UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

NÚMEROS IRRACIONAIS

Igor de Oliveira Lima

Orientador: Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo

Feira de Santana

Julho de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

NÚMEROS IRRACIONAIS

Igor de Oliveira Lima

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo

Feira de Santana
15 de Julho de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA - BIBLIOTECA CENTRAL JULIETA CARTEADO

Lima, Igor de Oliveira

L698n Números Irracionais / Igor de Oliveira Lima - Feira de Santana, 2016.

36f.: il.

Orientador: Ademakson Souza Araújo.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Feira de Santana, 2016.

1 - Matemática - Ensino médio. 2. Números irracionais. I. Araújo, Ademakson Souza, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU:51

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE IGOR DE OLIVEIRA LIMA DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos quinze dias do mês de julho de dois mil e dezesseis às 15:00 horas no Auditório PPGM - Módulo 5, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Números Irracionais"**, do discente **Igor de Oliveira Lima**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Ademakson Souza Araújo (Orientador, UEFS), Abílio Souza Costa Neto (UESB) e Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 15 de julho de 2016.

Ademakson S. Araújo

Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo (UEFS)
Orientador

Abílio Souza Costa Neto

Prof. Me. Abílio Souza Costa Neto (UESB)

Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Mauricio de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos à SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) e a CAPES, pela brilhante iniciativa de investir no ensino de matemática, a nível de educação básica, através do PROFMAT.

Gostaria de agradecer também ao meu orientador, Ademakson Souza Araújo, pela paciência durante as orientações principalmente com o latex.

Resumo

Nesta dissertação propomos aos professores do ensino médio uma apresentação dos números irracionais, estudando os números, e, π e $\sqrt{p}$, com p primo. Nosso objetivo é de contribuir para o aprimoramento da aprendizagem dos números irracionais pelo corpo docente do ensino básico. Apresentamos um pouco da história sobre o surgimento dos números irracionais, além de dar destaque aos números irracionais mais comuns na escola, apresentando suas demonstrações de irracionalidade e algumas aplicações que os professores podem usar como mais uma opção para planejar suas aulas.

Sumário

Introdução

A ideia deste trabalho surgiu quando ministrava aulas numa turma de primeiro ano do ensino médio sobre conjuntos númericos, mais especificamente, conjunto dos números irracionais. Durante a explicação do assunto, um estudante disse que não havia entendido a demonstração feita no livro didático sobre a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Após explicar-lhe a demonstração, comentei sobre outros números irracionais, como π e as raízes quadradas de números primos, $\sqrt{p}$. No entanto, eu nunca havia visto uma demonstração da irracionalidade de π.

Certa vez li num livro, não lembro o qual, a seguinte frase: "O professor de matemática precisa saber mais do que a quem ele vai ensinar", pois desta forma o professor conseguirá ter uma visão mais ampla do problema, e foi esta visão mais abrangente que me faltou sobre a irracionalidade de π, afinal, tanto eu como o estudante tínhamos o mesmo conhecimento, ou seja, nós dois não sabíamos o porquê da irracionalidade de π, apenas acreditávamos, como se fosse uma verdade absoluta.

Deste modo, propomos apresentar uma demonstração, que acreditamos ser acessível aos professores de matemática, da irracionalidade de π e também do número de Euler e e $\sqrt{p}$, com p primo. Destacamos que essas demonstrações não devem ser apresentadas aos alunos, mas consideramos que é importante os professores conhece-lás. Além disto, tentamos trazer a importância, dos números irracionais para o ensino da matemática apresentando seu contexto histórico e algumas aplicações em que os números irracionais aparecem.

O trabalho está escrito em quatro capítulos. No capítulo I, abordamos um pouco da história sobre os irracionais e apresentamos duas demonstrações sobre a incomensurabilidade entre lado e a diagonal de um quadrado. A primeira usando o Teorema de Pitagóras e a segunda por construção, usando régua e compasso.

No capítulo II, temos um breve estudo sobre a construção dos números reais, através dos cortes de Dedekind.

No capítulo III, apresentamos as demonstrações da irracionalidade π, e e $\sqrt{p}$. Nessa parte tentamos escrever com o máximo de cuidado, evitando passos que aparentemente sejam triviais, com o objetivo de deixar o texto mais claro.

No capítulo IV, apresentamos exemplos onde os números irracionais surgem no ensino básico em conteúdos diferentes. Possibilitando ao professor fazer sempre que possível o uso dos números irracionais no ensino médio como um todo.

Capítulo 1

Um pouco da história

1.1 Surgimento dos irracionais

É comum colocar que a geometria surgiu às margens do rio Nilo, com as constantes medições de terras devido às mudanças no volume de água do rio, estimulando os mesopotamicos e os egípcios a usarem a geometria para resolver problemas práticos de cálculo de área. No entanto, essa matemática praticada pelos mesopotâmicos e egípcios era diferente da geometria grega, fundada em argumentações consistentes e demonstrações.

Alguns relatos sobre a matemática grega se concentram na escola pitagórica, (discípulos de Pitágoras) que acreditava que a essência de tudo, na geometria, poderia ser explicada pelos números inteiros e suas razões. Porém, a comunidade matemática foi supreendida com a descoberta da incomensurabilidade, ou seja, que a geometria dos inteiros e suas razões era insuficiente para comparar grandezas como a diagonal e o lado do quadrado ou a diagonal e o lado de um cubo.

A descoberta feita pelos pitagóricos é cheia de incertezas, porém, é comum encontrarmos nos livros didáticos que a descoberta da incomensurabilidade se deu com uma aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo isósceles.

A demonstração é feita por redução ao absurdo, da seguinte forma:

Sejam d e l respectivamente a diagonal e o lado de um quadrado e suponhamos que d e l sejam comensuráveis, ou seja, que $\frac{d}{l}$ é racional e igual a $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si. Usando o teorema de pitágoras

$$d^2 = l^2 + l^2,$$

$$d^2 = 2l^2$$

temos

$$(\frac{d}{l})^2 = (\frac{p}{q})^2 = 2$$

logo

$$p^2 = 2q^2$$

portanto p é par. Fazendo $p = 2r$, com r inteiro, então

$$p^2 = 2q^2$$

implica

$$4r^2 = 2q^2$$

daí

$$q^2 = 2r^2$$

portanto q também é par. Mas isso é um absurdo pois, supomos p e q primos entre si.

Esta demonstração da incomensurabilidade foi bastante contestada, por [6], pela abstração que possui, logo, vamos apresentar uma demonstração encontrada em [6] onde a incomensurabilidade decorre da construção por construção.

Proposição 1.1. *O lado e a diagonal de um quadrádo são incomensuráveis.*

Seja $ABCD$ um quadrado de lado AB e diagonal AC. Suponhamos que AB e AC sejam comensuráveis, ou seja, que existe um segmento AP que cabe uma quantidade inteira de vezes em AB e em AC. Com a ponta seca do compasso em C e abertura CB marcamos o ponto B_1 pertencente à diagonal AC, tal que $CB_1 = CB$.

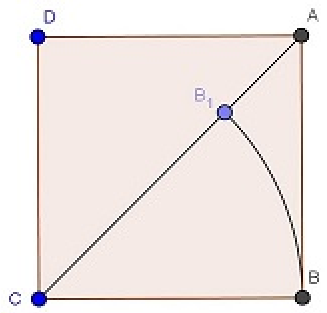

Figura 1.1: $CB_1 = CB$

Usando a ponta seca em B_1 e abertura B_1A encontramos o ponto P sobre o segmento CB_1 sobre a diagonal AC. Agora com a ponta seca em P e abertura $r > B_1A$ construímos um arco que intersecta o arco de centro A e mesma abertura r, traçando assim uma perpendicular à AC que intersecta AB em C_1 de modo que o triângulo retângulo AB_1C_1 é isóseles, pois $B_1\hat{A}C_1$ é meio reto.

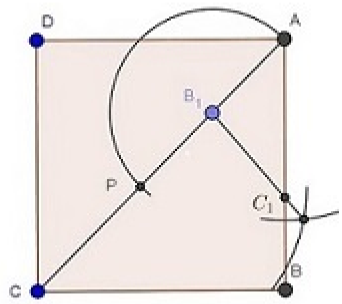

Figura 1.2: $A\hat{B}_1C_1 = 90°$

Agora com a ponta seca em C_1 e abertura C_1B_1 construímos um arco que intersecta o arco de centro A e abertura AB_1 em D_1 tal que $AB_1C_1D_1$ seja um quadrado.

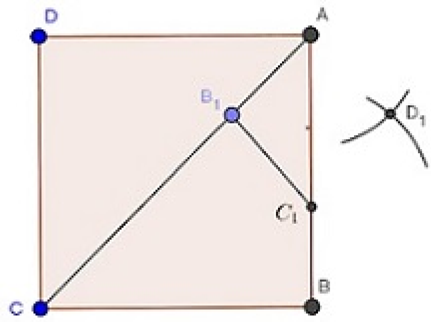

Figura 1.3: $AD_1 = C_1D_1$

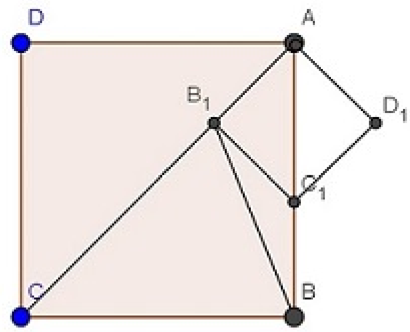

Figura 1.4: Quadrado $AB_1C_1D_1$

Por construção, o triângulo CBB_1 é isósceles, logo o ângulo $C\hat{B}B_1 = C\hat{B}_1B$, assim concluímos que $B_1\hat{B}C_1 = 90^o - C\hat{B}B_1 = 90^o - C\hat{B}_1B = B\hat{B}_1C_1$. Portanto o triângulo

BB_1C_1 é isósceles de base BB_1, deste modo $B_1C_1 = C_1B$. O lado e a diagonal do quadrado $AB_1C_1D_1$ pode ser escrito em função do lado e da diagonal do quadrado $ABCD$ do seguinte modo,

$$AB_1 = AC - B_1C = AC - AB$$

$$AC_1 = AB - BC_1 = AB - B_1C_1 = AB - AB_1 = AB - AC + AB.$$

Como AB e AC são comensuráveis com o segmento AP, então AB_1 e AC_1 também são comensuráveis com AP. Agora, observe que do mesmo modo que construímos $AB_1C_1D_1$ em função do lado e da diagonal do quadrado $ABCD$ podemos continuar esse processo e construir triangulos $AB_nC_nD_n$ cada vez menores, logo para algum $n \in \mathbb{N}$ teremos $AB_nC_nD_n$ com o lado e a diagonal menor que AP tornando a comensurabilidade impossível, portanto um absurdo.

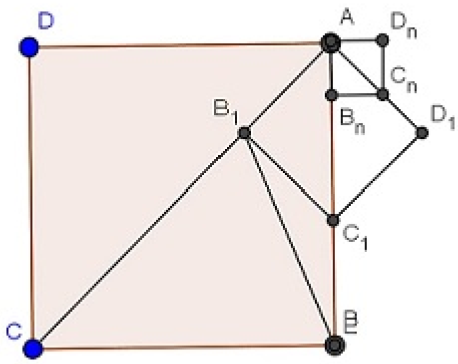

Figura 1.5: Quadrado $AB_nC_nD_n$

■

Capítulo 2

Construção dos números reais

No capítulo I, vimos que os gregos já tinham a necessidade de construir os números reais. A construção dos números reais foi feita de forma independente por Cantor e Dedekind. Neste tópico construíremos os números reias usando as ideias de Dedekind. Por conveniência, omitiremos algumas das demonstrações do trabalho.

2.1 Construção de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{Q}$

Precisamos introduzir novos elementos ao conjunto dos números racionais para formar os números reais. Para isto usaremos a noção de corte construída por Dedekind.

Definição 2.1 (Cortes de Dedekind)**.** Um conjunto α de números racionais chama-se um corte se satisfaz as seguintes condições:

1. $\emptyset \neq \alpha$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$
2. se $r \in \alpha$ e $s < r$, com s racional , então $s \in \alpha$.
3. em α não existe elemento máximo.

Para tornar mais clara a definição de corte analise os exemplos a seguir:

Exemplo 2.2. O conjunto $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < -3\}$ é um corte.

Exemplo 2.3. O conjunto $\beta = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq -21\}$ não é um corte.

Exemplo 2.4. O conjunto $\gamma = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 8\}$ não é um corte.

Observe que o exemplo 2.2 cumpre as condições 1 e 2, e a terceira condição é satisfeita pois, sempre que tomamos um número $x \in \alpha$, existe um $y = \frac{x-3}{2}$ que também pertence ao conjunto e $x < y$. Já o exemplo 2.3 possui um valor máximo, -21. Enquanto o exemplo 2.4 não cumpre a condição 2. De fato, $10 \in \gamma$ e $5 < 10$ mas $5 \notin \gamma$.

Antes de continuarmos nossa apresentação sobre os cortes de Dedekind, vamos definir o que é cota superior.

Um subconjunto não vazio $X \subset \mathbb{Q}$ é limitado superiormente se existir um K racional tal que

$$X \subset (-\infty, K].$$

Chamamos o número K de uma cota superior para X.

Como exemplo de conjunto limitado superiormente considere os seguintes casos;

Exemplo 2.5. O conjunto $X = \{..., -3, -2, -1\}$ é limitado superiomente e 2 é uma cota superior, pois $X \subset (-\infty, 2]$.

Exemplo 2.6. O conjunto $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$ é limitado superiomente e 3 é uma cota superior, pois $X \subset (-\infty, 3]$.

Exemplo 2.7. No conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$, com $r \in \mathbb{Q}$, é limitado superiomente e r é uma a cota superior, pois $X \subset (-\infty, r]$.

O conjunto do exemplo 2.7 é um corte, onde r é a menor de suas cotas superiores. Deste modo, cada número racional r está associado a um corte, que será indicado por r^*. Sendo assim, o corte do exemplo 2.2 será representado por -3^*.

Quando a menor cota superior de um corte é um número racional definimos esse corte de acordo com a definição abaixo.

Definição 2.8. Os cortes que possuem como cota superior mínima um número racional são chamados de cortes racionais.

Agora, apresentamos a demonstração de que existem cortes que não são racionais, ou seja, que não possui cota superior mínima em $\mathbb{Q}$.

Proposição 2.9. *Seja $\alpha = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_-^*$, então α é um corte que não é racional.*

Demonstração. A condição 1, da definição, é satisfeita. De fato, $\alpha \neq \emptyset$, pois $1 \in \alpha$, e $\alpha \neq \mathbb{Q}$, pois $3 \in \mathbb{Q}$ mas $3 \notin \alpha$.

Seja $x \in \alpha$ e $y < x$, com $3 \in \mathbb{Q}$ temos que analisar três casos: se $x, y \in \mathbb{Q}_+$, se $x, y \in \mathbb{Q}_-^*$ ou se $x \in \mathbb{Q}_+$ e $y \in \mathbb{Q}-^*$, para mostrar a segunda condição.

No primeiro caso, como y, x são positivos então $y < x$ implica que $y^2 < x^2 < 2$, logo $y \in \alpha$. No segundo caso, $y, x \in \mathbb{Q}_-^*$ portanto $y \in \alpha$ para $y < x$. No terceiro caso, dado que $y < 0 \leq x$ então $y \in \alpha$. Mostrando assim a condição 2.

Para provar a condição 3 da definição de corte, precisamos mostrar que, dado $x \in \alpha$, existe $y \in \alpha$ com $x < y$. Para $x \leq 0$ é imediato que existe $x < y$ tal que $y^2 < 2$, por exemplo $y = 1$. Vamos então nos ater à valores de $x > 0$. Como $x = \frac{p}{q}$, pois $x \in \mathbb{Q}$, nosso objetivo é encontar um n, com $n \in \mathbb{N}$, tal que $y = \frac{p}{q} + \frac{1}{n}$ também pertença a α, ou seja,

$$(\frac{p}{q} + \frac{1}{n})^2 < 2$$

$$\frac{p^2n^2 + 2pqn + q^2}{q^2n^2} < 2$$

$$(p^2 - 2q^2)n^2 + 2pqn + q^2 < 0. \tag{2.1}$$

A equação (2.1) pode ser pensada como uma função quadrática, cujo domínio está restrito aos conjunto dos números naturais. Como $x = \frac{p}{q}$ pertence a α então $\frac{p^2}{q^2} < 2$ que é equivalente a $p^2 - 2q^2 < 0$, isto garante que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y^2 = (\frac{p}{q} + \frac{1}{n_0})^2 < 2$, pois numa função f definida por $f(n) = (p^2 - 2q^2)n^2 + 2pqn + q^2$ como $(p^2 - 2q^2) < 0$ a função tende ao infinito negativo quando n cresce infinitamente, mostrando que α é um corte.

Agora mostraremos que α não possui cota superior mínima racional. Seja $z = \frac{p}{q}$ um racional tal que $z^2 > 2$, ou seja, z é uma cota superior de α. Nosso objetivo é encontrar um $t = \frac{p}{q} - \frac{1}{n}$ tal que t também seja uma cota superior. Ou seja

$$(\frac{p}{q} - \frac{1}{n})^2 > 2$$

$$(p^2 - 2q^2)n^2 - 2pqn + q^2 > 0. \tag{2.2}$$

Na equação (2.2), como $z^2 = (\frac{p}{q})^2 > 2$ então $p^2 - 2q^2 > 0$, isto garante que existe um n_0 tal que $t^2 = (\frac{p}{q} - \frac{1}{n_0})^2 > 2$, mostrando que α não possui cota superior racional. E este resultado já era esperado, pois não existe número racional que elevado ao quadrado seja igual a 2. ■

Denotamos $\mathcal{C}$ como o conjunto dos cortes. Neste conjunto, precisamos introduzir as operações e desigualdades mostrando que, matematicamente, não há distinção entre $\mathcal{C}$ e o conjunto dos números reais. Deste modo, apresentamos a relação de ordem em $\mathcal{C}$.

2.2 Relação de ordem em $\mathcal{C}$

Começamos definindo a desiguadade entre cortes.

Definição 2.10. Considere os cortes α e β. Dizemos que α é menor do que β, e indicamos por $\alpha < \beta$ quando $\beta \backslash \alpha \neq \emptyset$. Portanto, $\alpha < \beta$ se existe pelo menos um racional $r \in \beta$ e $r \notin \alpha$.

Exemplo 2.11. $0^* < 2^*$, pois, $1 \in 2^*$ mas $1 \notin 0^*$

Definição 2.12. Dizemos que um corte, α, é positivo quando $\alpha > 0^*$ e negativo quando $\alpha < 0^*$.

Teorema 2.13 (Tricotomia). *Sejam α e β cortes em $\mathcal{C}$ então uma e somente uma das possibilidades pode ocorrer:*

$$\alpha = \beta \quad \alpha < \beta \quad \alpha > \beta.$$

Demonstração: Se $\alpha = \beta$ temos que $\beta \backslash \alpha = \emptyset$ e $\alpha \backslash \beta = \emptyset$ o que exclui as outras duas possibilidades. Como as possibilidades $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$ excluem a ocorrência de $\alpha = \beta$, mostraremos que $\alpha < \beta$ e $\alpha > \beta$ não ocorrem simultaneamente. De fato, se $\alpha < \beta$ e $\alpha > \beta$ então $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \supset \beta$, com $\alpha \neq \beta$, mas por definição de igualdade de conjuntos isso é um absurdo.

Finalmente uma desses possibilidades deve ocorrer: $\alpha = \beta$ ou $\alpha \neq \beta$. No primeiro caso, não temos o que demonstrar, já no segundo caso ou $\beta \backslash \alpha \neq \emptyset$ ou $\alpha \backslash \beta \neq \emptyset$, e portanto, teríamos $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$. ■

Teorema 2.14. *A relação $\leq$ é uma relação de ordem em $\mathcal{C}$.*

Demonstração:

,Reflexiva: Seja $\alpha \in \mathcal{C}$. É claro que $\alpha = \alpha$, assim $\alpha \leq \alpha$; Antissimétrica: Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ com $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$. De acordo com a tricotomia, $\alpha = \beta$; Transitiva: Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$ com $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, então $\alpha \leq \gamma$. De fato, $\alpha \subset \beta$ e $\beta \subset \gamma$ assim pela relação de inclusão entre conjuntos $\alpha \subset \gamma$ logo $\alpha \leq \gamma$.

■

2.3 Operações em $\mathcal{C}$

Iniciamos apresentado a definição de soma de dois cortes.

Definição 2.15. Para os cortes α e β em $\mathcal{C}$ definimos $\alpha + \beta$ como sendo o corte $\alpha + \beta = \{r + s \mid r \in \alpha, s \in \beta\}$.

Para esta definição fazer sentido, precisamos mostrar que o conjunto $\alpha + \beta = \{r + s \mid r \in \alpha, s \in \beta\}$ é um corte. A primeira condição é que $\alpha + \beta$ seja diferente do conjunto vazio, o que é claro. Vamos mostrar que $\alpha + \beta$ é diferente do conjunto $\mathbb{Q}$. Sejam $t \in \mathbb{Q} \backslash \alpha$ e $u \in \mathbb{Q} \backslash \beta$. Como $t > r$ qualquer que seja $r \in \alpha$ e $u > s$ qualquer que seja $s \in \beta$, então $t + u > r + s$, logo $t + u \notin \{r + s \mid r \in \alpha, s \in \beta\}$, portanto $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$.

Vamos provar a condição 2. Seja $r \in \alpha + \beta$ e $s < r$; como $r \in \alpha + \beta$ existem p e q, racionais, tais que $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$. Como $s < p + q$ então existe um $q' < q$, com $q' \in \mathbb{Q}$ tal que $s = p + q'$ e, como $p \in \alpha$ e $q' \in \beta$, portanto $s \in \alpha + \beta$.

Finalmente vamos mostrar a condição 3. Seja $r \in \alpha + \beta$; precisamos mostrar que existe um $x \in \alpha + \beta$, com $r < x$, ou seja, $\alpha + \beta$ não possui elemento máximo. Como $r = p + q$, com $p \in \alpha$ e $q \in \beta$ então existe um $p' \in \alpha$ com $p' > p$ e seja $x = p' + q$. Observe que $x > r$ e $x \in \alpha + \beta$. Portanto, $\alpha + \beta$ não possui máximo. ■

Apresentamos o teorema, sem demonstração, que cada corte α tem um simétrico.

Teorema 2.16. *Dado um corte α, existe um único corte β tal que, $\alpha + \beta = 0^*$. Denotamos β por $-\alpha$.*

Este corte $-\alpha$ é definido do seguinte modo, $-\alpha = \{p \in \mathbb{Q} \mid -p \notin \alpha$ e $-p$ não é cota superior miníma de $\alpha\}$. Desta forma, o conjunto $-\alpha$ é formado pelo simétrico dos elementos que não pertencem a α excluindo sua cota superior mínima, se existir.

Exemplo 2.17. Se $\alpha = 3^*$ então o corte $-\alpha$ será igual a $-\alpha = -3^*$.

Definição 2.18. Defininos a subtração de dois cortes α e β, como $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Assim para a subtração de dois cortes α e β, basta somar o corte α com corte simétrico a β. Agora vamos definir o produto de cortes; por simplicidade, vamos nos restringir apenas a cortes positivos, isto é, cortes $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$.

Definição 2.19. Sejam α e β cortes em $\mathcal{C}$, com $\alpha > 0^*$ e $\beta > 0^*$. Definimos o produto dos cortes

$$\alpha\beta = \mathbb{Q}^*_- \cup \{p \in \mathbb{Q} \mid p = ab, \text{ com } a \in \alpha,\ b \in \beta,\ a \geq 0 \text{ e } b \geq 0\}$$

Do mesmo modo que um corte $\alpha > 0^*$ possui inverso aditivo $-\alpha$, podemos definir o inverso multiplicativo, indicado por α^{-1}, de acordo com a definição abaixo.

Definição 2.20. Se $\alpha > 0^*$ então existe um corte α^{-1}, tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$

Este corte α^{-1} é definido da seguinte forma $\alpha^{-1} = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq 0$ ou $p^{-1} \notin \alpha$ e existe $q \notin \alpha$ tal que $q < p^{-1}\}$. Observe que estamos definindo o inverso multiplicativo, por simplicidade, apenas para cortes positivos. Para tornar mais clara a definição acima, considere o exemplo abaixo.

Exemplo 2.21. Seja $\alpha = 3^*$ então o corte $\alpha^{-1} = \frac{1}{3}^*$.

Com as operações de adição e multiplicação o conjunto $\mathcal{C}$ é um corpo, pois satisfaz as seguintes condições:

1. comutatividade: $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha\beta = \beta\alpha$, qualquer que seja $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$.

2. associatividade: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, qualquer que seja α, β e $\gamma \in \mathcal{C}$.

3. Elemento neutro aditivo: existe um $0^* \in \mathcal{C}$ tal que $\alpha + 0^* = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathcal{C}$.

4. Elemento neutro multiplicativo: existe um $1^* \in \mathcal{C}$ tal que $\alpha 1^* = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathcal{C}$.

5. Existência de inversos: dado $\alpha \in \mathcal{C}$ existe $-\alpha \in \mathcal{C}$, tal que $\alpha + (-\alpha) = 0^*$, e dado $\alpha \neq (0)^*$ existe α^{-1} tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1^*$.

6. Distributividade: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, qualquer que seja α, β e $\gamma \in \mathcal{C}$

Definição 2.22. O conjunto $\mathcal{C}$ será denomidado conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

Desta forma, cada corte de Dedekind representa um número real de acordo com a definição abaixo:

Definição 2.23. Um corte racional r^* define o número racional r.

Definição 2.24. Um corte não racional define um número irracional.

Observe que o conjunto dos números reais e racionais mesmo sendo um corpo ordenado são diferentes. Abaixo apresentamos um teorema que é verdadeiro para o conjunto $\mathbb{R}$, porém esse teorema não é válido no conjunto $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.25. *Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que:*

1. $\mathbb{R} = A \cup B$;

2. $A \cap B = \emptyset$;

3. $A \neq \emptyset$ *e* $B \neq \emptyset$;

4. *se* $\alpha \in A$ *e* $\beta \in B$, *então* $\alpha < \beta$.

Nestas condições existe apenas um número real γ tal que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, para todo $\alpha \in A$ e para todo $\beta \in B$.

Exemplo 2.26. Considere os seguintes subconjuntos em $\mathbb{Q}$.

$$A = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 < 2\} \cup \mathbb{Q}_-^* \text{ e } B = \{x \in \mathbb{Q}_+ \mid x^2 > 2\}$$

Observe que os conjuntos A e B satisfazem todas as hipóteses do teorema anterior, quando substituímos $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{R}$. Porém, não existe $\gamma \in \mathbb{Q}$ tal que $r < \gamma$, para todo $r \in A$ e $\gamma < s$ para todo $s \in B$. Informalmente é como se o conjunto dos racionais "pulassem"o número γ deixando um "buraco", coisa que não acontece com o conjunto $\mathbb{R}$, por isso o conjunto $\mathbb{R}$ é dito completo.

Capítulo 3

Números Irracionais

Números irracionais são números que possuem representação decimal infinita e não periódica. Os principais números irracionais que temos contato, no ensino básico, são o número π, a constante de Euler e e as raízes quadradas de números primos. Neste capítulo faremos um breve estudo desses números demonstrando que eles são irracionais.

3.1 O número e

O número de Euler no ensino básico surge, normalmente, nos estudos sobre logaritmo natural. No entanto, o número e apareceu na matemática em estudos relativos a juros compostos, onde a formula de juros compostos $M = C_0(1 + \frac{i}{n})^{tn}$ faz o número e surgir a medida que fazemos n crescer.

O número e é chamado de número de Euler, pois ele usava este número em seus estudos sobre logaritmo natural, definindo e como: "aquele número cujo logaritmo hiperbólico é igual a 1". O número de Euler já tinha aparecido nos estudos de logaritmos de Napier, neste caso, esses logaritmos tinham base $\frac{1}{e}$, no entanto, mesmo Napier sendo o inventor do lagaritmo, a notação de Euler se tornou comum, sendo usado até os dias atuais no ensino básico.

3.2 O número de Euler é irracional

Como os números irracionais não possuem representação decimal finita ou periódica, uma maneira de obtermos aproximações de um número irracional é utilizando os conhecimentos de sequência.

Definição 3.1. Uma sequência é uma função $f_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 3.2. A função definida por $f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ produz a seguinte sequência

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{100}{101}, \ldots, \frac{1000}{1001}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \cdots$$

Observe que os elementos da nossa sequência ficam cada vez mais próximo de 1 quando fazemos n tomar valores naturais cada vez maiores. Quando isso ocorre dizemos que a sequência é convergente e, neste caso, tem limite $L = 1$.

Definição 3.3. Uma sequência f_n tem limite L, se fixado um número real $r > 0$ qualquer existir um número inteiro positivo $N > 0$, tal que para todo $n > N$, o número L pertence ao intervalo aberto $(f(n) - r, f(n) + r)$. E escrevemos $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$.

Quando uma sequência tiver um limite vamos chamá-la de sequência convergente, caso contrário, dizemos que a sequência é divergente.

Usaremos a definição (3.3), para mostrar que o limite da função $f(n) = \dfrac{n}{n+1}$ é 1, ou seja, que dado $r > 0$ qualquer $1 \in (f(n) - r, f(n) + r)$. De fato

$$\mid 1 - \frac{n}{n+1} \mid < r$$

$$\mid \frac{n+1-n}{n+1} \mid < r$$

$$\mid \frac{1}{n+1} \mid < r$$

$$\mid \frac{1}{n+1} \mid < r$$

$$n + 1 > \frac{1}{r}$$

$$n > \frac{1}{r} - r$$

Portanto para todo $n > N$, com $N = \frac{1}{r} - 1$, teremos que $1 \in (\frac{n}{n+1} - r, \frac{n}{n+1} + r)$, como vereficado acima.

Considere a sequência f_n, do exemplo 3.2 formada pelos elementos $f(1), f(2), ..., f(n), ...$ vamos construir outra sequência s_n somando os termos da sequência f_n sempre da forma:
$s(1) = f(1) = \frac{1}{2}$
$s(2) = f(1) + f(2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$
$\vdots$
$s(n) = f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.
$\vdots$
$S = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$

A sequência s_n assim formada possui os seguintes elementos e é chamada de soma infinita.

$$\frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{37}{28}, \frac{297}{140}, ...$$

Definiremos o número e como o limite da soma infinita $s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, a demonstração desse fato pode ser encontrado em [1], porém, como motivação, considere $2,7182818285...$ uma aproximação do número e. Agora veja os seis primeiros elementos da série $s =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, onde, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n$

$s(0) = \frac{1}{0!} = 1$
$s(1) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = 2$
$s(2) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2,5$
$s(3) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \approx 2,666$
$s(4) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \approx 2,7082$
$s(5) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2,716$

Os elementos de s_n estão em ordem crescente, visto que $s(n+1)$ é igual a $s(n) + \frac{1}{n+1}$. A soma está sugerindo que a série $s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ tem como limite o número e, mas sempre com $s(n) < e$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Proposição 3.4. *A irracionalidade do número de Euler e.*

Demonstração

Consideremos

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots \tag{3.1}$$

Suponha que e seja um número racional, ou seja, $e = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ primos entre si. Da equação (3.1) temos

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \ldots \tag{3.2}$$

$$\frac{p}{q} - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{3.3}$$

Vamos agora encontrar um valor aproximado para o somatório $\displaystyle\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + \ldots \tag{3.4}$$

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots\right) \tag{3.5}$$

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots\right). \tag{3.6}$$

A desigualdade (3.6) ocorre porque os termos dentro do parênteses são, respectivamente, maiores ou iguais as parcelas, dentro dos parênteses, da igualdade (3.5), desta forma os números entre os parênteses da inequação (3.6) formam uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{q+1}$. Como a razão da progressão geométrica pertence ao intervalo $-1 < \frac{1}{q+1} < 1$, podemos calcular sua soma usando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, $\dfrac{a_1}{1-r}$, onde a_1 significa o primeiro elemento da progressão geométrica e r significa a razão da progessão. Sendo assim

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{q+1}}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{\frac{1}{q+1}}{\frac{q}{q+1}} = \frac{1}{q}. \tag{3.7}$$

Utilizando o resultado da equação (3.7) na desigualdade (3.6) obtemos

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{q!}(\frac{1}{q})$$

Portanto, a igualdade (3.3) fica escrita da seguinte forma

$$0 < \frac{p}{q} - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!}\frac{1}{q} \tag{3.8}$$

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right)\right) < \frac{1}{q}. \tag{3.9}$$

$$0 < \left(\frac{p \cdot q!}{q} - \left(\frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \ldots + \frac{q!}{q!}\right)\right) < \frac{1}{q}. \tag{3.10}$$

Observe que na equação (3.8) a parcela central é um número positivo, pois $s(n) < e$, e como estamos supondo $e = \frac{p}{q}$, essa desigualdade é verdadeira. Desta forma o termo central da desigualdade (3.9) se transforma em um número natural porque quando multiplicamos $q!$ por cada parcela de

$$\frac{p}{q} - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}\right)$$

os denominadores se cancelam. No entanto isso é impossível, pois $\frac{1}{q} \leq 1$ o que significa que o número natural

$$q!\left(\frac{p}{q} - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}\right)\right)$$

é maior que 0 e menor que 1, o que é absurdo. Portanto, a hipótese, feita inicialmente, de que $e = \frac{p}{q}$ é um racional é falsa, logo e é um número irracional. ■

3.3 Estimando o número de Euler

O logaritmo natural, $\ln x_0$, é definido como a área compreendida entre a hipérbole $f(t) = \frac{1}{t}$, com $t > 0$, o eixo x e as retas paralelas $x = 1$ e $x = x_0$.

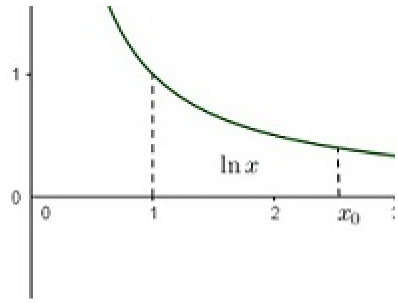

Figura 3.1: Gráfico $\ln x$

Vamos mostrar que $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \dfrac{1}{n})^n$ para n natural positivo. Considere a faixa da hipérbole compreendida entre $x = 1$ e $x = 1 + \frac{1}{n}$, de acordo a figura abaixo.

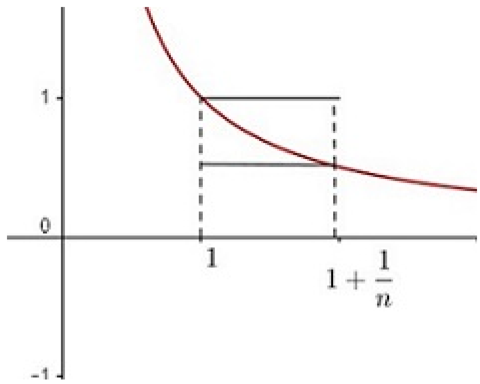

Figura 3.2: $\ln 1 + \frac{1}{n}$

Como a função $f(t) = \frac{1}{t}$, com $t > 0$, é decrescente, podemos concluir que $\ln(1 + \dfrac{1}{n})$ está contida no retângulo de altura 1 e base $\dfrac{1}{n}$, logo $\ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$. Agora $\ln(1 + \dfrac{1}{n})$ contém o retângulo de altura $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ e base $\dfrac{1}{n}$, assim $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n})$. Portanto,

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

$$\frac{n}{n+1} < n\ln(1 + \frac{1}{n}) < 1. \tag{3.11}$$

Como o $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$, concluímos $\lim_{n\to\infty} n\ln(1 + \frac{1}{n}) = 1$ ou equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})^n = 1.$$

Devido à continuidade da função ln e sabendo que $\ln e = 1$ concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Portanto, para estimar o número de Euler basta tomar a expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ com valores de n cada vez maiores.

3.4 O número π

O símbolo π, introduzido por Willian Jones em 1706, para representar a razão entre o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro, sempre fascinou os matemáticos.

Os povos antigos substituíam o valor de π por 3, como mostra um trecho do Livro dos Reis da Bíblia Sagrada.

> Versículo 13 e 14: "O rei Salomão convocou Hirão de Tiro; ele era filho de uma viúva da tribo Naftali, mas seu pai era um artesão de trabalhos em bronze, na cidade de Tiro. Hirão era um artesão muito inteligente, especialista em todos os tipos de trabalhos em bronze. Atendendo o chamado de Salomão, ele realizou todo o trabalho seguinte":
>
> Versículo 23: "Fez o "Mar de broze"de metal fundido, dez cúbitos de borda a borda, de forma circular, e com cinco cúbitos de altura; uma corda de 30 cúbitos de comprimento dava a sua periferia". Neste caso o valor usado pra π foi $\pi = 3$, pois $\pi = \frac{30}{10}$.

Nos dias atuais, sabemos que 3 é uma aproximação grosseira para π. Um dos primeiro matemáticos a tentar encontar um modo de melhorar as aproximações de π foi Arquimedes, para isso ele trabalhou com poliedros regulares inscritos e circunscritos. Desta forma, em uma circunferência com diâmetro unitário, o valor de π está compreendido no intervalo entre o perímetro de poliedro inscrito e circunscrito. Assim Arquimedes encontrou que π pertence ao intervalo entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$, ou seja, $\pi \approx 3,14$.

Desde Arquimedes, os matemáticos vêm encontrando aproximações cada vez melhores de π mesmo sabendo de sua irracionalidade, fato provado por Johrann Heinrich Lambert.

A procura para determinar π com uma precisão cada vez melhor possui aplicações em algumas áreas da ciência como a computação e a estatística. Na estatística existe uma conjectura de que cada dígito tem a mesma probilidade de aparecer na expansão decimal de π, esta afirmação coincide com o resultado obtido em 1999 quando examinando 200 bilhões de casas decimais de π encontraram:

Dígitos	frequência
0	20000030841
1	199999147111
2	20000136978
3	20000069393
4	19999921691
5	19999917053
6	19999881515
7	19999967594
8	20000291044
9	19999869180

Observe que o resultado reforça a conjectura que os dígitos de π estão distribuídos com igual probabilidade.

3.5 Demonstração da irracionalidade de π

Antes de começar a demonstrar a irracionalidade de π, precisamos estudar algumas propriedades sobre a função f abaixo. Estas características serão exploradas durante a demonstração da irracionalidade de π.

Considere a função f

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

onde n pertence ao conjunto dos números naturais.

Lema 3.5. *$D^k f(0)$ é um número inteiro para qualquer $k = 0, 1, 2, ...,$ onde $D^k f(0)$ representa a imagem da k-ésima derivada de f quando $x = 0$, e $D^0 f = f$.*

Demonstração: Considere as funções g e h, onde $g(x) = x^n$ e $h(x) = (1-x)^n$, então $f(x) = \frac{1}{n!} g(x)h(x)$. Usando a fórmula de Leibniz para a derivada do produto de funções g e h, então

$$D^k(gh) = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) D^j g(x) D^{k-j} h(x) \tag{3.12}$$

portanto

$$D^k f = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{n!} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) D^j x^n D^{k-j} (1-x)^n. \tag{3.13}$$

Vamos agora estudar a derivada da função f quando $x = 0$, ou seja, $D^k f(0)$. Da derivada de $D^j x^n$ temos:

$$D^j x^n|_{x=0} = \begin{cases} 0 & se \quad j < n \\ n! & se \quad j = n \\ 0 & se \quad j > n \end{cases} \tag{3.14}$$

Sendo assim concluímos

$$D^k f = 0 \quad se \quad k < n. \tag{3.15}$$

A igualdade (3.15) ocorre porque $D^j x^n$ é igual a zero sempre que $k < n$ e

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} n! D^{k-n}(1-x)^n \quad se \quad k \geq n, \tag{3.16}$$

a igualdade da equação (3.16) é o resultado do somatório da equação (3.13), pois cada parcela de $D^j x^n$ se anula sempre que $j < n$ e sempre que $j > n$, portanto teremos como resultado apenas a equação (3.16) que ocorre quando $j = n$. Observe, agora, que os coeficientes de (3.16) são inteiros, logo, $D^k f(0)$ é um inteiro, como queríamos demonstrar.

■

Do lema (3.5) e da observação $f(1-x) = f(x)$, concluímos que $D^k f(1) = D^k f(0)$, logo, $D^k f(1)$ também é um número inteiro.

Proposição 3.6. *O número π é um número irracional.*

Demonstração Vamos demonstrar a irracionalidade de π supondo por absurdo que $\pi^2 = \frac{p}{q}$ é um número racional, onde p e q são primos entre si, e chegando em uma contradição, ou seja, que π^2 é irracional, desta forma demonstraremos a irracionalidade de π, pois, se π fosse racional isso implicaria que π^2 também seria racional.

Considere a função

$$F(x) = q^n(\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + \pi^{2n-4} D^4 f(x) - \ldots + (-1)^n D^{2n} f(x))$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n q^n \pi^{2n-2k} D^{2k} f(x). \tag{3.17}$$

Usando a nossa hipótese de que $\pi^2 = \frac{p}{q}$ é racional e $D^k f(0)$ e $D^k f(1)$ são inteiros, podemos afirmar que $F(0)$ e $F(1)$ são números inteiros, pois os denominadores de $\pi^{2n}, \pi^{2n-2}, \ldots, \pi^{2n-2k}$, se cancelam quando multiplicamos por q^n.

Vamos indicar a derivada de uma função f por f'. Observe que

$$(F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x)' = F''(x)sen\pi x + \pi F'(x)cos\pi x - \pi F'(x)cos\pi x + \pi^2 F(x)sen\pi x$$

$$(F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x)' = F''(x)sen\pi x + \pi^2 F(x)sen\pi x = sen\pi x(F''(x) + \pi^2 F(x))$$

Como $F(x) = q^n(\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}D^2f(x) + \pi^{2n-4}D^4f(x) - \ldots + (-1)^nD^{2n}f(x))$ então os valores de $\pi^2F(x)$ e da derivada segunda de F são, respectivamente:

$$F''(x) = q^n(\pi^{2n}D^2f(x) - \pi^{2n-2}D^4f(x) + \pi^{2n-4}D^6f(x) - \ldots + (-1)^nD^{2n+2}f(x))$$

$$\pi^2F(x) = q^n(\pi^{2n+2}f(x) - \pi^{2n}D^2f(x) + \pi^{2n-2}D^4f(x) - \ldots + (-1)^n\pi^2D^{2n}f(x))$$

somando essas igualdades membro a membro temos

$$F''(x) + \pi^2F(x) = q^n(\pi^{2n+2}f(x) - (-1)^nD^{2n+2}f(x)).$$

No entanto, na função f o maior expoente de x é igual a $2n$, deste modo, como a quantidade de derivadas é maior que o maior expoente da função f, o termo $(-1)^nD^{2n+2}f(x)$ é igual a zero, portanto

$$(F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x)' = sen\pi x(F''(x) + \pi^2F(x)) = sen\pi x(q^n(\pi^{2n}\pi^2f(x))$$

como estamos supondo que $\pi^2 = \frac{p}{q}$, substituímos π^{2n} por $\frac{p^n}{q^n}$, portanto

$$(F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x)' = sen\pi x(q^n\frac{p^n}{q^n}\pi^2f(x))$$

$$(F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x)' = p^n\pi^2sen\pi xf(x).$$

Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = F'(x)sen\pi x - \pi F(x)cos\pi x$, do Teorema Fundamental do Cálculo sabemos que $\displaystyle\int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0)$ deste modo:

$$p^n\pi^2\int_0^1 f(x)sen\pi xdx = F'(1)sen\pi - \pi F(1)cos\pi - (F'(0)sen\pi 0 - \pi F(0)cos\pi 0)$$

$$p^n\pi^2\int_0^1 f(x)sen\pi xdx = \pi F(1) + \pi F(0)$$

dividindo ambos os lados da igualdade acima por π

$$p^n\pi\int_0^1 f(x)sen\pi xdx = F(1) + F(0). \tag{3.18}$$

Para finalizar observe que o lado direito de (3.18) é um número inteiro, pois $F(0)$ e $F(1)$ são inteiros. Logo, se mostrarmos que o lado esquerdo de (3.18) é um número positivo entre zero e um, para um certo $n \in \mathbb{N}$, vamos encontrar a contradição desejada, provando assim que π é irracional.

Para $0 < x < 1$, temos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}. \tag{3.19}$$

Lembre-se que $f(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$. Aplicando a desigualdade (3.19) em (3.18), temos

$$0 < p^n\pi\int_0^1 f(x)sen\pi xdx < p^n\pi\int_0^1 \frac{1}{n!}sen\pi xdx \tag{3.20}$$

Portanto
$$p^n\pi\int_0^1 \frac{1}{n!}sen\pi x dx = p^n\pi\frac{1}{n!}\int_0^1 sen\pi x dx = \frac{2p^n}{n!}.$$
Como o $\lim_{n\to\infty}\frac{2p^n}{n!} = 0$, ou seja, existe um certo $n \in N$ tal que
$$0 < p^n\pi\int_0^1 f(x)sen\pi x dx < 1$$
o que é uma contradição, sendo assim π é um número irracional. ∎

3.6 Estimando π

No conjunto dos números racionais, quando realizamos a divisão de dois inteiros $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ a expressão decimal encontrada ou é um número finito ou uma dízima infinita periódica. Como exemplo, a fração $\frac{17}{8} = 2,125$ é uma expressão decimal finita, já a fração $\frac{19}{3} = 6,333...$ possui uma expressão decimal infinita e periódica, onde o algarismo 3 se repete infinitamente.

Já os números pertencentes ao conjunto dos irracionais, possuem como característica uma expressão decimal infinita e não periódica. Desta forma, quando escrevemos $\pi = 3,14$ estamos comentento um erro, pois π é um número irracional.

A introdução de π no ensino básico normalmente é estimulada atraves de experiências onde os alunos cumprem a tarefa de calcular a razão da medida da circuferência com seu diâmetro, usando circunferências de vários tamanhos, para concluir que C é aproximadamente $2\pi r$, onde C é o comprimento e r o raio da circunferência. Vamos usar a fórmula para calcular o comprimento de uma circunfência estimando valores cada vez mais próximos de π. Isto serve de motivação para o professor "mostrar"aos alunos que essa sequência não possui periodicidade e nem tal pouco é finita.

Para estimar valores cada vez mais próximos de π vamos usar o método de aproximação por polígonos regulares, onde calculamos o perímetro dos polígonos com o número de lados cada vez maior. Para motivar a ideia faremos um caso particular usando um polígono de quatro lados (quadrado).

Como o raio da circunferência é 1 e ângulo central de cada triângulo é $\frac{360^o}{4} = 90^o$ concluímos, pelo Teorema de Pitágoras, que o lado do quadrado é $\sqrt{2}$, então uma aproximação, grosseira, de π seria
$$2\pi r = 4\sqrt{2} \Rightarrow \pi = \frac{4\sqrt{2}}{2\cdot 1} \Rightarrow \pi \approx 2,828.$$
Agora vamos melhorar nossa aproximação, usando um polígono regular, dobrando o número de lados do polígono atual em relação ao imediatamente anterior. A construção desse polígono será feita da seguite maneira: tome o ponto médio de arco que liga os

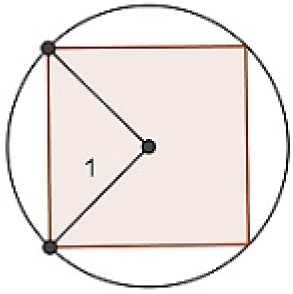

Figura 3.3: Polígono de 4 lados

vértices do quadrado e construímos o octógono, e assim sucessivamente. Como mostra o exemplo abaixo.

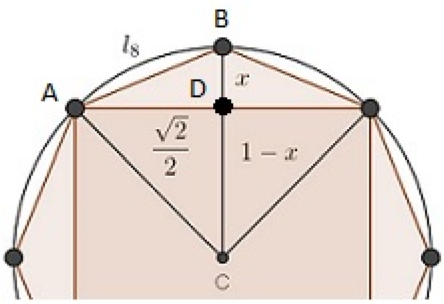

Figura 3.4: Polígono de 8 lados

Dos triângulos retângulos ABD e ADC obtemos as relações a seguir, usando o teorema de Pitágoras.

$$x^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = l_8^2 \tag{3.21}$$

$$(1-x)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1 \tag{3.22}$$

Subtraindo a equação (3.22) da equação (3.21), chegamos a solução $2x = l_8^2$. Substituindo esse valor na equação (3.21)

$$(\frac{l_8^2}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = l_8^2 \Rightarrow l_8^4 - 4l_8^2 + 2 = 0 \Rightarrow l_{2n}^4 - 4l_{2n}^2 + 4 = 4 - 2.$$

Observe, que $l_8 < l_4$, ou seja, $l_8 < \sqrt{2}$. Portanto:

$$(l_8^2 - 2)^2 = 4 - 2 \tag{3.23}$$

$$(l_8^2-2)=-\sqrt{2}\Rightarrow l_8=\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 0,76. \tag{3.24}$$

Assim o perímetro do polígono regular de 8 lados é aproximadamente $8\cdot 0,76$, que produz uma estimação para π igual

$$2\pi r=8\cdot 0,76\Rightarrow \pi=\frac{8\cdot 0,76}{2}\Rightarrow \pi\approx 3,06.$$

Deste modo encontraremos uma aproximação melhor para o número π, pois o perímetro do polígono de 8 lados tende a ser mais próximo de $2\pi r$. Para calcular os termos dessa sequência usaremos a seguinte recorrência:

$$x^2+(\frac{l_n}{2})^2=l_{2n}^2 \tag{3.25}$$

$$(1-x)^2+(\frac{l_n}{2})^2=1 \tag{3.26}$$

Subtraindo a equação (3.26) da equação (3.25), concluímos que $2x=l_{2n}^2$. Substituindo esse valor na equação (3.25)

$$(\frac{l_{2n}^2}{2})^2+(\frac{l_n}{2})^2=l_{2n}^2\Rightarrow l_{2n}^4-4l_{2n}^2+l_n^2=0\Rightarrow l_{2n}^4-4l_{2n}^2+4=4-l_n^2.$$

Como o raio da circunferência é 1, então $l_n<2$, pois seu diâmetro é 2. Deste modo $4-l_n^2>0$ logo:

$$(l_{2n}^2-2)^2=4-l_n^2 \tag{3.27}$$

$$(l_{2n}^2-2)=\pm\sqrt{4-l_n^2} \tag{3.28}$$

perceba que a sequência l_n é decrescente, deste modo como $l_4=\sqrt{2}$, concluímos que $l_{2n}<l_4=\sqrt{2}$ sempre que $n>3$. Portanto $l_{2n}-2<0$ o que implica

$$l_{2n}^2-2=-\sqrt{4-l_n^2},$$

mas como $l_{2n}>0$, pois é a medida de um lado do polígono. Temos

$$l_{2n}=\pm\sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}\Rightarrow l_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}.$$

Logo o perímetro, p_{2n}, do polígono relugar de lado l_{2n} é dado como $2nl_{2n}$, ou seja,

$$p_{2n}=2n\sqrt{2-\sqrt{4-l_n^2}}.$$

Assim, usando uma calculadora, podemos estimar valores cada vez melhores para π usando a fórmula (3.30)

$$2\pi r\approx p_{2n} \tag{3.29}$$

$$\pi\approx\frac{p_{2n}}{2}. \tag{3.30}$$

Número $2n$ de lados	l_{2n}	$\frac{p_{2n}}{2}$
4	$\sqrt{2}$	$2,8284$
8	$\sqrt{2-\sqrt{4-l_4^2}}$	$3,0614$
16	$\sqrt{2-\sqrt{4-l_8^2}}$	$3,1214$
32	$\sqrt{2-\sqrt{4-l_{16}^2}}$	$3,1365$

Veja que os elementos da última coluna estão se aproximando de π forma crescente. Existem várias maneira de estimar o valor de π, para conhecer outras maneira, inclusive a estimação usada neste trabalho, sugerimos [5].

3.7 O número $\sqrt{p}$, com p primo, é um número irracional.

Antes de começarmos a demonstração que $\sqrt{p}$ é irracional vamos apresentar um caso particular dessa afirmação, quando $p = 2$, que normalmente é encontrada nos livros didáticos do ensino básico.

Proposição 3.7. *O número $\sqrt{2}$ é irracional.*

Demonstração: Suponha que $\sqrt{2}$ é racional, então existem números inteiros m e n tal que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, com m e n primos entre si. Elevando ao quadrádo ambos os membros dessa igualdade temos

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \tag{3.31}$$

$$2n^2 = m^2. \tag{3.32}$$

Como m^2 é um número par então m também é um número par, pois se m fosse ímpar teríamos que m^2 seria ímpar, o que é uma contradição.

Portanto $m = 2k$, com $k \in Z$. Logo $m^2 = 4k^2$. Substituindo m^2 por $4k^2$ em (3.32), temos

$$2n^2 = 4k^2 \tag{3.33}$$

$$n^2 = 2k^2 \tag{3.34}$$

portanto n^2 é um número par sendo assim n também é um número par. Mas isso é um absurdo, pois supomos que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ com m e n primos entre si, logo m e n não podem ser ambos pares, pois deixariam de ser primos entre si. Portanto $\sqrt{2}$ não pode ser racional o que implica que $\sqrt{2}$ é irracional. ■

Agora vamos apresentar a demonstração que $\sqrt{p}$, com p primo, é irracional.

Começamos apresentando o Teorema Fundamental da Aritmética.

Teorema 3.8. *Todo número natural maior que* 1 *ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos*

Demonstração: Usaremos o Princípio de Indução Forte. Se $n = 2$, o resultado é imediato, pois 2 é um número primo.

Suponhamos o resultado válido para todo número natural menor do que n e vamos provar que ele vale para n. Se o número n é primo, nada temos a demonstrar. Suponha, então, que n seja composto. Logo, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela Hipótese de indução, temos que existem números primos $p_1, p_2, ..., p_r$ e $q_1, q_2, ..., q_s$ tais que $n_1 = p_1 p_2 ... p_r$ e $n_2 = q_1 q_2 ... q_s$. Portanto, $n = p_1 p_2 ... p_r q_1 q_2 ... q_s$, logo podemos concluir que todo número natural n é primo ou se escreve como produto de fatores primos.

Vamos provar a unicidade da escrita do número em fatores primos. Suponha que tenhamos $n = p_1 p_2 ... p_r = q_1 q_2 ... q_s$, onde os p_i e q_j são números primos. Como $p_1 | q_1 q_2 ... q_s$ temos que $p_1 = q_j$ para algum j, que, após reordenação de $q_1 q_2 ... q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto,

$$p_1 p_2 ... p_r = q_1 q_2 ... q_s.$$

Como $p_2 ... p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares.

■

Como ilustração do Teorema Fundamental da aritmética, considere o número 2940 pode ser escrito como o produto dos números primos $2.2.3.5.7.7 = 2^2.3.5.7^2$, devido ao teorema esses são os únicos números primos que multiplicados vão dar como resultado 2940.

Proposição 3.9. *O número* $\sqrt{p}$, *com* p *primo, é irracional.*

Demonstração: De fato, suponhamos que $\sqrt{p}$ seja racional então existem números inteiros a e b, primos entre si, tal que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ logo

$$p = \frac{a^2}{b^2} \tag{3.35}$$

$$pb^2 = a^2. \tag{3.36}$$

Na decomposição em fatores primos de pb^2 o expoente de p é um número ímpar, já na decomposição de a^2 em fatores primos todos os expoentes são pares, pois a está elevado ao quadrado, mas isto é um absurdo, porque de acordo com o Teorema Fundamental da Aritmética, todos os números inteiros são escritos de modo único em produtos de fatores primos. ■

3.8 Estimando $\sqrt{p}$

Para estimar o valor de $\sqrt{p}$, com p primo, vamos usar as propriedades de funções. Para ser mais específico, vamos usar as características da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida como $f(x) = x^2$, onde $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos números reais não negativos. Esta função possui propriedades interessantes que devem ser lembradas pelo professor, quando são usadas no ensino básico.

A primeira delas é que a função f é crescente ou seja, se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$; a segunda é que a função f é uma função bijetiva. De fato, f é injetiva, pois se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$ como x_1, x_2 são números positivos, então $x_1 = x_2$, provando a injetividade. Finalmente f é sobrejetiva, pois dado $y \in \mathbb{R}^+$ existe um $x = \sqrt{y}$ tal que $f(x) = y$. Como ilustração, vamos usar as propriedades da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^2$, para estimar um valor para $\sqrt{2}$. Primeiro, como f é sobrejetiva, isto significa que existe, pelo menos um, $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $x^2 = 2$ e sua injetividade garante que esse x é único. O algoritmo que usaremos para conseguir encontrar uma aproximação do número $\sqrt{2}$ consiste dos seguintes passos:

Primeiro tomamos dois números racionais, um menor e outro maior que $\sqrt{2}$, por exemplo 1 e 3 desta forma

$$1 < \sqrt{2} < 3.$$

Agora, como f é uma função crescente, quando aplicarmos f a desigualdade $1 < \sqrt{2} < 3$ vamos obter

$$1^2 < 2 < 3^2$$

$$1 < 2 < 9. \tag{3.37}$$

Como encontramos os valores 1 e 9, que são muitos distantes de 2, isto significa que tanto 1 quanto 3 não são boas aproximações, nem por falta e nem por escesso, de $\sqrt{2}$. Podemos escolher dois números de forma que, um seja maior que 1 e o outro menor que 3. Como $\sqrt{2} \in]1, 3[$, vamos melhorar nossa estimação encontrando intervalos cada vez menores que contenham $\sqrt{2}$.

Para encontrar esses intervalos usaremos o ponto médio, que divide o intervalo ao meio. Como o ponto médio do intervalo $]1, 3[$ é 2, pois $\frac{1+3}{2} = 2$, então $\sqrt{2} \in]1, 2[$ ou $\sqrt{2} \in]2, 3[$, observe que excluímos o 2 dos intervalos, pois 2 é racional e deste modo $\sqrt{2} < 2$ ou $\sqrt{2} > 2$, isto vai ocorrer sempre, porque o conjunto dos números racionais não nulos é fechado em relação à adição e divisão, portanto o ponto médio será sempre um número racional.

Se $\sqrt{2}$ pertencer ao intervalo $]1, 2[$ então a desigualdade $f(1) < f(\sqrt{2}) < f(2)$ também é verdadeira, ou seja

$$1 < 2 < 4 \tag{3.38}$$

assim concluímos que $\sqrt{2}$ é um número entre 1 e 2.

Repetindo o mesmo processo com o intervalo $]1,2[$ temos que $\sqrt{2}$ pertence ao intervalo $]1,\frac{3}{2}[$ ou a $]\frac{3}{2},2[$. Se $\sqrt{2}$ pertencer ao intervalo $]1,\frac{3}{2}[$ então a desigualdade $f(1) < f(\sqrt{2}) < f(\frac{3}{2})$ também é verdadeira, ou seja

$$1 < 2 < 2,25 \tag{3.39}$$

assim concluímos que $\sqrt{2}$ é um número entre 1 e $\frac{3}{2}$. Na tabela mostramos os valores que se encontra continuando o processo.

Intervalos	Estimação
$]\frac{5}{4},\frac{3}{2}[$	$1,56 < 2 < 2,25$
$]\frac{11}{8},\frac{3}{2}[$	$1,89 < 2 < 2,25$
$]\frac{11}{8},\frac{23}{16}[$	$1,89 < 2 < 2,06$

Os resultados da tabela mostram que $\sqrt{2} \in]\frac{11}{8},\frac{23}{16}[$ e como esse intervalo é pequeno uma boa aproximação seria usar o ponto médio, $\frac{45}{32}$, do intervalo $]\frac{11}{8},\frac{23}{16}[$, sendo assim $\sqrt{2} \approx 1,4062$. Esse método funciona para qualquer $\sqrt{p}$.

Capítulo 4

Aplicações dos números irracionais

Neste capítulo vamos apresentar situações onde os números irracionais surgem inevitavelmente na matemática em alguns conteúdos. Desta forma o professor pode apresentar propriedades dos irracionais, em outros assuntos, como geometria, estatística.

4.1 Matemática financeira

O número e, normalmente, é apresentado aos alunos no estudo de função exponencial e logarítmica.

Neste texto vamos conhecer como o número e surge, naturalmente, quando estudamos matemática financeira e também na desitegração radioativa.

Considere a seguinte situação:

Se emprestamos $R\$ = 1000,00$ a juros de 10% ao ano, teremos, no fim de um ano,um montante, M, de $R\$ = 1100,00$:

$$M = 1000 + 1000.0,1 = 1100,00.$$

Agora, se emprestarmos o mesmo valor, $R\$ = 1000,00$, com juros de 5%, a cada 6 meses teremos, ao final de um ano:

$$6 \text{ meses} \longrightarrow M = 1000 + 1000 \cdot \tfrac{1}{20} = 1000,00 \cdot (1 + \tfrac{1}{20}) = 1050$$
$$1 \text{ ano} \longrightarrow M = 1000 \cdot (1 + \tfrac{1}{20}) + 1000 \cdot (1 + \tfrac{1}{20}) \cdot \tfrac{1}{20} = 1000 \cdot (1 + \tfrac{1}{20})^2 = 1102,50.$$

Portanto, é mais vantajoso emprestar $R\$ = 1000$ com juros semestrais do que com juros anuais.

E se emprestamos o mesmo valor com juros de $\frac{10}{3}\%$ ou seja, $\frac{1}{30}$, a cada 4 meses, teríamos:

$$4 \text{ meses} \longrightarrow M = 1000 + 1000 \cdot \tfrac{1}{30} \approx 1033,33$$
$$8 \text{ meses} \longrightarrow M = 1000 \cdot (1 + \tfrac{1}{30}) + 1000(1 + \tfrac{1}{30}) \cdot \tfrac{1}{30} = 1000 \cdot (1 + \tfrac{1}{30})^2$$
$$12 \text{ meses} \longrightarrow M = 1000 \cdot (1 + \tfrac{1}{30})^2 + \tfrac{1}{40} \cdot 1000(1 + \tfrac{1}{30})^2 = 1000 \cdot (1 + \tfrac{1}{30})^3 \approx 1103,71 \text{ reais.}$$

Se dividirmos o ano em n intervalos iguais vamos receber ao final de um ano o $M = 1000(1 + \frac{1}{10 \cdot n})^n$ reais. Chamando $u = \frac{1}{10 \cdot n}$ podemos escrever nosso montante por:

$$M = 1000(1 + u)^{\frac{1}{u} \cdot \frac{1}{10}}$$

. A medida que contamos os juros em intervalos de tempo cada vez menores fazemos n tender ao infinto, u tende a zero. Portanto, para contarmos os juros contínuamente, durante um ano, precisamos calcular o limite:

$$M = \lim_{u \to o} 1000(1 + u)^{\frac{1}{u} \cdot \frac{1}{10}} = 1000 \cdot e^{\frac{1}{10}}$$

4.2 Desintegração Radioativa

As substâncias radiotiva possuem a característica de se desintegrarem, ou seja, sua massa vai diminuindo, de modo a formar outra substância. A desintegração é feita de modo proporcional a massa da substância original.

Como ilustração, analisaremos o césio-137 que possui meia-vida de 30 anos, assim sua massa original ficará reduzida a metade após 30 anos. No entanto, a desintegração ocorre de forma contínua, assim para melhorar a aproximação em um intervalo de tempo, por exemplo, um ano, precisamos descobrir a taxa de desintegração anual, que no caso do césio-137 é de aproximadamente $\alpha \approx 0,0231$. Portanto a massa de $10g$ de césio-137 depois de 5 anos será, aproximadamente, $M = 10(1 - 0,0231)^5 \approx 8,89g$.

Agora se quisermos calcular a desintegração em intervalos de tempo menores que um ano, dividimos o intervalo, de um ano, em n partes e em cada uma dessas partes aplicamos a taxa de desintegração $\frac{\alpha}{n}$, passado um ano a desintegração do césio-137, encontramos um valor aproximado de $M = 10(1 - \frac{0,0231}{n})^n$. Para aplicarmos a taxa de desintegração continuamente, basta fazer o n tender ao infinito, assim a massa ao final de um ano sera o limite abaixo

$$M = \lim_{n \to \infty} 10(1 - \frac{0,0231}{n})^n = 10e^{0,0231}.$$

4.3 Aplicação de π

As aplicações que envolvem o número π, surgem principalmente, quando estudamos formas circulares, pois π é definido como sendo a razão entre o comprimento, C, e o diâmetro, d, da circunferência, no entanto π também aparece em outros estudos como em estatística, na distribuição normal cuja fórmula é dada por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Nosso objetivo aqui, é encontrar uma fórmula para a área do círculo.

Para isto, usaremos as ideias desenvolvidas no tópico anterior. Considere um polígono relugar inscrito de n lados, esse polígono pode ser decomposto em n triângulo isóceles iguais, com base medindo a e altura h, e a área de cada triângulo é $\frac{ah}{2}$.

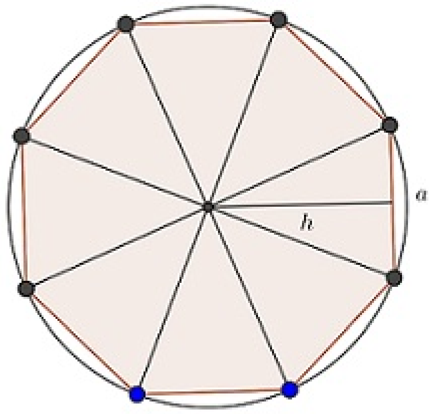

Figura 4.1: Polígono decomposto

Como o polígono regular de n lados fica dividido em n triângulos, então a área do polígono $A_n = n \cdot \frac{ah}{2}$. Quando fazemos n crescer, ou seja, quando aumentamos o número de lados do polígono regular inscrito, o perímetro do polígono converge para $2\pi r$ e a altura do triângulo, h, converge para o raio da circunferência r.

Chamando a área da circunferência de S, então a área do círculo será:

$$S = n\frac{ah}{2} = \frac{an \cdot h}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2. \tag{4.1}$$

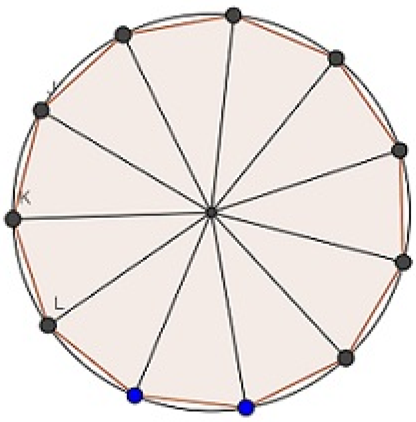

Figura 4.2: Polígono decomposto

4.4 Problema da Agulha de Buffon

Pela definição usada para caracterizar π imagina-se que este número surja sempre que estivermos estudando superfícies circulares. Porém, o número π aparece também em alguns estudos sobre probabilidade, como no problema da agulha de Buffon.

O filósofo e matemático George Louis Leclerc, o Conde de Buffon, apresentou o problema da agulha. Ele propôs que sobre uma grande área plana se traçassem retas paralelas equidistantes e fosse lançado uma agulha fina ao acaso sobre essa área, a probabilidade da agulha cair cortando umas das retas é $\frac{2l}{\pi d}$, onde d é a distância entre as retas e l o comprimento das agulhas.

Buffon chegou a essa expressão estudando as variáveis x e θ, onde x é a distância do ponto médio da agulha até a reta mais próxima, e θ é a inclinação da agulha.

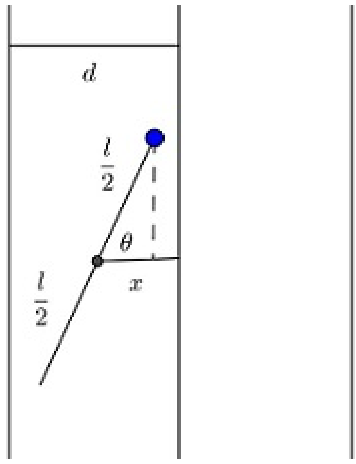

Figura 4.3: Agulha inclinada

De acordo com a figura acima, x está compreendido no intervalo $]0, \frac{d}{2}[$ e θ é o menor ângulo entre $\frac{l}{2}$ e x, ou seja, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Deste modo, a agulha cortará alguma reta se x obedecer a desiguladade

$$x < \frac{l}{2} \cos \theta,$$

onde $\frac{l}{2} \cos \theta$ é projeção de $\frac{l}{2}$ sobre x.

Logo, a probabilidade P, da agulha atravessar uma reta é o quociente entre a área da região compreendida entre os eixos e o gráfico $x = \frac{l}{2} \cos \theta$ e a área do retângulo de lados $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{d}{2}$.

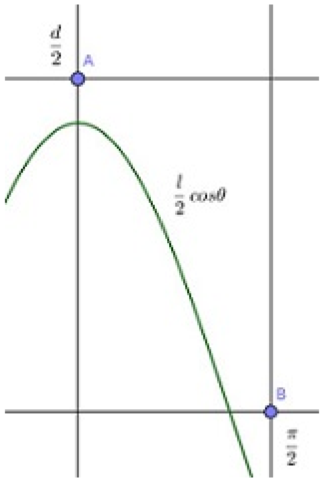

Figura 4.4: Gráfico de $x = \frac{l}{2}\cos\theta$

$$P = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2}\cos\theta d\theta}{\frac{d}{2}\frac{\pi}{2}} \tag{4.2}$$

$$= \frac{2l}{d\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \tag{4.3}$$

$$= \frac{2l}{d\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{2l}{d\pi}[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{d\pi}. \tag{4.4}$$

Para $d = 2l$ encontramos a fórmula $p = \frac{1}{\pi}$. Usando esta expressão Buffon sugeriu usar esse experimento para calcular um valor aproximado pra π. Alguns pesquisadores se candidataram a essa tarefa conseguindo resultados bem próximos do verdadeiro valor de π

Pesquisador	Número de experimentos	Valor de π
Wolf	5000	3,1596
Smith	3204	3,1553
Fox	1120	3,14155929
Lazzarini	3408	3,14155929

Este experimento pode ser reproduzido em sala de aula, usando folhas para representar o plano e uma vareta para representar a agulha, como sugere [9], desta forma o professor pode apresentar probabilidades relembrando algumas propriedades de π.

4.5 Aplicação de $\sqrt{p}$

Os números irracionais $\sqrt{p}$ aparecem, constantemente, quando se deseja obter o resultado de uma equação do segundo grau. Essas equações são estudadas desde a antiguidade com o objetivo de determinar dois números, x e y, cuja soma é s e o produto é igual a p. Em termos práticos, os povos antigos queriam determinar as dimensões de um retângulo sabendo o seu semi-perímetro e a área.

Escrevendo o problema para a notação dos dias atuais, nosso objetivo é resolver o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x+y &= s \\ xy &= p \end{cases} \tag{4.5}$$

Isolando y na primeira equação e substituindo na segunda, encontramos a equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$.

Atualmente trabalhamos com equações do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, onde as soluções são

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}.$$

Em problemas práticos, é comum no cálculo de $\sqrt{b^2-4ac}$ encontramos uma raiz quadrada de um número primo. Como ilustração considere o exemplo.

Exemplo 4.1. Uma situação, onde os irracionais aparacem é no cálculo do índice de massa corporal o IMC, cuja formula é $IMC = \frac{Massa(kg)}{(altura)^2}$. As pessoas são classificadas, de acordo com IMC da seguinte forma:

- IMC menor que $18,5$ - a pessoa está com o peso abaixo do normal.
- IMC entre $18,5$ e $24,9$ - a pessoa está com o peso normal.
- IMC entre 25 e $29,9$ - a pessoa está com sobrepeso.
- IMC maior que 30 - a pessoa está obesa.

Assim se uma pessoa com $80kg$ deseja saber qual deve ser sua altura para que não seja classificado como obesa, então a solução recai em uma equação do segundo grau.

$$\begin{aligned} IMC &< 30 \\ \frac{80}{(altura)^2} &< 30 \\ (altura)^2 &> \frac{80}{30} \\ altura &> \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Novamente a solução matemática é o intervalo $[\frac{2\sqrt{6}}{3}, \infty[$, porém em termos práticos o que fazemos é encontrar um número racional suficientemente próximo de $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Capítulo 5

Considerações finais

Com este trabalho desejo apresentar aos professores de matemática um material complementar para suas aulas sobre números irracionais, dando destaque aos números irracionais $\sqrt{p}$ com p primo, π e e, pois eles estão presente durante todo o ensino médio.

Foi apresentado um pouco da história e algumas demonstrações sobre números irracionai além de aplicações que mostram como esses números estão presente na vida escolar.

Busquei apresentar exemplos onde o professor possa utilizar os números irracionais em outros conteúdos da metemática não ficando restrito apenas ao tópico sobre conjuntos númericos, desta forma, o professor pode nas aulas sobre funções tentar estimar algum número $\sqrt{p}$ ou introduzir uma aula de probabilidade usando o problema da agulha de Buffon.

Referências Bibliográficas

[1] LEUTHOLD, Louis, *O Cálculo com Geometria Analítica vol.2.* Harbra. 1994.

[2] FIGUEIREDO, Djairo G. *Números Irracionais e Transcedentes.* Sociedade Brasileira de Matemática. 2011.

[3] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica vol.1.* Harbra. 1994.

[4] LAGES, Elon. *Meu Professor de Matemática e Outras Histórias.* Sociedade Brasileira de Matemática. 2012.

[5] CARVALHO, Sônia Pinto. *A área e o perímetro de um círculo.* I Colóquio da Região Sudeste, 2011.

[6] ROQUE, Tatiana e PITOMBEIRA, João Bosco. *Tópicos de História da Matemática.*Sociedade Brasileira de Matemática. 2012.

[7] LAGES, Elon. *Logaritmos.* Sociedade Brasileira de Matemática.2016.

[8] CLAUS, I. Doering. *Introdução à Análise Matemática na Reta.* I Colóquio de Matemática da Região Nordeste, 2011.

[9] FERREIRA, Robison dos Satos; TOLEDO, Vanderlei; ADEVALDO, Jefferson; YIUMI, Verônica. *Atividades Didáticas para o Ensino de Probabilidade e Geométrica.* X encontro nacional de educação matemática, 2010.

[10] FERREIRA, Jamil. *A construção dos números.* Sociedade Brasileira de Matemática. 2013.