74.

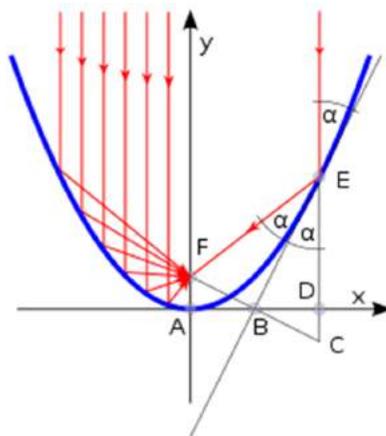


Figura 74: Propriedade refletora da parábola - reflexão da luz em espelho parabólico - Fonte referência [17].

#### 4.2 Concentradores de raios solares

Um concentrador de raios solares é um dispositivo simples cujo princípio básico de funcionamento está em aplicar a propriedade de reflexão da parábola. Este mecanismo permite a construção dos fornos solares. Estes fornos podem ser utilizados para fins domésticos, contudo são também utilizados para fins científicos nos quais exigem uma elevada concentração de energia térmica. Pode-se observar nas Figuras 75 e 76 duas das aplicações destes fornos.



Figura 75: Forno solar. Odeillo, sul da França – Fonte referência [30].

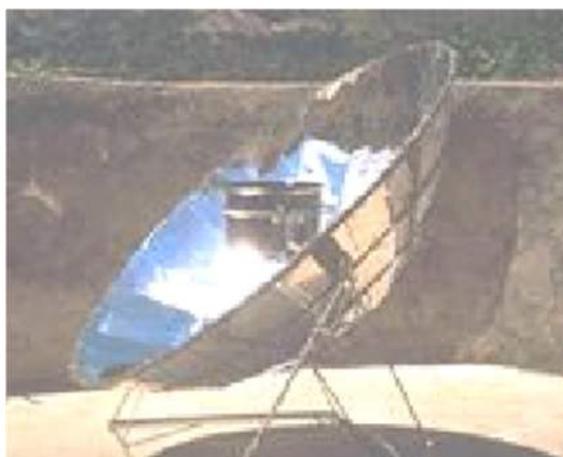


Figura 76: Forno solar doméstico - Fonte referência [17].

#### 4.2.1 Guia de construção de um concentrador de raios solares: princípio dos fornos solares

A seguir será mostrado como construir um concentrador de raios solares que pode ser apresentado numa Feira Científica. Este experimento poderá ser parte de um projeto interdisciplinar, uma vez que apresentam as propriedades físicas da luz, a propriedade de reflexão da parábola e, pelo fato de envolver fontes limpas de energia, poderá ser abordado, além da disciplina de Matemática, as disciplinas de Física e Biologia.

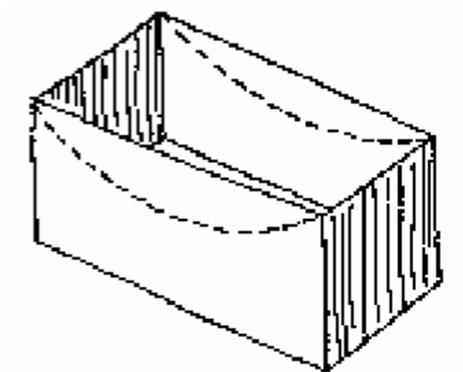
O guia a seguir, foi retirado do sítio Ciência Viva, conforme referência [28].

### **Materiais necessários**

- Uma caixa de sapatos comprida (o comprimento da caixa pode variar);
- Folha de alumínio;
- Cartolina;
- Espeto de madeira para churrasco.

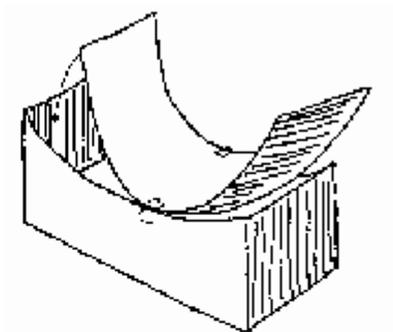
### **Etapas da construção**

1. Desenhe uma parábola nos lados mais longos da caixa (pode ser usado a técnica apresentada no subitem 2.3.2) com distância focal de 10 cm a 20 cm e cortar a caixa (Figura 77). Deve haver rigor nos cortes.



**Figura 77: Etapa 01 para construção do concentrador solar – Fonte referência [28].**

2. Preencha o topo da caixa com uma cartolina, de modo que esta siga o contorno parabólico recortado na caixa (Figura 78). Construiremos assim uma superfície parabólica.



**Figura 78: Etapa 02 para construção do concentrador solar - Fonte referência [28].**

3. Cole a folha de alumínio sobre toda a superfície da cartolina com a parte refletora para fora. Certifique-se de que a folha de alumínio esteja perfeitamente lisa. Figura 79.

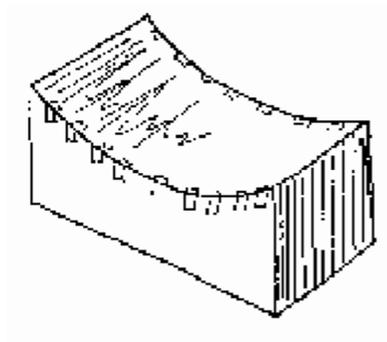


Figura 79: Etapa 03 para construção do concentrador solar - Fonte referência [28].

4. Localize o foco da parábola. Para isso posicione um papel no centro da curva.
5. Cole dois suportes laterais para posicionar o espeto (este deve passar pelo foco localizado no item anterior). Figura 80.

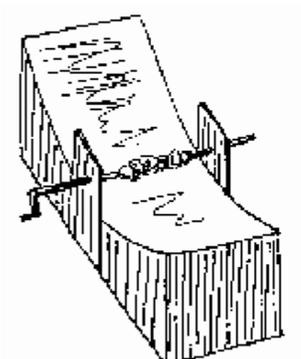


Figura 80: Etapa final para construção do concentrador solar - Fonte referência [28].

6. Agora é só espetar uma salsicha ou algo apropriado no espeto e aproveitar um dia de sol para por em funcionamento. O tempo de cozimento pode variar dependendo do alimento utilizado e das condições climáticas.

### 4.3 Comunicadores acústicos

Comunicadores acústicos são dispositivos parabólicos que podem ser utilizados em comunicações em pequenas distâncias nas feiras científicas. Baseia-se na reflexão de ondas sonoras, cujo princípio é o mesmo das ondas de luz. O modelo básico baseia-se em dispor de dois refletores distanciados de aproximadamente 35 metros, voltados um para o outro. Um espectador, ao falar no foco de um dos refletores, produz ondas sonoras que incidem no primeiro refletor e refletem numa direção paralela ao seu eixo focal. Estas ondas são recebidas pelo outro refletor numa direção praticamente paralela e sofrem reflexão se dirigindo para o foco deste. Outro espectador posicionado no foco do segundo refletor poderá compreender claramente o que diz o primeiro espectador, caracterizando a comunicação entre eles por meio destes refletores. Observe a Figura 81.

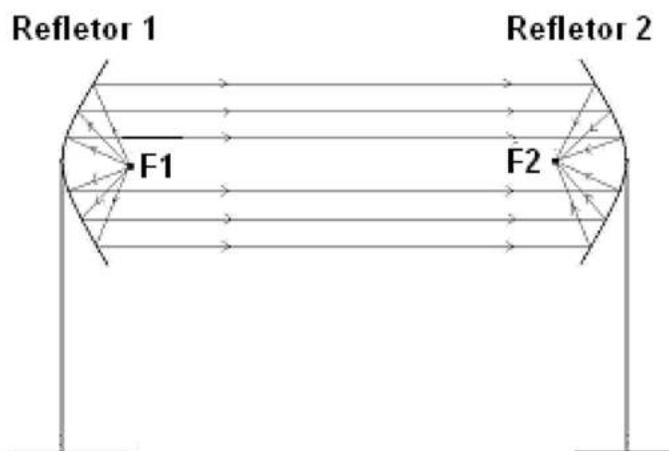


Figura 81: Esquema simplificado de comunicação usando refletores parabólicos – Fonte referência [27].

#### 4.3.1 – Guia de construção de um comunicador acústico

A seguir será mostrado como construir os comunicadores acústicos que poderão ser uma atração nas feiras científicas. Este comunicador também é chamado de “parabofone”. As etapas descritas a seguir, salvo modificações, podem ser encontradas em Física mais que divertida Valadares (2002) [13] e as figuras foram retiradas do relatório de atividades de Humberto D. Bovolenta [29].

### **Materiais necessários**

- Régua de plástico graduada, de 30 cm ou maior;
- Placas de madeira de 1,0 cm e 1,5 cm de espessura;
- Papel cartão de dimensões 0,80 m x 0,80 m x 1,20 m;
- Cola branca ou adesivo instantâneo universal;
- Parafusos;
- Compasso;
- Furadeira;
- Serrote;
- Lixas;
- Estilete;
- Lápis;
- Arame rígido.

### **Etapas da construção**

1. Utilizando o papel cartão, desenhe um molde para recorte das peças de sustentação do refletor. Tome um retângulo de 32 cm x 75 cm, fixando dois lados concorrentes como eixos cartesianos. Em seguida marque os pontos de  $A_0$  a  $A_6$ , conforme tabela 1 a seguir. Em seguida recorte 08 peças para sustentação da superfície parabólica (Figura 82).



Figura 82: Molde e peças de sustentação recortados conforme dados da tabela – Fonte referência [29].

Coordenadas de largura	Coordenadas de altura
$x_0 = 0$	$y_0 = 3 \text{ cm}$
$x_1 = 14,4 \text{ cm}$	$y_1 = 4 \text{ cm}$
$x_2 = 25,2 \text{ cm}$	$y_2 = 6 \text{ cm}$
$x_3 = 37,7 \text{ cm}$	$y_3 = 9,7 \text{ cm}$
$x_4 = 51,7 \text{ cm}$	$y_4 = 15,6 \text{ cm}$
$x_5 = 62,3 \text{ cm}$	$y_5 = 21,3 \text{ cm}$
$x_6 = 75 \text{ cm}$	$y_6 = 29,5 \text{ cm}$

Tabela 1: Dados para construção do molde para confecção do suporte.

Os dados apresentados na tabela servirão como entradas no sistema de coordenadas cartesianas como sugere a Figura 83.

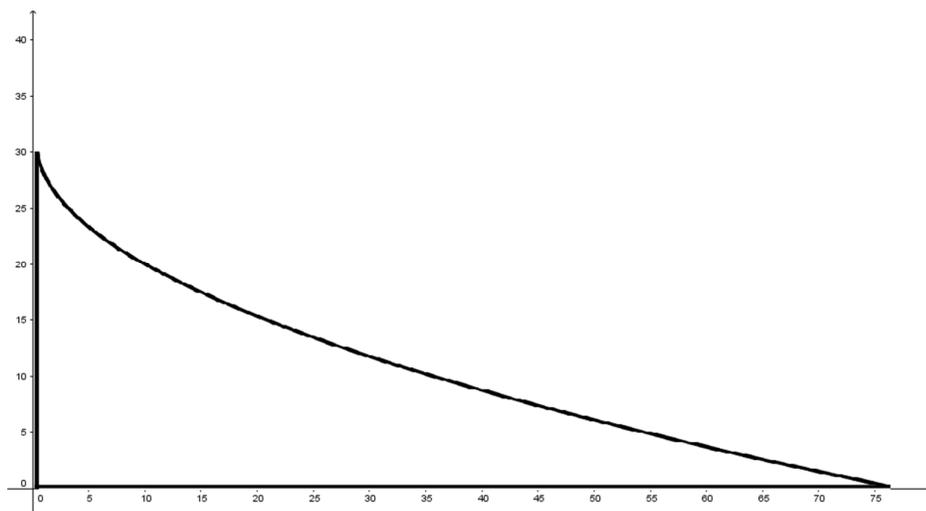


Figura 83: Esquema de molde com coordenadas cartesianas nos lados do retângulo – Fonte referência [29].

2. Recorte um disco circular de 35 cm de raio. Esta peça servirá de suporte para fixação das 08 peças que sustentarão a superfície parabólica. Veja Figura 84.



Figura 84: Disco circular de raio 35 cm para fixação dos suportes – Fonte referência [29].

3. Divida o disco em oito partes iguais e risque conforme se divide uma pizza, deixando no centro um círculo de raio 2 cm. Fixe com parafuso as oito peças, tendo o cuidado de verificar igual espaçamento entre elas. Neste processo podem-se utilizar parafusos para fixação. Para que as peças não se soltem e para que haja uma maior fixação das mesmas, podem-se utilizar ripas entre as oito peças conforme Figura 85.



Figura 85: Disco circular com suportes já fixados – Fonte referência [29].

4. Construa um suporte vertical para fixar o refletor. Utiliza-se para tanto um sarrafo de MDF medindo cerca de 1,40 m de altura por 15 cm de largura. A espessura do sarrafo pode ser de 1,5 cm. Para dar estabilidade, fixe numa plataforma conforme Figuras 86 e 87.



Figura 86: Suporte de sustentação vertical – Fonte referência [29].



Figura 87: Refletor acústico parcialmente montado – Fonte referência [29].

5. Coloque o papel cartão sobre o molde do refletor, fixando perfeitamente à estrutura e marque com um lápis. Recorte o papel segundo o molde demarcado (Figura 88). Faça cada molde individualmente para evitar eventuais erros. Fixe com cola cada recorte para montagem da superfície refletora (Figura 89).



Figura 88: Recorte do papel cartão para refletor parabólico – Fonte referência [29].

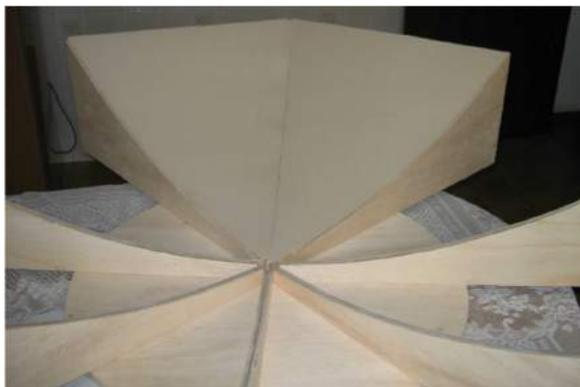


Figura 89: Refletor parcialmente montado com o papel cartão – Fonte referência [29].

6. Utilizando arames mais resistentes, fazer uma estrutura metálica para localização do foco do refletor. Deve ficar a cerca de 55 cm da estrutura de sustentação.

As etapas descritas são para a confecção de um refletor parabólico. Para que haja a comunicação é necessária a confecção de dois refletores. Após estarem prontos basta por em prática, posicionando-os conforme a Figura 81, respeitando a distância entre 30 e 35 metros.

Existem algumas variações de concentradores solares e também dos refletores parabólicos. Apesar de ser uma proposta direcionada ao ensino de Matemática, estes aparatos podem, sem perda de generalidade, ser desenvolvidos nas aulas de Física e Biologia contemplando as especificações do MEC quando propõem que

as competências gerais, que orientam o aprendizado no ensino médio, devem ser promovidas pelo conjunto das disciplinas dessa área, que é mais do que uma reunião de especialidades. Respeitando a diversidade das ciências, conduzir o ensino dando realidade e unidade é compreender que muitos aprendizados científicos devem ser promovidos em comum, ou de forma convergente, pela Biologia, pela Física, pela Química e pela Matemática, a um só tempo reforçando o sentido de cada uma dessas disciplinas e propiciando ao aluno a elaboração de abstrações mais amplas. (BRASIL, 2000, p. 24).

Por esta perspectiva poderão ser desenvolvidos projetos que possam contemplar as demais áreas como sugerido pelo MEC.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O princípio norteador desta dissertação foi a busca pela inovação na maneira como as aulas de Matemática e Física são desenvolvidas. Em princípio vimos que o próprio MEC orienta a desenvolver aulas que permitam aos discentes desenvolverem habilidades cognitivas que derivem de sua prática.

No intuito de oferecer uma maneira diferenciada e inovadora, este trabalho foi desenvolvido com a finalidade de oferecer uma proposta de aula prática que permita aos discentes verificarem a validade de algumas propriedades matemáticas associadas às cônicas, em especial à parábola.

O fato de ser licenciado em Ciências com Habilitação Matemática e ser professor tanto de Matemática quanto de Física me motivou ainda mais a desenvolver este estudo no qual proponho a construção de dois aparatos que podem ser apresentados numa feira científica e também permite a exploração de conceitos matemáticos associados às cônicas, em especial à parábola.

Os dois experimentos propostos não exigem custos elevados, uma vez que podem ser adquiridos com baixo custo. Além do mais, são aparatos permanentes e poderão ser utilizados mais de uma vez. Por outro lado, a possibilidade de substituição de materiais por outros de custo menor também é possível desde que satisfaça as exigências do projeto. Este tipo de substituição de material poderá levar ao discente à pesquisa, uma vez que o mesmo deverá efetuar os testes necessários para verificação da utilidade do material, verificando se está de acordo com a necessidade do projeto.

O discente pode contar com um material riquíssimo à sua disposição. A maneira com o qual o tema foi abordado fornece ao discente material complementar, ou seja, desde o histórico por trás do estudo das cônicas perpassando pela maneira sintetizada como as cônicas foram abordadas até aparte propriamente de aplicações, culminando assim com a prática na construção dos aparelhos. No Capítulo 3, concernente às aplicações, encontram-se situações não corriqueiras que podem direcionar tanto o docente quanto o discente à pesquisa para que

possam aprofundar seus conhecimentos. Conceitos como Geoide e litotriptor não são termos tão comuns.

Portanto, o leitor dispõe de um material que contempla várias vertentes, do teórico ao prático passando pelo contexto histórico de surgimento das cônicas.

**REFERÊNCIAS**

- [1] AVRITZER, Dan. **Geometria analítica e álgebra linear: uma visão geométrica**. Tomo I. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2009. Disponível em <<http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/Geometria%20Analitica%20e%20Algebra%20Linear%20-%20Uma%20Visao%20Geometrica%20-%20TI.pdf>>. Acesso em 27 de fevereiro de 2016.
- [2] CATALDO, J.C.. **Teorema do Hexágono de Pascal**. Rio de Janeiro: ProfMat, 2003. Disponível em <[www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/TCCCataldo.pdf](http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/TCCCataldo.pdf)>. Acesso em 30 de janeiro de 2016.
- [3] DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & Aplicações**, Volume 3- manual do professor. São Paulo: Editora Ática, 2005. Disponível em <[http://www.aticaeducacional.com.br/htdocs/Complementos/contexto\\_aplic/pdf/mca.pdf](http://www.aticaeducacional.com.br/htdocs/Complementos/contexto_aplic/pdf/mca.pdf)>. Acesso em 23 de dezembro de 2015.
- [4] EDUCAÇÃO MEC, M. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em 19 de janeiro de 2015.
- [5] FERNÁNDEZ, LOSKE *et al* (2005). “*Desarrollo de un litotriptor extracorporal más eficiente*”. *Revista Mexicana de Ingeniería Biomédica*, 8-9. Disponível em <<http://www.medigraphic.com/pdfs/inge/ib-2005/ib051d.pdf>>. Acesso em 22 de dezembro de 2015.
- [6] FRENSEL, K. **Notas de aula: aula 07 superfícies cônicas**, 2010. Disponível em <[http://www.professores.uff.br/katia\\_frensel/aulasga2/ga2-aula8.pdf](http://www.professores.uff.br/katia_frensel/aulasga2/ga2-aula8.pdf)> Acesso em: 22 de dezembro de 2015.
- [7] LEHMANN, C. H. **Geometría Analítica**. México: Editorial Limusa, 1989.
- [8] MIRANDA, Cátia Menezes. **Construção de uma mesa de bilhar elíptica como recurso motivacional para o estudo de cônicas no ensino médio**. Ilhéus: UESC, 2013. Disponível em <<http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160265D.pdf>> Acesso em 22 de dezembro de 2015.

- [9] QUEIRÓ, J. F. **A elipse, a parábola e a hipérbole: propriedades e aplicações**, 2010. Disponível em <<http://www.mat.uc.pt/~jfqueiro/aplicacoes.pdf>> Acesso em: 22 dezembro 2015.
- [10] SATO, J. **As Cônicas e suas Aplicações**, 2005. Disponível em <<http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/>> Acesso em: 22 dezembro 2015.
- [11] SEVILLA, M. J. **Introducción histórica a la Geodesia**. Madrid : Instituto de Astronomía y Geodesia, 1999. 51 p. Publicación. Instituto de Astronomía y Geodesia, nº 193. Disponível em <<http://hdl.handle.net/10261/23506>> Acesso em: 19 janeiro de 2016.
- [12] SIQUEIRA, Paulo Henrique; SOUZA, Luzia Vidal de. **Artigo: Propriedades para Visualização das Retas de Newton**. XX Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho técnico. Graphica Rio 2011. Disponível em <[www.academia.edu/1095647/Propriedades\\_para\\_visualiza%C3%A7%C3%A3o\\_da\\_reta\\_de\\_Newton](http://www.academia.edu/1095647/Propriedades_para_visualiza%C3%A7%C3%A3o_da_reta_de_Newton)>. Acesso em 01 de dezembro de 2015.
- [13] VALADARES, E. C. **Física mais que divertida – inventos eletrizantes baseados em materiais reciclados e de baixo custo**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2012. Disponível em <<http://www.pdf-search-engine.com/>>. Acesso em 28 de dezembro de 2015.
- [14] Disponível em <<http://www.astro.if.ufrgs.br>>. Acesso em 28 de dezembro de 2015.
- [15] Disponível em <<http://www.palavraspolivalentes.blogspot.com>>. Acesso em 28 de dezembro de 2015.
- [16] Disponível em <[http://www.en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s\\_theorem](http://www.en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_theorem)>. Acesso em 28 de dezembro de 2015.
- [17] Disponível em <<http://www.pt.wikipedia.org>>. Acesso em 28 de dezembro de 2015.
- [18] Disponível em <[www.academia.edu/1095647/Propriedades\\_para\\_visualiza%C3%A7%C3%A3o\\_da\\_reta\\_de\\_Newton](http://www.academia.edu/1095647/Propriedades_para_visualiza%C3%A7%C3%A3o_da_reta_de_Newton)>. Acesso em 01 de dezembro de 2015.
- [19] Disponível em <[www.ebah.com.br](http://www.ebah.com.br)>. Acesso em 01 de dezembro de 2015.
- [20] Disponível em <<http://www.mat.ufmg.br/~regi/gaalt/reflexhiper.pdf>>. Acesso em 27 de dezembro de 2016.

[21] Sistemas Hiperbólicos de Navegação. Disponível em < <https://www.mar.mil.br/dhn/bhmn/download/cap-36.pdf>>. Acesso em 01 de dezembro de 2015.

[22] Disponível em < <http://www.vanialima.blog.br> >. Acesso em 27 de fevereiro de 2016.

[23] Disponível em < <http://www.pt.wikipedia.org>>. Acesso em 01 de dezembro de 2015.

[24] Disponível em < <http://www.youtube.com>>. Acesso em 01 de dezembro de 2015.

[25] Disponível em < <http://www.radeir.blogspot.com>>. Acesso em 25 de fevereiro de 2016.

[26] Disponível em < <http://www.redecol.com.br>> Acesso em 27 de fevereiro de 2016.

[27] Disponível em:

<[http://www.inicepg.univap.br/cd/INIC\\_2009/anais/arquivos/RE\\_0229\\_0986\\_01.pdf](http://www.inicepg.univap.br/cd/INIC_2009/anais/arquivos/RE_0229_0986_01.pdf)>, Acesso em 22 de fevereiro de 2016.

[28] Disponível em < <http://www.cienciaviva.pt/rede/himalaya/home/guia7.pdf>>. Acesso 26 de fevereiro de 2016.

[29] Disponível em

<[http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530\\_F590\\_F690\\_F809\\_F895/F809/F809\\_sem2\\_2005/HumbertoD-Dirceu\\_RF1.pdf](http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2005/HumbertoD-Dirceu_RF1.pdf)>. Acesso em 22 de dezembro de 2015.

[30] Disponível em < <http://www.osfundamentosdafisica.blogspot.com>>. Acesso em 22 de dezembro de 2015.

[31] Disponível em < <http://www.adesc.blog.br>>. Acesso em 27 de fevereiro de 2016.

[32] Disponível em < <http://www.naoutramargem.wordpress.com>>. Acesso em 22 de dezembro de 2015.