LEONARDO FÁBIO MARTINS DE SOUZA

PRODUTOS NOTÁVEIS E O JOGO GENERAL
Uma Abordagem Lúdica de Conceitos de Probabilidade

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2016

LEONARDO FÁBIO MARTINS DE SOUZA

PRODUTOS NOTÁVEIS E O JOGO GENERAL
Uma Abordagem Lúdica de Conceitos de Probabilidade

Dissertação submetida por LEONARDO FÁBIO MARTINS DE SOUZA como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Dr. MARIO ROCHA RETAMOSO

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2016

Universidade Federal do Rio Grande
http://www.furg.br

Instituto de Matemática, Estatística e Física
http://www.imef.furg.br

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
http://www.profmat-sbm.org.br

Sociedade Brasileira de Matemática
http://www.sbm.org.br

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
http://www.capes.gov.br

Ficha catalográfica

S729p Souza, Leonardo Fábio Martins de.
Produtos notáveis e o jogo general: uma abordagem lúdica de conceitos de probabilidade / Leonardo Fábio Martins de Souza. – 2016.
62 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação em Matemática, Rio Grande/RS, 2016.
Orientador: Dr. Mario Rocha Retamoso.

1. Probabilidade 2. Jogo 3. Expansões algébricas 4. Ensino de matemática I. Retamoso, Mario Rocha II. Título.

CDU 519.2:37

Catalogação na Fonte: Bibliotecário Me. João Paulo Borges da Silveira CRB 10/2130

LEONARDO FÁBIO MARTINS DE SOUZA

PRODUTOS NOTÁVEIS E O JOGO GENERAL
Uma Abordagem Lúdica de Conceitos de Probabilidade

Dissertação submetida por LEONARDO FÁBIO MARTINS DE SOUZA como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto ao Instituto de Matemática, Estatística e Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Trabalho aprovado. Rio Grande, 11 de Julho de 2016:

Dr. MARIO ROCHA RETAMOSO
(Orientador - FURG)

Drª ANDREA MORGADO
(Avaliadora - UFPel)

Drª CINTHYA S. MENEGHETTI
(Avaliadora - FURG)

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Julho, 2016

Este trabalho é dedicado aos meus pais Lena e Ademir, que me incentivaram a estudar e sempre acreditaram em mim. E principalmente dedico esta conquista aos meus amados filhos Ingrid, Leonardo, Paulo Ricardo, Fábio, Náthaly e Flávia, que são a grande razão de meu viver. Tenho certeza que, sem vocês, nada disso seria possível.

Agradecimentos

Ao meu professor orientador, Dr. Mario Rocha Retamoso, pela confiança de me aceitar como seu orientando, pelas dicas, orientação, apoio, sugestão do tema do trabalho e especialmente pelas palavras de incentivo no decorrer do mesmo. Espero contar sempre com sua amizade.

A todos os colegas das turmas de 2011 e 2014, em especial, a André Nunes Ferreira (2011) e aos amigos Paulo Marcus Hollweg Correa, Jader Soares e Luciano Torma (2014), o meu muito obrigado pelos momentos de estudos e descontração e principalmente por poder chamá-los de amigos.

A todos os professores do curso, que direta e indiretamente contribuíram para o meu crescimento, em especial aos professores Dr. Leandro Bellicanta e a Dra. Cinthya Meneghetti.

A todos os meus colegas de trabalho que estiveram comigo durante este período, especialmente a equipe gestora da E.E.E.F. 13 de Maio de 2014: Edite de La Rocha Romeu, Raquel Hentsch, Denize Amaral, Kelen França e Keli de Marco Pereira, bem como de todos colegas: sem a ajuda de vocês, minha conclusão de curso não seria possível.

Ao meu colega de turma e amigo, Alessandro Saadi, por toda a ajuda prestada durante minha caminhada.

Aos meus queridos alunos da E.M.E.F. Cidade do Rio Grande - CAIC, pelo empenho e pelo interesse demonstrados no decorrer das atividades.

À SBM, juntamente com a FURG, pela iniciativa da criação do PROFMAT – que possibilitou a pessoas como eu, afastadas dos bancos escolares já há algum tempo, a oportunidade de uma formação em nível de mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro e por acreditar na educação básica brasileira.

Um agradecimento especial à Léa Cristina Campelo Costa, que foi a grande incentivadora desta conquista, desde o momento da inscrição até o término do trabalho.

A todos os membros de minha família que, de uma maneira ou outra, contribuíram para a conclusão desta jornada.

"Aquilo que não me mata,
me fortalece. "
(Friedrich Nietzche)

Resumo

Esse trabalho busca introduzir nas séries finais do Ensino Fundamental, uma proposta diferenciada de ensino, segundo a qual são desenvolvidos alguns conceitos básicos de probabilidade. Para isso, são realizadas atividades envolvendo um jogo de dados popularmente conhecido como *General*. No decorrer do trabalho, os estudantes são naturalmente conduzidos às expansões algébricas do que é costumeiramente designado por: "Produtos Notáveis". Dessa maneira, são levados a compreender o desenvolvimento de expressões algébricas como resultado da construção de espaços amostrais de determinados eventos que são parte das regras do jogo sob análise. Essa abordagem inusitada de um tópico considerado bastante difícil dentro da matemática básica contempla: a beleza natural da presença da matemática num jogo muito divertido; uma abordagem ao desenvolvimento de produtos notáveis diferente da tradicional associação com áreas; resgata o aspecto lúdico da matemática, num assunto que normalmente é carregado de dificuldades para os estudantes. Além disso foram estabelecidas conexões com a Geometria Espacial na construção de tetraedros regulares que desempenharam o papel de dados numa simulação de jogo mais adequado à construção de conhecimentos para o estudo do jogo mais complexo: o *General*.

Palavras-chaves: Probabilidade, Jogo, Expansões algébricas.

Abstract

This work provides a different proposal for teaching some basic probability concepts to students attending the final years of the Elementary School. Activities envolving a dice game called General are performed. During the classes, the students work naturally with binomial expansions. This way, they are led to the understanding of algebraic expressions expansions as a result of the construction of determined events' sampling-spaces, which are part of the game rules. This unusual approach for a very difficult topic, inside basic mathematics, contemplates: the natural beauty of mathematics'; presence in a very fun game; an approach to binomial expansions which is different from the traditional association with areas; it brings the mathematics ludic aspect in a subject considered difficult by the students. Besides that, connections to Spatial Geometry are established under the form of regular tetrahedrons that played the role of dice in a game simulation which is more appropriate to the knowledge construction for studying a more-complex game: the *General*.

Key-words: Probability , Game, Algebraic expansions.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

Os homens convivem diariamente com saberes matemáticos. Em muitos momentos da vida foi e será preciso: contar dinheiro, objetos, bem como medir distâncias, áreas e volumes. Isso exige o conhecimento dos números, das operações realizadas com os mesmos e suas propriedades. Como nos mostra a história, a matemática surgiu e se desenvolveu em função das necessidades dos povos de realizarem as atividades acima descritas, bem como outras, pois a matemática está presente em várias áreas do conhecimento humano tais como: a história, as artes, as ciências, etc.

Atualmente, a matemática como disciplina básica para a formação do indivíduo, é vista na escola com olhos pouco amistosos pelos alunos, sendo classificada como chata, difícil, monótona e desinteressante ou sem atrativos e revela-se, em alguns casos, um verdadeiro trauma para os estudantes. Essa descaracterização da matemática se dá devido a diversos fatores, mas após vinte anos lecionando matemática no ensino básico, percebe-se que o desinteresse pelo ensino é geral. A escola mudou de função e hoje em dia o professor, além de desempenhar o seu papel que, diga-se de passagem já é árduo devido ao desinteresse dos alunos, acaba assumindo outros papéis. Hoje o professor é um pouco pai, um pouco mãe, psicólogo(a), assistente social, entre tantas outras funções que assume para melhor lidar com as dificuldades de aprendizagem de seus estudantes, na busca de um melhor fazer pedagógico.

É verdade que alguns conceitos matemáticos podem exigir raciocínios um pouco mais elaborados, mas a maioria dos conteúdos trabalhados no ensino fundamental, têm aplicação no cotidiano dos estudantes. De modo geral, isso é deixado de lado e a matemática que é imprescindível para o pleno desenvolvimento das potencialidades do estudante na vida em sociedade, agora resume-se mais a mecanizações de procedimentos algorítmicos do que à compreensão dos processos envolvidos na solução de problemas - pois o modo como os conteúdos são trabalhados em sala de aula não enfatizam sua aplicação para os maiores interessados.

É nesse sentido que deve ser enfatizada - mesmo com toda a tecnologia existente na atualidade - a importância do professor, pois cabe ao mesmo, diversificar a sua prática pedagógica, procurando desenvolver uma metodologia que contribua para modificar o contexto educacional vigente. Claro que é preciso considerar outras variáveis pertinentes como: contexto social, objetivos da escola, objetivos do educando, participação da família, mediação da coordenação escolar. O famoso questionamento *"educar para quê?"*, se justifica mais do que nunca. O professor deve ser aquele indivíduo que busca constantemente novas técnicas, abordagens e metodologias, enfim: que se atualiza diante das transformações do mundo. Pode-se defini-lo, possuindo essas características, como um agente versátil e transformador.

Clarificada a importância do professor, resta a busca de novas alternativas de desenvolver o ensino de matemática de forma a torná-lo menos problemático para o educando e, consequentemente, para o educador. Em função disso, faz-se necessário um outro olhar na forma de ministrar o conhecimento matemático, fazendo com que se torne mais significativo para o aluno. É nessa ênfase que, sempre que possível, é fundamental utilizar-se de metodologias diferenciadas e inovadoras, preferencialmente que estimule o aprendizado, pois dessa forma o educando apresenta mais interesse, participando com mais afinco de sua formação.

Uma das formas que podemos abordar o conhecimento matemático, é por meio de jogos, pois todo educando ao brincar, jogar, torna-se sujeito da aprendizagem. Consequentemente esse educando encara os desafios propostos com muito mais interesse, participa com muito mais afinco e apresenta bem menos resistência no aprendizado de novos conhecimentos. Nessa perspectiva (VOLPATO, 2002) coloca que: "O jogo deve ser visto como possibilidade de ser mediador de aprendizagens e propulsor de desenvolvimento no ensino formal."

A utilização de jogos em sala de aula, torna-se uma ferramenta muito útil no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, pois além de estimulá-los, desperta nos mesmos, uma concepção diferente de aprendizado matemático, quebrando o mito de que aprender matemática deve ser necessariamente chato e metódico, quando na verdade é desafiador e instigante.

Além disso, desenvolver o ensino com jogos, permite muitas vezes encontrar alternativas para conseguir atender alunos com algum tipo de dificuldade na aprendizagem, saindo do concreto ao abstrato e, conforme a proposta de ensino, promover uma maior integração entre todos os educandos (GOLBERT, 2009):

> Com o objetivo de favorecer o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e visando facilitar a passagem de ações físicas para ações interiorizadas, uma série de jogos vêm sendo criados e aplicados com crianças que apresentam dificuldades na aprendizagem matemática, bem como vêm sendo utilizados em escolas para desenvolver atividades interativas e cooperativas.

Por meio dessas situações decorrentes do uso de jogos, os educandos criam estratégias para elaborar resoluções, aguçando sua curiosidade e estimulando sua criatividade, desenvolvendo sua autonomia como sujeitos pensadores. Indiferente à veracidade de suas resoluções, o importante é pensar, contribuir com o processo educativo de forma efetiva, indo muito além do certo ou errado e de soluções pragmáticas. Nessa linha de argumentação (CARVALHO, 2011):

> Os alunos só aprendem a pensar por si próprios se tiverem oportunidade de explicar os seus raciocínios em sala de aula ao professor e aos seus colegas.

Atualmente, lecionar tem se tornado um enorme desafio. Cotidianamente é comum a afirmação, por professores, de que está cada vez mais difícil trabalhar qualquer tipo de assunto com os alunos. E também é comum professores compartilharem o sentimento horrível de desilusão e impotência diante dos quadros em que mergulha a educação brasileira. Quase sempre, atribui-se a culpa por essa situação de insucesso escolar aos alunos, por seu imenso desinteresse por aprender. Neste sentido, os objetivos desse trabalho vêm em contraponto a essa realidade, uma vez que tentam desenvolver uma atividade pedagógica alternativa que motive os estudantes e até os mobilize de modo a participarem ativamente da programação - uma vez que precisam trabalhar em equipes, interagir uns com os outros à medida que constróem os dados tetraédricos para simularem um jogo similar ao *General*. Mas que, como vieram a constatar, guardava semelhanças de idéias matemáticas de técnicas de contagem presentes em ambos os jogos. Além disso, à medida que jogavam uns com os outros, fortaleciam aspectos de natureza sensorial, que é sempre o caminho para um aprendizado saudável.

Por pôr em prática esses jogos e atividades paralelas, as aulas precisaram ser planeadas adequadamente. Além disso os estudantes foram retirados de sua costumeira inércia e participaram avidamente de todas as discussões envolvidas no processo. Acredita-se que ao fazer uso de tal metodologia, foi despertado o interesse e resgate de pelo menos um pouco do prazer pelo aprendizado de matemática.

O valor pedagógico da matemática recreacional está, hoje, largamente reconhecido, com cada vez mais publicações em revistas e periódicos para professores de matemática (GARDNER, 1998).

No presente trabalho, apresenta-se uma proposta diferenciada de ensino, onde utiliza-se uma metodologia baseada no uso de jogos, para um melhor fazer pedagógico. Através desta proposta, trabalha-se diversos assuntos matemáticos, como produtos notáveis, probabilidade e geometria espacial.

No capítulo 1, apresenta-se o jogo General, suas regras e a maneira de obter as pontuações. Já no capítulo 2, caracterizam-se a escola onde foram realizadas as atividades e os educandos envolvidos, além de falar-se um pouco a respeito do material produzido sobre probabilidade, ao qual os alunos tiveram acesso para se apropriarem do assunto. No capítulo 3, enumeram-se os materiais necessários para a realização das atividades e no capítulo 4 são descritos os problemas abordados. No capítulo 5, descrevem-se as atividades devidamente planejadas e realizadas e, saliente-se, que todas elas foram elaboradas para alunos do ensino fundamental. Mais precisamente, para alunos do 8º ano, que participaram da proposta apresentada. Já os possíveis desdobramentos dessa proposta, são mostrados no capítulo 6, enquanto que, no capítulo 7, encontram-se as considerações finais àcerca deste trabalho.

É necessário salientar que, nos anexos, encontram-se imagens referentes às diversas atividades realizadas pelos alunos e também alguns relatos feitos por eles, a respeito do que essa nova forma de aprender contribuiu para os seus aprendizados e, até mesmo, para as suas vidas.

Objetivos

Este trabalho propõe uma abordagem diferenciada de ensino relacionando o estudo de expressões algébricas com a ideia intuitiva de probabilidades e com técnicas de contagem no ensino fundamental. Para isso, são projetadas algumas atividades lúdicas, realizadas com o jogo denominado *General*.

Ao desenvolver esta proposta de abordagem (visando fazer com que os estudantes se sentissem mais estimulados para a aprendizagem) pretendeu-se desenvolver o raciocínio lógico-matemático, fazendo com que os estudantes conjecturassem soluções possíveis para os problemas probabilísticos oriundos das situações de jogo. Neste sentido, convém salientar que os próprios PCNs apontam para esse tipo de trabalho, quando pretendem que:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções (BRASIL, 1998).

Também é objetivo do trabalho mostrar aos educandos, que muitas vezes - embora não percebam -, há uma interrelação surpreendente e inesperada entre certos tópicos da matemática, aparentemente desconectados. Tendo em vista que se trabalharam cálculos de probabilidades utilizando o conteúdo de produtos notáveis e outras expansões de somas algébricas, isto reforça as ideias de Salman Khan que diz: “Ao meu ver, nenhum assunto jamais é encerrado. Nenhum conceito está isolado de outros conceitos. O conhecimento é contínuo, as ideias fluem” (KHAN, 2013).

Nesse sentido, os objetivos deste trabalho são:

1. Possibilitar atividades de integração entre os estudantes, permitindo-lhes conhecer e interagir uns com os outros, construindo um ambiente amistoso, colaborativo e rico em possibilidades para o estudo e aprendizado;

2. Provocar nos estudantes a análise de situações que exigem uma tomada de decisão, baseada em estimativas intuitivamente amparadas por raciocínios probabilísticos;

3. Despertar a curiosidade e surpresa, tão comuns aos fatos matemáticos, relacionando aspectos geométricos (formas geométricas dos dados tetraédricos e dados hexaédricos) com eventos probabilísticos, expressões algébricas e métodos de contagem.

4. Melhorar a aprendizagem dos conteúdos: produtos notáveis, expressões algébricas e de probabilidades;
5. Despertar o interesse dos estudantes motivando-os a permanecer na escola;
6. Fornecer aos professores uma metodologia diferenciada para o ensino de matemática.

1 O Jogo *General*

Neste capítulo são abordadas as regras do jogo *General* e as possíveis formas de combinações de faces dos dados que resultam em pontuação.

1.1 As Regras do Jogo

Este jogo é realizado com o uso de 1 copo e 5 dados. O jogador sacode o copo com os dados dentro e vira-o sobre a mesa de jogo. Na sua vez, cada jogador tem 3 tentativas para buscar cada uma das jogadas válidas. As jogadas possíveis são caracterizadas pelas combinações das diferentes faces voltadas para cima e definidas como:

1. *General*: quando os 5 dados caem com a mesma face voltada para cima;
2. *Quadra*: quando os 5 dados caem com 4 faces iguais voltadas para cima e a face restante diferente das outras 4;
3. *Fula*: quando 3 dados caem com mesma face voltada para cima e os outros 2 dados também caem com faces idênticas entre si, mas distintas das outras 3;
4. *Trinca*: quando 3 dados caem com as faces idênticas voltadas para cima e os outros 2 dados caem com as faces distintas entre si e das outras 3;
5. *Duas Duplas*: quando 2 dados caem com faces iguais voltadas para cima, outros 2 dados também caem com faces idênticas voltadas para cima, mas distintas das duas primeiras e um quinto dado cai com uma face voltada para cima diferente das demais;
6. *Dupla*: quando 2 dados caem com faces idênticas voltadas para cima e os dados restantes caem com a face voltada para cima distintas entre si e diferentes das outras duas faces;
7. *Sequência*: quando as faces dos dados voltadas para cima podem ser rearranjadas em uma das seguintes ordenações: (12345) ou (23456).

Além disso, o jogo consiste das seguintes regras:

a) O jogo consistirá de 9 rodadas para cada jogador;

b) Em cada rodada o jogador terá a oportunidade de arremessar os dados três vezes.

c) Na primeira jogada da rodada, ele coloca os cinco dados no copo e arremessa. Conforme o resultado obtido, poderá arremessar de um a cinco dados na segunda vez ou, simplesmente, dar por encerrada sua participação na rodada aceitando o resultado, caso a combinação obtida seja satisfatória.

d) O mesmo procedimento acontece ao final da segunda jogada, em que os dados forem arremessados, ou seja, o jogador pode arremessar a quantidade de dados - no máximo 5 dados - que achar necessária para completar a jogada, ou dar por encerrada a sua participação na rodada.

e) Na terceira tentativa, a jogada se dará por encerrada, independentemente do resultado obtido.

f) As regras referentes ao número de jogadas e as pontuações do jogo podem ser alteradas, conforme a conveniência, antes do início do jogo.

1.2 Adaptações das regras para essa proposta

As regras podem variar em cada região do país e inclusive o nome também muda. Na região Sudeste do país, por exemplo, esse jogo também é conhecido como *Bozó*. Nas atividades que serão relatadas, as regras básicas foram as seguintes:

1. Serão possíveis nove maneiras de se pontuar, ou seja, não haverá nenhuma jogada em que não se pontue.

   1.1) **General**: Nesta jogada, devem ser obtidas todas as cinco faces com o mesmo valor. O *General* - exibido na Figura 1 - é a pontuação máxima do jogo.

Figura 1 – Exemplo de General

   1.2) **Quadra**: Foi definida para o caso de quatro faces idênticas voltadas para cima e o dado restante exibir uma face diferente das demais. Por exemplo: (66665) (*Quadra de 6* exibido na Figura 2), (52555) (*Quadra de 5*), (11131) (*Quadra de 1*), etc.

Figura 2 – Exemplo de Quadra

1.3) **Sequência**: Foram definidas como *Sequências* as combinações de faces voltadas para cima que pudessem ser rearranjadas nas seguintes ordenações: (12345) ou (23456). Esta última exibida na Figura 3.

Figura 3 – Exemplo de Sequência

1.4) **Full Hand (Fula)**: Consegue-se uma *Fula*, quando se obtem três faces iguais e as outras duas faces também iguais, mas diferentes das primeiras. Por exemplo: (11122) ou (33223). Esta última exibida na Figura 4.

Figura 4 – Exemplo de Full Hand (Fula)

1.5) **Trinca**: Quando são obtidas três faces com o mesmo resultado e as outras duas faces diferentes entre si e também diferentes das três faces idênticas. Por exemplo: (55536) que é uma *Trinca de 3* ilustrada na Figura 5; (24622) (*Trinca de 2*) e etc.

Figura 5 – Exemplo de Trinca

1.6) **Par**: Quando duas faces são iguais entre si e as outras três diferentes entre si e diferentes das duas primeiras. Por exemplo (33146) (*Par de 3*, ilustrado na Figura 6), (55642) (*Par de 5*), etc.

Figura 6 – Exemplo de Par

1.7) **Jogada de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6**: É quando se consegue o maior número possível de determinada face. O valor da pontuação, será a soma das faces do número escolhido. Por exemplo: se foi obtida a configuração (11223) é preciso optar entre fazer 2 pontos no número 1 (1+1); 4 pontos no número 2 (2+2) ou, ainda, 3 pontos no número 3. Na Figura 7, uma outra possibilidade, na qual pode-se escolher entre fazer 10 pontos (5+5) na jogada do cinco; 4 pontos na jogada do quatro; 2 pontos na jogada do dois ou 3 pontos na jogada do três.

Figura 7 – Jogada no 1, 2, 3, 4, 5 ou 6

2. **Tabela de pontuação**:
   Nesta tabela são contabilizados os pontos de cada rodada. É importante salientar que a confecção desse tipo de tabela pode ser feita de maneira manual, e a variação da mesma depende das regras estabelecidas do jogo.

TABELA DE COMBINAÇÕES GENERAL

Combinações	Jogo 1	Jogo 2	Jogo 3	Jogo 4	Pontos
Grande General					
Pequeno General					
Full					
Sequência					
6					
5					
4					
3					
2					
1					
Total					

Figura 8 – Tabela de pontuação

2 Caracterização

Apresenta-se, neste capítulo, as caracterizações do público alvo, da experiência proposta e do lugar onde foram desenvolvidas as atividades. Além disso, propõem-se os recursos mínimos necessários ao bom desenvolvimento dessa atividade.

2.1 Público alvo

A Escola Municipal Cidade do Rio Grande, conhecida popularmente como CAIC, foi fundada em 1994 por meio de uma parceria entre a Prefeitura Municipal de Rio Grande e a FURG – Fundação Universidade do Rio Grande. Um dos objetivos da escola é a construção da cidadania em seus estudantes, por meio de uma proposta político-pedagógica desencadeadora de experiências participativas, democráticas, humanas e tecnicamente qualificadas, onde a comunidade em torno da Universidade não só seja atendida, mas também participe ativamente das decisões pertencentes a esse espaço de cultura e lazer.

A escola localiza-se dentro da agora conhecida como Universidade Federal do Rio Grande - FURG, funcionando como uma unidade da mesma, atendendo alunos e a comunidade em geral dos bairros situados à zona oeste da cidade de Rio Grande, contemplando bairros periféricos como Castelo Branco, PROFILURB e Cidade de Águeda. Atualmente, o CAIC conta com 4.681 m^2 de área construída; possui onze salas de aulas para o Ensino Fundamental e cinco para a pré-escola, além de possuir salas específicas para outros serviços, como: sala de vídeo, de apoio pedagógico, artes, informática e biblioteca. Conta ainda com brinquedoteca, sala de música, teatro, dois refeitórios, cozinha, ginásio de esportes e uma área de saúde, que atende a comunidade escolar.

A instituição conta com aproximadamente 70 professores, além de outros profissionais (bolsistas, estagiários, funcionários da Prefeitura e Universidade), totalizando em torno de 120 pessoas envolvidas nas atividades da escola.

A escola funciona em três turnos, pela manhã, seu atendimento preferencial dá-se às séries finais do ensino fundamental, já à tarde, destina-se o atendimento à pré-escola e às séries iniciais do ensino fundamental e à noite, a escola dedica-se à Educação de Jovens e Adultos – EJA, totalizando o atendimento a aproximadamente 900 alunos.

São princípios norteadores da escola: o respeito ao direito alheio, o desenvolvimento de uma relação de solidariedade entre as pessoas e a autonomia do estudante. Assim como ter sempre como meta uma relação dialógica entre professores, alunos, funcionários e a comunidade em geral.

Saliente-se que a Escola Municipal Cidade do Rio Grande, desde a sua fundação, possui uma proposta diferenciada de trabalho, preocupando-se com a inclusão, com a formação qualitativa de seus alunos e com a humanização dos mesmos, para que se tornem efetivamente cidadãos ativos e participativos da sociedade na qual vivemos. Dito isso, deve ser reforçado que por causa desta proposta diferenciada da escola, há dezessete anos são dedicados esforços para a concretização, para o alcance dos obetivos de tal proposta, ora obtendo sucessos, ora obtendo fracassos no decorrer dessa jornada. Sempre acreditando na formação do sujeito transformador, pela via da educação. Bons exemplos disso, são encontrados vários ex-alunos frequentando a universidade, bem como ocupando postos de trabalho nessa cidade.

2.2 Pré-requisitos

Um dos mais importantes pré-requisitos para o bom andamento das atividades propostas é o conhecimento prévio do conteúdo de produtos notáveis (SOUZA, 2015), especificamente o desenvolvimento do quadrado da soma de dois termos. Isso, tendo-se em vista que, uma das propostas do trabalho é conseguir visualizar espaços amostrais por meio da expansão de potências de somas algébricas. Felizmente este conteúdo é comumente trabalhado no início do ano letivo, nos oitavos anos, o que indica que os alunos envolvidos nas atividades propostas no trabalho já terão domínio de tal conteúdo - bastando apenas o devido aprofundamento, conforme a proposta de trabalho do professor.

Os outros pré-requisitos importantes são os que dizem respeito à probabilidade, os quais serão desenvolvidos durante as atividades, trabalhando um pouco acerca com o surgimento da Probabilidade e noções básicas de Experimento Aleatório, Eventos, Espaços Amostrais e Cálculo de Probabilidades (SPIEGEL, 2004). Este material não só é importante, como também enriquece o trabalho e o conhecimento dos alunos. É um material elaborado e escrito pensando nos alunos como segue:

2.2.1 Probabilidade

A teoria da probabilidade nos permite determinar a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório, ou seja, num experimento que possa fornecer resultados diferentes ao acaso como, por exemplo, num jogo de loterias.

Nesse sentido, acredita-se que a probabilidade é de fundamental importância para o ensino de matemática, pois permite conjecturar possíveis resultados em diversos experimentos, trabalhando o raciocínio do aluno e não só a chamada "decoreba", onde se aprende somente a memorização de fórmulas. Veja-se:

> Se o ensino de matemática deve se ocupar mais de uma forma de pensar do que de uma forma de escrever fórmulas ou numerais, se o ensino de Matemática deve se ocupar mais da tomada consciente de decisões do

> que do estrito cálculo, então a teoria das probabilidades é fundamental (BERNARDES, 1987).

Os estudos acerca das probabilidades são utilizados em diversas situações. Principalmente na Estatística Indutiva, na elaboração das amostras, na ampliação dos resultados obtidos à população e no prognóstico de acontecimentos futuros.

2.2.2 Origem da Probabilidade

Segundo indícios, o surgimento do estudo das probabilidades foi na idade média, por meio das observações de jogos de azar, tais como o jogo de cartas, jogo de dados e de roleta. Esses tipos de jogos tinham como objetivo as apostas. No entanto, não raramente, no devido período também objetivavam até mesmo previsões futurísticas.

Diversos autores consideram que o estudo probabilístico originou-se na Itália, tendo como precursores os matemáticos L. Paccioli (1445-1514), G. Cardano (1501-1576) e N. Tartaglia (1499-1557).

É sabido que G. Cardano, em seu livro "Liber de Ludo Aleae", chegou perto de obter as probabilidades de alguns acontecimentos. A melhor forma de caracterizar esse grupo de autores é dizer que marca o fim da pré-história da teoria das probabilidades.

Apesar da incerteza de quando os estudos probabilísticos realmente começaram, o que se pode afirmar é que o estudos de B. Pascal (1623-1662) e de P. de Fermat (1601-1665), a respeito do notável problema da divisão de apostas, significaram um avanço grandioso no domínio das probabilidades.

Tais estudos alicerçaram a Teoria do Cálculo das Probabilidades e consequentemente da Análise Combinatória. Diversas situações relacionando apostas no jogo de dados, acabaram por levantar um número grande de hipóteses e resultados, fazendo com que a Teoria das probabilidades fosse tratada por alguns como Ciência.

O primeiro livro escrito acerca do cálculo de probabilidades foi desenvolvido por C. Huyghens (1629-1645). Seu nome era "De Ratiociniis in Ludo Aleae", onde também introduziu-se o conceito notável de esperança matemática.

Outro matemático que contribuiu para o estudo das probabilidades foi G. Leibniz (1646-1716), que publicou duas obras: uma sobre a arte combinatória e outra sobre as aplicações do cálculo das probabilidades às questões financeiras. Além disso, G. Leibniz influenciou diretamente Jakob Bernoulli (1654-1705) a estudar e, consequentemente, a aperfeiçoar a teoria das probabilidades. Suas contribuições deram ênfase aos grandes números, abordando as permutações, combinações e a classificação binomial. É notório salientar que, por meio de sua obra "Ars Conjectandi", o primeiro teorema limite da teoria das probabilidades foi rigorosamente provado (BOYER, 1974).

Também foram evidentes e importantíssimas as contribuições de Pierre Simon Laplace (1749-1827) sobre a regra da sucessão e de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), a respeito da Lei de Distribuição das Probabilidades (SPIEGEL, 2004).

Atualmente, as aplicações do cálculo de probabilidades vão muito além das aplicações relacionadas aos jogos de azar como: roletas, cartas, dados que é por onde esta ciência começou e onde ela é habitualmente associada. É comum o uso dessa ciência em diversas áreas, como: a política, a medicina, a climatologia, a agricultura, cálculos de seguros.

2.2.3 Experimentos Aleatórios

São experimentos nos quais não somos capazes de conhecer e nem controlar o valor de certas variáveis, pois os resultados irão variar de um experimento para outro, mesmo que as condições sejam as mesmas. Temos como exemplos: o lançamento de um dado, onde os resultados serão $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e o lançamento de uma moeda, onde os resultados obtidos serão de *Cara* ou *Coroa*.

2.2.4 Espaços Amostrais

É o conjunto onde estão reunidos todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Cada um desses resultados é chamado de ponto amostral. Algumas vezes existirá mais de um espaço amostral em um único experimento, mas usualmente, somente um fornecerá as principais informações acerca do mesmo. Se um espaço amostral tem um número finito de pontos, é denominado de espaço amostral finito, como por exemplo num lançamento de dados, onde o espaço amostral é $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Por outro lado, se um espaço amostral possuir um número de pontos tanto quantos são os números naturais, ele é dito espaço amostral infinito.

2.2.5 Eventos

Se um espaço amostral S é formado por todos os resultados possíveis de um experimento, um evento nada mais é que um dos resultados desse espaço amostral. Tem-se, por exemplo, que o para o lançamento de uma moeda o espaço amostral é $S = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$. Um dos eventos possíveis é de se obter cara neste lançamento, cuja probabilidade é, aliás, $\dfrac{1}{2} = 0.5$.

2.2.6 Conceito de Probabilidade

Para qualquer experimento que se tenha, existe sempre uma incerteza quanto a ocorrência ou não de um determinado evento. Por exemplo, ao lançarmos uma moeda, não se tem certeza que o evento Cara ocorrerá. Para esta medida de chance que tal evento ocorra, atribuímos o nome de probabilidade (SPIEGEL, 2004). É conveniente atribuirmos um valor entre 0 e 1 para a probabilidade de um evento. No entanto, havendo certeza de que tal evento ocorrerá, diz-se que sua probabilidade é 1. Em contrapartida, havendo certeza de que tal evento não ocorrerá, diz-se que sua probabilidade é zero. No exemplo de evento citado acima, a probabilidade do evento Cara ocorrer é de $\frac{1}{2}$, ou seja, 0.5 ou ainda 50%. Existem dois tipos de abordagens importantes por meio das quais se pode estimar a probabilidade de um evento:

a) Abordagem Clássica: Se um evento pode ocorrer de 's' maneiras diferentes em um total de 't' maneiras possíveis (espaço amostral), então diz-se que a probabilidade é de $\frac{s}{t}$. Tem-se como exemplo o lançamento de uma única moeda honesta, sendo o evento, a probabilidade de ocorrer Cara, isto só é possível uma vez (s) onde o total de possibilidades são duas , $Cara$ ou $Coroa$. Logo a probabilidade de tal evento é $\frac{1}{2}$.

b) Abordagem Frequencista: Dadas inúmeras (n) repetições de um experimento, é observado que tal evento ocorre (f) vezes, então a probabilidade de tal evento é de $\frac{f}{n}$. Este tipo de probabilidade é chamada de probabilidade empírica do evento. Um exemplo desta abordagem é quando se lança uma moeda honesta 2.000 vezes. Observando-se que em 732 lançamentos foi obtido Cara, logo, a probabilidade empírica é de $\frac{732}{2000}$.

2.3 Recomendações metodológicas

As atividades descritas neste trabalho apontam para o uso do jogo como instrumento de aprendizagem, desenvolvendo nos alunos noções básicas de probabilidades.

Deve-se enfatizar o uso de material concreto, não só para diversificar as atividades, mas também como forma de aproximar o real do abstrato.

Nas atividades iniciais, antes mesmo de utilizarmos os produtos notáveis na obtenção dos espaços amostrais, presume-se que muitas vezes se fará necessário o uso de calculadoras para dinamizar o trabalho - uma vez que calcular manualmente divisões que resultam em números decimais, demanda algum esforço a mais e, consequentemente leva-se mais tempo. Acredita-se que o uso de tal ferramenta de maneira nenhuma prejudica o aprendizado dos alunos. Pelo contrário, é uma ferramenta tecnológica que serve para dinamizar o trabalho realizado.

Uma das recomendações mais importantes é que, preliminarmente, se faça uma pesquisa a respeito do jogo general, para que todos envolvidos no processo possuam os conhecimentos necessários para o desenvolvimento do trabalho, pois se tornaria muito demorado explicar as regras apenas no momento do jogo. Saliente-se que tais conhecimentos são necessários até mesmo para que, no momento do jogo, se façam algumas modificações no que se refere à quantidade de jogadas ou ainda, às pontuações referentes à elas.

Além disso, é óbvio que a cooperação dos alunos envolvidos, com sua atenção e interesse nas atividades propostas, faz-se mais do que necessário, cabendo ao professor uma conversa prévia com os mesmos, acordando quais as condições comportamentais e atitudes que todos devem exercer durante o trabalho proposto.

2.4 Dificuldades previstas

Inicialmente, acreditava-se numa série de dificuldades que ocorreriam na tentativa de executar o trabalho. Dificuldades a respeito da introdução do conteúdo de probabilidades nas turmas que participaram das atividades devido, principalmente, a novidade de se trabalhar o conteúdo no ensino fundamental e às dificuldades que muitos dos alunos têm naturalmente, quando se desenvolvem conteúdos novos.

Outro fator bastante preocupante é que em nenhum momento de suas vidas estudantis, os educandos foram estimulados a trabalhar com problemas onde fossem levados a raciocinar explorando elementos de análise combinatória, como permutações e combinações.

Quanto ao jogo *General* em si, apesar de ser novidade para a grande maioria, acredita-se que o desenrolar do mesmo não apresenta um grau de dificuldade muito grande, desde que se jogue com certa concentração e que fiquem bem claras as regras do jogo.

O fator mais preocupante a respeito do desenvolvimento das atividades, por incrível que pareça, foi o cronograma. Afinal, na referida escola, deve-se entregar um planejamento trimestral que contenha todo o conteúdo a ser trabalhado e a metodologia exercida. Isso porque se trata de um conteúdo inusitado que, infelizmente, apesar das recomendações dos PCNs, não é desenvolvido no ensino fundamental. Por isso percebe-se certa resistência por parte da coordenação pedagógica da escola: receio de que, caso ocorra algum imprevisto, isso prejudicará o bom andamento das aulas.

3 Material Utilizado

3.1 Kit de moedas

Este kit é composto por 25 moedas, sendo dividido em 5 grupos diferentes de valores, ou seja, tem-se 5 moedas de 5 valores diferentes em moeda corrente, reais (R$ 1,00; R$ 0,50; R$ 0,25; R$ 0,10 e R$ 0,05).

Figura 9 – Kits de moedas

3.2 Tetraedros

Foram confeccionados 3 tetraedros regulares para cada grupo, totalizando 15 tetraedros.

Figura 10 – Tetraedros

3.3 Dados, copos plásticos e caderneta

Este material será utilizado na atividade principal do trabalho, que será realizada com o jogo *General*.

Figura 11 – Material do jogo

3.4 Lápis de cor, cola e pincel atômico

Este material é necessário para a realização da atividade 2, onde os tetraedros serão confeccionados. Felizmente este material é fornecido pela escola.

4 Descrição dos Problemas Abordados

4.1 Problemas abordados

As atividades programadas foram realizadas segundo a seguinte sequência:

a. Construção do Espaço Amostral para o estudo de probabilidades no lançamento simultâneo de duas moedas não-viciadas.

b. Construção do Espaço Amostral para o estudo de probabilidades no lançamento simultâneo de três dados tetraédricos.

c. Construção do Espaço Amostral para o estudo do jogo *General*, isto é, o lançamento simultâneo de até cinco dados hexaédricos.

Dentro dessas considerações, cabem as seguintes questões naturais:

1. No lançamento simultâneo de duas, três e quatro moedas (não-viciadas), qual é a chance (probabilidade) de as moedas cairem com duas faces distintas voltadas para cima?

2. No lançamento simultâneo de três dados tetraédricos (não-viciados), qual é a chance (probabilidade) de dois dados caírem com faces idênticas voltadas para cima?

3. No lançamento simultâneo de cinco dados hexaédricos (não-viciados), qual é a chance (probabilidade) de os cinco dados caírem com a mesma face voltada para cima?

Para buscar uma resposta para a primeira questão, foi feita uma abordagem inicial trabalhando com o problema do lançamento de 2 moedas. Os alunos fizeram testes inicialmente lançando, aleatoriamente, duas moedas e anotando os resultados obtidos. Esse procedimento é muito importante, pois retira os estudantes de uma postura de passividade para uma de atitude, interação com os colegas e, portanto, com a atividade proposta. Esse momento revelou-se importante também para a condução dos trabalhos, pois preparou-os para enfrentar as questões mais difíceis que viriam nas próximas atividades, bem como despertou sua curiosidade.

Representando $Coroa$ por A e $Cara$ por B, os estudantes puderam inferir que poderiam ocorrer as seguintes combinações de faces das duas moedas: (AA), (AB), (BA) e (BB). Ou seja, existem 4 casos possibilidades para o lançamento de duas moedas.

Em seguida eles foram convidados a recordarem do desenvolvimento da expressão algébrica, ou *produto notável*: $(A+B)^2$. Sem dificuldade, recordaram que:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = AA + AB + BA + BB$$

e foi-lhes sugerido compararem os coeficientes dessa expressão com as possibilidades de se combinar as faces das duas moedas.

Não foi difícil estabelecerem uma relação entre os coeficientes da expansão $(A+B)^2$ com as possíveis combinações das faces das duas moedas. Em seguida, familiarizados com a técnica, buscaram responder a questão sobre as possibilidades no lançamento de 3 moedas. A expansão:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

facilmente ajudou a responder a questão.

Nos dias seguintes a atividade consistiu em construir dados tetraédricos para que entendessem a segunda questão colocada acima. Novamente, a atividade encaminhada aos estudantes foi muito bem recebida pela turma e também foi mobilizadora para desejar entender como aquela movimentação toda para a construção de tetraedros, poderia ajudar a responder a pergunta: de quantas maneiras as faces de três tetraedros poderiam cair voltadas para cima, quando lançados aleatoriamente? Depois de construídos os tetraedros, os estudantes fizeram experiências em grupos, realizando diversos lançamentos de três tetraedros simultaneamente. Os resultados obtidos eram anotados e então, quando já se sentiam bastante experientes com a complexidade do jogo, lhes era perguntado de quantas maneiras os três dados poderiam cair?

Fazendo uma analogia com o caso das moedas, foi-lhes pedido que expandissem a expressão, bem mais complicada $(A+B+C+D)^3$. Com base na expansão obtida para o caso das 3 moedas, foi sugerido trabalhar na forma: $x = A+B$ e $y = C+D$.

$$\begin{aligned}
(A+B+C+D)^3 &= (\underbrace{A+B}_{x}+\underbrace{C+D}_{y})^3 \\
&= \underbrace{(A+B)^3}_{x^3} + 3\underbrace{(A+B)^2}_{x^2}\underbrace{(C+D)}_{y} + 3\underbrace{(A+B)}_{x}\underbrace{(C+D)^2}_{y^2} + \underbrace{(C+D)^3}_{y^3}
\end{aligned}$$

Mas por outro lado:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
(A+B)^3 & = & A^3 & + & 3A^2B & + & 3AB^2 & + & B^3 & & & & \\
3(A+B)^2(C+D) & = & 3A^2C & + & 6ABC & + & 3B^2C & + & 3A^2D & + & 6ABD & + & 3B^2D \\
3(A+B)(C+D)^2 & = & 3AC^2 & + & 6ACD & + & 3AD^2 & + & 3BC^2 & + & 6BCD & + & 3BD^2 \\
(C+D)^3 & = & C^3 & + & 3C^2D & + & 3CD^2 & + & D^3 & & & &
\end{array}$$

A soma dos elementos à esquerda nas equações acima resultam: $(A+B+C+D)^3$. E somando os membros do lado direito das equações vem:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
(A+B+C+D)^3 & = & A^3 & + & B^3 & + & C^3 & + & D^3 & & & & \\
 & + & 3A^2B & + & 3A^2C & + & 3A^2D & + & 3B^2A & + & 3B^2C & + & 3B^2D \\
 & + & 3C^2A & + & 3C^2B & + & 3C^2D & + & 3D^2A & + & 3D^2B & + & 3D^2C \\
 & + & 6ABC & + & 6ABD & + & 6ACD & + & 6BCD & & & &
\end{array}$$

ou seja, jogando simultaneamente 3 dados com 4 faces distintas A, B, C e D existem as seguintes possibilidades:

1ª) 4 possibilidades para as 3 faces iguais;

2ª) 36 possibilidades para 2 faces iguais;

3ª) 24 possibilidades para 3 faces distintas.

As possibilidades estão listadas a seguir:

(AAA)	(BBB)	(CCC)	(DDD)			4 Trincas
(AAB)	(ABA)	(BAA)				3 Duplas
(AAC)	(ACA)	(CAA)				3 Duplas
(AAD)	(ADA)	(DAA)				3 Duplas
(BBA)	(BAB)	(ABB)				3 Duplas
(BBC)	(BCB)	(CBB)				3 Duplas
(BBD)	(BDB)	(DBB)				3 Duplas
(CCA)	(CAC)	(ACC)				3 Duplas
(CCB)	(CBC)	(BCC)				3 Duplas
(CCD)	(CDC)	(DCC)				3 Duplas
(DDA)	(DAD)	(ADD)				3 Duplas
(DDB)	(DBD)	(BDD)				3 Duplas
(DDC)	(DCD)	(CDD)				3 Duplas
(ABC)	(ACB)	(BCA)	(BAC)	(CAB)	(CBA)	6 jogadas deA, B ou$C$
(ABD)	(ADB)	(BDA)	(BAD)	(DAB)	(DBA)	6 jogadas deA, B ou$D$
(ACD)	(ADC)	(CDA)	(CAD)	(DAC)	(DCA)	6 jogadas deA, C ou$D$
(BCD)	(BDC)	(CDB)	(CBD)	(DBC)	(DCB)	6 jogadas deB, C ou$D$

e totalizam 64 possíveis combinações de 3 dados com 4 faces cada um. Ou seja, para obter o número total de cada possível configuração de faces, basta considerar os coeficientes da expansão da expressão $(A + B + C + D)^3$. Na verdade, pode ser demonstrado que os coeficientes da expressão $(A+B+C+D)^3$ fornecem o número de combinações possíveis com as faces dos 3 dados (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007) .

Dando seguimento à programação, os estudantes foram provocados a tentar responder a 3ª questão: qual é a chance (probabilidade) de se conseguir um *General* logo na primeira jogada? Foi notado pelos grupos que existem 6 casos favoráveis para tal evento:

$$(11111) \quad (22222) \quad (33333) \quad (44444) \quad (55555) \quad (66666).$$

Em cada uma dessas 6 sequências de 5 dígitos, cada dígito representa a face do dado voltada para cima. E a questão que surge naturalmente é contar quantos são os casos possíveis, já que os dados são jogados todos ao mesmo tempo, sem nenhuma espécie de ordenação entre eles.

Assim o número de possíveis combinações das faces de 5 dados, cada um com 6 faces e denotadas por A, B, C, D, E e F, lançados simultaneamente, é dado pelos coeficientes da expansão:

$$(A + B + C + D + E + F)^5$$

e totalizam 7776 combinações possíveis, ou 6^5.

Observa-se que as demonstrações das expansões das expressões acima citadas, serão posteriormente realizadas (Atividade 4) com auxílio do software Wxmaxima.

Essa expansão foi percebida ser uma tarefa bastante complicada de realizar no sentido de serem listadas todas as possibilidades, como foram listadas para o caso de dados tetraédricos. Isso abriu uma ótima oportunidade para mostrar aos estudantes o alcance que a matemática possui, quando há algum teorema a dar suporte ao professor. Pois não se pode exigir, do estudante nesse nível de ensino, compreender com tanta profundidade os recursos na resolução desse problema. Mas permite ao professor gerenciar o planejamento e execução das atividades, permitindo uma boa condução da tarefa de modo a que o estudante evolua em seu processo de aprendizagem.

Dessa maneira, para a finalização do projeto, os estudantes seriam iniciados no uso do software *WxMaxima* para auxiliar nas expansões acima referidas, contemplando dessa forma o contato com o uso de tecnologias digitais de ensino, que comparecem como um ***meio*** de aprender/estudar matemática.

Sobre o uso de tecnologias, o educando além se apropriar de uma ferramenta importante para o seu aprendizado, passa a se interessar com mais intensidade pelas atividades propostas. Nesse sentido:

> As novas gerações têm um relacionamento totalmente favorável e adaptativo às novas tecnologias de informação e de comunicação e um posicionamento cada vez mais aversivo às formas tradicionais de ensino. "Eles estão em outra", diz Babin (1991), e estar em outra significa, na

> maioria das vezes, o não se interessar pelo que a escola pretende lhes ensinar (KENSKI, 1997).

Assim é possível tornar a atividade ainda mais interessante, curiosa, educativa e conclusiva, realizando-a com mais praticidade.

5 Detalhamento das Atividades

Na continuidade das atividades, os estudantes foram separados em grupos e, a partir daí, desenvolveu-se o jogo. No decorrer do mesmo, foram deparadas situações de jogo nas quais foi necessário que o estudante investigasse qual a maneira de jogar melhor o próximo lance. Ou seja, intuitivamente, o estudante é conduzido a avaliar qual é a probabilidade (embora ele ainda não tenha essa noção formalizada) de cada jogada ocorrer.

Nesse capítulo são abordadas uma série de atividades a partir de experimentos realizados em sala de aula.

As duas turmas envolvidas nas atividades dividiram-se em 5 grupos por sala de aula, sendo 4 grupos compostos de 5 alunos e 1 grupo composto por 4 alunos.

Figura 12 – Divisão dos grupos

Num primeiro momento, foram realizadas atividades referentes ao cálculo de probabilidades a partir do lançamento de moedas. Após, foram também desenvolvidas outras atividades inerentes às probabilidades no lançamento de Tetraedros Regulares. Essas atividades, sempre que possível, devem ser desenvolvidas no mesmo dia.

Saliente-se que as atividades supracitadas têm como objetivos principais introduzir os conceitos de probabilidade no contexto escolar. Serão construídos pelos educandos os conceitos de Experimento Aleatório, Evento, Espaço Amostral e de Probabilidade mediante a frequência relativa, isto é, a razão entre o número de casos favoráveis a determinado evento e o número total de casos possíveis.

Para finalizar, são desenvolvidos o jogo *General* e, por meio das situações de jogo desencadeadas, calculam-se probabilidades para a tomada de decisão mais coerente, relativa à determinada jogada.

Nessas atividades saliente-se que são explorados não apenas os conceitos de probabilidade, mas também, empiricamente, conceitos de Análise Combinatória. Deve ser enfatizado que, todas as atividades desenvolvidas, foram pensadas para alunos dos oitavos anos do Ensino Fundamental. No entanto, com o devido aprofundamento das atividades, essa proposta pode ser trabalhada tranquilamente com alunos do Ensino Médio - e, quem sabe, dependendo da proposta do professor, até mesmo em cursos universitários.

5.1 Atividade 1

Nesta atividade, os grupos receberam um kit de moedas contendo 4 itens idênticos em cada. Como os kits são compostos por moedas de valores diferentes, observe-se que a distribuição dos mesmos foi aleatória.

Inicialmente, discutiu-se acerca das probabilidades de ocorrerem os eventos $Cara = A$ ou $Coroa = B$ no lançamento de uma moeda.

Prontamente, os alunos responderam que tanto as probabilidades de ocorrer $Cara = A$ ou de ocorrer $Cara = A$ seriam as mesmas, ou seja, 50%. É claro que este raciocínio é de certa maneira automático, intuitivo e de fácil constatação, tendo em vista que ao lançarmos uma moeda, só se pode obter dois resultados.

Neste momento, aproveitando o ensejo, desenvolveu-se os conceitos de *Experimentos Aleatórios*, *Evento* e *Espaço Amostral*. Convencionou-se denotar nos próximos experimentos, Espaço Amostral como sendo o conjunto Ω de um evento (ξ), assim como, o conceito de Probabilidade. Denotou-se a ocorrência de Cara (A) e de Coroa (B).

Assim, o Espaço Amostral Ω do primeiro experimento, ficou sendo:

$$\Omega = \{A, B\}.$$

Na continuidade da atividade, foi proposto que os grupos determinassem a probabilidade de ocorrência do evento Cara (A), no lançamento de duas moedas.

Apesar de algumas dificuldades iniciais, logo um dos grupos conseguiu determinar o Espaço Amostral Ω, como segue:

$$\Omega = \{AA, AB, BA, BB\}.$$

O resultado foi imediatamente compartilhado entre os demais grupos, que por sua vez, construíram com certa rapidez a solução do problema proposto, pois como no espaço amostral o evento A aparece 3 vezes (AA, AB, BA), logo:

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

Neste momento, aproveitando que todos estavam empolgados com os resultados obtidos e envolvidos com a atividade proposta, introduziu-se o cálculo de probabilidades por meio das expansões de somas algébricas.

Tomando como ponto de partida a primeira atividade, onde foi calculada a probabilidade de obter-se A ou B no lançamento de uma moeda, surgiu o seguinte raciocínio:

Denotando por A=Cara e B=Coroa e como se está trabalhando com uma só moeda, então:

$$(A + B)^1 = A + B$$

Logo, conclui-se que o Espaço Amostral do experimento é:

$$\Omega = \{A, B\}.$$

Assim, a probabilidade de ocorrer A ou B é a mesma, ou seja:

$$P(A) = \frac{1}{2} = P(B).$$

Após esta explanação, solicitou-se aos grupos que determinassem a probabilidade da ocorrência de *Cara* ou *Coroa* no lançamento de duas moedas. Rapidamente, todos os grupos conseguiram resolver tais propostas e um dos grupos apresentou a resolução, como segue na Figura 13:

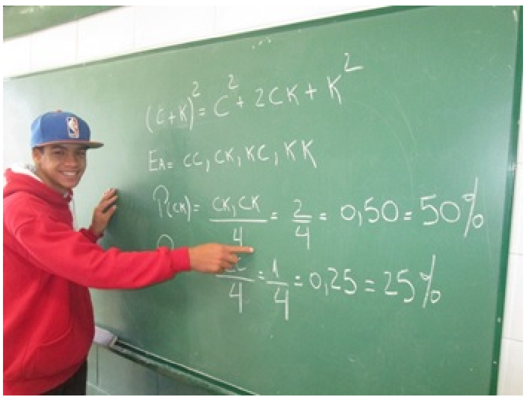


Figura 13 – Resolução 1

Com isso, ficou estabelecido, que a partir de tal solução, todos os grupos definiriam seus espaços amostrais por meio de expansões de somas algébricas, até porque, dependendo do experimento, tornaria-se muito difícil determinar espaços amostrais muito grandes apenas com a contagem das combinações possíveis.

Assim, para finalizar esta primeira sequência de problemas, foi solicitado aos alunos que calculassem a probabilidade da ocorrência de A, B, A no lançamento de 3 moedas. Imediatamente, devido à natural concorrência que surgiu entre os grupos, os alunos procuraram resolver o quanto antes a questão proposta e todos eles obtiveram êxito. Selecionou-se a solução proposta por um dos grupos, exibida na Figura 14, para ratificar o sucesso obtido frente ao desafio proposto.

Figura 14 – Resolução 2

Destaque-se que na conclusão anterior, o grupo em questão, utilizou-se da seguinte notação: para *Cara* (a) e para *Coroa* (b). Tal notação foi feita devido às notações já utilizadas no desenvolvimento de produtos notáveis.

5.2 Atividade 2

Dando prosseguimento ao trabalho, nesta atividade, calculou-se a probabilidade de alguns eventos no manuseio de tetraedros regulares. Primeiramente foi conversado com os alunos sobre o conceito dessa figura geométrica. Sem mais aprofundamentos, já que não era esse o propósito, foi colocado de forma simplista que o Tetraedro Regular é um poliedro formado por 4 triângulos equiláteros, ou seja, que possui 4 faces triangulares iguais.

Assim, foi distribuído para cada grupo envolvidos na atividade, a planificação da figura. Inicialmente, numerou-se as 4 faces triangulares.

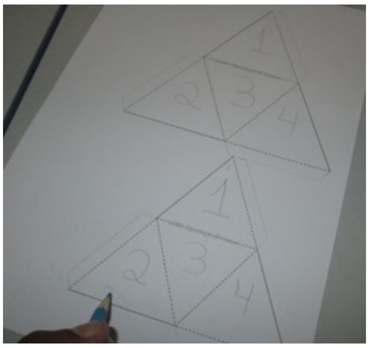


Figura 15 – Planificação do tetraedro

Para tornar a atividade mais atrativa e prazerosa, solicitou-se aos alunos que além de numerar as faces do tetraedro, também as colorissem conforme a preferência de cada grupo. Isso, desde que, cada face do mesmo tetraedro tivesse coloração diferente e que todos os tetraedros de cada grupo, tivessem as mesmas cores conforme suas numerações. Cabe ressaltar que, cada grupo, numerou e coloriu 4 tetraedros.

Após esta etapa, recortou-se e montou-se os tetraedros, trabalhando-se assim também

Figura 16 – Colorindo os tetraedros

a coordenação motora dos alunos e o aspecto lúdico da atividade, além de várias funções cognitivas. Os resultados foram os seguintes:

Figura 17 – Tetraedros

A partir daí, alguns alunos já pensando a respeito da finalidade de confeccionarem os tetraedros, perguntaram se seriam calculadas probabilidades assim como já havia ocorrido com o kit de moedas.

Em virtude desses questionamentos, foi colocado aos alunos, que era exatamente este o propósito, destacando que o espaço amostral seria maior, já que o tetraedro possui 4 faces. Assim o trabalho dispendido seria mais árduo.

Como o tempo reservado às tarefas pertinentes às atividades do uso dos tetraedros seria maior, a atividade principal, baseou-se em pensar e conjecturar sobre o espaço amostral quando são lançados simultaneamente 4 tetraedros. Todos os grupos, chegaram ao consenso que o espaço amostral seria composto por 44 elementos, ou seja, 256 possibilidades diferentes.

Para finalizar esta atividade, pediu-se aos alunos que determinassem a probabilidade da ocorrência de 2 faces iguais quando são lançados 4 tetraedros simultaneamente.

Três dos 5 grupos envolvidos na atividade conseguiram calcular tal probabilidade de maneira correta e dentro do tempo de aula. A figura abaixo nos exemplifica a resposta de um dos grupos para o problema proposto.

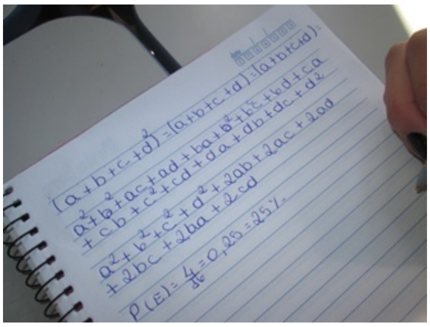


Figura 18 – Resolução 3

Observe-se que a resposta dada apresenta um pequeno erro de grafia, onde o sinal de igual (=) na multiplicação da primeira linha, na verdade deveria ser o sinal da multiplicação (x). No entanto, de forma alguma isso tira o mérito do grupo que entregou tal resposta, apenas é passível de uma orientação para que se tenha mais cuidado na escrita matemática correta.

5.3 Atividade 3

No decorrer desta atividade foi aplicado o jogo *General*. Cabe ressaltar que os alunos foram incumbidos de fazerem previamente uma pesquisa a respeito de tal jogo, para que os mesmos se apropriassem não só das regras, mas também se familiarizassem um pouco mais com o assunto.

Para o desenvolvimento da atividade foram utilizados 25 dados com as faces numeradas de 1 a 6. E copos plásticos para o manuseio dos dados, formando 5 kits para o desenrolar do jogo.

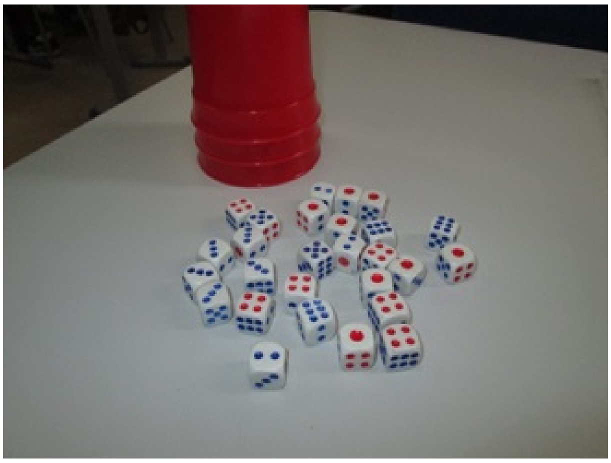


Figura 19 – Material utilizado no jogo

Sendo assim, cada grupo ao primeiro contato com o kit, mostrou-se curioso e logo fez questão de manuseá-lo. Percebeu-se então, um alto grau de expectativa em relação ao trabalho que seria realizado a partir deste momento.

Embora todos tivessem realizado a pesquisa, alguns alunos mostraram-se com dúvidas relativas às regras do jogo, principalmente no que diz respeito à pontuação.

É claro que esta reação já era esperada, tendo em vista, que apesar de todos pesquisarem sobre o mesmo assunto, houve uma grande diversidade acerca dos tipos de combinações possíveis e suas respectivas pontuações.

Em decorrência disso, constatou-se que o jogo em questão apresenta diversas interpretações diferentes. Assim foi necessário criar-se um rol de regras para o desenvolvimento do mesmo. Observou-se que a escolha das jogadas pertinentes, bem como o valor de cada uma, foi acordada entre os grupos participantes. Esta decisão, desenvolve a autonomia dos educandos:

> Os jogos envolvem regras e interação social, e a possibilidade de fazer regras e tomar decisões juntos é essencial para o desenvolvimento da autonomia (KAMMI, 1992).

Estabeleceu-se que o jogo seguiria os seguintes critérios:

- Cada jogador ou grupo, em cada jogada, poderá lançar os dados por 3 vezes, podendo ou não retirar os mesmos se achar necessário.

- Os critérios de pontuação seriam os seguintes: General (50 pontos), Sequência (40 pontos), Fula (35 pontos), Quadra (30 pontos), Trinca (25 pontos) e jogadas do 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

- Cada partida seria composta por 11 jogadas, ou seja, não seria possível descartar qualquer jogada realizada.

Também, em virtude das modificações realizadas, seria preciso confeccionar uma nova tabela de pontuação (exibida na Figura 20). Isso foi imediatamente feito de forma manual.

Figura 20 – Nova tabela de pontuação

Para tornar a atividade mais interessante e atraente para os educandos, convencionou-se que os 3 grupos de maiores pontuações, ao final de cada partida, receberiam uma premiação, que seria dada ao 1º, 2º e 3º lugares, sendo, respectivamente uma caixa de bombom, uma caixa de bis e um pacote de balas e pirulitos.

Claro que, ao fazer isso, de certa maneira estimulou-se a competitividade. O que de certa forma também é sadio, pois deve-se ensinar a todos, mas não se pode deixar de reconhecer os que se destacam:

> Cabe à escola democraticamente educar a todos, mantendo todos os níveis de exigência e de rigor compatíveis com o sentido da educação, mas simultaneamente cabe à escola privilegiar os que melhor se destacam, garantindo-lhes oportunidades para que sua criatividade não esbarre em limites (ANTUNES, 2007).

Já era sabido entre os educandos, que a participação efetiva em todo o processo faria parte da avaliação trimestral. E ainda, no decorrer da partida, escolhería-se uma situação de jogo de cada grupo, a partir da qual seriam calculadas a probabilidade de determinada jogada ocorrer. O acerto do cálculo dessa probabilidade, acarretaria em pontos extras para a prova geral do trimestre, já que na mesma o assunto seria abordado.

O desenrolar do jogo deu-se de maneira muito descontraída e divertida como ilustrado na Figura 21. Conforme as jogadas aconteciam, criavam-se novas expectativas acerca da pontuação de cada grupo e do alcance de determinadas jogadas específicas.

Figura 21 – Desenvolvimento do jogo

Conforme o combinado, algumas situações de jogo seriam analisadas para que os grupos envolvidos no processo pudessem tomar decisões mais acertadas na busca por obter êxito no jogo. Ou seja, para que a chance de sucesso em determinada jogada fosse calculada e a partir daí os jogadores direcionassem suas ações com um percentual menor de erros.

A primeira jogada analisada foi a da Figura 22:

Figura 22 – Jogada analisada 1

Cabe salientar que este resultado é fruto da segunda jogada, e que o grupo em questão não tem, ainda, a pontuação de General e nem de Fula. O questionamento realizado foi :

"Qual é o resultado mais provável de se conseguir na terceira jogada? Um General de cincos ou uma Fula?"

Após esta pergunta os grupos ficaram bastante intrigados pensando em alternativas para resolver esta questão. A concentração foi tamanha que, em determinados momentos, a sala encontrava-se em silêncio absoluto. O nível de concentração por parte dos alunos era enorme. Discussões e projeções acerca dos espaços amostrais eram tamanha, que grupos distintos que discordavam e competiam anteriormente, neste momento, compartilhavam qualquer ideia nova - Figura 23.

Figura 23 – Grupo trabalhando

Nisso, dois dos grupos decidiram trabalhar em conjunto. Ficou para cada um determinar a probabilidade pedida, ou seja, enquanto um dos grupos determinava a probabilidade de ocorrer um general, o outro calculava a probabilidade de ocorrer uma Fula. Este trabalho em conjunto, logo surtiu efeito. Um desses grupos, apontou que a probabilidade de ocorrer um general de cincos, dada a situação, é de $\frac{1}{36}$, ou ainda, aproximadamente 2.7%. Pouco tempo depois, o outro grupo chegou à conclusão de que a probabilidade de ocorrer a Fula, caso se tirasse um dos dados com face 2 ou 6 e mantivessem os outros três dados com face 5, seria de $\frac{1}{6}$, ou seja, de aproximadamente 16%. Com isto, os dois grupos, após trabalharem juntos, decidiram que a jogada mais apropriada seria de tentar obter uma Fula - o que, coincidentemente aconteceu. Observe-se que, numa decisão em conjunto, ambos os grupos foram beneficiados com os pontos extras previamente acordados.

No decorrer da partida, outra situação de jogo foi analisada. Jogou-se os cinco dados e foi obtido o seguinte resultado: duas faces voltadas para cima com o nímero 1, outras duas faces com o número 3 e uma outra face também voltada para cima com o número 5. Retirou-se o dado cuja face era 5 e a configuração obtida foi a exibida na Figura 24:

Figura 24 – Jogada analisada 2

Dessa vez, o questionamento foi o seguinte:

"Qual a probabilidade de no próximo lançamento de um dado, ocorrer uma Fula?"

Quase que, instantaneamente, todos os grupos apresentaram seus resultados e estavam todos corretos. Muitos acharam o problema muito fácil, tendo em vista o anterior.

O resultado apresentado pelos grupos foi que a probabilidade de ocorrer uma Fula na próxima jogada era de $\frac{2}{6}$, ou seja, aproximadamente 33%.

Aproximando-se o final do jogo e também o da aula, resolveu-se que o grupo que solucionasse em primeiro lugar a próxima questão de jogo, seria beneficiado com 20 pontos ao final da partida.

Na décima jogada de um dos grupos, apresentou-se a seguinte situação:

Figura 25 – Jogada analisada 3

Como tinha-se 2 dados para o próximo lançamento, dessa vez a pergunta foi:

"Qual a probabilidade de ocorrer uma quadra de cincos no próximo lançamento?"

Neste momento, o afinco dos grupos foi total, já que o acerto dessa pergunta, praticamente decidiria o resultado do jogo. Após pouco mais de 5 minutos, eis que surge a primeira resposta:

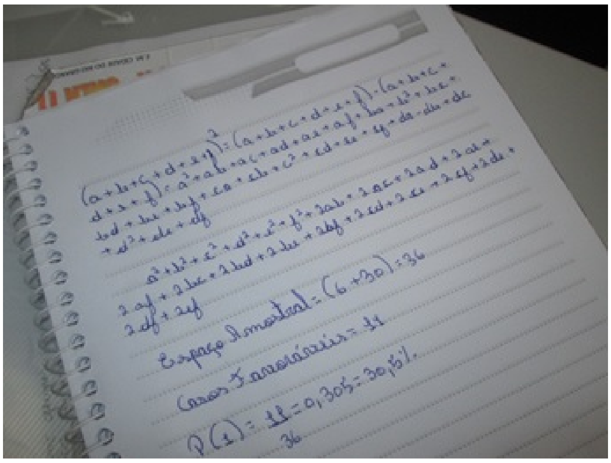


Figura 26 – Resolução 4

Após a análise da resposta, verificou-se que a mesma estava absolutamente certa e foram concedidos os 20 pontos à equipe que a apresentou.

Enfim, as jogadas foram acabando e os grupos mostravam-se cada vez mais ansiosos pelos resultados.

Ao término, somaram-se os pontos de todas as equipes e foram anunciados os vencedores, que é claro, ficaram eufóricos com os resultados obtidos.

Figura 27 – Premiação 1

Figura 28 – Premiação 2

Figura 29 – Premiação 3

Para o fechamento dessa atividade, ficou o seguinte questionamento - que foi feito por uma das alunas no transcorrer do jogo - para ser pensado e analisado em casa, pelos alunos, para posteriores desdobramentos:

"Qual será a probabilidade de ocorrer um GENERAL na primeira jogada ?"

Este questionamento será respondido e analisado na próxima atividade proposta neste trabalho.

5.4 Atividade 4

Esta atividade tem como objetivo não só responder o questionamento final da atividade anterior, mas, também, de fazer com que os alunos sejam levados a aprofundar seus conhecimentos no que diz respeito aos cálculos de probabilidade, e assim, introduzir os mesmos, empiricamente, no conhecimento de alguns elementos da análise combinatória.

Determinem-se as probabilidades de quatro das principais pontuações do jogo general: a Fula, a quadra, a trinca e o próprio general.

Será levado em conta a probabilidade de obter-se as combinações acima e sua pontuação, obtidas num único lançamento.

Para que se determine as probabilidades, usa-se os princípios aditivo e multiplicativo (SANTOS; MELLO; MURARI, 2007).

Acredita-se que com o uso desses princípios, consegue-se fazer com que os alunos compreendam as probabilidades calculadas, sendo até capazes de determinar tantas outras quantas acharem necessárias. Ressalte-se que esta atividade trata-se de uma sugestão a ser trabalhada no próximo trimestre, devendo ser incluída no respectivo planejamento.

Observa-se que a narrativa abaixo, explicando como se deve pensar a respeito dos problemas para determinar as possíveis soluções, tentam ir ao encontro do entendimento de alunos do 8º ano do ensino fundamental.

5.4.1 Probabilidade da Quadra

Mesmo com todos os dados sendo jogados ao mesmo tempo, será considerado que cada dado atinja o solo com uma determinada ordem. Assim, vamos denominar os dados de: dado 1, dado 2, dado 3, dado 4 e dado 5.

Pensando-se no dado 1, como existem 6 tipos de Quadras, isto é, 4 dados com a mesma face voltada para cima e existem 6 faces distintas em cada dado - (dado 1, dado 2, dado 3, dado 4, dado 5) - cada face pode assumir 6 valores. Com isso, os dados 2, 3, 4 só podem assumir uma única face voltada para cima, isto é, a mesma face obtida no dado 1. E consequentemente, como o dado 5 pode assumir qualquer valor, desde que seja diferente dos outros, tem-se:

$$6 \times 1 \times 1 \times 1 \times 5 = 30 \text{ possibilidades.}$$

E tem-se ainda que os cinco dados podem permutar suas posições. Assim, há um total de 150 possibilidades de obter uma quadra e a probabilidade de obtê-la num único lançamento simultâneo de cinco dados é:

$$P(Q) = \frac{(5 \times 30)}{7.776} = \frac{150}{7.776} = 0,0192$$

5.4.2 Probabilidade de Trinca

Usando a mesma nomenclatura e o mesmo raciocínio usados no cálculo anterior, também obtem-se os cálculos das próximas probabilidades.

Daí, para o dado 1, tem-se também 6 possibilidades (dado 1, dado 2, dado 3, dado 4, dado 5). No entanto, os dados 2 e 3 vão repetir a face do dado 1, ou seja, possuem uma única possibilidade. Já o dado 4, terá 5 maneiras diferentes de resultar numa face distinta da face dos dados 1, 2 e 3. E, finalmente, o dado 5 pode assumir 4 valores, assim:

$$6 \times 1 \times 1 \times 5 \times 4 = 120 \text{ possibilidades.}$$

Como os dados da Trinca podem permutar em 5 posições tomadas 3 a 3, a probabilidade de obter-se uma Trinca é de:

$$P(T) = \frac{(10 \times 120)}{7.776} = \frac{1200}{7.776} = 0,1543$$

5.4.3 Probabilidade da Fula

Procedendo de maneira análoga, determinam-se primeiramente as possibilidades para o dado 1, ou seja, novamente tem-se 6 possibilidades. Já os dados 2 e 3 devem assumir o mesmo valor da face obtida no dado 1. Os dados 4 e 5 devem possuir o mesmo valor idênticos entre si, o que pode ser feito de 5 maneiras. Assim: teremos:

$$6 \times 1 \times 1 \times 5 \times 1 = 30 \text{ possibilidades.}$$

Novamente deve-se considerar as permutações dos dados com faces distintas nas posições ocupadas, o que pode ser feito de 10 maneiras diferentes. Assim, como tem-se um total de 30 possibilidades de uma Fula, a probabilidade de obter-se, num único lançamento simultâneo de cinco dados, é:

$$P(F) = \frac{(10 \times 30)}{7.776} = \frac{300}{7.776} = 0,0385.$$

5.4.4 Probabilidade do General

Este cálculo se torna o mais simples de todos, pois neste caso, só existem 6 casos possíveis de obter um general, quais sejam: general de 1, 2, 3, 4, 5, ou 6.

Portanto, a probabilidade de resultar um general, logo na primeira jogada, é de:

$$P(G) = \frac{6}{7.776} = 0,0007.$$

6 Possíveis Trabalhos Futuros

As atividades propostas neste texto, envolvendo probabilidade, poderiam ser aprofundadas e tranquilamente serem desenvolvidas no ensino médio.

Acredita-se que, com isso, seria facilitada a compreensão da construção de espaços amostrais para diversos tipos de experimentos aleatórios trabalhados, possibilitando o domínio conceitual do objeto em estudo.

Tratando-se de alunos pertencentes ao ensino médio, acredita-se que seria possível, inclusive, a obtenção de espaços amostrais bem mais amplos do que os explorados neste trabalho.

Também seria possível aplicar este estudo no ensino superior, tendo-se em vista que muitos alunos chegam à universidade com pouca ou nenhuma noção a respeito do assunto trabalhado. Ou, até mesmo, como alternativa para as árvores de probabilidades que geralmente são vistas quando se estuda experimentos aleatórios como: lançamentos de moedas, lançamentos de dados, etc.

É interessante incluir uma atividade com o jogo *General* que possa demandar mais tempo, para que se possa, inclusive no ensino fundamental, explorar mais situações de jogo, aumentando o nível de dificuldade da atividade e, consequentemente, a aprendizagem dos alunos.

Além disso, pode-se desenvolver atividades interdisciplinares, já que ao se fazer uma pesquisa, consegue-se envolver outras áreas de conhecimento como história e português. O desenvolvimento de jogos e o conteúdo de probabilidade poderiam facilmente serem tratados como temas geradores para tais atividades.

Note-se que esse tipo de atividade pode perfeitamente desencadear, antecipadamente, o estudo das propriedades do Triângulo de Pascal. O estudo das propriedades desse objeto pode facilitar bastante o cálculo dos coeficientes de expansões similares às abordadas aqui e permitir atacar problemas mais complexos. Por exemplo, a determinação de coeficientes de expansões de potências de somas com mais de duas parcelas, como: $(A+B+C+D+E+F)^5$. Definindo $x = A+B+C$ e $y = D+E+F$ surgiria o Triângulo de Pascal para a expansão:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 4xy^4 + y^5$$

onde surgem Triângulos de Pascal para x^5, x^4, etc.

Acredita-se que a construção de Triângulos de Pascal e o estudo de suas propriedades se mostre de grande valor educativo, por permitir aos estudantes o prazer de descobertas ou redescobertas matemáticas. Possibilidades que desencadeiam sensações prazerosas de querer saber, querer compreender mais e melhor: que é o ápice da expectativa educativa.

7 Considerações finais

Apesar da teoria das probabilidades ser uma área muito rica em conhecimento, que pode ser aplicada em diversas outras áreas, infelizmente ela é pouco ou nem sequer explorada no ensino fundamental.

O grande desafio deste trabalho foi o de romper com esta cultura, mostrando que os alunos de tal nível escolar são capazes de aprender qualquer tipo de conteúdo, desde que trabalhados de forma adequada.

Ratifica-se que este trabalho apresenta uma forma de ensino diferenciada: o de se aprender matemática de modo lúdico, mediante uso de jogos e com problemas matemáticos desafiadores e instigantes, com uma rica teoria matemática estudada nos cursos unversitários a dar suporte. Trata-se de uma tentativa de chamar a atenção dos educandos para a beleza e riqueza da matemática e da importância de sua aprendizagem de forma prazerosa, significativa, eficiente e elegante. Logo:

> Não existe um caminho específico que seja considerado o melhor para o ensino de qualquer disciplina, em especial da matemática. Vários são os recursos e as propostas que o educador pode escolher, com base em sua prática, em sua vivência e em sua experiência, para que a aprendizagem ocorra com bons resultados. Entre esses recursos, aparecem os jogos matemáticos (SILVA, 2004).

No decorrer das atividades foram percebidos alguns desafios, como as questões referentes à maneira como seriam desenvolvidas as atividades e o cronograma.

Surpreendentemente os alunos aceitaram e colaboraram de acordo com as regras pré-estabelecidas, como de tentar manter o silêncio durante as explicações referentes às regras do jogo e o fato de terem de trabalhar em grupos e concentrados.

Outro desafio encontrado foi o de relacionar o conteúdo de produtos notáveis com probabilidade. A princípio surgiram algumas dúvidas. No entanto, com a concentração necessária, logo os educandos conseguiram associar tais conteúdos.

No entanto, após observar o envolvimento por parte dos alunos e a aprendizagem eficaz que se comprovou até mesmo nas avaliações realizadas após a aplicação deste trabalho, acredita-se que, sempre que seja possível, deve-se desenvolver os conteúdos matemáticos de forma diferenciada, mais atraente para os educandos, e trabalhar-se com atividades lúdicas se transforma numa ótima opção para isso, tornando a educação realmente efetiva.

Referências

ANTUNES, C. *Professores e professauros: reflexões sobre a aula e práticas pedagógicas diversas*. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2007. Citado na página 44.

BERNARDES, O. *Para uma abordagem do conceito de probabilidade*. Lisboa: Educação & Matemática, 1987. Citado na página 26.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blucher, 1974. Citado na página 26.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries)*. Brasília: [s.n.], 1998. Citado na página 17.

CARVALHO, D. L. de. *Metodologia do ensino de matemática*. São Paulo: Cortez, 2011. Citado na página 14.

GARDNER, M. *Divertimentos matemáticos*. São Paulo: IBRASA, 1998. Citado na página 15.

GOLBERT, C. S. *Novos rumos na aprendizagem matemática*. Porto Alegre: Mediação, 2009. Citado na página 14.

KAMMI, C. *Reinventando a aritmética: Implicações da teoria de Piaget*. São Paulo: Papirus, 1992. Citado na página 43.

KENSKI, V. *O Ensino e os Recursos Didáticos em Uma Sociedade Cheia de Tecnologias*. Campinas, São Paulo: Papirus, 1997. Citado na página 36.

KHAN, S. *Um mundo, uma escola*. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2013. Citado na página 17.

SANTOS, J. P.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Ciências Moderna Ltda, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 50.

SILVA, M. *Clube de matemática: Jogos educativos*. São Paulo: Papirus, 2004. Citado na página 54.

SOUZA, J. R. de. *Vontade de Saber Matemática*. São Paulo: FTD, 2015. Citado na página 25.

SPIEGEL, M. R. *Teoria e problemas de probabilidade e estatística*. Porto Alegre: Bookman, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 25, 27 e 28.

VOLPATO, G. *Jogo, brincadeira e brinquedo: usos e significados no contexto escolar e familiar*. Florianópolis: Cidade Futura, 2002. Citado na página 14.

Anexos

ANEXO A – Relatos

A seguir são apresentados os resultados sob a visão dos alunos a respeito de três questões propostas sobre as atividades desenvolvidas neste estudo, bem como, alguns relatos fielmente transcritos de alguns alunos, dando a sua opinião acerca da importância e a aprendizagem obtida pelos mesmos.

Todos os relatos transcritos são dos alunos da turma 8º ano A, já que infelizmente na outra turma, o 8º ano B, só se falou informalmente sobre o assunto, já que não houve tempo suficiente para uma conversa com os estudantes sobre o que acharam das atividades.

Os questionamentos realizados aos alunos foram os seguintes:

a) **Você achou importante aprender os conceitos básicos de probabilidade? Se sim, por quê?**

Quanto a esta pergunta, os resultados foram os seguintes:

- Dos 24 alunos da turma, 21 acharam importante, 2 não acharam importante e apenas 1 não respondeu. Os 2 alunos que não acharam importante aprender probabilidade, não souberam justificar o motivo.

Abaixo, os relatos de algumas justificativas:

"Achei importante porque é uma matéria que faz a gente pensar."(Cassiano)

"É importante porque é um conteúdo que nunca foi dado. É matéria nova."(Taiane)

"Acho importante porque desenvolve nosso raciocínio."(Eduarda)

"Acho importante pois quero ser professor de matemática e acho que preciso aprender probabilidade."(Murilo)

"Achei muito importante porque é interessante."(Richard)

b) **Você gostou de aprender probabilidade utilizando o jogo general? Se sim, por quê?**

- Do total dos 24 alunos da turma, por incrível que pareça, todos responderam que gostaram, sendo que apenas 1 aluno, não soube justificar o motivo.

Segue, os relatos:

"Adorei aprender assim, me diverti muito."(Pamela)

"Foi muito legal, aprendi bastante e foi divertido."(Jeferson)

"Tudo foi muito legal, o jogo e a aprendizagem."(Márcia)

"É uma forma de aprender bem legal."(Monique)

"Sim, acho que foi muito divertido e importante."(Endy Maike)

"Sim gostei muito, tomara que seja sempre assim."(Paulo Ricardo)

"Foi bem legal, aprendi muito e gostei bastante."(Rafaela)

c) Você considera que conseguiu aprender de maneira significativa o conteúdo trabalhado? Dê a sua opinião:

Claro que para responder a esta pergunta de maneira fidedigna, primeiramente foi conversado com os alunos o que entendemos por aprendizagem significativa, mesmo assim, alguns ficaram com dúvida. De todos os alunos da turma, 18 acharam que sim, 2 acharam que não e o restante não soube responder. A seguir, o relato de algumas opiniões.

"Acho que aprendi bem melhor, não vou esquecer do que aprendi."(Suelen)

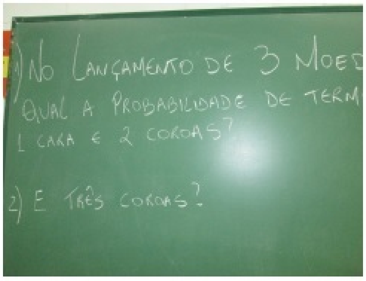
"Aprendi muito melhor assim, aprendi jogando e gostei muito."(Mikaela)

"Foi muito bom aprendi para sempre."(Jordan)

"Acho que sim, tirei notas boas e sei fazer tudo."(Samuel)

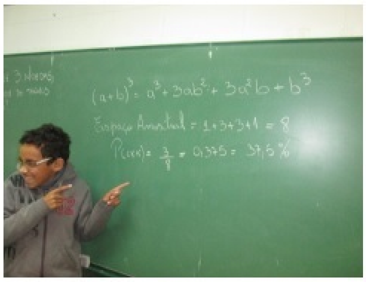
Obs: Procurou-se fazer uma avaliação do trabalho sobre a ótica dos estudantes, tentando colocar a opinião de todos, diversificando os relatos.

ANEXO B – Fotos Diversas



Fotos diversas 1

Fotos diversas 2

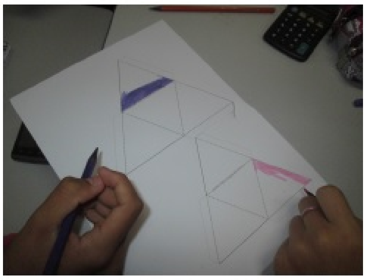


Fotos diversas 3

Fotos diversas 4

Fotos diversas 5

Fotos diversas 6



Fotos diversas 7

Fotos diversas 8

Fotos diversas 9

Fotos diversas 10

Fotos diversas 11

Fotos diversas 12

Fotos diversas 13

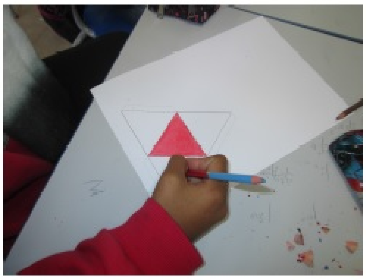
Fotos diversas 14

Fotos diversas 15

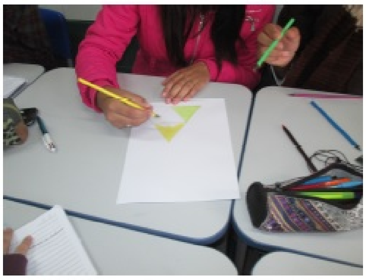
Fotos diversas 16

Fotos diversas 17

Fotos diversas 18



Fotos diversas 19

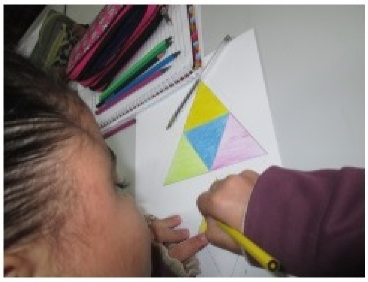


Fotos diversas 20

Fotos diversas 21

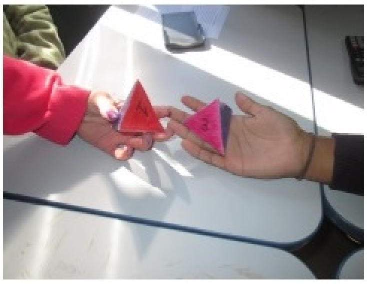
Fotos diversas 22

Fotos diversas 23



Fotos diversas 24

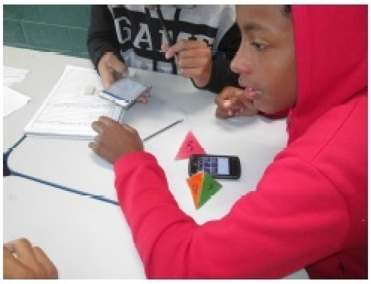
Fotos diversas 25



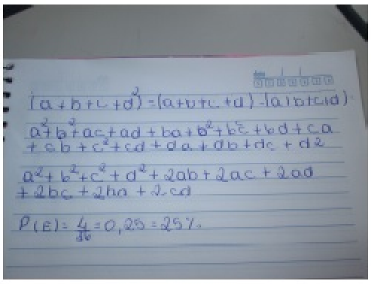
Fotos diversas 26

Fotos diversas 27

Fotos diversas 28



Fotos diversas 29



Fotos diversas 30

Fotos diversas 31

Fotos diversas 32

Fotos diversas 33

Fotos diversas 34

Fotos diversas 35

Fotos diversas 36

Fotos diversas 37

Fotos diversas 38

Fotos diversas 39

Fotos diversas 40

Fotos diversas 41

Fotos diversas 42

Fotos diversas 43

Fotos diversas 44