UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

COSME WEDSON BEZERRA FERNANDES

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Mossoró- RN
2016

COSME WEDSON BEZERRA FERNANDES

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal Rural do Semi-árido – UFERSA, Mossoró, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Mauricio Zuluaga Martinez-UFERSA

MOSSORÓ - RN
2016

F363e Fernandes, Cosme Wedson Bezerra .
O ensino de análise combinatória através da resolução de problemas / Cosme Wedson Bezerra Fernandes. - 2016.
87 f. : il.

Orientador: Mauricio Zuluaga Martinez .
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

1. Resolução de problemas. 2. Análise combinatória. 3. Ensino de matemática . 4. Ensino. 5. Aprendizagem. I. Martinez , Mauricio Zuluaga , orient. II. Título.

COSME WEDSON BEZERRA FERNANDES

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA
ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM: 19 / 07 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Mauricio Zuluaga M.

Dr. Mauricio Zuluaga Martinez - UFERSA
Presidente

Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal - UFERSA
Primeiro Membro

Django J. Dantas

Dr. Django Jesus Dantas - UFERSA
Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 2016.

Dedico este trabalho a toda minha família e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida, sem Ele nada é possível.

Ao meu pai Francisco e minha mãe Fátima, pelos exemplos de superação e por todos os ensinamentos que me tornaram mais forte mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos meus amigos, que acreditaram e sempre me incentivaram, em especial a Joacir e Clerton que contribuíram com esse trabalho.

A minha namorada Raquel, que compreendeu minhas angústias e me deu forças para continuar.

Ao meu orientador, Dr. Maurício Zuluaga, que na hora em que mais precisei contei com sua valiosa contribuição.

A todos os colegas do PROFMAT, em especial a Vilcemar, sem ele, certamente essa caminhada seria mais difícil.

Ao Dr. Ronaldo Garcia, pela sinceridade e por nos alertar desde o primeiro dia que não seria fácil essa jornada.

A todos os professores que de uma maneira ou de outra contribuíram para a minha formação.

RESUMO

A análise combinatória é aplicada em vários contextos e muitas áreas. Na atualidade, ela desempenha papel fundamental na criptografia, já que com o advento da comunicação eletrônica, o sigilo nas trocas de mensagens é primordial, principalmente no uso da internet e das transações financeiras. Diante as dificuldades enfrentadas pelos alunos e professores na resolução de problemas em análise combinatória, buscamos em documentos oficiais e alguns pesquisadores uma proposta de ensino que proporcione uma aprendizagem significativa. O presente trabalho tem o objetivo de apresentar uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas, em que os conceitos e definições de análise combinatória sejam apresentados após a resolução de problemas geradores. Bem como edificar todo o ensino em análise combinatória nos princípios básicos (aditivo e multiplicativo), sendo as fórmulas consequências naturais destes princípios. Para que isso se concretizasse fizemos uma pesquisa bibliográfica, com estudos que mostram a concepção do ensino através de resolução de problemas. Diante dessa perspectiva, elaboramos uma sequência de problemas que levaram aos conceitos, definições e propriedades da análise combinatória. Essa abordagem é baseada nos parâmetros curriculares nacionais, que tem no problema o ponto de partida para a atividade matemática. O trabalho mostra que é possível desenvolver os conceitos e definições em análise combinatória através da resolução de problemas. O processo de ensino e aprendizagem em análise combinatória se torna mais dinâmico quando é feito através da resolução de problemas, pois essa metodologia desenvolve o raciocínio, a criatividade e autonomia dos alunos.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Análise Combinatória. Ensino. Aprendizagem; Ensino de matemática.

ABSTRAT

The combinatorial analysis is applied in various contexts and many areas. Today, it plays a key role in cryptography, since the advent of electronic communication, secrecy in the message exchanges is paramount, especially in the use of the Internet and financial transactions. Faced with the difficulties faced by students and teachers in solving problems in combinatorial analysis, we seek in official documents and some researchers an educational proposal that provides meaningful learning. This study aims to present a teaching approach based on problem solving, in which the concepts and combinatorics settings are displayed after the resolution generator problems. And build all teaching in combinatorics in the basic principles (additive and multiplicative), and the formulas natural consequences of these principles. For this to materialize did a literature search, with studies showing the design of teaching through problem solving. Given this perspective, we developed a series of problems that led to the concepts, definitions and properties of combinatorial analysis. This approach is based on the national curriculum framework, which has the problem the starting point for mathematical activity. The work shows that it is possible to develop the concepts and definitions in combinatorial analysis by solving problems. The process of teaching and learning in combinatorial analysis becomes more dynamic when it is done by solving problems, because this methodology develops the reasoning, creativity and autonomy of students.

Keywords: Troubleshooting. Combinatorial Analysis. Teaching. Learning. Math education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A análise combinatória sempre despertou grande interesse desde que tive o primeiro contato, no 2° ano do Ensino Médio. Esse interesse surgiu pelo fato dos problemas encontrados requererem certo grau raciocínio e alguma engenhosidade para solucioná-los. Outro fato intrigante, é que praticamente não são necessários muitos pré-requisitos para abordar esse assunto, mesmo assim há uma enorme dificuldade para atacar e resolver os problemas.

É consenso entre alunos e professores que a análise combinatória é considerada como um assunto difícil, assim o processo de ensino e aprendizagem ficam agravados, pois na maioria das vezes o ensino se faz de forma mecânica e com o uso abusivo de fórmulas. Outro fator que influencia negativamente na aprendizagem é que a análise combinatória só aparece no Ensino Médio. O princípio multiplicativo deve ser usado em problemas nos quais os alunos possam listar todos os casos e contá-los, desde o Ensino Fundamental. Esse contato desde cedo faz com que o aluno desperte o pensamento combinatório, tornando-se capaz de resolver situações mais complexas. Outra dificuldade encontrada no ensino de análise combinatória é que muitos dos alunos tentam descobrir a que tipo de agrupamento o problema se encaixa para depois usar a fórmula.

Diante desse cenário, surgiu o interesse em apresentar uma proposta de ensino em análise combinatória através da resolução de problemas. O enfoque na resolução de problemas se justifica pelo fato dos alunos terem muita dificuldade para interpretar e resolver problemas de contagem, pois estes exigem raciocínio, concentração e criatividade. O que se encontra normalmente nos livros didáticos tradicionais são exercícios mecânicos que não desenvolvem o raciocínio combinatório. Defende-se que o ensino de matemática deve se dá através da resolução de problemas. Esta prática precisa ser adotada desde séries iniciais, sendo o problema o ponto de partida para o ensino da matemática. A concepção que tem como foco a resolução de problemas é encontrada nos parâmetros curriculares nacionais e aponta os seguintes princípios:

> O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediantes a exploração de

> problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada. (BRASIL, 1997, p.32)

O presente trabalho tem o objetivo de apresentar uma proposta de ensino baseada na resolução de problemas, em que os conceitos e definições de análise combinatória sejam apresentados após a resolução de problemas motivadores. O trabalho objetiva também edificar todo o ensino em análise combinatória nos princípios básicos: aditivo e multiplicativo, sendo as fórmulas consequências naturais destes princípios. Se o estudante participa do processo de construção destas fórmulas, ele não irá usá-las de maneira mecânica. As fórmulas devem ser vistas como facilitadoras para a resolução de problemas, contudo, isso não impede o uso dos princípios básicos.

A análise combinatória é muito importante nas tomadas de decisões, é aplicada em outras áreas, por isso, é necessário que o estudante tenha o conhecimento consistente desse assunto. Nos parâmetros curriculares nacionais encontramos o embasamento necessário que aponta a importância desse ensino.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra da população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. (BRASIL,1998, p.44-45)

Diante relevância apresentada para o ensino de análise combinatória surgem alguns questionamentos de como este deve ser feito. A resolução de problemas como proposta de ensino de combinatória traz indagações que nortearão este trabalho. É possível desenvolver os conceitos e definições da análise combinatória através da resolução de problemas? A aprendizagem de combinatória se torna mais significativa e eficiente quando o assunto é introduzido com uma situação problema?

Partimos da premissa que o processo de ensino e aprendizagem em combinatória se torna mais dinâmico quando é feito através da resolução de problemas, pois essa metodologia desenvolve o raciocínio, a criatividade e autonomia dos alunos.

O primeiro capítulo busca na literatura embasamentos que mostram que o ensino de matemática deve ser estruturado na resolução de problema, ou seja, o problema é o ponto de partida para a aprendizagem da matemática. Destacamos os parâmetros curriculares nacionais que colocam a resolução de problemas como a peça central para o ensino de matemática, pois enfrentar situações complexas proporciona ao aluno a oportunidade de criar estratégias para resolução de problemas cotidianos e, consequentemente, torna-se mais autônomo. Nesse capítulo ainda é definido o que é um problema, os diversos tipos de problemas e/ou exercícios, além de apresentar as quatro fases para a resolução de um problema proposta por George Polya. Além algumas estratégias de resolução de problemas sugeridas por este autor.

O segundo capítulo apresenta alguns aspectos históricos da análise combinatória. A pesar de não existir consenso entre os historiadores sobre a sua origem exata, apresentamos fatos que levaram as noções desses conceitos de uma forma direta ou indireta. Nesse capítulo aparecem as contribuições de diversos povos e grandes matemáticos, que se interessaram pela temática, tornando a análise combinatória um importante ramo da matemática aplicada em diversas áreas. Do *Papiro de Rhind* ao surgimento da teoria dos grafos se deram por meio da resolução de problemas. Fica evidente e é notório que durante a história qualquer assunto em matemática só se desenvolveu por meio de problemas. Matemáticos como: Galileu, Arquimedes, Pascal, Fermat, Euler, entre outros, viram nos problemas uma maneira de desenvolver o raciocínio e suas habilidades, além de contribuírem de maneira significativa para análise combinatória. Esse capítulo é interessante, pois pode mostrar aos alunos que o conhecimento matemático não deve ser visto como algo pronto e acabado, para se chegar ao que conhecemos foram necessários muitos anos e a contribuição de várias civilizações e matemáticos.

O terceiro capítulo consiste em apresentar a proposta de ensino em análise combinatória, ou seja, mostramos como o conteúdo deve ser ministrado para que o processo de ensino e aprendizagem seja satisfatório. Para isso, cada tópico é introduzido sempre com uma situação problema que leva a compreensão dos conceitos e propriedades inerentes a este assunto. O capítulo se inicia enfocando os princípios básicos da contagem (aditivo e multiplicativo) por meio de diversos problemas, onde apresentamos estratégias para a resolução dos mesmos, como a árvore das possibilidades e a enumeração de todos os casos, quando possível. Uma vez edificado esses conceitos básicos, usaremos estes como ferramentas para apresentar outros conceitos tais como: permutação simples, combinação simples e permutação com repetição. As fórmulas surgem naturalmente em decorrência dos princípios já apresentados e, mostramos como resolver problemas com e sem o auxílio dessas fórmulas. A maioria dos livros didáticos tradicionais apresenta o conceito de arranjo, contudo não o adotamos, já que este pode ser substituído pelo princípio multiplicativo.

O quarto capítulo mantém a mesma estratégia na apresentação dos conteúdos. A diferença é que os tópicos abordados nele, normalmente não são contemplados nos livros didáticos tradicionais e, dessa forma, não são abordados pelos professores. Contudo, acreditamos que essas ferramentas podem e devem ser apresentadas aos alunos para resolverem problemas de diversa natureza. Fazemos uma apresentação com problemas motivadores, usando resultados expostos nos tópicos anteriores. Começamos com um problema que leva ao conceito de permutação circular, enfocando que nesse tipo de agrupamento o que importa é a posição relativa entre os objetos. Seguindo a mesma abordagem, diferenciamos combinação completa de combinação simples, apresentamos os lemas de Kaplansky e finalizamos o capítulo com o princípio das gavetas. É importante destacar que de todos os tópicos apresentados nos capítulos três e quatro, o princípio das gavetas de Dirichlet é o único em que determina se um conjunto possui ou não certas propriedades.

1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ao longo da história o desenvolvimento do ser humano se deu por meio da resolução de problemas. Para atingirmos o atual patamar, tivemos que nos organizar em grupo, enfrentar as diversidades climáticas, criar e aprimorar o processo de produção de alimentos, desenvolver e a perfeiçoar tecnologias para finalidades práticas do nosso cotidiano. Todas essas atividades foram desenvolvidas porque o ser humano sentiu a necessidade de criar e buscar métodos para resolver o problema da própria sobrevivência. Dessa forma, o processo de aprendizagem através da resolução de problemas é algo inato do próprio ser humano. Segundo Polya (1997, p.2) “Resolver problemas é da própria natureza humana. Podemos caracterizar o homem como o “animal que resolve problemas”; seus dias são preenchidos com aspirações não imediatamente alcançadas”. Diante desse contexto surge naturalmente a pergunta: o que seria um problema? Para Dante (2007, p.9), um problema é “qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la”. Dessa forma, decidir por um abastecimento com álcool ou gasolina pode ser considerado como um problema, optar por uma compra à vista ou à prazo de um veículo, de um eletrodoméstico também podem ser considerados como problemas.

Contudo, essa pesquisa está voltada para a resolução de problemas em matemática, mais precisamente com uso dessa ferramenta no ensino da análise combinatória. Dessa forma, deve-se definir o que seria um problema matemático. De acordo com Dante (2007, p. 10) um problema matemático “é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-los”. Dessa maneira, para ser considerado um problema matemático, além do raciocínio e a criação de estratégias, é necessário o uso de conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo da vida escolar do estudante para a resolução do mesmo. Acredita-se que o ensino de matemática deve ser edificado na resolução de problemas. Branca (1997) defende que a resolução de problemas deve ser encarada com meta, independente dos conteúdos de matemática. Segundo ele a principal razão para o ensino de matemática é fazer com que o aluno aprenda a resolver problemas. Nesse ponto, o professor aparece como principal personagem na arte de ensinar a resolver problemas matemáticos. Segundo Polya (1997) o professor deve fazer de tudo para desenvolver no aluno a habilidade de resolver problemas.

Partindo desse pressuposto, o ensino de matemática deve ser voltado para a resolução de problemas. O currículo deve considerar a resolução de problemas como meta, um processo contínuo, uma estratégia de ensino, que deve ser adotada durante toda a vida escolar do aluno.

> Considerar a resolução de problemas como uma habilidade básica pode nos ajudar a organizar as especificações para o dia a dia de nosso ensino de habilidades, conceitos e resolução de problemas. Considerar a resolução de problemas como um processo pode nos ajudar a perceber como lidamos com as habilidades e conceitos, como eles se relacionam entre si e que papel ocupam na resolução de vários problemas. Finalmente considerar a resolução como uma meta pode influenciar tudo o que fazemos no ensino da matemática, mostrando-nos uma outra proposta para o ensino. (BRANCA,1997, p.10)

Fica evidente que o ensino de matemática só faz sentido quando é estruturado na resolução de problemas. Este ensino proporciona aos alunos se posicionarem criticamente diante de várias situações que encontram no seu cotidiano, munindo-os com ferramentas que os tornam mais independentes. É desejo de todos que a educação transforme a vida de cada um tornando cidadãos críticos e reflexivos. A matemática tem esse poder. Sendo a resolução de problemas a parte primordial para a aprendizagem significativa da matemática. Dessa forma, o ensino de matemática deve ser edificado na resolução de problemas. Sabe-se que essa proposta de ensino desenvolve o raciocínio, o senso crítico, a criatividade e torna o aluno mais independente nas tomadas de decisões. Sobre a importância da resolução de problemas os parâmetros curriculares nacionais afirmam que:

> A resolução de problemas é a peça central para o ensino da matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfretamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de usar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2010, p. 112)

Fica evidente a importância da resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem da matemática, contudo, há uma preocupação em definir ou apontar quais problemas influencia significativamente no desenvolvimento dessa habilidade. O ensino de matemática por meio da resolução de problemas consiste em preparar um cenário totalmente diferente daquele em que alunos e professores estão acostumados. Nesse novo palco os alunos são instigados a pensar, questionar, criar estratégias de resolução, buscar outras formas de resolver o mesmo problema, testar as condicionantes do problema, ou seja, a resolução do problema desenvolve a autonomia dos estudantes. Para o desenvolvimento de tais competências devemos diferenciar um exercício comum de um problema matemático. Acredita-se que um aluno só será autônomo nas tomadas de decisões quando efetivamente for capaz de resolver problemas.

Sabe-se que para os alunos se tornarem exímios solucionadores de problemas eles devem tomar gosto pela resolução dos mesmos, e esta é uma tarefa árdua, já que a matemática é vista como uma disciplina difícil e sem aplicabilidade. Essa crença criada em torno da matemática se deve entre outros motivos pela forma de como ela é ensinada e, principalmente pelo o uso abusivo de técnicas e algoritmos que não desenvolvem o raciocínio dos alunos. O estudante mesmo desenvolvendo os cálculos na resolução dos exercícios não extrai nenhuma relevância de tais contas. Isso se deve a forma mecânica e descontextualizada do ensino de matemática na maioria das escolas do país. Esse fato contraria os PCN, que apontam a matemática como essencial para o desenvolvimento de habilidades primordiais na análise e interpretação de dados reais em várias áreas de conhecimento.

Esse documento aponta as finalidades e objetivos do ensino de matemática no nível médio. O desenvolvimento dessas habilidades está ligado ao ensino da resolução de problemas, que é capaz de levar ao aluno uma aprendizagem real e significativa. Segundo os PCN, os objetivos e finalidades são:

> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (BRASIL, 1998, p.43)

A importância dada à resolução de problemas é notória, pois os principais objetivos do ensino de matemática na escolaridade média estão ancorados na habilidade de solucionar problemas. A compreensão dos conceitos matemáticos, o desenvolvimento da autonomia, do raciocínio e da criticidade são competências adquiridas com a resolução de problemas.

O professor deve selecionar os problemas que tornarão essas habilidades tangíveis. Para que isso aconteça é necessário o docente diferenciar um exercício comum de um problema matemático, este requer uma análise mais detalhada, busca de informações, conhecimentos matemáticos adquiridos e mesmo assim a solução não é garantida. Já o exercício para ser resolvido, basta aplicar uma série de algoritmos e/ou técnicas para chegar a solução. Normalmente o que se encontra nos livros didáticos tradicionais é uma série de exercícios, que não há necessidade de muito esforço para resolvê-los. Ou seja, após a apresentação do conteúdo pelo professor e alguns exemplos com técnicas e algoritmos para encontrar a solução, há uma lista imensa de questões que para solucioná-la basta aplicar as instruções apresentadas. O ensino de matemática baseado apenas nesses moldes não desenvolve uma aprendizagem efetiva. Isso fica evidente quando os alunos se deparam com um problema que têm que aplicar os conceitos supostamente aprendidos.

1.1 Tipos de problemas

Faz-se necessário buscar na literatura uma classificação para os problemas e/ou exercícios que alunos encontram durante sua vida escolar. É interessante notar que cada um desses problemas ou exercícios corresponde a um estágio no processo de aprendizagem dos discentes. Segundo Butts (1997) o conjunto de problemas matemáticos pode ser dividido em cinco subconjuntos: exercícios de reconhecimento, exercícios algorítmicos, problemas de aplicação, problemas de pesquisa aberta, situações-problema.

1.1.1 Exercícios de reconhecimento

Os exercícios rotineiros têm como objetivo proporcionar ao aluno recordar uma propriedade, uma definição, um teorema, ou seja, um fato que serve para solucionar imediatamente o exercício. Exercícios dessa natureza podem ser apresentados aos alunos, contudo, não deve ser regra, ou seja, o aluno deve ter contato com outros tipos de exercícios e problemas. Cabe aqui ressaltar que lembrar e usar certas propriedades, teoremas, definições é extremamente importante nas etapas de resolução de problemas. É impossível, ou praticamente impossível resolver um problema matemático sem nenhum conhecimento de matemática. Exemplos que fazem parte de exercícios de reconhecimento.

Exemplo 1: Quais das funções abaixo, de domínio e contradomínio real definida pelas leis de formação representam uma função quadrática.

a) $f(x) = 2x + 2$
b) $f(x) = x^2 + 3\text{x} + 4$
c) $f(x) = x(2 - x)$
d) $f(x) = -2x^3 - 7x$

Exemplo 2: Como é chamado o encontro das três medianas de um triângulo?

Exemplo 3: Se a, b e c são números reais e $a > b$, então $ac > ab$. Verdadeiro ou falso?

Claramente tais exercícios se enquadram no rol de resolução imediata. Se o aluno conhece a propriedade ou definição do objeto de estudo facilmente resolve os três exemplos. Contudo, o ensino de matemática não pode se resumir apenas aos exercícios de aplicação de propriedades matemáticas, somente estes não irão desenvolver a autonomia dos alunos na resolução de problemas.

1.1.2 Exercícios algorítmicos

São os exercícios mais encontrados nos livros didáticos e o principal método encontrado pelos professores para o ensino de matemática. Tais exercícios podem ser resolvidos aplicando um procedimento (previamente apresentado pelo professor) que seguido corretamente leva o aluno a resposta desejada. Na maioria das vezes tal algoritmo não leva o aluno a raciocinar, ou seja, ele usa sem nenhuma reflexão ou questionamento. Dessa forma, quando o estudante encontra uma situação em que a aplicação do processo não está evidente, não consegue resolver. É claro que para resolver problemas matemáticos, é necessário conhecer procedimentos, algoritmos e técnicas, mas essas são ferramentas que o aluno deve usar diante de um problema. O ensino de matemática não pode contemplar apenas exercícios algorítmicos.

Algo interessante ocorre quando os alunos chegam ao Ensino Médio e se deparam com o estudo das funções quadráticas, muitos quando encontram uma função quadrática querem logo usar a famosa fórmula de Bháskara sem mesmo ler e compreender o enunciado.

E quando é solicitado que determinem os zeros (se existirem) de uma função quadrática, mesmo as incompletas, eles quase sempre usam o algoritmo. Fica evidenciado que o ensino de matemática voltado apenas para aplicação de algoritmos não desenvolve o raciocínio e a habilidade para resolver problemas. Há inúmeros exemplos de exercícios algorítmicos, apresentamos alguns:

Exemplo 4: Resolva a equação $x^2 + 5x + 6 = 0$

Exemplo 5: Determine a equação da reta que passam pelos pontos A(1,2) e B(3,5).

Exemplo 6: Determine as coordenadas do vértice da parábola definida pela função $f(x) = 2x^2 + 5x - 6$, de domínio e contradomínio nos números reais.

1.1.3 Problemas de aplicação

Os problemas de aplicação segundo Butts (1997, p.34) "envolvem algoritmos de aplicação". Isso significa que o aluno deve inicialmente transformar o problema para a linguagem matemática e, em seguida, aplicar o algoritmo adequado para a solução do problema. Polya(2006) denomina essa transformação de equacionamento. Para Polya (2006, p.84) equacionar significa "expressar por símbolos matemáticos uma condicionante que está formulada por palavras; é a tradução da linguagem corrente para a linguagem das fórmulas matemáticas." Nesse estágio, o aluno já deve ter conhecimento do algoritmo e realizando esse equacionamento pode resolver o problema proposto. Contudo, são poucos os alunos que conseguem resolver problemas de aplicação. Apresentamos alguns exemplos desses problemas;

Exemplo 7: Em uma metalúrgica, o custo c, em reais, para produzir n peças de metal pode ser calculado por $c(n) = \frac{n^2}{25} - 4n + 110$. Determine para qual quantidade de peças o custo de produção é mínimo? Qual é esse custo mínimo?(retirado do livro: novo olhar)

Exemplo 8: Fernanda e Carol estavam disputando uma partida de tênis. Fernanda golpeou a bola em direção à quadra da adversária, descrevendo uma trajetória representada pela função $f(x) = -\frac{x^2}{100} + \frac{x}{5}$. Carol, dando sequência ao jogo, devolveu a bola para o outro lado da quadra, descrevendo uma trajetória representada pela função $g(x) = -\frac{x^2}{32} + \frac{x}{2}$. Considerando *x* a distância percorrida e $f(x)$ e $g(x)$ a altura, em metros, de cada jogada. Qual das garotas conseguiu fazer com que a bola alcançasse a maior distância antes de tocar a quadra? Qual foi essa distância?(retirado do livro: novo olhar)

É interessante notar que durante a vida estudantil, na escolaridade básica, os alunos só têm praticamente contato com problemas de aplicação, exercícios algorítmicos e exercícios de reconhecimento. Essa é a tônica dos livros didáticos que dispomos.

1.1.4 Problemas de pesquisa aberta

Segundo Butts (1997, p.34) "são problemas de pesquisa aberta naqueles em cujo enunciado não há uma estratégia para resolvê-los". São provas e demonstrações. Normalmente esses problemas requerem um raciocínio mais apurado. São problemas comumente encontrados em livros de ensino superior. Butts(1997) cita dois exemplos de problemas que se enquadram nessa categoria.

Exemplo 9: Seja $S_n = \{1,2,3,...n\}$. Para que tipos de inteiros, n, pode-se efetuar uma partição em S_n, em dois subconjuntos, de modo que a soma dos elementos de cada subconjunto seja a mesma. Por exemplo, $S_7 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ pode ser dividido em {1,6,7} e {2,3,4,5}.(BUTTS,1997, p.34)

Exemplo 10: Quantos triângulos diferentes, de lados inteiros, podem ser construídos de modo que o(s) lado(s) maior(es) tenha(m) 5 cm de comprimento? 6 cm? n cm? Em cada caso, quantos são isósceles? (BUTTS,1997, p.34)

1.1.5 Situações-problema

Segundo Butts (1997, p.36) "Nesse subconjunto não estão incluídos problemas propriamente ditos, mas situações nas quais uma das etapas decisivas é identificar o(s) problema(s) inerente(s) à situação, cuja solução irá melhorá-la."

Esse autor defende que o ensino de matemática deve se basear na resolução de problemas, contudo o ensino de matemática estruturado nesses moldes vem sendo negligenciado. Para Butts(1997) os livros didáticos estão repletos de exercícios algorítmicos e problemas sem criatividade, dessa forma, os alunos sentem certa aversão pela a matemática. Ele acrescenta que para o desenvolvimento das habilidades em resolução de problemas matemáticos é necessário formular um problema criativo para que o aluno seja motivado a resolvê-lo. Ou seja, o alicerce para resolver um problema consiste no próprio problema e, esse deve ser elaborado adequadamente.

1.2 Como resolver um problema

Sabe-se que a resolução de problemas proporciona aos alunos o desenvolvimento de habilidades além do comum, tais como: criatividade, aprimoramento do raciocínio lógico, independência nas tomadas de decisões e senso crítico. Contudo, o ensino de matemática não é estruturado na resolução de problemas, em partes porque é mais fácil ensinar técnicas e algoritmos em detrimento a procedimentos genéricos capazes de nortearem a solução de muitos problemas. Compreendido a importância da resolução de problemas no ensino de matemática, surge um pergunta natural: como resolver um problema? Encontra-se na literatura muitos modelos propostos, entre eles o que tem maior destaque e mais conhecido é o conjunto de heurísticas de Polya.

O que seria heurística?

Segundo Polya (2006) a heurística é um processo que busca compreender o procedimento de resolução de problemas, principalmente ligados às operações mentais, desde que sejam úteis. O estudo desse processo tem objetivos de melhorar o conhecimento a cerca das operações mentais aplicadas a resolução de problemas. Ainda segundo Polya(2006) o conhecimento e a aplicação das heurísticas influenciam de maneira bastante significativa e benéfica no ensino, principalmente o ensino de matemática. A heurística tem como meta à generalidade, e o estudo desses procedimentos pode ser adotado em problemas de qualquer natureza. Dessa forma, a heurística pode ser concebida como uma estratégia que ajuda na compreensão e resolução de problemas diversos.

Ensinar a resolver problemas é uma tarefa árdua e complexa. O papel do professor no ensino através da resolução de problemas é diferente da postura de quando ensina um algoritmo ou técnica. Segundo Dante (2007, p.52), no método heurístico "o professor encoraja o aluno a pensar por si mesmo, a levantar suas próprias hipóteses e a testá-las, a discutir com seus colegas como e por que aquela maneira de fazer funciona". Dessa forma, o professor gera questionamentos que podem levar o aluno criar estratégias para a resolução do problema.

O método apresentado por Polya para a resolução de um problema consiste em quatro fases sequenciais que são: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Segundo ele, cada uma dessas fases tem sua importância e não pode deixar de ser cumprida.

> Pode acontecer que a um estudante ocorra uma excepcional ideia brilhante e, saltando por sobre todas as preparações, ele chegue impulsivamente à solução. Estas ideias felizes são, evidentemente, muito desejáveis, mas alguma coisa muito inconveniente e desastrosa pode resultar se o estudante deixar de lado qualquer uma das quatro fases sem dela ter uma perfeita noção. (POLYA, 2006, p.5)

Dessa forma, se o estudante não seguir a sequência dessas etapas poderá fazer cálculos desnecessários e imprecisos. Tais desastres são consequências da não compreensão do problema ou da má elaboração de um plano consistente. Com isso, a execução será catastrófica e certamente o aluno não poderá explorar a solução encontrada.

1.2.1 Compreensão do problema

Apresentado o problema aos alunos, o papel do professor é criar mecanismos para que os estudantes compreendam e sintam o desejo de resolver o problema. Segundo Polya (2006, p.5) “o problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação”. Nessa fase, o aluno deve ler e compreender o problema e o professor atua como mediador nesse processo. Segundo Polya(2006) o professor deve orientar os alunos fazendo alguns questionamentos, tais como:

> Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las? (POLYA, 2006,p.XIX)

Nessa fase, é necessário que o aluno seja capaz de identificar os dados, ou seja, ele deve decidir se esses são suficientes para a solução do problema. O estudante deve saber também qual a incógnita, a condicionante, usar uma notação apropriada e traçar uma figura (se possível) com todos os dados e a incógnita. Uma estratégia interessante na resolução de problemas é dividir o problema em várias partes, buscando uma maior nitidez nas relações entre os dados, a incógnita e a condicionante.

Uma vez compreendido o problema, os estudantes podem ir para a próxima etapa que é a elaboração do plano para a solução do problema proposto.

1.2.2 Estabelecimento de um plano

Nesta etapa o aluno elabora uma estratégia para a resolução problema. Para isso, ele deve usar o conhecimento matemático adquirido durante sua vida escolar, na maioria das vezes se o problema for bem elaborado, apenas esse conhecimento não é suficiente. Assim a transição entre a compreensão do problema e a elaboração de um plano é um processo muitas vezes lento e oneroso. Dessa forma, o estudante deve usar a intuição e uma boa dose de imaginação para buscar alguns caminhos que podem levar a solução do problema. Sabe-se que tais habilidades são raras e uma ideia brilhante dificilmente acontece, dessa maneira, o aluno deve pensar em um problema similar.

A ideia brilhante é rara, mas uma boa ideia pode surgir quando o estudante procura associar o presente problema a algum outro resolvido anteriormente. O professor pode fazer com o aluno busque um problema correlato. A esse respeito Polya (2006) afirma que

> As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa ideia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma ideia boa sem relembrar alguns fatos pertinentes. (POLYA,2006,p.7)

Segundo Polya (2006) o ponto de partida para a elaboração do plano é a indagação. Conhece um problema correlato? Feito isso, o estudante busca lembrar-se de itens relevantes tais como teoremas, proposições e problemas resolvidos anteriormente, que de certa maneira se relacionam com o novo problema. Uma vez encontrado um problema correlato surgi uma nova indagação. É possível utilizá-lo? Como?

Nessa fase em que o aluno busca a conexão entre os dados e a incógnita, muitas vezes é necessário trabalhar com casos particulares, generalizações, analogias, ou seja, o estudante deve buscar um problema auxiliar que facilite o elo entre dados e a incógnita. Polya(2006) sugere, nessa fase alguns questionamentos que podem auxiliar na elaboração de um plano e a verificação se é possível executá-lo.

> Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita! E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar seu resultado? É possível utilizar seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. (POLYA, 2006, p. XIX)

Polya(2006) acrescenta que se o estudante não conseguir resolver o problema proposto deve procurar resolver primeiro algum problema correlato mais acessível. Nesse ponto o aluno pode aplicar vários procedimentos heurísticos como: analogia, generalização, particularização, problema auxiliar, simetria entre outros. O aluno pode manter apenas uma parte da condição e trabalhar com ela, e deve também buscar algo de útil nos dados do problema. A esse respeito Polya(2006) afirma que:

> Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada incógnita? Como ela pode variar? É possível obter dos dados alguma coisa útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema? (POLYA, 2006, p.XIX)

Depois de elaborar um plano que pode levar a solução do problema é necessário executá-lo.

1.2.3 Execução do plano

Segundo Polya (2006), uma vez elaborado o plano, ou seja, a ideia de como resolver o problema, que é uma tarefa árdua, o aluno deve pôr em prática esse plano, para isso, basta que ele tenha paciência para desenvolver os cálculos, demonstrações e verificá-los.

> O plano proporciona apenas um roteiro geral. Precisamos ficar convictos de que os detalhes inserem-se nesse roteiro e, para isto, temos de examiná-los, um após outro, pacientemente, até que tudo fique perfeitamente claro e que não reste nenhum recanto obscuro no qual possa ocultar-se um erro. (POLYA,2006,p.10)

Nessa fase o estudante deve está perfeitamente convencido que cada passo executado está correto. Polya(2006) afirma que o aluno não terá muita dificuldade de executar o plano se ele houver realmente tiver concebido um.

Apesar de ser uma fase mais tranquila para o professor, este deve tecer alguns questionamentos para direcionar a execução do plano. Segundo Polya (2006,p.XX) “ Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?

Nessa terceira fase encontra-se a solução do problema, tradicionalmente o objeto de desejo, uma vez encontrada a solução não há mais o que fazer. Contudo, há ainda a quarta fase, que consiste no retrospecto, ou seja, examinar se a resposta está correta.

1.2.4 Retrospecto

Uma vez encontrada a solução para o problema, o professor deve encorajar os alunos a verificarem sua resposta. Para isso, o estudante deve verificar e reexaminar a sua solução, o caminho e métodos que levaram a resposta. Verificar se todas as condicionantes foram satisfeitas, ou seja, averiguar a exatidão da solução do problema. Vale ressaltar que esse procedimento enriquece muito a habilidade na resolução de problemas, pois o estudante pode encontrar outras maneiras de se chegar ao mesmo resultado. Nessa fase, o aluno pode perceber a relação que existem entre os diversos problemas, sendo incumbência de o professor direcionar para esse sentido.

Alguns questionamentos podem e devem ser feitos, no intuito de proporcionar ao aluno uma reflexão e uma análise crítica da solução encontrada. Para Polya (2006,p.XX), deve-se discutir: “ É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber num relance? É possível utilizar o resultado, ou método, em algum outro problema? ”

Encontrar a mesma solução por outro caminho dá segurança ao aluno e mais certeza da solução correta. Esse procedimento torna o estudante mais autônomo e crítico, assim seu conhecimento se solidifica com cada nova descoberta. A exploração da solução tem o poder de desenvolver o raciocínio lógico e aprimorar a observação do aluno.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Na tentativa de buscar um relato cronológico sobre a origem e desenvolvimento da análise combinatória nos deparamos com várias barreiras, talvez a principal seja por onde começar. Um fato é que a origem da análise combinatória é muito antiga. Sua gênese pode ser associada com o surgimento do próprio conceito de número e do processo de contar. O ser humano sentiu a necessidade de fazer contagens simples, pois necessitava controlar seu rebanho, saber quantas pessoas tinha sua tribo e organizá-la. Os historiadores acreditam que a maneira mais simples de contagem realizada pelos povos primitivos foi a correspondência biunívoca. Para isso, esses povos usavam pedras, faziam nós em cordas, riscos em pedras e/ou ossos, pedaços de madeira ou ainda demarcações em tábuas de argila. Segundo Souza (2010) alguns problemas práticos do dia a dia não eram resolvidos, principalmente, quando envolviam grandes quantidades, já que, os povos primitivos estavam presos à correspondência biunívoca. Surgiu assim a necessidade de um novo método de contagem, mais elaborado, baseado na noção de agrupamento dos elementos de um conjunto sem a necessidade de contar um a um, usando certas técnicas e algumas condições.

A história deve ser feita de evidências, documentos e fatos que comprovam certas conjecturas. É natural imaginar que a contagem surgiu antes da escrita. Afirmar uma data precisa sobre a gênese da análise combinatória é uma tarefa árdua e imprecisa, para isso, precisamos de fontes que mostram o encadeamento de ideias que evoluíram até chegar ao atual patamar. Uma fonte primária riquíssima sobre a matemática egípcia é o *papiro de Ahmes ou Rhind* que tem cerca de 30 cm de largura e 5 m de comprimento e segundo Boyer (1996) foi copiado pelo escriba Ahmes, por volta de 1600 a.C., contudo o material copiado segundo o próprio escriba tem origem mais remota. Segundo Eves (2004) os historiadores não tiveram muitas dificuldades para compreender e interpretar a maioria dos problemas do *papiro de Rhind*, contudo há um, o de número 79, cuja interpretação não é tão precisa. Nele aparece o seguinte conjunto de dados:

Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2 401
Hecates de grãos	16 807
	19 607

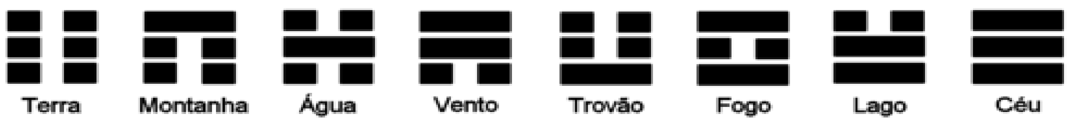
Podemos observar as cinco primeiras potências de sete, seguido de sua soma. Segundo Eves(2004) uma interpretação mais interessante desse enigma foi dada por Moritz Cantor, em 1907, quando este viu um problema da Idade Média no *liber abaci* (1202) de Leonardo Fibonacci, cujo enunciado: " Há sete senhoras idosas na estrada de Roma. Cada senhora tem sete mulos; cada mulo transporta sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; para cada faca há sete bainhas. Entre mulheres, mulos, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na cidade de Roma?". Ainda segundo Eves (2004) a interpretação de Moritz Cantor, para o problema do *papiro de Rhind*, poderia ser formulada como algo assim: " Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quanto havia disso tudo?

Podemos observar que nesses problemas há fortes evidências que sugerem o uso de análise combinatória, em particular os princípios multiplicativo e aditivo. Contudo, não há como comprovar se os egípcios, nesse período, conheciam casos gerais.

Na china, há fontes que sugerem o uso de análise combinatória. Segundo Eves(2004) um trabalho bem antigo chinês, o *I-King*, ou *Livro das Permutações*. Nele aparece o *Liang I*, que são dois símbolos: o *yang* (-) e o *ying* (- -), que são usados para formar figuras com três símbolos conhecido como *Pa-kua.* "Esses oito símbolos, aos quais estão ligados vários atributos, passaram a ser usados em adivinhações". (EVES, 2004, p.243)

- *Pa-kua* – trigramas(conjunto de três símbolos)

Figura 1- *Pa-kua*

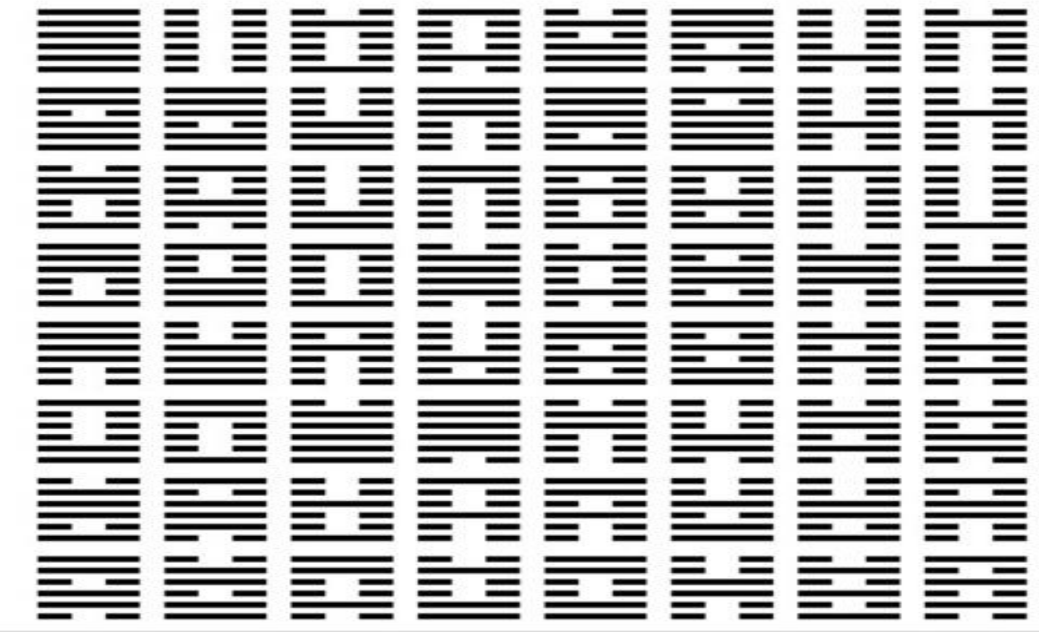


Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Trigramas.png

Segundo Vazquez (2011) a combinação desses símbolos consistia em um conjunto de regras que serviam para prever e explicar prenúncios sobre o tempo e a vida das pessoas. Como já mencionado, esses oito símbolos foram obtidos pela combinação do *yang* (-) e *ying* (- -), de uma forma indireta, podemos perceber o uso do conceito de análise combinatória. Segundo Vazquez (2011, p.17) "se quiser enumerar todas as sequências de r símbolos, cada um dos quais pode ser tomado de um conjunto de n símbolos, encontrar-se-á n^r de tais sequências". Nesse caso particular, temos um conjunto formado por dois símbolos e queremos enumerar todas as sequências com três símbolos, logo temos, 2^3 trigramas. Há também os hexagramas que podem ser obtidos pela sequência de seis símbolos escolhidos entre o *yang* e *ying*, logo há 2^6 hexagramas, ou seja, 64 sequências. Estas também podem ser obtidas com as combinações repetidas dos oito trigramas.

- Hexagramas – (conjunto de seis símbolos)

Figura 2 – Hexagramas

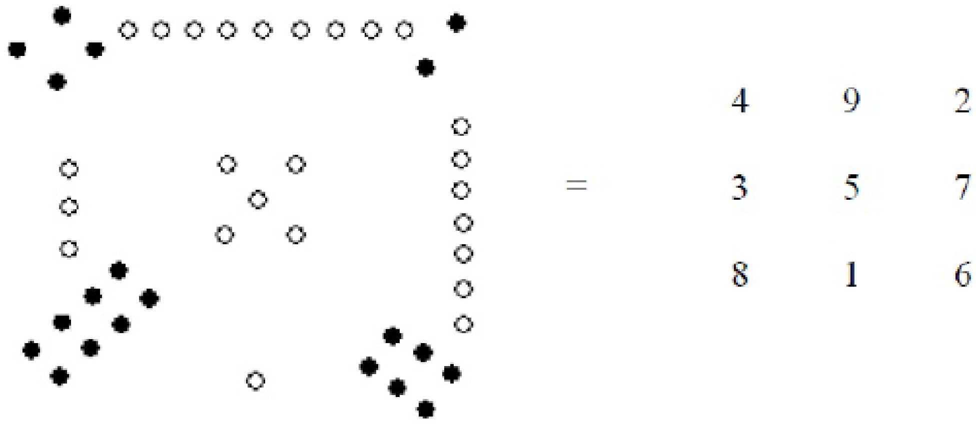


Fonte: http://hwarangtkd.com/?page_id=23

Todas as abordagens da matemática chinesa antiga sempre mencionam o quadrado mágico, conhecido como *Lo Shu*. Dessa maneira, um dos livros clássicos da matemática chinesa, como o *Livro das permutações,* não poderia deixar de apresentar esse diagrama numérico que é o quadrado mágico mais antigo que se tem conhecimento. Segundo Eves (2004) há uma lenda que o primeiro a vê-lo foi o imperador Yu, por volta de 2200 a.C., no rio Amarelo decorando a carapaça de uma tartaruga divina.

Segundo Vazquez (2011) o *Lo Shu* está associado as nove salas do palácio mítico de Ming Tang. Ela acrescenta que os quadrados mágicos provocavam grande admiração nas pessoas, pois eles estavam associados a coisas emblemáticas e a simples aritmética empregada em tais diagramas provocavam êxtase. A figura a seguir ilustra tal arranjo.

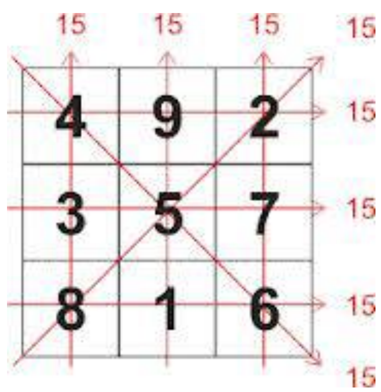
Figura 3 - Quadrado mágico chinês denominado Lo Shu



Fonte: VAZQUEZ, 2011, p. 19

Um quadrado mágico de ordem n, segundo Eves (2004, p.269) “é um arranjo quadrado de n^2 inteiros distintos dispostos de maneira tal que os números de uma linha qualquer, de uma coluna qualquer ou da diagonal principal têm sempre a mesma soma, chamada de constante mágica do quadrado”. A figura abaixo ilustra um quadrado mágico de ordem 3.

Figura 4 - Quadrado mágico de soma 15



Fonte: SANTOS, 2013, p.2

De la Loubère, um matemático francês, aprendeu um método simples de construir quadrados mágicos de ordem ímpar. Segundo Eves (2004), isto ocorreu no período entre 1687 e 1688, quando aquele matemático foi enviado por Luis XIV para o Sião (atual Tailândia). Essa técnica de construir quadrados de ordem ímpar, difundida por De la Loubère na França é ilustrada, em Eves (2004) para o caso particular de ordem cinco.

Nesses diagramas podemos perceber uma abordagem bem antiga de alguns conceitos de análise combinatória. Talvez a principal contribuição dos quadrados mágicos seja a fixação de uma condição para a contagem de todas as formas possíveis de preenchê-lo. Dessa forma, o professor pode usá-los como ferramenta para a aprendizagem da análise combinatória, principalmente no desenvolvimento de habilidades de agrupamentos sob certas condições.

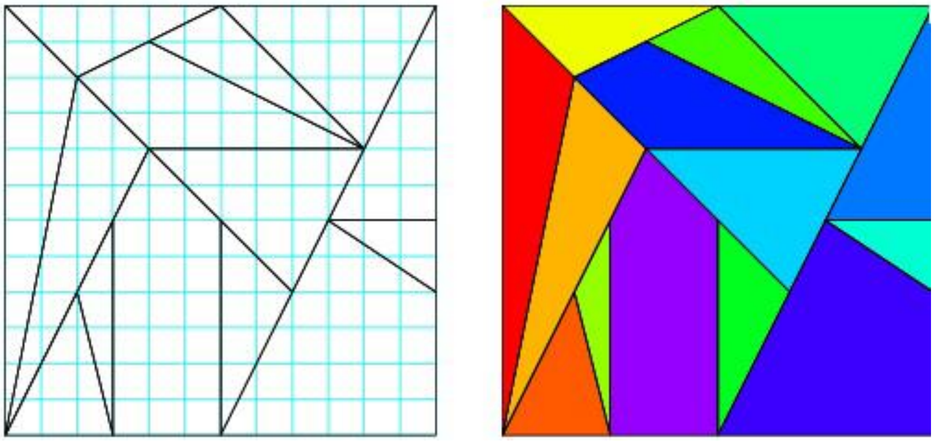
Na Grécia antiga, segundo Souza (2010), há uma passagem de Plutarco (século I) que é intrigante e misteriosa. Ele afirma que o filósofo Xenocrates calculou o número de possíveis sílabas, cujas letras estão em combinação, 1 002 000 000 000. Contudo, não se tem a certeza que tal cálculo se baseava em conceitos reais e desenvolvidos da análise combinatória, principalmente no que concerne ao número de combinação de certo conjunto. “Plutarco também declarou que Chrysippus, filósofo estoico, por volta de 207 a.C., encontrou o número de combinações de dez axiomas, chegando a mais do que 1 000 000. Na verdade, não se tem nenhuma evidência da teoria das combinações entre os gregos.” (SOUZA, 2010, p.60)

Na índia, há evidências que sugerem o uso de maneira mais sistemática e consciente dos conceitos da análise combinatória. Há muito tempo, os hindus já analisavam e apreciavam problemas de permutação e combinação. O *tratado médico de Susruta*, aproximadamente do século VI a.C., aparece um problema sobre as possíveis combinações entre doce, ácido, salino, pungente, adstringente e amargo, para produzir medicamentos. Segundo Vazquez(2011) foi encontrada uma lista organizada, tal que: a combinação de seis tomados dois a dois; 15, tomados três a três; 20, tomados quatro a quatro; 15, tomados cinco a cinco; 6, e um tomados todos juntos. É fácil notar que tais valores representam o número de combinações simples, ou seja, sem repetição desses elementos.

Recentemente descobriu-se um estudo sobre a história da análise combinatória da antiguidade clássica, mais precisamente do tempo de Arquimedes (287 a.C– 212 a.C), trata-se de um trabalho publicado por ele que sempre despertou a curiosidade dos matemáticos. Segundo Tavares e Brito (2005) trata-se do *Stomachion* um jogo geométrico, semelhante ao Tangran, constituído por quatorze peças com tamanhos e formas distintas que tinha o objetivo de formar um quadrado com elas.

A curiosidade dos matemáticos modernos era saber o motivo pelo qual o jogo despertou o interesse de uma das maiores mentes da história. Em dezembro de 2003, um estudo revelou que Arquimedes queria saber de quantas maneiras seria possível encaixar as 14 peças para formar o quadrado. Segundo Tavares e Brito (2005), não se sabe se Arquimedes chegou à solução para esse problema que, recentemente mostrou que há 17 152 possibilidades ou, desprezando as soluções simétricas, 268.

Figura 5 - Stomachion



Fonte: SANTOS, 2013, p.6

Um trabalho do século VI, da nossa era, que traz muitas contribuições para a análise combinatória, é o livro *Brihatsamhita,* do astrônomo e matemático hindu, Varahamhira, de Ujjain, que mostra a quantidade de perfumes que podem ser feitos, escolhendo-se quatro ou cinco ingredientes dados, misturando-os em várias proporções. Segundo Vazquez (2011) nesse livro, há uma clara evidência que esse matemático possuía conhecimento de combinação, principalmente quando apresenta 1820 possibilidades de se escolher quatro ingredientes entre dezesseis dados. Esse resultado é apresentado sem comentários e como não há a listagem de todos os casos, é natural conjecturar que os hindus tinham o conhecimento de uma fórmula para encontrar essas possibilidades.

Outra obra hindu, escrita por Bháskara (1114 – 1185) que há indícios do uso de análise combinatória, é uma das partes do livro *Sinddhanta Siromani* escrita em 1150, denominada *Lilavati*, que trata sobre aritmética e traz problemas matemáticos escritos de forma poética e recreativos. Nesse livro, segundo Vazquez (2011) aparecem dois problemas em que claramente se usa o conceito de combinação simples. O primeiro deles refere-se as chances de abertura do palácio, que pode ser assim enunciado: “ Em um agradável, espaçoso e elegante palácio, com oito portas, construído por um habilidoso arquiteto para o Príncipe do Reino, contou-me as combinações de abertura tomadas uma a uma, duas a duas, três a três quatro a quatro e etc.” A solução para esse problema, segundo Vazquez (2011) aparece da seguinte forma:

8	28	56	70	56	28	8	1
1	2	3	4	5	6	7	8

As possíveis combinações de abertura das portas do palácio são 255, que é a soma dos números da primeira linha acima. Outro problema encontrado no *Lilavati,* semelhante a um encontrado *no tratado médico de Susruta*, está relacionado ao número de combinações com seis ingredientes distintos, cujo enunciado: "Diga-me matemático, quantas são as combinações em uma composição com ingredientes de seis diferentes sabores, doce, amargo, adstringente, ácido, salgado e picante, tomados um a um, dois a dois, três a três e etc." Segundo Vazquez (2011) a solução é apresentada como a anterior, ou seja, com a seguinte disposição.

6	15	20	15	6	1
1	2	3	4	5	6

Se somarmos todos os números da primeira linha encontramos como resposta para esse problema, 63 combinações desses ingredientes. Com esses problemas, pode-se constatar que Bháskara conhecia uma fórmula para o cálculo do que hoje chamamos de combinação simples. Souza (2010) acrescenta que Bháskara deu regras, no livro *Livavati,* de como calcular o número de combinações simples, ou seja, combinações de n coisas tomadas p a p, além de fórmulas para o cálculo de permutações, com ou sem repetição. Um exemplo de um problema que está relacionado com o número de permutações encontra-se em Eves (2004):

> Quantas são as variações da forma do deus (Siva) obtidas pelas permutações de seus 10 atributos reciprocamente por suas diversas mãos, a saber: a corda, a tromba do elefante, o tamborim, a serpente, a caveira, o tridente, a armação de cama, a adaga, o arco, a flecha; e as de Hari, pelas permutações do cetro, do disco, da flor de lótus e da trombeta? (EVES,2004, p.272)

Os árabes e os judeus tinham consciência de como encontrar o número de combinações de n coisas tomadas p a p. Na idade média, a análise combinatória árabe estava muito atrelada a astronomia e existia uma certa mística e crença, que segundo eles poderiam influenciar a vida das pessoas. Segundo Souza (2010), esse misticismo levou a um estudo mais detalhado de combinações por Rabbi ben Ezra (1090 - 1167) sobre o número de maneiras que o planeta Saturno poderia ser combinado com cada um dos outros planetas. Já um problema mais geral, buscava determinar o número de combinações dos planetas conhecidos, tomados dois a dois, três a três, quatro a quatro e assim por diante. Souza (2010) acrescenta que os árabes tinham consciência que a combinação de sete tomados dois a dois era igual a combinação de sete tomados cinco a cinco, assim como sete tomados quatro a quatro era igual a sete tomados três a três e sete tomados um a um é igual a sete tomados seis a seis. Ou seja, nesses casos particulares podemos conjecturar que eles tinham conhecimento da propriedade $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Um matemático que contribuiu muito para o desenvolvimento de análise combinatória foi o francês Blaise Pascal(1623 – 1662), considerado um gênio da matemática, que por meio da exploração das propriedades do triângulo aritmético proporcionou determinar a combinação de n objetos tomados p a p. Esse triângulo já era conhecido séculos antes pelos chineses, hindus e árabes. Segundo Eves(2004) durante muito tempo Pascal foi considerado o primeiro descobridor conhecido desse triângulo no ocidente e, também, por ele ter desenvolvido e aplicado várias propriedades, este triângulo tornou-se conhecido como triângulo de Pascal. Tal fama pode ser justificada pela obra que Pascal escreveu em 1653, mas que só foi publicada dois anos depois, intitulada de *o Traité du Triangle Arithmétique*.

Esse triângulo numérico pode ser construído da seguinte forma: qualquer elemento a partir da segunda linha pode ser obtido como a soma da todos os números da linha anterior situados exatamente acima ou à esquerda do elemento desejado. Por exemplo, na sexta linha obtemos:

56 = 1+5+15+ 35

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
.	.	.	.	.	.	...

O triângulo de qualquer ordem pode ser obtido traçando uma diagonal na tabela acima. Os números ao longo das diagonais são os coeficientes da expansão do binômio $(x + y)^n$. Por exemplo, os números 1, 5, 10, 10, 5, 1, são os coeficientes do desenvolvimento do binômio $(x + y)^5$.

Segundo Tavares e Brito (2005) a grande contribuição de Isaac Newton(1646 – 1727) foi a de ter mostrado como calcular $(x + 1\,)^n$ sem antes calcular $(x + 1)^{n-1}$, além de ter generalizado $(x + y)^p$, onde p é um número racional.

O desenvolvimento da análise combinatória deve-se em grande parte aos problemas ligados aos jogos de azar. Segundo Morgado et al (1991) esse desenvolvimento ocorreu devido a necessidade de resolver problemas de contagem oriundos da teoria das probabilidades. Geralmente é atribuída a Pascal e Pierre de Fermat (1601 – 1665) a origem da teoria das probabilidades, contudo já se sabe que os jogos de azar exerceram influência sobre os homens há muito tempo. O fato é que tal teoria foi alavancada quando, Chevalier de Mèrè, um experiente e apaixonado jogador de cartas, discutiu com Pascal problemas relativos a probabilidade de ganhar jogos de cartas. Segundo Eves (2004) um dos problemas apresentado a Pascal por de Mèré foi o problema dos pontos.

> Esse problema pede que se determine a divisão das apostas de um jogo de azar interrompido, entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecida a contagem no momento da interrupção e o número de pontos necessários para se ganhar o jogo. (EVES, 2004, p.365)

Outro problema apresentado por De Mèré, que despertou o interesse de Pascal era descobrir o número mínimo de vezes para conseguir um duplo seis no lançamento de dois dados. Esse e outros problemas chamaram a atenção de Pascal que os apresentou a Fermat por meio de correspondências. O problema dos pontos foi resolvido pelos dois de maneiras distintas, Pascal resolveu usando o triângulo aritmético. É importante destacar que essas correspondências originaram os fundamentos da teoria das probabilidades que, por sua vez, desenvolveu e edificou a análise combinatória como um campo importantíssimo na matemática.

Outro matemático que se interessou por problemas relacionados aos jogos de azar foi o italiano Galileu Galilei(1564 – 1642), ele analisou problemas sobre os jogos de dados. Em um desses problemas, Galileu foi questionado por qual motivo da soma dez aparecer com mais frequência que a soma nove no lançamento de três dados. Essa foi uma pergunta que um amigo fez a Galileu, com isso, este passou a estudar esses jogos.

> Com três dados, o número 9 e o número 10 podem ser obtidos de seis maneiras distintas, cada um deles. No entanto, a experiência mostra que 10 é obtido mais frequentemente do que o 9. Como explicar isso? Galileu estudou cuidadosamente as probabilidades envolvidas e mostrou, corretamente que, de 216 casos possíveis, 27 são favoráveis ao aparecimento do número 10 e 25 favoráveis ao aparecimento do número 9. (MORGADO et al, 1991, p.6)

Muitos matemáticos que se interessaram pela teoria das probabilidades, de uma maneira ou de outra contribuíram para o desenvolvimento da análise combinatória. Entre eles podemos destacar o suíço Jaime Bernoulli (1654 – 1705) que mostrou interesse pelos problemas de análise combinatória e probabilidade. Em 1713, oito anos após a morte de Jaime Bernoulli, foi publicado a *Ars Conjectand.* A segunda parte do livro é voltada para apresentação de uma teoria geral sobre combinações e permutações, a terceira e a quarta tratam de problemas relacionados à teoria das probabilidades.

O formidável matemático Leonhard Euler (1707 – 1783) contribuiu em muitas áreas da matemática, em especial, contribuiu de forma significativa na análise combinatória. Foi ele o responsável pela criação do símbolo $\binom{n}{p}$, para representar $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. Segundo Tavares e Brito (2005), Euler também criou a teoria da partição. Uma partição de um número inteiro positivo n é um conjunto de inteiros positivos cuja soma é igual a n. Por exemplo, para $n = 5$, temos sete partições:

1 +1+1+1+1

1+1+1+2

1+1+3

1+2+2

1+4

2+3

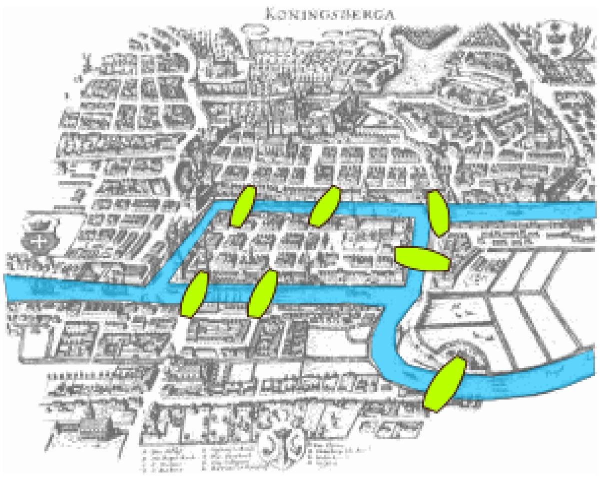
5

Ainda segundo Tavares e Brito(2005) , o problema de determinar o número $p(n)$ de partições do número inteiro positivo n foi objeto de muito estudo e só apareceu uma fórmula no século XX.

Euler também desenvolveu uma fórmula, para resolver um problema, que hoje chamamos permutação caótica. O problema que despertou o interesse dele foi o seguinte " dada uma sequência ordenada de n letras a, b, c, d, e, ..., etc, de quantos modos diferentes elas podem ser arranjadas de tal forma que nenhuma delas esteja no seu lugar inicial?" A solução desse problema foi apresentada de uma maneira muito elegante e de certa forma bastante engenhosa.

Outro problema que vinha intrigando muitos matemáticos e gerando muitas discussões era o das pontes de Königsberg. Essa cidade, localizada na Prússia e banhada pelo rio Pregel, era famosa pelas suas sete pontes, cinco delas dava acesso a uma ilha (Kneiphof) formada pelas ramificações desse rio. Conta-se que os habitantes de Königsberg, tentavam efetuar um passeio em que cruzasse todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma e voltasse ao ponto de partida. Como todas as tentativas eram infrutíferas, acreditava-se que era impossível tal percurso. Em 1736, Euler provou que era impossível fazer esse percurso com essas condições, essa foi a gênese da Teoria dos Grafos, que teve como fundadores Euler, G. Kirchhoff(1824 – 1887) e Arthur Cayley (1821 – 1895). Mais uma vez um problema levou a criação de uma nova teoria matemática, isso mostra a importância dos problemas no desenvolvimento do raciocínio e nas habilidades de qualquer pessoa, seja um matemático profissional ou um aluno que esteja iniciando a vida escolar.

Figura 6 - As sete pontes de Königsberg



Fonte: https://brainstormdeti.wordpress.com/2010/07/26/introducao-teoria-dos-grafos-parte-1/

Outra questão interessante ligada a Teoria dos Grafos se refere ao problema das quatro cores, que consiste em determinar quantas cores são necessárias para pintar um mapa de tal forma que países adjacentes não tenham a mesma cor. A conjectura foi proposta em 1852, e demonstrada em 1977, com o auxílio do computador. Esse teorema afirma que é possível com quatro cores pintar qualquer mapa. Segundo Tavares e Brito(2005) esse problema é histórico, pois foi o primeiro teorema demonstrado com o auxílio do computador.

Muitos matemáticos criaram técnicas e demonstraram teoremas importantíssimos para o desenvolvimento da análise combinatória, entre eles podemos destacar o alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), que enunciou o Princípio das Gavetas. Esse princípio, também chamado de Princípio de Dirichlet ou Princípio das Casas dos Pombos em sua versão mais simples afirma que: se $n + 1$ objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta terá pelo menos dois objetos. Embora extremamente óbvio, essa afirmação ingênua é uma ferramenta decisiva na resolução de muitos problemas de análise combinatória e, algumas vezes usada em outras áreas da matemática, por exemplo, na teoria dos números e geometria . A versão mais geral será apresentada no quarto capítulo, bem como a sua utilização em alguns problemas de natureza diversa.

Outro matemático que desenvolveu técnicas que contribuíram para a análise combinatória chegar ao patamar atual foi o húngaro George Polya (1887 – 1985) que " introduziu uma nova técnica de enumeração, que tem se prestado às mais variadas aplicações, permitindo tratar, de maneira unificada, desde a enumeração de isômeros de uma substância até a enumeração de grafos, principalmente árvores." (SOUZA, 2010, p. 68)

O século XX é marcado pela consolidação da análise combinatória como importante ramo da matemática. A contribuição do matemático inglês Frank Plumpton Ramsey (1903 – 1930) foi a garantia da existência de certas configurações. Segundo Souza (2010), uma configuração é qualquer conjunto formado por pontos, linhas e superfícies. Um teorema importante, conhecido como teorema da Ramsey afirma que:

> Se tivermos no plano um conjunto de n pontos, $n \geq 6$, no qual não há três pontos colineares, então, se unirmos todos os pontos, dois a dois, usando duas cores distintas, para traçar os segmentos de reta que unirão os pontos, então, forçosamente teremos um triângulo cujos lados são todos da mesma cor. (SOUZA, 2010, p.68)

Atualmente, a análise combinatória é vista como um ramo da matemática que proporciona a resolução de muitos problemas relacionados à contagem de subconjuntos de um conjunto, sob certas condições, sem a necessidade de enumerar todos os casos possíveis. Além de ferramenta primordial para demonstrar a existência de subconjuntos de um conjunto finito. Morgado et al (1991, p.2) define a Análise Combinatória como " a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas".

3 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA CONTAGEM

3.1 Princípio Aditivo

Nesse capítulo serão apresentadas ferramentas e técnicas básicas que o professor pode utilizar para desenvolver o raciocínio combinatório. Para isso, usaremos a resolução de problemas como ferramenta primordial para que os alunos compreendam os conceitos de análise combinatória. O princípio aditivo e o princípio multiplicativo são essenciais para o desenvolvimento das habilidades relacionadas à contagem. Apesar de elementares esses dois princípios são eficazes para edificar todos os conceitos que os alunos precisam aprender. Para isso, é necessário iniciar com problemas simples que se tornarão mais complexos e, em seguida, apresentar problemas ou situações que levem a generalização.

Problema 1: Na cidade de Pereiro foi inaugurada uma nova lanchonete. Para a inauguração o dono ofereceu uma superpromoção, todos os lanches tinham o mesmo preço de um copo de suco de 300 ml. Sabe-se que há três tipos de suco e quatro tipos de lanches. Luiz foi para a inauguração dessa lanchonete e pretendia consumir, como ele é uma pessoa cautelosa, antes de fazer o pedido conferiu quanto tinha na carteira e observou que seu dinheiro seria suficiente para comprar um lanche ou um suco. De quantas maneiras ele poderia fazer o pedido?

Solução: Como há três tipos de sucos e quatro tipos de lanches, a situação financeira de Luiz só permite ele escolher uma das opções, assim há sete possibilidades.

Problema 2: A escola Virgílio Correia Lima oferece aos alunos que têm os melhores desempenhos durante o bimestre uma viagem de cunho cultural. A última viagem foi para Fortaleza e ficou decidido que os alunos iriam visitar o teatro José de Alencar e o cinema, no shopping Iguatemi. Antes dessa visita constatou-se que tinha quatro filmes e duas peças de teatro em cartaz. A escola não banca a entrada no cinema nem no teatro. Zeca só tinha dinheiro para assistir um filme ou a uma peça de teatro, quantas seriam as possíveis atrações que Zeca poderia assistir nessa viagem?

Solução: Vamos denotar por f_1, f_2, f_3 e f_4 os quatro filmes que estão em cartaz e por t_1 e t_2 as duas peças de teatro. A situação econômica de Zeca só permite ele escolher um dos programas, assim há 6 maneiras de escolha.

Diante desses dois problemas podemos enunciar e/ou construir o princípio aditivo da contagem.

O princípio aditivo da contagem garante que dados dois conjuntos A e B disjuntos, ou seja, $(A \cap B = \emptyset)$ com, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui p + q elementos.

O problema 1 poderia ser escrito usando a linguagem dos conjuntos e identificando-os como:

$A = \{x \mid x \text{ é } um\ lanche\} = \{l1, l2, l3, l4\}$ e

$B = \{y \mid y \text{ é } um\ suco\} = \{s1, s2, s3\}$

Logo $A \cup B = \{z \mid z \text{ é } um\ lanche\ ou\ um\ suco\} = \{l1, l2, l3, l4, s1, s2, s3\}$

De maneira totalmente análoga podemos resolver o problema 2 usando a mesma linguagem:

$A = \{x \mid x \text{ é } um\ filme\} = \{f1, f2, f3, f4\}$ e

$B = \{y \mid y \text{ é } uma\ peça\ de\ teatro\} = \{t1, t2\}$

Assim

$A \cup B = \{z \mid z \text{ é } um\ filme\ ou\ uma\ peça\ de\ teatro\} = \{f1, f2, f3, f4, t1, t2\}$

É claro que esse princípio poderia ser estendido para mais de dois conjuntos.

Principio aditivo da contagem: Dados os conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dois a dois disjuntos (isto é $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall\ i \neq j$) com respectivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$ elementos, então $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ possui $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ elementos.

Problema 3 : Numa reunião havia um certo número de pessoas e todos os presentes apertaram as mão entre si. Sabendo-se que ao todo foram feitos 66 cumprimentos, calcule o número de pessoas presentes à reunião. (Problema retirado do livro: Introdução à matemática: um curso com problemas e soluções)

Solução: Inicialmente devemos notar que se João e Maria fazem parte da reunião, então João apertar a mão de Maria é o mesmo que Maria apertar a mão de João, ou seja, contamos apenas como um cumprimento. Digamos que há n pessoas na reunião, o número de cumprimentos pode ser calculado da seguinte forma: os apertos de mão envolvendo a primeira pessoa é n – 1, envolvendo a segunda pessoa é n – 2(já que foi contando o aperto com a primeira pessoa), a terceira pessoa n – 3 cumprimentos(já foi contado na primeira e segunda pessoa) e assim até a n-ésima pessoa que terá um cumprimento. Logo pelo princípio aditivo temos que:

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 3 + 2 + 1 = 66$$

Podemos perceber que o lado esquerdo da equação é a soma de uma progressão aritmética de n – 1 termos, razão 1 e primeiro termo n – 1, logo temos:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+3+2+1=66$$

$$\frac{(n-1)n}{2}=66$$

$$n^2-n=132$$

$$n^2-n-132=0$$

Resolvendo, temos que $n=12$. Ou seja, na reunião tinha 12 pessoas.

Nesse momento é oportuno fazer um retrospecto e conferir a resposta. Vale salientar que o professor pode e deve relembrar o que é uma progressão aritmética, bem como Gauss obteve a soma dos termos de uma P.A, além do uso de equação do segundo grau para a solução desse problema.

3.2 Princípio multiplicativo de contagem

Começamos esta seção voltando ao problema 1 da seção anterior, com uma pequena mudança.

Problema 4: Suponhamos que Luiz tenha dinheiro suficiente para comprar um suco e um lanche. De quantas maneiras ele poderia fazer esse pedido?

Solução: Vamos denotar por S_1, S_2 e S_3 os três tipos de suco e por L_1, L_2, L_3 e L_4 os quatro tipos de lanches que têm na lanchonete. Como Luiz deve escolher um suco e um lanche, podemos listar todas as maneiras de ele fazer esse pedido, para isso, faremos uma lista organizada dessas possibilidades.

S_1L_1	S_2L_1	S_3L_1
S_1L_2	S_2L_2	S_3L_2
S_1L_3	S_2L_3	S_3L_3
S_1L_4	S_2L_3	S_3L_4

Logo, há 12 possibilidades para Luiz escolher um suco e um lanche. Ou seja, para cada escolha de um tipo de suco há quatro possibilidades de escolhas de um lanche, como são três tipos de suco, temos: 3 x 4 = 12 possibilidades de compor seu pedido.

Problema 5 : O grêmio estudantil de uma escola é formado por dez alunos(três homens e sete mulheres). Esses alunos pretendem fazer uma festa com o intuito de arrecadar dinheiro para uma excursão no final do ano. Em uma reunião, eles decidiram participar da festa junina que todos os anos a escola promove. O grêmio ficou responsável por promover algumas atrações e todo o dinheiro arrecadado na portaria seria usado para a excursão. Entre outras atrações, o grêmio pensou em fazer a quadrilha matuta formada pelos alunos da escola e, determinaram que todos seus participantes iriam dançar. Quantos casais podem ser formados entre os alunos do grêmio?

Solução: Denotemos por H_1, H_2 e H_3 os três homens e por M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 e M_7 as sete mulheres do grêmio. Para formar um casal precisamos de um homem e uma mulher. Novamente faremos uma lista organizada de todos os casais possíveis que podem ser formados com os dez alunos do grêmio.

H_1M_1	H_2M_1	H_3M_1
H_1M_2	H_2M_2	H_3M_2
H_1M_3	H_2M_3	H_3M_3
H_1M_4	H_2M_4	H_3M_4
H_1M_5	H_2M_5	H_3M_5
H_1M_6	H_2M_6	H_3M_6
H_1M_7	H_2M_7	H_3M_7

Assim podem ser formados 21 casais com os dez alunos do grêmio. Para cada um dos três homens, há sete mulheres que pode formar um casal. A resolução da questão poderia ser feita observando esse fato, ou seja, 3 x 7 = 21 casais.

Um recurso muito importante para o desenvolvimento do raciocínio combinatório é árvore de possibilidades, o professor deve usá-la para que a aprendizagem se torne concreta. O aspecto geométrico é primordial para a visualização e listagem de todos os casos possíveis pelos os alunos. Para ilustrar o uso desse recurso apresentamos o seguinte problema.

Problema 6: Para montar o sanduíche em uma lanchonete, o cliente deve escolher exatamente um tipo de pão, um tipo de carne e um tipo de queijo. Sabe-se que existem três opções para o pão (baguete, pão de forma ou pão árabe), duas opções para a carne (hambúrguer ou frango) e três opções para o queijo (mussarela, cheddar ou suíço). Calcule quantos sanduíches diferentes é possível montar?(Retirado do portal da matemática)

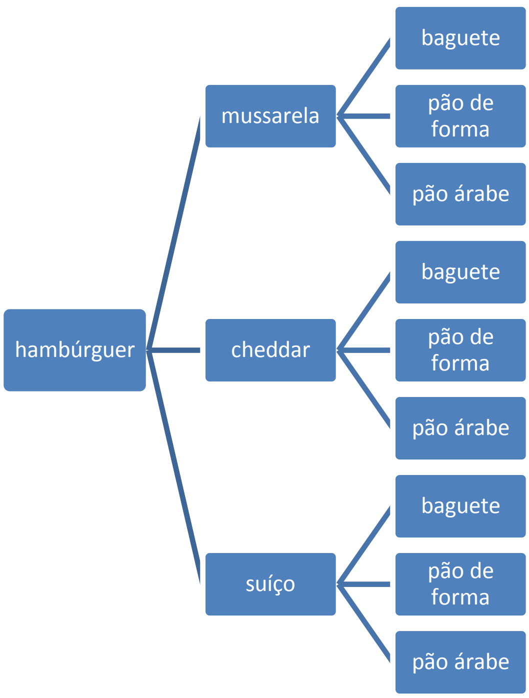
Solução 1: Denotaremos por P_1, P_2 e P_3 as três opções de pão, C_1 e C_2 as duas opções de carne e Q_1, Q_2 e Q_3 as três opções de queijo. Novamente faremos uma lista organizada de todas as possibilidades de compor o sanduíche.

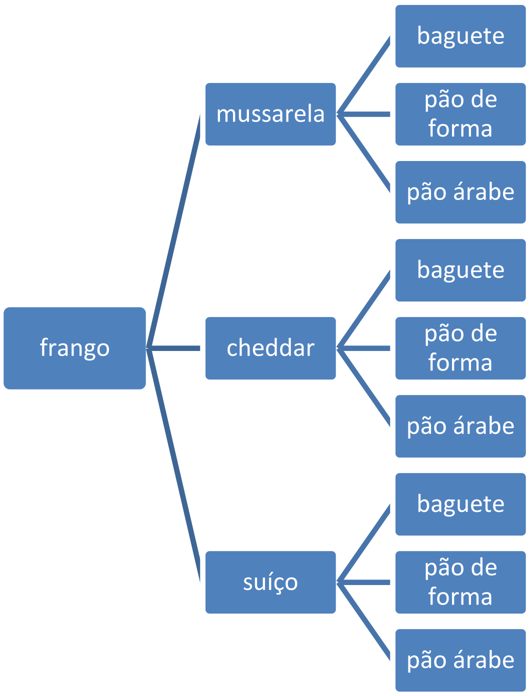
$P_1C_1Q_1$	$P_2C_1Q_1$	$P_3C_1Q_1$
$P_1C_1Q_2$	$P_2C_1Q_2$	$P_3C_1Q_2$
$P_1C_1Q_3$	$P_2C_1Q_3$	$P_3C_1Q_3$
$P_1C_2Q_1$	$P_2C_2Q_1$	$P_3C_2Q_1$
$P_1C_2Q_2$	$P_2C_2Q_2$	$P_3C_2Q_2$
$P_1C_2Q_3$	$P_2C_2Q_3$	$P_3C_2Q_3$

Assim podemos observar que há 18 maneiras de montar o sanduíche.

Solução 2: Usaremos a árvore de possibilidades para mostrar e visualizar todas as opções de montar os sanduíches. Sempre que for possível construir um desenho que ilustre o problema é aconselhável que o professor o faça. Esse aspecto visual proporciona o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Na figura 7, vemos todas as 9 possibilidades de montar o sanduíche tendo como opção de carne o hambúrguer e todas as 9 maneiras de compor o sanduíche tendo frango como opção de carne.

Figura 7 - Árvore das possibilidades





Fonte: Elaborada pelo o autor

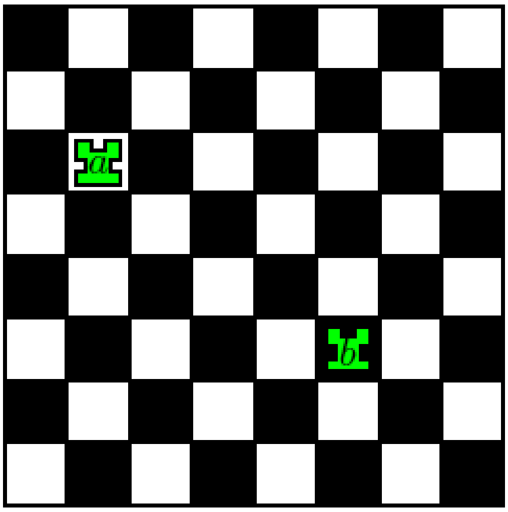
É fácil perceber e contar todas as 18 possibilidades de formar o sanduíche. Desenhar uma figura, quando possível, ajuda a resolver o problema. Nesse problema, em particular, a árvore das possibilidades nos deu de brinde a solução de uma maneira clara e objetiva. Podemos comparar as duas soluções e, com isso, temos a certeza que o problema foi resolvido corretamente.

Acredita-se que os primeiros problemas devem ser solucionados com a enumeração de todos os casos possíveis, com isso, o estudante se torna mais confiante e pode a partir desses problemas, desenvolver estratégias para os casos em que não é possível listar todas as possibilidades. O problema a seguir ilustra essa situação.

Problema 7: O tabuleiro onde se joga xadrez é um quadrado divido em 64 quadrados de mesmo tamanho de cores preta e branca. Esse jogo é apaixonante por diversos motivos, entre eles podemos destacar as múltiplas possibilidades de jogadas para cada um dos participantes. Uma das peças do xadrez é a torre, essencialmente uma peça de defesa. Ela só pode se movimentar na horizontal e na vertical. De quantas maneiras diferentes podemos colocar duas torres em um tabuleiro de xadrez de tal forma que nenhuma ataque a outra?

Solução: Essa solução é essencialmente a mesma encontrada no livro: *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. A figura 8 mostra uma maneira de dispor as duas torres cumprindo a condição do problema. Oliveira e Fernández (2010) argumentam que: se na figura for trocado a posição das duas torres teremos uma situação diferente.

Figura 8 - Torres que não se atacam



Fonte: OLIVEIRA, FERNÁNDEZ, 2010, p.170

Nesse momento, os alunos devem perceber que usar a mesma estratégia da resolução dos problemas anteriores não é uma ideia viável, já que, diferentemente dos demais, esse problema tem muitas possibilidades. Enumerá-las não é uma a melhor ideia. Podemos dividir nosso problema em outros mais simples. Inicialmente devemos pensar de quantas maneiras podemos colocar uma das torres numa das casas do tabuleiro, feito isso, devemos colocar a segunda torre de tal forma que não seja atacada pela primeira. A primeira torre pode ser colocada em qualquer uma das 64 casas, já a segunda, não pode ficar nem na mesma linha nem na mesma coluna que a primeira torre, pois dessa forma, ela seria ameaçada. Como cada linha e cada coluna contém 8 casas do tabuleiro, sendo uma delas comum a ambas, então temos 15 posições proibidas para a segunda torre, ou seja, ela só pode ser colocada em 49 posições diferentes. Assim para cada uma das 64 possibilidades para a primeira torre, temos 49 possibilidades diferentes para a segunda torre. Portanto, é possível colocar essas torres de 64x49 = 3.136 formas diferentes, ou seja, colocar ambas as torres no tabuleiro sem que elas se ataquem.

O problema acima ilustra e traz a essência do que é chamado **princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem**, o qual diz:

Se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada essa decisão, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é x.y.

É claro esse princípio pode ser usado para tomar três ou mais decisões. Para a resolução dos próximos problemas faremos uso desse princípio que, juntamente com o princípio aditivo são ferramentas poderosas para o ataque a muitos problemas de contagem.

Problema 8: Para o interclasse que será realizado no final do semestre, o time dos professores da Virgílio resolveu criar uma bandeira formada por quatro listras, que devem ser pintadas usando somente as cores azul, verde e vermelha, não podendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida essa bandeira?

Figura 9 - Bandeira para pintar

Fonte: Elaborada pelo autor

Solução: A primeira listra pode colorida de 3 modos, a segunda de 2 modos (não podemos usar a mesma cor empregada na primeira listra), a terceira de 2 modos (não podemos usar a mesma cor usada na segunda listra) e a quarta de 2 modos (não pode ser a mesma cor empregada na terceira listra). Portanto, pelo princípio multiplicativo da contagem há 3 x 2 x 2 x 2 = 24 maneiras de colorir a bandeira.

3.3 Uso simultâneo dos princípios aditivo e multiplicativo

Muitos problemas de contagem não podem ser resolvidos usando apenas um dos princípios apresentados até então. Esses problemas são mais complexos e acreditamos que só podem ser expostos aos alunos quando estes apresentarem pleno domínio dos princípios aditivo e multiplicativo. Se os estudantes conseguirem empregar simultaneamente esses princípios, certamente estão preparados para resolver uma variedade muito grande de problemas. O problema a seguir ilustra essa abordagem.

Problema 9: Sabemos que no início da premiação da 1ª fase da Olimpíada Alagoana de Matemática existem 10 livros diferentes de Álgebra, 7 livros diferentes de combinatória e 5 livros diferentes de geometria para homenagear os vencedores. Danielle é a primeira a pegar o prêmio que consiste em 2 livros, com a condição de que estes não podem ser da mesma matéria. Diga quantas escolhas Danielle pode fazer para pegar seu prêmio. (Problema retirado do livro: Iniciação à matemática: um curso com problemas e soluções)

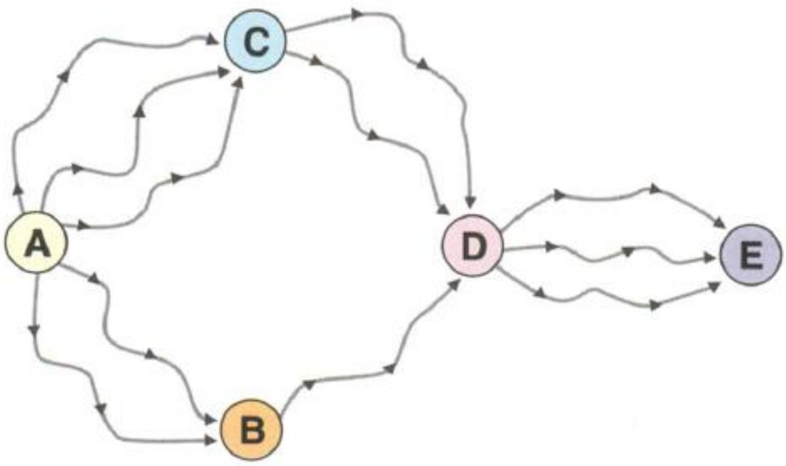
Solução: Danielle pode fazer a escolha dos livros da seguinte forma;

- Escolher um livro de geometria e um livro de álgebra. Isso pode ser feito de 5 x 10 = 50 maneiras possíveis (devido ao princípio multiplicativo).
- Escolher um livro de geometria e um livro de combinatória. Isso pode ser feito de 5 x 7 = 35 maneiras possíveis (pelo princípio multiplicativo) ou
- Escolher um livro de combinatória e um livro álgebra. Nesse caso, Danielle pode feito de 7 x 10 = 70 maneiras distintas (pelo princípio multiplicativo).

Logo, pelo princípio aditivo o número total de escolhas que Danielle pode fazer é 50 + 35 + 70 = 155.

Problema 10: Veja neste esquema as estradas que interligam as cidades A, B, C, D e E. De quantos modos podemos ir da cidade A até a cidade E? (Problema retirado do livro: Matemática vol 2, BIANCHINI e PACCOLA)

Figura 10 - Estradas que interligam as cidades A, B, C,D e E



Fonte: BIANCHINI e PACCOLA

Solução: Para se chegar à cidade E partindo da cidade A, devemos fazer os seguintes percursos ACDE ou ABDE. Para se chegar à cidade E, partindo da cidade A e passando pela cidade C há três decisões para ser tomadas. A primeira é partir de A para C, isso pode ser feito de três formas, da cidade C para a D, pode ser feito de duas maneiras e finalmente da cidade D para a cidade E, que pode ser feita de três maneiras, logo pelo princípio multiplicativo há 3 x 2 x 3 = 18 maneiras distintas de fazer esse trajeto. Para o segundo trajeto também é necessário a tomar de três decisões, ir da cidade A à cidade B, isso pode ser feito de duas maneiras, da cidade B para a D, de uma maneira e da cidade D até a cidade E, de três maneiras, logo pelo princípio multiplicativo há 2 x 1 x 3 = 6 maneiras de fazer esse segundo percurso. Portanto, pelo princípio aditivo o número de formas de esse percurso ser feito é 18 + 6 = 24 maneiras de sair da cidade A até a cidade E.

Acreditamos que a resolução de problemas de contagem utilizando vários recursos é primordial para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Lima et al (2006) aponta algumas estratégias que todos devem adotar quando forem resolver problemas de combinatória.

> *Postura*. Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.
> *Divisão*. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
> *Não adiar dificuldades*. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a que deve ser tomada em primeiro lugar. (LIMA et al, 2006, p.86-87)

3.4 Permutações simples

Um processo natural na matemática é trabalhar com generalizações. A mente do matemático busca incessantemente por padrões e universalização. Em análise combinatória isto não é diferente e o aluno deve compreender o particular e o geral. Muitos problemas são mais fáceis de serem atacados partindo de generalizações, outros de casos particulares, contudo, é importante que o estudante tenha conhecimento de ambas as abordagens.

Começamos esta seção com o seguinte problema: de quantos modos podemos ordenar em fila nn objetos distintos?

Por exemplo, para o objeto a, há uma ordenação: a. Para os objetos *a,b;* há duas ordenações: *ab,ba.* Para os objetos *a,b,c;* há 6 ordenações: *abc,acb,bac,bca,cab,cba.* Para o caso geral temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ modos de escolher o que ocupará o segundo, $n-2$ modos de escolher o que ocupará o terceiro, etc ...; 2

modos da escolha do objeto que vai ocupar o penúltimo lugar e 1 modo de escolher o que ocupará o último lugar na fila. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos que:

O número de modos de ordenar n objetos distintos numa fila é

$$n(n-1)(n-2)\dots 2.1 = n!$$

Cada ordem que se dá aos n objetos é chamada uma *permutação simples* de n objetos e o número de permutações simples de n objetos distintos e é representado por P_n. Logo, $P_n = n!$. Define-se $0! = 1$, assim, $P_0 = 1$.

Há alguns problemas clássicos que necessitamos recorrer à permutação simples para resolvê-los. Conhecê-los é essencial, pois sempre que nos deparamos com novos problemas podemos recorrer a um problema correlato. O primeiro dele se refere à formação de palavras diferentes com um conjunto de letras. Nesses problemas pede-se para calcular o número de anagramas de uma determinada palavra, algumas vezes, sob certas condições.

Um *anagrama* de uma palavra é uma permutação das letras dessa palavra para formar outra, com o sem significado. Por exemplo:

- Um anagrama da palavra roma é amor;
- Um anagrama da palavra perfeito é prefeito;
- Um anagrama da palavra bola é aobl;
- Um anagrama da palavra celia é alice.

Problema 11: Quantos anagramas tem a palavra ESCOLA?

Solução: Cada anagrama da palavra ESCOLA nada mais é do que uma ordenação das letras E,S,C,O,L,A. portanto, o número de anagramas da palavra ESCOLA é a permutação simples das 6 letras, ou seja, $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$.

Problema 12: De quantos modos podemos arrumar em fila 5 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Estatística e 2 livros de Física, de modo que livros de uma mesma matéria permaneçam juntos? (Este problema foi retirado do livro: A matemática do Ensino Médio vol.2.)

Solução: Inicialmente podemos escolher a ordem das matérias (Matemática, Estatística e Física) que pode ser feita de 3! modos. Feito isso, há 5! modos de colocar os livros de Matemática nos lugares que lhe forem destinados, 3! modos para os de Estatística e 2! modos para os de Física. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos: $3!\,5!\,3!\,2! = 6.120.6.2 = 8\,640$ maneiras de arrumar esses livros.

Problema 13: Se A é um conjunto com n elementos, quantas são as funções $f: A \to A$ bijetivas?

Solução: Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ os n elementos do conjunto A. O valor $f(a_1)$ pode ser escolhido de n modos; o valor de $f(a_2)$, de $n-1$ modos; e assim sucessivamente até o valor de $f(a_n)$, que pode ser escolhido de 1 modo. Portanto, a resposta é $n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!$ funções bijetivas.

Se o professor perceber que os alunos têm dificuldade para se lembrar dos conceitos de função e, em particular, função bijetiva, apresente-os. Isso só deve ser feito caso ele observe que não houve nenhum avanço com a resolução do problema original. Uma vez apresentado tais conceitos, os alunos podem começar a trabalhar com casos particulares, pois estes são muito importantes para se chegar ao resultado geral e, depois que se chegar ao caso geral é interessante confirmar com os casos particulares encontrados anteriormente.

Para encerrar essa seção apresentaremos um problema adaptado do exame nacional de qualificação do PROFMAT.

Problema 14: Será formada uma fila com h homens e m mulheres, onde $h \geq 2$ e $m \geq 1$. Quantas filas distintas poderão ser formadas, tendo um homem no final da fila?

Solução: Poderíamos fazer muitas cosiderações sobre esse enunciado. Primeiro, essa fila terá no mínimo três pessoas. Novamente, usar casos particulares seria uma estratégia. Contudo, acreditamos que após vários exemplos e muitos problemas propostos os alunos são capazes de compreender uma abordagem mais geral. Dessa forma, fica claro que nessa fila há $h+m$ pessoas. Inicialmente vamos escolher entre os h homens o que vai ocupar o último lugar da fila, isso pode ser feito de h modos, feito isso, basta permutar as $h+m-1$ pessoas, isso pode ser feito de $(h+m-1)!$, portanto, pelo princípio multiplicativo há $h(h+m-1)!$ de fazer essa fila.

3.5 Combinação Simples

Muitos problemas de contagem se resumem a determinar o número de subconjuntos de um conjunto dado. Cada um desses subconjuntos é chamado de combinação. Novamente, iremos iniciar essa seção com problemas que levem a compreensão do conceito de combinação simples.

Problema 15: A professora Manuella decidiu que a nota do trabalho em equipe do 2° bimestre seria dada por meio da apresentação de um seminário. Ela propôs que para cada grupo formado por quatro alunos seria sorteado um tema diferente. Ficou decidido que dois alunos de cada grupo faria a apresentação. Com o intuito de que todos os alunos estudassem o seu tema, Manuella disse que a escolha dos dois alunos seria feita por sorteio no dia da apresentação. A equipe formada por Andressa, Elane, Francisco e Junior pegaram o tema: O golpe de 64. De quantas formas os membros dessa equipe podem ser escolhidos para a apresentação do seminário?

Solução: Inicialmente devemos observar que a apresentação feita por Andressa e Elane é a mesma apresentação feita por Elane e Andressa. Após esse esclarecimento, vamos listar todas as possíveis formas de escolha dos membros da equipe para a apresentação do seminário:

{Andressa, Elane} {Andressa, Francisco} {Andressa, Junior },

{Elane, Francisco} {Elane, Junior} {Francisco, Junior}

Portanto, há 6 formas de se escolher os dois alunos para a apresentação. Novamente, listar todas as possibilidades foi uma boa estratégia.

Problema 16: Uma montadora de veículos planeja iniciar suas operações no Brasil. De início, pretende construir em território nacional duas fábricas com o mesmo padrão em cidades localizadas em diferentes regiões do país. De quantos modos distintos poderão ser escolhidas as duas regiões?(Problema retirado do livro, matemática: ciência e aplicações)

Solução: Observe que escolher, por exemplo, as regiões Norte e Nordeste é o mesmo que escolher Nordeste e Norte, pois independentemente da ordem em que as regiões são escolhidas, as duas fábricas serão construídas em cidades dessas regiões. Dessa maneira, basta construir todos os subconjuntos de dois elementos do conjunto: {Norte, Nordeste, Sul, Sudeste, Centro – oeste}. As possibilidades são:

{ Norte, Nordeste} {Nordeste, Sul} {Sul, Sudeste} {Sudeste, Centro – Oeste}

{ Norte, Sul} {Nordeste, Sudeste} {Sul, Centro – Oeste}

{ Norte, Sudeste} {Nordeste, Centro - Oeste}

{ Norte, Centro – Oeste }

Portanto, o número de possibilidades para a instalação das fábricas é 10.

Se o aluno tiver compreendido o princípio multiplicativo ele poderia ter resolvido esse problema. Vamos analisar a seguinte resposta: a escolha da primeira região poderia ser feita de 5 modos, a da segunda de 4 modos. A resposta parece ser 5 x 4 = 20 possibilidades. Contudo, podemos verificar que a combinação {Sul, Sudeste} é idêntica a {Sudeste, Sul} e foram contadas como se fossem distintas. Em resumo, na resposta 20 estamos contando cada combinação uma vez para ordem de escrever seus elementos. Como cada combinação os elementos podem ser escritos em 2! = 2 ordens, cada combinação foi contada 2 vezes. Logo, a resposta é $\frac{20}{2}$ = 10.

Os problemas de contagem muitas vezes se tornam complexos para os alunos e também para os professores, isto se dá, pois o princípio multiplicativo não é bem compreendido. Os alunos se deparam com muitas fórmulas e não sabem quando e como usar. Nossa proposta é resolver problemas usando os princípios básicos da contagem (aditivo e multiplicativo), é claro que apresentaremos fórmulas, contudo, estas são consequências naturais do princípio multiplicativo. O professor não deve apresentá-las sem antes ter a plena consciência que os alunos conseguem resolver problemas sem a fórmula. Até então, resolvemos dois problemas sem o auxílio de fórmulas, contudo, o número de elementos dos conjuntos era pequeno e, encontramos a resposta listando todos os casos.

Uma ótima estratégia para a determinação do número de subconjuntos em que o número de elementos do conjunto é grande seria usar o princípio multiplicativo, como fizemos no segundo problema dessa seção.

Problema 16: Quantas saladas contendo exatamente 3 frutas Joana pode formar se ela dispõe de 10 frutas diferentes?

Solução: A escolha da primeira fruta pode ser feita de 10 modos, a segunda de 9 modos e a terceira de 8 modos. A resposta parece ser 10 x 9 x 8 = 720. Contudo, se pensarmos, numa combinação, por exemplo: {maçã, banana, morango}, verificamos que as combinações {maçã, morango, banana},{banana, maçã, morango},{banana, morango, maçã},{ morango, maçã, banana} e {morango, banana, maçã}são idênticas e foram contadas como se fossem diferentes. Contudo, sabemos que fazem parte da mesma salada. Portanto, a resposta 720 é o número de vezes que podemos ordenar três elementos entre os dez elementos dados. Logo, em cada combinação os elementos podem ser escritos em 3! = 6 ordens, ou seja, cada combinação foi contada indevidamente 6 vezes. Portanto, a resposta é $\frac{720}{6} = 120$ modos.

Para o caso geral temos:

De quantos modos podemos escolher p objetos distintos entre n objetos dados? Responder essa pergunta é equivalente a determinar quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

O número de combinação simples de classe p de n objetos é representado por C_n^p ,$\binom{n}{p}$ ou $C_{n,p}$. Assim temos, o primeiro elemento pode ser escolhido de n modos, o segundo $n-1$ modos, o terceiro $n-2$,e etc; o elemento de ordem p pode ser escolhido de $n-p+1$ modos. Cada combinação foi contada indevidamente $p!$ vezes, logo temos:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p!}$$

Sabendo que $0 < p \leq n$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(n-p)!$.Obtemos:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)(n-p)!}{p!\,(n-p)!}$$

Observe que a expressão do numerador ainda pode ser escrito da seguinte maneira:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\dots 3.2.1}{p!\,(n-p)!}$$

Portanto, uma expressão mais concisa pode ser obtida como segue:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Com $0 \leq p \leq n$

Problema 17: Marcam-se 10 pontos uma reta *r* e 8 pontos sobre uma reta *s* paralela a *r*. Quantos triângulos existem com vértices nesses pontos?

Solução 1: Para formar um triângulo tomamos um ponto da reta *r* e dois pontos da reta *s* ou um ponto da reta *s* e dois pontos da reta *r*. Assim o número de triângulos do primeiro tipo é $10.C_8^2$ e do segundo tipo $8.C_{10}^2$. Usando o princípio aditivo, temos:

$$10.C_8^2+8.C_{10}^2=10.\frac{8!}{2!\,6!}+8.\frac{10!}{2!\,8!}=280+360=640\ tri\hat{a}ngulos$$

Solução 2: Para formar um triângulo precisamos escolher três pontos não colineares, entre os 18 pontos dados. O número de modos de escolher 3 pontos entre os 18 é C_{18}^3. Desses devemos retirar as C_{10}^3 escolhas dos três pontos da reta r e C_8^3 escolhas possíveis de três pontos de s, já que estes não determinam triângulos. Logo, a resposta é

$$C_{18}^3\ -\ C_8^3\ -\ C_{10}^3\ =816-56-120=640\ tri\hat{a}ngulos$$

Problema 18: Um clube de xadrez tem 7 meninos e 2 duas meninas. Tem que ser escolhido um time com quatro pessoas para um torneio e este time tem que conter pelos menos uma menina. De quantas maneiras isto pode ser feito? (Problema retirado do livro, *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa)*

Solução 1: O time pode ser formado com uma ou duas meninas. Dessa forma, devemos ter a seguinte a configuração para os representantes:

- Uma menina e três meninos;
- Duas meninas e dois meninos;

No primeiro caso, o time pode ser formado de $2.C_7^3$modos, já no segundo caso, o time pode ser formado $C_2^2.C_7^2$ modos. Portanto, pelo princípio aditivo temos:

$$2.C_7^3+\ C_2^2.C_7^2\ =2.\frac{7!}{3!4!}+1.\frac{7!}{2!5!}=2.35+21=70+21=91\ times\ poss\acute{\imath}veis$$

Solução 2: Poderíamos pensar de outra maneira, como há 9 pessoas e, devemos escolher 4 delas, isso pode ser feito de C_9^4 e suprimir as escolhas em que o time tem apenas homens, ou seja, C_7^4 modos. Portanto, a resposta é

$$C_9^4-C_7^4=126-35=91\ times\ poss\acute{\imath}veis$$

É importante destacar que o ensino de análise combinatória não pode feito com o uso abusivo de fórmulas. Os problemas apresentados poderiam ser resolvidos usando os princípios aditivo e multiplicativo, contudo acreditamos que as fórmulas podem e devem ser apresentadas, desde que os alunos tenham domínio dos princípios básicos. A esse respeito

Lima et al.(2006, p.111) afirmam que “ Não faça fórmulas demais ou casos particulares demais. Isso obscurece as ideias e torna as coisas mais complicadas”. Eles acrescentam que quem trocar o princípio básico da contagem por fórmulas de arranjos, combinação e permutação terá dificuldade de resolver problemas elementares.

Praticamente todos os livros didáticos tradicionais de matemática do Ensino Médio, em análise combinatória, traz o tópico de arranjo. Acreditamos que este não precisa ser apresentado aos alunos, pois qualquer problema que se usa arranjo para resolver, pode ser solucionado usando o princípio multiplicativo. Usar arranjo não desenvolve o raciocínio combinatório. Lima et al (2006,p.112) afirmam que “ Um processo seguro de tornar as complicadas é começar assim: esse é um problema de arranjos ou de combinações?”

3.6 Permutação com elementos repetidos

Uma estratégia na resolução de problemas é sempre buscar um problema correlato. Após compreender o problema, devemos estabelecer um plano para solucioná-lo. Quando partirmos para atacar o problema, devemos pensar em outro conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante, ou ainda, um problema que tenha a mesma roupagem.

Nesta seção usaremos os conceitos de permutação e anagrama para resolver problemas mais complexos. Lembre-se que o número de maneiras de permutar n elementos distintos é $P_n = n!$. O objetivo dessa seção é calcular o número de permutações de n objetos, onde alguns deles podem aparecer repetidos.

Problema 19: Maria tem três restaurantes favoritos. Um deles é uma hamburgueria, outro é um restaurante italiano e o terceiro é um restaurante japonês. Ela acabou de conseguir um novo emprego e, para comemorar, pretende jantar em um desses restaurantes durante os próximos quatro dias. Como o restaurante japonês é o seu favorito, ela decidiu que irá exatamente duas vezes a ele e uma vez a cada um dos demais. De quantas formas ela pode escolher a ordem em que irá jantar nesses restaurantes? (Problema extraído de: http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/brzgjf9sflwgg.pdf, acesso em 28/04/ 2016, às 15:58).

Solução: A solução aqui apresentada é essencialmente a mesma encontrada no material citado acima. Vamos usar as letras H, I e J para representar, a hamburgueria, o restaurante italiano e o restaurante japonês, respectivamente. Podemos usar uma palavra formada por quatro dessas letras para indicar em que ordem Maria irá jantar nesses restaurantes. Lembremos que, nesse contexto, uma palavra é qualquer sequência de letras de letras com ou sem significado, ou seja, anagrama. Por exemplo, IJHJ é a palavra que indica que Maria irá primeiro ao restaurante italiano, em seguida ao japonês, depois a hamburgueria e, por fim, novamente ao japonês. Para satisfazer a condição de que Maria irá ao restaurante japonês exatamente duas vezes e irá aos demais uma vez, as palavras que iremos formar devem ser anagramas de HIJJ. Então, um problema correlato seria determinar quantos anagramas dessa palavra existem.

O problema correlato serve para transformar um problema, em um que já sabemos resolver. Veja que, se tivéssemos 4 restaurantes distintos, a solução seria bastante simples. Vamos supor por um momento que existissem dois restaurantes japoneses, que iríamos chamar de J_1 e J_2, e que Maria desejasse ir uma vez a cada deles. Nesse caso, para resolver o problema bastaria calcular o número de permutações do conjunto { H, I, J_1, J_2 }, que é igual a $P_4 = 4! = 24$. Acontece que, em verdade, J_1 e J_2 são o mesmo restaurante. Sendo assim, existem permutações diferentes, dentre essas 24 permutações, que determinam uma mesma ordem para os restaurantes que Maria irá, de fato, jantar. Por exemplo, as permutações HIJ_1J_2 e HIJ_2J_1 são distintas, mas ambas fazem com que Maria visite os restaurantes na ordem indicada pela palavra HIJJ. Veja que, em verdade, em qualquer permutação de { H, I, J_1, J_2 } podemos trocar a ordem indicada entre J_1 e J_2 sem alterar a ordem em que Maria irá visitar os restaurantes. Por outro lado, se trocarmos J_1 ou J_2 com qualquer outra letra, fará com que a agenda de Maria seja diferente. Dessa forma, podemos organizar as 24 permutações em grupos, onde cada grupo é formado por 2 = 2! permutações, que representam o mesmo anagrama de HIJJ. A quantidade de tais grupos é

$$\frac{P_4}{2!} = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12,$$

essa é a resposta para o nosso problema, pois cada grupo corresponde a um anagrama distinto da palavra HIJJ.

Uma maneira mais concisa de perceber essa resposta é fazer uma tabela ilustrando todo o procedimento apresentado acima. Para isso, vamos listar as 24 permutações do conjunto { H, I, J_1, J_2 }, destacando os pares de permutações que correspondem a mesma solução, do ponto de vista de Maria.

HIJ_1J_2	IHJ_1J_2	IJ_1HJ_2	IJ_1J_2H
HIJ_2J_1	IHJ_2J_1	IJ_2HJ_1	IJ_2J_1H
HJ_1IJ_2	J_1HIJ_2	J_1IHJ_2	J_1IJ_2H
HJ_2IJ_1	J_2HIJ_1	J_2IHJ_1	J_2IJ_1H
HJ_1J_2I	J_1HJ_2I	J_1J_2HI	J_1J_2IH
HJ_2J_1I	J_2HJ_1I	J_2J_1HI	J_2J_1IH

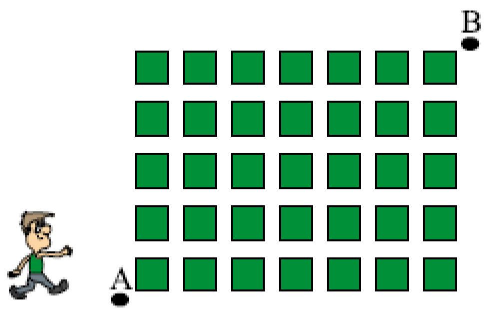
A tabela abaixo, por sua vez, foi obtida a partir da anterior, substituindo J_1 e J_2 por J. Veja que cada anagrama aparece exatamente duas vezes nela. Por isso a quantidade de anagramas distintos é apenas $\frac{24}{2} = 12$.

HIJJ	IHJJ	IJHJ	IJJH
HIJJ	IHJJ	IJHJ	IJJH
HJIJ	JHIJ	JIHJ	JIJH
HJIJ	JHIJ	JIHIJ	JIJH
HJJI	JHJI	JJHI	JJIH
HJJI	JHJI	JJHI	JJIH

Problema 20: (VUNESP-2010) A figura mostra a planta de um bairro de uma cidade. Uma pessoa quer caminhar do ponto A ao ponto B por um dos percursos mais curtos. Assim, ela caminhará sempre nos sentidos “de baixo para cima” ou “da esquerda para a direita”. O número de percursos diferentes que essa pessoa poderá fazer de A até B é:

a) 95 040 b) 40 635 c) 924 d) 792 e) 35

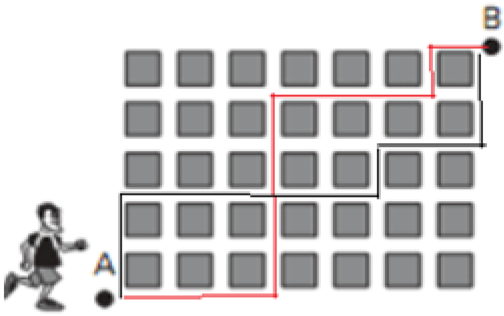
Figura 11 - Planta do bairro de uma cidade



Fonte: http://www.blogdovestibular.com/2012/11/questao-do-dia-da-unesp-analise.html

Solução: Sempre que nos deparamos com um problema e não sabemos como atacá-lo devemos listar alguns casos particulares e, a partir deles tirar algumas conclusões, ou ainda encontrar uma maneira para resolvê-lo. O problema nos propõe determinar de quantas formas distintas uma pessoa pode ir do ponto A até o B por um caminho mais curto, isso significa que esta só caminha para direita e/ou para cima. Uma vez compreendido o problema, vamos denotar por C e D a pessoa caminhar para cima e para direita, respectivamente. A figura abaixo mostra dois possíveis caminhos.

Figura 12 - Dois possíveis caminhos



Fonte: Elaborada pelo o autor

Usando a denotação acima, o caminho em vermelho pode ser descrito como DDDCCCCDDDCD, já o caminho em preto pode ser representado por CCDDDDDCDDCC. Com esses dois casos, podemos perceber que para se chegar ao ponto B partindo de A, a pessoa tem que caminhar 12 quadras, sendo 7 para direita e 5 para cima. Como no problema anterior, o número de caminhos distintos é igual a número de anagramas da palavra DDDDDDDCCCCC. Se as letras fossem diferentes, teríamos $P_{12} = 12!$ anagramas. Como os C são iguais, contamos cada anagrama 5! vezes. De maneira análoga, contamos cada anagrama 7! vezes por serem iguais a D. Logo, pelo princípio multiplicativo, o número total de permutações que geram o mesmo anagrama de DDDDDDDCCCCC é igual a 5!.7!. Dessa forma, devemos dividir o número total de permutações 12! por 5!.7!, portanto:

$$\frac{12!}{5!7!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{120.7!} = 792.$$

Outra maneira de resolver esse problema, ou seja, determinar o número de anagramas da palavra DDDDDDDCCCCC, temos que arrumar 7D e 5C em doze lugares - - - - - - - - - - - - . O número de modos de escolher os lugares onde serão colocados os D é C_{12}^{7}, feito isso há C_5^5 modo para escolher os lugares de C. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos:

$C_{12}^{7}.C_{5}^{5}$ = 792

Para o caso geral em que temos uma palavra com n letras, na qual várias delas podem se repetir muitas vezes, temos:

Sejam $n, n_1, n_2, \ldots, n_r$ números naturais tais que $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$. Considere uma palavra com n letras, sendo r dessas letras distintas. Se $n_1, n_2, \ldots, n_r$ representam os números de vezes que cada letra diferente aparece, então o número de anagramas de tal palavra é igual a

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}$$

A demonstração do caso geral é análoga àquela que fizemos nos dois problemas anteriores, basta observar que o denominador $n_1!\, n_2! \ldots n_r!$ corresponde ao número de maneiras em que podemos permutar as letras repetidas entre si.

Problema 21: Um sapo está sobre uma reta. A cada pulo que ele dá, ele anda exatamente 15 cm para a direita ou 15 cm para a esquerda. Sabe-se que ele deu 10 pulos e retornou à sua posição inicial. Determine a quantidade de percursos distintos que ele pode ter percorrido. (Problema extraído do portal da matemática)

Solução: Observe que, se após os dez pulos o sapo retornou a posição inicial, então ele deu cinco pulos para direita e cinco pulos para a esquerda. Cada pulo, podemos representar pelas letras D ou E, para denotar os pulos para direita e para esquerda, respectivamente. Uma possível sequência seria DDDDDEEEEE. Assim, nosso problema se resume a determinar o número de anagramas dessa palavra, isto pode ser feito de:

$$P_{10}^{5,5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5.4.3.2.1.5!} = 252\ maneiras.$$

Problema 22: (UFRGS) Se uma partida de futebol termina com o resultado de 5 gols para o time A e 3 gols para o time B, existem diversas maneiras de o placar evoluir de 0 x 0 a 5 x 3. Por exemplo, uma evolução poderia ser

A	B		A	B		A	B		A	B		A	B		A	B		A	B		A	B		A	B
0	0	→	1	0	→	1	1	→	1	2	→	2	2	→	3	2	→	4	2	→	4	3	→	5	3

Quantas maneiras, no total, tem o placar de evoluir de 0 x 0 a 5 x 3?

a) 16 b) 24 c) 36 d) 48 e) 56

Solução: Podemos representar a evolução do placar acima da seguinte forma: ABBAAABA, essa sequência significa que a equipe A abriu o placar, B empatou e virou, A empatou e virou para 4 x 2, B fez mais um gol e A fechou o placar. Foram marcados oito gols, assim, na sequência de gols em qualquer situação o A vai aparecer 5 vezes e B três vezes, dessa forma, basta calcular o número de anagramas da palavra AAAAABBB, que pode ser feita de

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8.7.6.5!}{5!6} = 56 \text{ maneiras}$$

4 MÉTODOS SOFISTICADOS DE CONTAGEM

Esse capítulo tem o objetivo de apresentar aos alunos e professores métodos de contagem mais sofisticados que não são encontrados na maioria dos livros didáticos tradicionais. É de suma importância que os professores do Ensino Médio tenham conhecimento dessas poderosas técnicas que ajudam a resolver muitos problemas. Dessa forma, usar a resolução de problemas para apresentar tais métodos aos seus alunos. Usaremos a mesma abordagem que foi empregada no capítulo anterior, ou seja, o problema como ponto de partida para a apresentação dos conceitos.

4.1 Permutações circulares

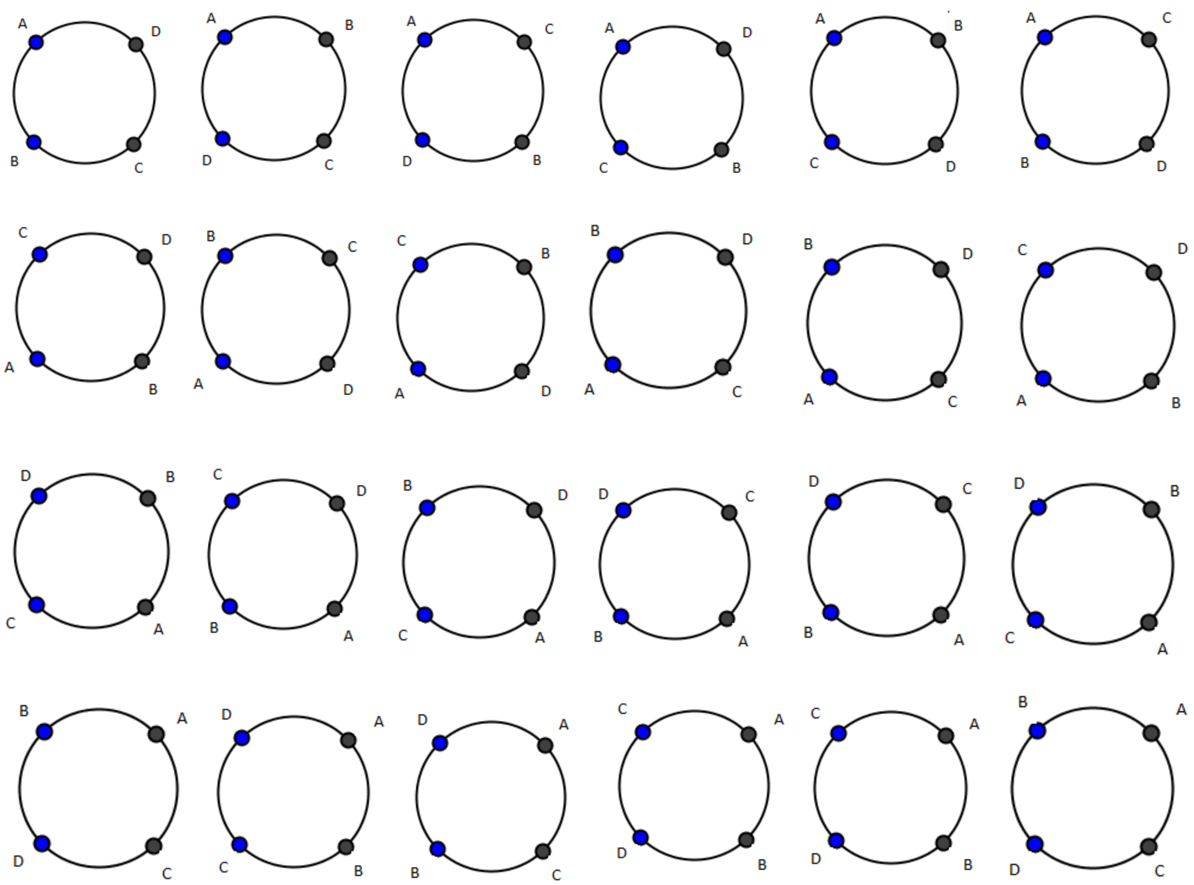
Como nas seções anteriores, começaremos esta com um problema que levará a compreensão do que seria uma permutação circular. Já sabemos de quantas maneiras podemos dispor n pessoas em uma fila indiana, esse é um problema clássico de permutação simples e, tem como resposta $n!$. Agora estamos interessados em determinar de quantas maneiras é possível colocar n pessoas em torno de um círculo. Antes de partimos para o caso geral, vamos iniciar com um problema mais simples que será útil para a apresentação do caso geral.

Problema 22: De quantas formas podemos colocar 4 pessoas em torno de uma mesa circular?

Solução: A primeira vista, a solução desse problema parece ser $P_4 = 4! = 24$ maneiras. Contudo, é necessário esclarecer que uma permutação circular é considerada idêntica quando pode ser obtida pela rotação. A figura 13 ilustra esse caso.

Dessa forma, temos apenas 6 maneiras de dispor as 4 pessoas em torno da mesa circular. Observe que a primeira linha ilustra todas essas possibilidades. Isso é equivalente a dizer que os elementos de cada coluna podem ser obtidos por meio de uma rotação do primeiro. Essa ilustração mostra que na permutação circular o que importa é a posição relativa entre os objetos. Por exemplo, na primeira coluna, em relação a A temos sempre: C à esquerda, B à direita e D à frente. Então as quatro permutações que aparecem na primeira coluna só são consideradas como uma. De modo análogo, com todas as demais colunas. Portanto, o número de permutações circulares poderia ser obtido por $\frac{4!}{4} = 6$.

Figura 13 - Permutação de 4 objetos, dispostos em torno de um círculo



Fonte: Elaborada pelo autor

Com esse problema, podemos generalizar para o caso de colocar n objetos distintos em n lugares em torno de um círculo. A resposta será representado $(PC)_n$, o número de permutações circulares de n objetos distintos. Vamos proceder de duas formas:

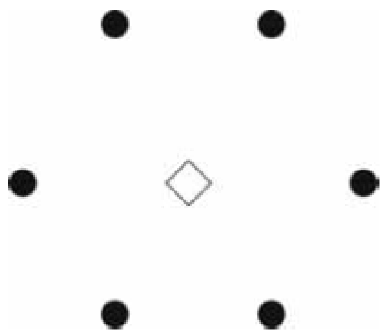
- Se não considerarmos equivalentes as arrumações que coincidem por rotação a resposta seria $n!$ disposições. Contudo, consideramos equivalentes permutações obtidas por meio de rotação, sabemos que cada permutação circular é gerada por n disposições, logo:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

- Como na permutação circular o que importa é a posição relativa entre os objetos, há 1 modo de colocar o primeiro objeto no círculo (onde colocarmos ele será o único objeto no círculo); para o segundo há $n-1$ modos(já que há $n-1$ lugares e sua posição em relação ao primeiro muda à medida que mudar de lugar); para o terceiro $n-2$ modos; e etc...; para colocar o n-ésimo e último objeto há 1 modo. Portanto, pelo princípio multiplicativo, temos:

$$(PC)_n = 1.(n-1)(n-2)\dots 1 = (n-1)!$$

Problema 23: (CESPE) Um professor propôs dividir sua turma em 7 grupos de alunos; os elementos de um dos grupos ficariam no centro de uma circunferência, e os demais grupos, posicionados em 6 locais bem determinados sobre a circunferência, teriam a incumbência de questionar os elementos do grupo do centro a respeito de um assunto pré-agendado. A figura abaixo ilustra a posição dos 7 grupos. Nesse caso, a quantidade de formas possíveis e distintas de se organizar os grupos dos questionadores e questionados será igual a:



a) 5040 b) 840 c) 720 d) 120

Solução: Inicialmente devemos compreender o problema, que nos pede o número de formas distintas de dispor os 7 grupos de alunos, sendo 6 dispostos sobre a circunferência e um sobre o centro. Para resolver esse problema, devemos tomar duas decisões: a primeira é escolher o grupo que ficará no centro, isso pode ser feito de 7 modos, em seguinda, devemos dispor os 6 grupos sobre a circunferência, isso pode ser feito de $(PC)_6 = 5! = 120$ modos. Logo, pelo princípio multiplicativo temos:

$$7.(PC)_6 = 7.120 = 840 \text{ maneiras}$$

Problema 24: Uma pulseira deve ser cravejada com um rubi, uma esmeralda, um topázio, uma água-marinha, uma turmalina e uma ametista. De quantos modos isso pode ser feito supondo:

a) Que a pulseira tem um fecho e um relógio engastado no fecho;
b) Que a pulseira tem fecho;
c) Que a pulseira não tem fecho e o braço só pode entrar na pulseira em um sentido;
d) Que a pulseira não tem fecho e o braço só pode entrar na pulseira nos dois sentidos; (Problema retirado do livro: Análise Combinatória e Probabilidade)

Solução: a) como há um relógio na pulseira e ele define uma orientação no uso da pulseira, dessa forma, podemos usá-lo como referência fixando-o na contagem. Como há 6 pedras, basta permutar para determinar o total de pulseiras que é 6! = 720 maneiras.

b) Podemos usar o fecho como referência e permutando as pedras, teríamos 6! = 720 maneiras. Contudo, a pulseira pode entrar no braço de dois modos diferentes, assim, cada possível distribuição das pedras foi contada duas vezes. Logo, a resposta é $\frac{720}{2} = 360$.

c) Sem o fecho, a pulseira pode ser girada no braço. Assim, o número de formas de distribuir tais pedras é $(PC)_6 = 5! = 120$ maneiras.

d) Nesse caso, a pulseira pode ser colocada no braço de dois modos diferentes, contudo, não faz diferença ver a pulseira de "frente" ou de "trás". Assim, basta dividir o resultado anterior por 2. Logo, temos $\frac{120}{2} = 60$ maneiras.

4.2 Combinações Completas

Para iniciar essa seção, apresentaremos dois problemas motivadores que nos servirá para introduzir e definir uma combinação completa, também chamada de combinação com repetição. Acredita-se que o ensino de matemática baseado nesses moldes pode levar uma aprendizagem mais significativa. A priori resolveremos apenas o segundo problema, pois acreditamos que este é mais atrativo para os alunos, contudo, mostraremos que os dois problemas são equivalentes.

Problema 25: Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$?

Problema 26: Em uma aula de matemática com os alunos do terceiro ano, o professor Júlio César comentou que após o término da aula ele iria passar na lanchonete de Deca e comprar um sorvete para cada um de seus três filhos: Ana Júlia, Nicolas e Breno. Júlio sabe que a lanchonete oferece cinco tipos de sabores diferentes. Ele perguntou aos seus alunos de quantas maneiras poderia comprar os três sorvetes.

Solução: Uma resposta natural e incorreta para esse problema seria $C_5^3 = 20$.

Essa resposta seria a correta se a pergunta se referisse a compra de três sorvetes diferentes. Nesse ponto, vale ressaltar a importância da leitura e compreensão do problema. Só podemos elaborar e executar um plano quando estivermos certos e seguros que compreendemos o problema. Nesse problema em particular, poderia comprar os três sorvetes de chocolate ou um de chocolate e dois de morango. É importante considerar tais possibilidades, pois o problema permite. Como esse problema não pode ser resolvido com essa abordagem, vamos buscar outra. Uma dica para o professor é que comece com problemas que sejam possíveis de resolver listando todos os casos. Usaremos esse procedimento para resolver esse problema.

Vamos denotar os cinco sabores por: A, B, C, D, E, devemos escolher três desses saberes, sendo permitido a escolher um mesmo sabor mais de uma vez. É importante destacar que comprar um sorvete de chocolate e dois de morango é mesmo que comprar dois de morango e um de chocolate, logo temos:

{A,A,A}	{A,A,B}	{A,A,C}	{A,A,D}	{ A,A,E}
{B,B,B}	{B,B,A}	{B,B,C}	{B,B,D}	{ B,B,E}
{C,C,C}	{C,C,A}	{C,C,B}	{C,C,D}	{C,C,E}
{D,D,D}	{D,D,A}	{D,D,B}	{D,D,C}	{D,D,E}
{E,E,E}	{E,E,A}	{E,E,B}	{E,E,C}	{E,E,D}
{A,B,C}	{A,B,D}	{A,B,E}	{A,C,D}	{A,C,E}
{A,D,E}	{B,C,D}	{B,C,E}	{B,D,E}	{C,D,E}

Assim há 35 maneiras de escolher comprar três sorvetes entre cinco sabores distintos. O que acabamos de fazer foi uma combinação com repetição ou combinação completa e, representamos por CR_5^3. Dessa forma, CR_5^3 é número de modos de escolher 3 objetos entre 5 objetos distintos, podendo o mesmo objeto ser escolhido mais de uma vez.

É importante destacar que C_n^p é o número de maneiras de escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados, ou seja, o número de subconjuntos com p elementos de um conjunto com n elementos. Já CR_n^p é o número de modos de escolher p objetos distintos ou não entre n objetos distintos dados.

Vamos analisar novamente a compra de três sorvetes em uma lanchonete que oferece cinco sabores. Denotemos por $x_1, x_2, x_{3,} x_{4,} x_5$ a quantidade que podemos comprar de sorvetes dos sabores A, B, C, D e E, respectivamente. É claro que $x_1, x_2, x_{3,} x_{4,} x_5$ devem ser inteiros e não negativos. Logo, encontrar o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$ é equivalente a resolver o problema 26.

Dessa forma, CR_5^3 é o número de soluções inteiras e não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$$

Algumas soluções da equação acima são: (1,1,1,0,0), (0,2,0,0,1) e (3,0,0,0,0). Usaremos uma representação de esquema bola-barra para mostrar essas soluções (cada bola representa uma unidade no valor da incógnita e cada barra é usada para separar duas incógnitas, ou seja, funciona como o sinal “ + “).

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

3 0 0 0 0

●●● | | | |

1 1 1 0 0

● | ● | ● | |

0 2 0 0 1

| ● ● | | ● |

Observe que, para cada solução devemos arrumar em uma fila 3 bolas e 4 barras. Portanto, o problema consiste em determinar quantas são as filas formadas por sete elementos sendo 3 bolas iguais e 4 barras também iguais, isso pode ser feito usando o conceito de permutação com elementos repetidos, logo o número de maneiras de resolver tal problema é:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!6} = 35$$

No caso geral, para determinar CR_n^p, basta calcular o número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$, basta pensar que há p bolas e $n - 1$ barras, assim devemos formar filas com $n + p - 1$ objetos. Portanto,

$$CR_n^p = P_{n+p-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!} = C_{n+p-1}^p$$

Assim, o problema de combinação completa se resume a resolver um problema de permutação com repetição. É claro que há problemas mais complexos, contudo, com alguma prática podemos recorrer a um problema já resolvido. O próximo problema mostra isso.

Problema 27: Maria dispõe de balas de hortelã, de caramelo e de chocolate, e pretende montar um saquinho com 12 balas cada para seu sobrinho, de modo que, em cada saquinho tenha no mínimo uma bala de hortelã, duas balas de caramelo e três balas de chocolate. De quantas maneiras distintas Maria pode montar o saquinho?

Solução: Sejam $x_1, x_2 e\ x_3$ o número de balas de hortelã, caramelo e chocolate, respectivamente. Resolver esse problema é equivalente a encontrar o número de soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, com x_1, x_2, x_3 números inteiros tais que $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2\ e\ x_3 \geq 3$. Só sabemos resolver equações desse tipo quando nos é solicitado o número de soluções inteiras e não negativas, contudo, podemos fazer uma troca de variável e superar essa dificuldade. Assim, temos:

$$x_1 = y_1 + 1$$
$$x_2 = y_2 + 2$$
$$x_3 = y_3 + 3$$

Substituindo essas três equações em $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, temos:

$$y_1 + 1 + y_2 + 2 + y_3 + 3 = 12$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + 6 = 12$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 6$$

A equação $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ é equivalente a equação $y_1 + y_2 + y_3 = 6$ e as restrições $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3$ e inteiros transformam-se em $y_1, y_2, y_3 \geq 0$, também inteiros. O número de soluções inteiras e não negativas dessa segunda equação pode ser facilmente calculadas usando o mesmo recurso que no problema anterior. Logo, temos:

$$CR_3^6 = C_8^3 = \frac{8!}{3!\,5!} = 56$$

Portanto, há 56 maneiras de Maria montar o saquinho com 12 balas.

Problema 28: De quantas maneiras podemos comprar 10 picolés de uma loja que os oferece em 4 sabores, digamos morango, framboesa, uva e chocolate, sabendo que a loja possui em seu estoque apenas 5 picolés de morango. Assuma que a loja possui pelo menos 10 picolés de cada de cada um dos outros três sabores. (Problema retirado e adaptado do portal da matemática)

Solução: Sejam *m*,*f*,*u*,*c* respectivamente as quantidades de picolés de morango, framboesa, uva e chocolate. Logo, o número de modos de fazer essa compra será;

$$m + f + u + c = 10$$

Com a condição que $0 \leq m \leq 5$ e os valores de *f*,*u*,*c* são inteiros e não negativos. Inicialmente, vamos ignorar a condição $0 \leq m \leq 5$, com *m* inteiro e determinar o número de soluções da equação $m + f + u + c = 10$.

$$CR_4^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10!\,3!} = \frac{13.12.11.10!}{10!\,.6} = 286$$

Essa solução estaria correta se na loja possuísse em seu estoque pelo menos dez picolés de morango. Portanto, das 286 soluções encontradas devemos desconsiderar aquelas em que $m \geq 6$, pois foram contadas indevidamente. Como problema anterior, vamos fazer uma troca de variável. Tomando $m = M + 6$ e, substituindo na equação $m + f + u + c = 10$, temos:

$$M + 6 + f + u + c = 10$$
$$M + f + u + c = 4$$

Cujo número de soluções inteiras não negativas é

$$CR_4^4 = C_7^4 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!\,6} = 35$$

Assim, formam contadas indevidamente 35 soluções. Portanto, o número de maneiras de fazer a compra com a restrição do problema é igual a $286 - 35 = 251$.

4.3 Os Lemas de Kaplansky

Segundo Morgado et al (1991) os lemas de Kaplansky foram construídos em 1943 pelo matemático Irving Kaplansky para a resolução do Problema de Lucas. Vamos iniciar essa seção com o seguinte problema.

Problema 29: De quantos modos podemos formar um subconjunto com 3 elementos a partir do conjunto {1,2,3,4,5,6} de modo que não haja números consecutivos?

Solução: Vamos resolver esse problema listando todos os casos possíveis, assim o número de subconjuntos com três elementos sem números consecutivos são:

{ 1,3,5} { 1,3,6} {2,4,6} {1,4,6}

Esse problema tinha poucos casos, então foi fácil listá-los. Contudo, a maioria dos problemas não é viável enumerar todas as possibilidades. Para esse problema, poderíamos ter concluído que há quatro subconjuntos cumprindo a condição imposta, usando o seguinte argumento e nomenclatura. Para formar um subconjunto, marcamos com o sinal (+) os elementos que farão parte dele e com o sinal (-) os elementos que não farão parte do subconjunto. Logo,

{1,3,5} pode ser representado por $+ - + - + -$;

{1,3,6} pode ser representado por $+ - + - - +$;

{1,2,4} pode ser representado por $+ \ + - + - -$, não é válido, pois 1 e 2 são consecutivos;

{2,3,6} pode ser representado por $- + \ + - - +$, também não é válido, pois 2 e 3 são consecutivos.

Com esses casos podemos concluir que para formar um subconjunto com três elementos sem repeti-los devemos colocar os seis sinais, três sinais de (+) e três sinais de (-) em fila, de modo que dois sinais de (+) não fiquem juntos. Inicialmente colocamos os sinais de (-), isso pode ser feito de 1 modo, em seguida, colocamos os sinais (+) nos espaços entre os sinais de (-). Sabemos que em cada espaço só pode ser colocado no máximo um sinal de (+), como há quatro espaços e precisamos escolher três deles, isso pode ser feito de $C_4^3 = 4$ maneiras, a figura 14 ilustra essa situação. Portanto, pelo princípio multiplicativo, há $1xC_4^3 = 4$ maneiras. Esse resultado está de acordo com enumeração de todos os casos que fizemos anteriormente.

Figura 14 – Quatro espaços para colocar 3 sinais de "+"

$$\square - \square - \square - \square$$

Fonte : Elaborada pelo autor

Problema 30: As três provas de um vestibular devem ser realizadas na primeira semana do ano. De quantos modos é possível escolher os dias das provas de modo que não haja provas em dias consecutivos? (Problema retirado do livro: Análise Combinatória e Probabilidade)

Solução: Poderíamos pensar nos dias dessa semana que será realizado o vestibular como o conjunto { 1,2,3,4,5,6,7} e proceder como no caso anterior. Ou seja, devemos formar subconjuntos com 3 elementos, de modo que, não haja elementos consecutivos. Usaremos os sinais de (+) e (-) com a mesma denotação do caso anterior. Logo, temos:

{1,3,5} pode ser representado por $+ - + - + - -$;

{1,3,6} pode ser representado por $+ - + - - + -$;

{1,2,4} pode ser representado por $+ \ + - + - - -$, não é válido, pois 1 e 2 são consecutivos;

{2,3,6} pode ser representado por $- + \ + - - + -$, também não é válido, pois 2 e 3 são consecutivos.

Assim devemos dispor em fila 7 sinais, sendo três de (+) e quatro de (-), de modo que não haja dois sinais de (+) juntos. Podemos colocar os quatro sinais de (-) na fila (isso pode ser feito de 1 modo), feito isso, devemos colocar os três sinais de (+) nos cinco espaços vazios, isso pode ser feito de $C_5^3 = 10$ modos, conforme a figura 15. Portanto, pelo princípio multiplicativo há $1xC_5^3 = 10$ maneiras de escolher os dias das provas.

Figura 15 - Cinco espaços para colocar 3 sinais de "+"

$$\square - \square - \square - \square - \square$$

Fonte: Elaborada pelo autor

Uma pergunta natural seria saber: De quantos modos é possível formar um subconjunto com p elementos de $\{1,2,3,...,n\}$ no qual não haja números consecutivos?

Para o caso geral, temos p sinais de (+) e $n - p$ sinais de (-), vamos dispor os n em fila, há um modo de dispor os sinais de (-) e, feito isso, entre os $n - p + 1$ espaços devemos dispor os p sinais de (+), isso pode ser feito de C_{n-p+1}^{p} modos. Na literatura, isto é conhecido como:

Primeiro Lema de Kaplansky: O número de p subconjuntos de $\{1,2,3,...,n\}$ nos quais não há números consecutivos é

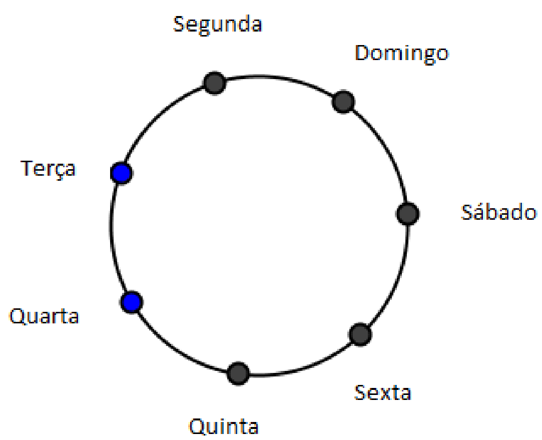
$$f(n,p) = C_{n-p+1}^{p}$$

É importante destacar que mais importante do que a fórmula é o raciocínio construído para se chegar a ela, esse procedimento pode ser usado em qualquer problema desse tipo. Um exercício que o professor poderia propor seria resolver o problema anterior usando a fórmula.

Problema 31: Hugo deve ter aula de tênis três vezes por semana durante um semestre. Quantos são os modos de escolher os dias de aula, se Hugo não deseja ter aulas em dias consecutivos? (Problema retirado do livro: Análise Combinatória e Probabilidade)

Solução: Esse problema tem uma sutileza em relação ao último. No caso, da realização das provas do vestibular tínhamos apenas uma semana, contudo, agora há um ciclo, como podemos ver na ilustração abaixo:

Figura 16 - Dias da semana dispostos em um círculo



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, Hugo deve escolher 3 dias entre: domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado, de modo que não haja dois dias consecutivos. Observe que domingo e sábado são dias consecutivos, então não podemos usar diretamente o primeiro lema de Kaplansky. Contudo, poderíamos dividir o problema em dois casos:

I - Hugo vai a academia no domingo. Nesse caso, ele não pode ir na segunda e no sábado. Dessa forma, bastaria escolher dois dias entre: terça, quarta, quinta e sexta; de tal forma que não haja dois dias consecutivos. Isso pode ser feito, usando o primeiro lema. Logo, temos:

$$f(4,2) = C_3^2 = 3$$

II- Hugo não vai à academia no domingo. Nesse caso, temos que escolher três dias entre: Segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado; de modo que, não haja dias consecutivos. Podemos usar o primeiro lema. Logo,

$$f(6,3) = C_4^3 = 4$$

Portanto, pelo princípio aditivo há 3 + 4 = 7 maneiras de fazer isso.

Problema 32: (IME) Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Solução: Esse problema é correlato ao anterior. Ou seja, devemos escolher cinco entre os doze cavaleiros sentados em torno da mesa de forma que não haja dois consecutivos. Para isso, vamos supor que Belchior seja um dos doze cavaleiros. Então, podemos dividir o problema em dois casos, ou seja, Belchior faz parte do grupo que vai salvar a princesa ou Belchior não faz parte do grupo.

I – Se Belchior faz parte do grupo. Nesse caso, devemos escolher 4 cavaleiros entre os 9 (os que estão ao lado de Bechior são considerados rivais), de modo que não tenha dois consecutivos, isso pode ser feito usando o primeiro lema. Logo, temos:

$$f(9,4) = C_6^4 = 15$$

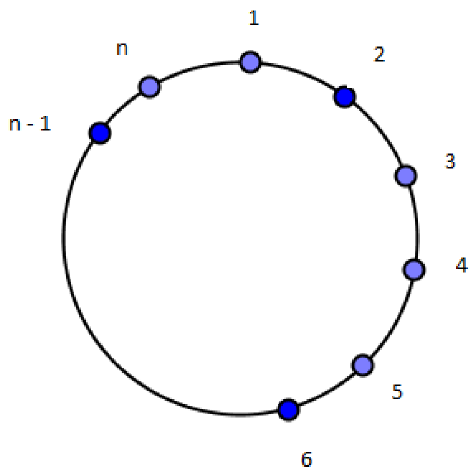
II – Belchior não faz parte do grupo. Nesse caso, devemos escolher entre 5 cavaleiros entre os 11, de modo que não tenha rivais. Novamente, podemos usar o primeiro lema de Kaplansky. Assim, temos:

$$f(\,11{,}5) = C_7^5 = 21$$

Portanto, pelo princípio aditivo há 15 + 21 = 36 possibilidades.

Para o caso geral, devemos imaginar que os elementos $\{1{,}2{,}3{,}...{,}n\}$ estejam arrumados sobre um círculo e queremos saber de quantas maneiras é possível formar um subconjunto com *p* elementos de modo que não haja dois consecutivos. A figura abaixo ilustra essa situação.

Figura 17 - Disposição de n números naturais consecutivos em torno de um círculo



Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que os números 1 e *n* são consecutivos. Para resolver esse caso geral, vamos usar o mesmo raciocínio que nos dois problemas anteriores. Ou seja, o número total de subconjuntos com *p* elementos será a soma do número de subconjuntos nos quais o 1 aparece e o número de subconjuntos nos quais o 1 não aparece. Logo, temos:

I – Os subconjuntos nos quais o 1 aparece. Para determiná-los devemos escolher *p – 1* elementos em {3,4,5,..., n – 1}(como podemos observar na figura acima, 2 e *n* são adjacentes ao número 1), tal que não haja elementos consecutivos. Pelo primeiro lema de Kaplansky, isso pode ser feito de:

$$f(\,n-3, p-1) = C_{n-3-(p-1)+1}^{p-1} = C_{n-p-1}^{p-1}$$

II – Os subconjuntos nos quais o 1 não aparece. Para formá-los devemos escolher p elementos em $\{2,3,4,...,n\}$, sem que haja elementos consecutivos. Usando o primeiro lema, temos:

$$f(n-1,p) = C^{p}_{n-1-p+1} = C^{p}_{n-p}$$

Portanto, o número maneiras de fazer isto é:

$$\begin{aligned}
C^{p-1}_{n-p-1} + C^{p}_{n-p} &= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!\,(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!} \\
&= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!\,(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p(p-1)!\,(n-2p)!} \\
&= \frac{p(n-p-1)! + (n-p)!}{p(p-1)!\,(n-2p)!} \\
&= \frac{p(n-p-1)! + (n-p)(n-p-1)!}{p(p-1)!\,(n-2p)!} \\
&= \frac{(n-p-1)!\,(p+n-p)}{p!\,(n-2p)!} \\
&= \frac{n(n-p-1)!}{p!\,(n-2p)!} \\
&= \frac{n(n-p)!}{n-p} . \frac{1}{p!\,(n-2p)!} \\
&= \frac{n}{n-p} . \frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!} \\
&= \frac{n}{n-p}\; C^{p}_{n-p}
\end{aligned}$$

Acabamos de mostrar o

Segundo Lema de Kaplansky: O número de subconjuntos com p elementos de { 1,2,3,..., n} dispostos em um círculo nos quais não há dois números consecutivos, onde 1 e n são considerados consecutivos, é dado por:

$$g(n,p) = \frac{n}{n-p} C^{p}_{n-p}$$

Novamente, chamamos atenção que o mais importante do que a fórmula é o raciciocínio que foi feito para se chegar a ela. Se o estudante compreender as ideias, então não tem a necessidade de memorizar a fórmula.

4.4 O Princípio das Gavetas

A Análise Combinatória além da contagem de elementos de um conjunto, trata da existência ou não de certas configurações. Ou seja, estamos interessados em saber se um conjunto tem ou não certas propriedades. Até o momento, só trabalhamos com problemas do primeiro tipo, isto é, contagem de elementos de um conjunto. Nessa seção vamos apresentar uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas de existência, conhecida como *princípio das casas dos pombos* ou *princípio das gavetas,* ou ainda, *princípio de Dirichlet.* No segundo capítulo já o mensionamos, agora, no entanto, vamos apresentar suas aplicações não só em análise combinatória, mas em outras áreas como: Geometria e Teoria dos Números. É provável que os estudantes tenham alguma dificuldade no início, contudo, Morgado et al(1991) afirmam que o princípio das gavetas é tão simples quanto o estudo de permutações e combinações. Vamos apresentar um problema que ilustre esse princípio.

Problema 33: (PUC – RIO) Qual é o menor número de pessoas em um grupo para garantir que, pelo menos 4 pessoas nasceram no mesmo mês?

Solução: Antes de resolver esse problema, vamos tomar uma versão mais simples dele. Vamos supor que, queremos saber o número mínimo de pessoas para que, pelo menos 2 aniversariam no mesmo mês, observe a figura 18 uma possível configuração.

Figura 18 - Doze pessoas não é suficiente para garantir que pelo menos duas aniversariam no mesmo mês

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos observar que com 12 pessoas não podemos garantir que há pelo menos duas que nasceram no mesmo mês. Contudo, se aparecer outra, podemos garantir isto. A figura 19 ilustra essa situação.

Figura 19 - Treze pessoas é suficiente para garantir que pelo menos duas aniversariam no mesmo mês

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
●●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

Fonte: Elaborada pelo autor

Logo, são necessárias pelo menos 13 pessoas para garantir que pelo menos duas nasceram no mesmo mês. Agora, faremos o mesmo para pelo menos três pessoas. Observe na figura 20, que mostra que 24 pessoas não é suficiente para garantir.

Figura 20 - Vinte e quatro pessoas não é suficiente para garantir que pelo menos três aniversariam no mesmo mês

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
●●	● ●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●

Fonte: Elaborada pelo autor

Com mais uma pessoa, podemos garantir. Portanto, são necessárias 25 pessoas. Como podemos ver na figura 21.

Figura 21 - Vinte e cinco pessoas é suficiente para garantir que pelo menos três aniversariam no mesmo mês

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
●●●	● ●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●	●●

Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, já podemos atacar o problema original. A figura 22 mostra que com apenas 36 pessoas não é possível garantir que pelo menos 4 nasceram no mesmo mês.

Figura 22 - Trinta e seis pessoas não é suficiente para garantir que pelo menos quatro aniversariam no mesmo mês

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●

Fonte : Elaborada pelo autor

Com mais uma pessoa, podemos garantir. Logo, precisamos de 37 pessoas para garantir que pelo menos 4 aniversariam no mesmo mês.

Figura 23 - Trinta e sete pessoas é suficiente para garantir que pelo menos quatro aniversariam no mesmo mês

J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
●●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●	●●●

Fonte: Elaborada pelo autor

Após esse problema, podemos enunciar o princípio das gavetas, que embora simples é uma ferramenta poderosa na resolução muitos problemas.

Princípio das gavetas de Direchlet: Se $n+1$ objetos forem colocados em no máximo n gavetas, então pelo menos uma delas terá pelo menos dois objetos.

Demonstração: Apesar de óbvio, podemos demonstrar. Para isso, usaremos a demonstração por absurdo. Suponha que em cada gaveta tenha no máximo, um objeto, assim o número total de objetos seria, no máximo, n, o que é uma contradição.

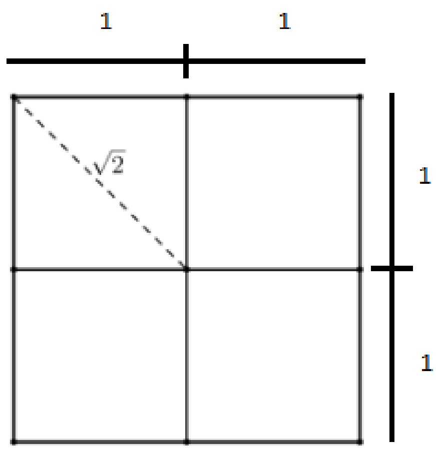
Problema 34: Numa floresta há 1000 jaqueiras. É conhecido que uma jaqueira não tem mais do que 600 frutos. Prove que existem 2 jaqueiras que têm a mesma quantidade de frutos.(Problema retirado do livro: Iniciação à matemática: um curso com problemas e soluções)

Solução: Vamos tomar as 1000 jaqueiras como os objetos e 601 gavetas representadas pela quantidade de frutos produzidas por cada jaqueira. Assim, identificamos essas gavetas pelos números 0,1,2,...,600. Isso significa que devemos colocar em cada cada gaveta a(s) jaqueira(s) que produz(em) exatamente o número de frutos representado pelo número da gaveta. Por exemplo, na gaveta de número 0, serão colocadas todas as jaqueiras que não produz frutos, de número 1, que produz um fruto e, assim com todas as outras. Como há mais objetos que gavetas$(1000 > 602 = 601 + 1)$, então pelo princípio das gavetas, há pelo menos uma com pelo menos dois objetos. Ou seja, isso nos garante que existem pelo menos duas jaqueiras com o mesmo número de frutos.

Problema 35: Escolhem-se 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2. Mostre que pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual $\sqrt{2}$.(Problema retirado do livro: Análise Combinatória e Probabilidade)

Solução: Na prática, não é muito difícil identificar quando devemos usar o princípio das gavetas, o problema consiste em determinar quem são os objetos e/ou as gavetas. Nesse problema, em particular, os pontos são os objetos. Para determinar as gavetas, basta dividir o quadrado de lado 2 em quatro quadrados de lado 1, conforme a figura 24. Dos 5 pontos, pelo menos dois estão no mesmo quadrado de lado 1. Assim, a distância entre esses dois pontos será no máximo $\sqrt{2}$, como queríamos demonstrar.

Figura 24 - Quadrado de lado 2 dividido em quatro quadrados de lado 1



Fonte: Elaborada pelo o autor

Há uma versão mais geral para o Princípio das gavetas que é muito útil para a resolução de alguns problemas.

Se colocarmos $nk + 1$ objetos em n gavetas, então pelo menos uma dessas gavetas terá pelo menos $k + 1$ objetos.

Demonstração: Novamente, faremos uma demonstração por absurdo. Suponhamos que em cada gaveta tenha, no máximo, k objetos, então teríamos, no máximo nk objetos, contrariando a hipótese.

Problema 36: Num colégio com 16 salas são distribuídas canetas nas cores preta, azul e vermelha para realizar uma prova de concurso. Se cada sala recebe canetas da mesma cor então prove que existem pelo menos 6 salas que receberam canetas da mesma cor. (Problema retirado do livro: Iniciação à matemática: um curso com soluções e problemas)

Solução: Vamos considerar as 16 salas como objetos e as cores: preta, vermelha e azul como gavetas. Podemos escrever: $16 = 3.5 + 1$. Assim, temos que $n = 3\ e\ k = 5$, logo pelo princípio das gavetas, existe pelo menos uma gaveta com pelo menos 6 objetos, ou seja, existem no mínimo seis salas que recebem canetas da mesma cor.

Problema 37: Se uma urna contém 4 bolas vermelhas, 7 bolas verdes, 9 bolas azuis e 6 bolas amarelas, qual é o menor número de bolas que devemos retirar (sem olhar) para que possamos ter a certeza de termos tirado pelo menos 3 de uma mesma cor?(Problema retirado o livro: Introdução à análise combinatória)

Solução: Vamos considerar como gavetas as 4 cores diferentes e as bolas como sendo os objetos. Então, pela notação do teorema anterior, temos $n = 4$ e $k = 2$, temos $4 \,.\, 2 + 1 = 9$, que é o número mínimo de bolas que devem ser tiradas.

Há outra forma alternativa muito útil para apresentar o princípio das gavetas de Dirichlet. Mas, antes vamos relembrar o conceito de média aritmética.

A média aritmética dos reais $a_1, a_2, a_3, \ \ldots, a_n$ é dada por

$$\bar{x} = \frac{a_1 \ + \ a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

Dados os n números naturais $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ e seja $\bar{x}$ sua média aritmética, então existe pelo menos um deles que é maior do que ou igual a sua média, assim como existe pelo menos um deles que é menor do que ou igual a média.

Demonstração: Vamos mostrar a primeira parte. Para isso, vamos supor, o contrário, ou seja, que todos são menores do que a média. Logo, temos:

$$a_1 < \bar{x}$$

$$a_2 < \bar{x}$$

$$a_3 < \bar{x}$$

$$\ldots$$

$$a_n < \bar{x}$$

Somando membro a membro as desigualdades acima, temos:

$$a_1 \ + \ a_2 + a_3 + \cdots + a_n < n\bar{x}$$

Dividindo toda inequação por n, temos:

$$\frac{a_1 \ + \ a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} < \bar{x}$$

O que é um absurdo.

Assim fica demonstrado que entre os números há pelo menos um deles que é maior do que ou igual a média.

O segundo caso é totalmente análogo, vamos supor,

$$a_1 > \bar{x}$$
$$a_2 > \bar{x}$$
$$a_3 > \bar{x}$$
$$\ldots$$
$$a_n > \bar{x}$$

Somando membro a membro as desigualdades acima, temos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n > n\bar{x}$$

Dividindo toda inequação por n, temos:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} > \bar{x}$$

O que é um absurdo, pois não podemos ter $\bar{x} > \bar{x}$. . Com isso, concluímos a demonstração.

Problema 38: Suponhamos que os números de 1 até 15 sejam distribuídos de modo aleatório em torno de um círculo. Mostrar que a soma dos elementos de pelo menos um conjunto de 5 elementos consecutivos tem que ser maior ou igual a 40. (Problema retirado do livro: Introdução à análise combinatória).

Solução: Inicialmente, devemos observar que há 15 possíveis conjuntos com 5 números consecutivos ao redor do círculo. Cada um dos números de 1 a 15 terá sido somado exatamente 5 vezes. Portanto, a soma dos elementos de todos os possíveis 15 resultados de 5 números escritos de forma consecutiva em torno do círculo é igual a

$$5(1 + 2 + 3 + \cdots + 15) = 600\,.$$

Como a média aritmética dessas 15 somas é igual a $\bar{x} = \frac{600}{15} = 40$. Logo, pela preposição anterior, pelo menos uma dessas 15 somas é maior ou igual a 40.

Problema 39: Numa família formada por 5 pessoas a soma das idades é de 245 anos. Prove que podem ser selecionados 3 membros da família cuja soma das idades não é menor 147. (Problema retirado do livro: Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções)

Solução: Entre essas 5 pessoas podemos escolher 3 de $C_5^3 = 10$ maneiras. Ou seja, há 10 possíveis trios. Assim, como no problema anterior vamos determinar quantas vezes cada pessoa aparece em cada trio. Digamos de José faça parte do trio, então devemos escollher 2 pessoas entre as 4, isso pode ser feito de $C_4^2 = 6$. Assim, cada pessoa participa de 6 trios. A soma das idades dos membros de cada trio é igual a $6.245 = 1470$. A média de idade por trio é igual a $\bar{x} = \frac{1470}{10} = 147$. Assim pelo menos um trio tem a soma das idades maior do que ou igual a 147.

Para encerrar essa seção, apresentaremos um problema bem interessante de teoria dos números que pode ser resolvido usando o princípio das gavetas de Dirichlet.

Problema 40: Dado um número inteiro positivo n, mostre que existe um múltiplo de n que se escreve com os algarismos 0 e 1 apenas. (Problema retirado do livro: Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções)

Solução: Inicialmente devemos entender o isso significa, para isso, vamos tomar alguns casos particulares:

Para $n = 2$, temos 110, 1010 e 10010 são múltiplos de 2;

Para $n = 3$, temos 111, 1011 e 11100 são múltiplos de 3;

Para $n = 4$, temos 100, 1100 e 10100 são múltiplos de 4.

Agora considere os $n + 1$ números

$$1,\ 11, 111, 1111, 11111, \dots, \underbrace{111 \dots 1}_{n+1\ vezes}$$

como sendo os objetos e n gavetas enumeradas com os números

$$0, 1, 2, 3,4, \dots, n - 1,$$

ou seja, com os possíveis restos da divisão por n. Assim, existem pelo menos dois números da lista $1,\ 11, 111, 1111, 11111, \dots, \underbrace{111 \dots 1}_{n+1\ vezes}$ que deixam mesmo resto na divisão por n e, portanto, a diferença entre eles é múltiplo de n. É óbvio que a diferença entre dois números da lista anterior resulta em um número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Isso finaliza a demonstração.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando apresentamos uma proposta de ensino em análise combinatória através da resolução de problemas tínhamos o objetivo de construir os conceitos e definições a partir de um problema motivador. Mostramos que é possível edificar os conceitos matemáticos, em particular, os de análise combinatória, tendo como ponto de partida o problema. Para que isso fosse possível, buscamos problemas interessantes que não fossem impossíveis de serem resolvidos, ou seja, com um pouco de raciocínio e criatividade encontram-se as soluções.

Defendemos que a aprendizagem de análise combinatória não se dá de forma mecânica, com o uso abusivo de fórmulas e com exercícios automáticos e padronizados. Mostramos que é possível construir uma sequência didática na qual o problema é o estopim do pensamento combinatório e a aprendizagem se torna mais significativa. Com esse trabalho, pretendemos apresentar ao professor uma nova forma de abordagem da análise combinatória fortemente embasada na resolução de problemas, habituar e preparar o aluno para análise cuidadosa de cada problema de combinatória.

Para concretizar essa aprendizagem buscamos inicialmente solidificar os dois princípios básicos: o aditivo e o multiplicativo. Usamos a estratégia na resolução dos primeiros problemas de enumeração e contagem de todas as possibilidades. Dessa forma, o aluno pode gradativamente desenvolver o raciocínio combinatório. A contagem direta, o uso da árvore das possibilidades e a listagem de casos particulares são estratégias usadas ao longo do trabalho que possibilitam a apresentação e compreensão dos conceitos. Ao iniciar cada seção com uma situação problema, procuramos apresentar um método que seja capaz de resolver muitos problemas. Com isso, mostramos que é possível desenvolver o ensino de análise combinatória sem partir da fórmula. Esta é apenas consequência do método apresentado e/ou princípios básicos já usados em seções anteriores.

É evidente que todas essas atividades só podem ser desenvolvidas se o professor compactuar e compreender a importância da resolução de problemas no processo de ensino e aprendizagem. A busca de uma nova metodologia de ensino passa por uma reflexão e formação continuada dos professores, que têm a difícil e árdua tarefa de romper com esse método de ensino ainda arcaico.

Esperamos que a abordagem que tem como ponto de partida uma situação problema para apresentação dos conceitos de combinatória seja usada por professores e alunos como uma ferramenta capaz de estimular e consolidar o ensino e aprendizagem. O ensino que tem como foco a resolução de problemas torna o aluno um ser ativo, que é capaz de elaborar estratégias para a consolidação do conhecimento. Dessa forma, a resolução de problemas desenvolve a autonomia, criatividade e o raciocínio, contudo, essas habilidades só são desenvolvidas em longo prazo, por isso, defende-se que o ensino através da resolução de problemas deve ser adotado desde os primeiros anos escolares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. **Matemática:** Ensino médio. Vol 2. São Paulo: Moderna, 2004.

BRANCA, N.A. Resolução de Problemas Como Meta, Processo e Habilidade Básica. In: KRULIK, S.; REYS.R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p. 4 – 11.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação e Tecnologia, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **PCN + ensino médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Brasilia, 2010.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais-**Matemática. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental-SEF, 1997.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F.Gomide – 2. ed. São Paulo-SP: Blücher, 1996.

BUTTS, T. Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS.R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p.32 – 48.

DANTE, Luiz R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 12. ed. São Paulo-SP: Ática, 2007.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas-SP: Editora: Unicamp, 2004.

FOMIN, D.; GEENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos:** a experiência russa: Tradução: Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro : IMPA, 2012.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações.** 4.ed. São Paulo: Atual, 2006.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** Vol 2. 6. ed. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2006.

MORGADO, A.C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

OLIVEIRA, K.I.M.; FERNÁNDEZ, A.J.C. **Iniciação à Matemática:** um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

POLYA, G. **A arte de Resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático: Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POLYA, G. Sobre a Resolução de Problemas de Matemática na *high school*. In: KRULIK, S.; REYS. R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997. p.1 – 3.

SANTOS, J.P.O.; MELLO. M.P.; MURANI, I.T.C. **Introdução à Análise Combinatória.** 3. ed. Campinas-SP: Unicamp, 2002.

SANTOS, P.F. **Uma abordagem da Análise Combinatória sem o uso abusivo de fórmulas.** Viçosa. 2013. 55 f. Dissertação(mestrado), Universidade Federal de Viçosa. Viçosa-MG. 2013.

SOUZA, A.C.P. **Análise Combinatória no Ensino Médio Apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem- Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas.** Rio Claro. 2010. 343f. Dissertação (mestrado), Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro- SP. 2010.

SOUZA, J.R. **Novo olhar:** matemática: vol 1. 2.ed. São Paulo: FTD, 2013.

TAVARES, C.S.; BRITO, F.R.M. Contando a História da Contagem. **Revista do Professor de Matemática,** SBM V-57, 2005.

VAZQUEZ, C.M.R. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Meio de Atividades em uma Escola Estadual do Interior Paulista.** São Carlos: UFSCar, 2011. 88f. Dissertação (mestrado), Universidade Federal de São Carlos, 2011.