

Dissertação apresentada à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da Universidade Estadual de Santa Cruz, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática no Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Área de Matemática.

Jelmires José Galindo Junior

**CÁLCULO: UMA ABORDAGEM AO ALCANCE
DOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

Prof. Dra. Fernanda Gonçalves de Paula
Orientadora

Campus Soane Nazaré de Andrade
Ilhéus, BA - Brasil
2016

G156 Galindo Junior, Jelmires José.
Cálculo: uma abordagem ao alcance dos alunos do ensino médio / Jelmires José Galindo Junior. – Ilhéus, BA: UESC, 2016.
66 f. : il.

Orientadora: Fernanda Gonçalves de Paula.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT.

Inclui referências e apêndices.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 3. Cálculo – Matemática. I. Título.

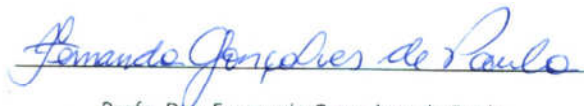
CDD 510.7

JELMIRES JOSÉ GALINDO JUNIOR

CÁLCULO: UMA ABORDAGEM AO ALCANCE DOS
ALUNOS DO ENSINO MÉDIO.

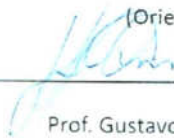
Dissertação apresentada ao
Departamento de Ciências Exatas e
Tecnológicas da Universidade Estadual
de Santa Cruz, para obtenção de Título
de Mestre em Matemática, através do
PROFMAT - Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado, Ilhéus, 22 de julho de 2016.



Profa. Dra. Fernanda Gonçalves de Paula

(Orientadora)



Prof. Gustavo Souza de Melo

(FACISA)



Profa. Natália Rocha Pinheiro

(UESC)

Aos meus pais, que sempre me cobraram, me incentivaram a estudar e me deram bons exemplos. Ao Yuri e ao Gabriel, que continuam atiçando meu gosto pela Matemática. À Amália, companheira de todas as horas, por nos aturar e ser tão compreensiva.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e ao meu irmão, que sempre me cobraram muito e me mostraram que o estudo é a melhor garantia que temos pois o que sabemos não pode ser tirado de nós. O saber não pesa e não ocupa espaço.

Agradeço também à minha esposa e aos meus filhos, pelo apoio incondicional, pelo incentivo irrestrito, pela compreensão infinita e pelo carinho constante. Tenho muita sorte de ter uma família tão boa.

Agradeço ainda aos professores da UESC. Sempre foram ótimos profissionais e tiveram a paciência necessária para ensinar quem estava há tanto tempo longe dos bancos escolares.

Agradeço finalmente aos meus colegas de curso, que me transmitiram muitos ensinamentos e me mostraram como é a realidade atual nas escolas.

A todos vocês meu muito obrigado.

*"If I have seen farther than others,
it is because I stood on the shoulders of giants."*

— SIR ISAAC NEWTON

Resumo

Atualmente no Brasil a matéria de Cálculo não faz parte da grade curricular do Ensino Médio, sendo ensinada somente nos cursos universitários da área de exatas. Apesar disto, o estudo de Cálculo permite ter uma visão mais completa de diversos fenômenos naturais e as ferramentas adquiridas no seu estudo também fornecem explicações mais simples e elegantes para diversas fórmulas de comprimento e área. Por outro lado, o tempo é escasso e os currículos já estão com mais assuntos do que o recomendável. Este trabalho apresenta uma visão simplificada do Cálculo que pode ser apresentada aos alunos do ensino médio. Esta abordagem diferente tem como objetivo despertar o interesse e fornecer uma base para que estudos posteriores possam solidificar o conhecimento. Esta dissertação é uma livre adaptação dos capítulos iniciais da obra *Calculus Made Easy*, de Silvanus Thompson, (THOMPSON, 1914), que se encontra em domínio público.

Abstract

Nowadays in Brazil Calculus is not taught to high school students just to college freshmen at Science Courses. However, the things that you learn in Calculus give us a deeper and more complete view of natural phenomena, and the calculus tools give us a simpler and more elegant way to understand a huge variety of Length and Surface Formulas. However, the time is short and there are too many issues in the curriculum. This work uses a different approach, a simplified vision of Calculus, with the main objective of wake the true interest and give a reliable background to further studies in Calculus. This is a free adaptation of the initials chapters of the book *Calculus Made Easy*, by Silvanus Thompson, (THOMPSON, 1914), now in Public Domain.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	CONHECIMENTOS ESSENCIAIS	14
2.1	Diferentes Graus de Pequenez	15
2.2	Crescimento Relativo	17
2.3	Casos Mais Simples	21
2.4	Sobre as Constantes	26
3	AVANÇANDO UM POUCO	32
3.1	Somando, Subtraindo, Multiplicando e Dividindo	32
3.2	Diferenciação Sucessiva	38
3.3	Quando o tempo varia	40
4	SEQUÊNCIA DIDÁTICA - PONTO CRÍTICO NA FUNÇÃO QUADRÁTICA	47
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE A – BINÔMIO DE NEWTON	63
	APÊNDICE B – INCLINAÇÃO DE CURVAS	65

1 Introdução

O estudo do Cálculo é importante para o aluno do ensino médio, pois fornece uma visão mais completa de diversos fenômenos naturais e também explicações mais simples e elegantes para diversas fórmulas de comprimento e área. Atualmente esta matéria não faz parte da grade curricular do ensino médio, mas no século passado era diferente. Os principais obstáculos para se voltar a ensinar Cálculo no ensino médio são o exíguo espaço na grade curricular e a dificuldade de apresentar um assunto tão complexo de forma atraente.

Esta dissertação se propõe a ser uma ferramenta para o professor, servindo tanto como uma revisão, quanto um material para o aprimoramento profissional. O assunto é tratado de uma maneira mais leve, sem o rigor comumente visto em livros de Cálculo, esta opção foi feita para permitir uma maior agilidade e para tornar o assunto mais atraente.

O artigo do grande Matemático e Educador, Geraldo Ávila, (AVILA, 1991), traz alguns esclarecimentos que foram decisivos na escolha deste tema.

Desde 1943 o Cálculo fazia parte do programa da 3.^a série do então chamado curso científico com o ensino da derivada, aplicações a problemas de máximos e mínimos, além de outros tópicos como polinômio de Taylor. Mas mesmo antes de 1943, o Cálculo já fazia parte do programa no pré-universitário das escolas de engenharia. Em outros países o Cálculo é ensinado na escola secundária, às vezes até em quantidade substancial, como acontece nos Estados Unidos.

No final da década de 50 e início de 60, ocorreu uma grande alteração no ensino da Matemática nos Brasil, este movimento ficou conhecido como Matemática Moderna e era um reflexo de mudanças ocorridas em outros países. O principal pilar desta modernização foi uma ênfase excessiva no rigor e no formalismo das apresentações, o que causou a retirada de importantes tópicos do ensino médio, como a Geometria e o Cálculo.

O ensino do cálculo foi excluído na reforma que criou o 2.^o grau, pois o rigor excessivo exigiria o ensino de Teoria dos conjuntos e um estudo detalhado dos números reais, o que demandaria mais de um semestre e portanto totalmente inviável.

O motivo de se ensinar Cálculo no Ensino Médio é que apresenta ideias novas e que são altamente relevantes na compreensão de outras ciências. E aqui tomo a liberdade de

citar literalmente o grande mestre:

O objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Não se visa, com o ensino da Matemática no ensino médio, formar especialistas no assunto. Ensina-se Matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento. (AVILA, 1991, p. 4)

Na parte sobre o que ensinar, o artigo defende que com uma arrumação adequada dos programas é possível incluir o Cálculo no ensino do 2.º grau, e dá como exemplo que em uma única aula consegue-se introduzir a noção de reta tangente e a de derivada de uma função, citando inclusive que já foi ministrada esta aula em palestras para professores do ensino médio.

A introdução da derivada deve ser acompanhada de suas aplicações. Uma delas diz respeito a Cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme mas ao passar adiante para o movimento uniformemente variado as coisas seriam bem mais simples e compreensíveis para o aluno se o ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea.

Destaca-se a importância que o conhecimento de derivada como o declive da reta tangente tem para o estudo da Física com destaque especial para o entendimento de pressão, densidade de massa e densidade de carga elétrica.

Sugere-se que o estudo do Cálculo poderia ser novamente introduzido no ensino médio. O tempo que se gasta ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, seria utilizado no ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações, e ao longo deste estudo se ensinaria funções no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa.

Este artigo teve boa repercussão e já na edição 20 da Revista do Professor de Matemática (DUCLOS, 1992) reforça a opinião do professor Ávila.

Em (DUCLOS, 1992) é feito um relato da experiência do professor na elaboração de um programa para os três anos dos cursos técnicos, onde o estudo de Cálculo foi inserido no segundo semestre do segundo ano. Nos dois primeiros anos foi dada ênfase a um grande número de aplicações práticas e no terceiro ano era introduzido o rigor levemente abandonado nos anos anteriores em favor da intuição. A importância da interdisciplinaridade é destacada de forma bem elegante, “A Matemática é uma linguagem, e isolá-la das outras ciências é como ter o domínio de um idioma e não ter nada para dizer.” (DUCLOS, 1992, p. 27)

É relatado por Duclos, (DUCLOS, 1992) que nos 13 anos de ensino nos cursos técnicos na UNICAMP não foi encontrada dificuldade maior de assimilação da matéria Cálculo,

ele apresenta também uma crítica aos programas do 2.º grau que iniciam o curso com a teoria dos conjuntos, funções e relações, defendendo que apesar da correção filosófica, têm uma didática duvidosa, pois o estudante egresso do 1.º grau ainda não estaria à altura de tantas generalizações e abstrações.

Fica bastante claro que a discussão sobre o ensino do Cálculo no ensino médio não é nova e que há bons motivos para que este assunto seja ministrado antes do nível universitário, com o cuidado que a apresentação seja feita de uma forma menos rigorosa.

Na busca por material que tivesse a leveza procurada encontramos a obra *Calculus Made Easy*, (THOMPSON, 1914) que apesar de ter sido escrita em 1910, continua atual e as críticas que ela recebeu quando do seu lançamento muito provavelmente seriam as mesmas a serem feitas hoje em dia. A prestigiosa revista *Nature* (NATURE, 1911) publicou na edição de 09 de março de 1911 uma resenha nada favorável, onde desdenhava tanto da linguagem quanto do rigor das explicações. Apesar das críticas, a obra pode ser considerada primorosa, realmente a linguagem não é o que normalmente se encontra na literatura científica e há uma ausência de demonstrações, mas a proposta da obra não é ser um tratado definitivo sobre o assunto, o próprio subtítulo deixa isto bem claro, *Calculus Made Easy: Being a Very-Simplest Introduction to Those Beautiful Methods of Reckoning which Are Generally Called by the Terrifying Names of the Differential Calculus and the Integral Calculus*, em uma tradução livre: Cálculo Tornado Fácil: sendo uma muito-simplíssima introdução aos belos métodos de calcular que são geralmente chamados pelos assustadores nomes de Cálculo Diferencial e Cálculo Integral. O título completo da obra é suficiente para se ter uma ideia razoavelmente precisa de seu conteúdo, pode-se identificar a linguagem coloquial, o embate contra os métodos tradicionais, o fascínio pelo assunto e até a caracterização definitiva da obra, uma introdução, uma muito-simplíssima introdução.

A qualidade da obra é indiscutível, pelo menos se for um parâmetro aceitável a longevidade ou o sucesso de vendas. Desde 1910 vem sendo reeditada constantemente, vendendo milhões de cópias. Em 1998 Martin Gardner revisou, ampliou e atualizou o conteúdo e esta edição é mais fácil de se encontrar nas livrarias internacionais, apesar de ainda não haver uma tradução em livro para o português.

O livro usa quase que exclusivamente a notação de Leibnitz para derivadas e não define nem funções, nem limites. Essa opção, que parece muito estranha em uma primeira análise, é bem acertada para o fim que a obra se propõe, pois permite uma leitura ágil e uma compreensão simples dos fundamentos, despertando a curiosidade que poderá ser saciada muito facilmente em outras obras.

Esta dissertação é livremente baseada no livro *Calculus Made Easy*, (THOMPSON, 1914) e se propõe a servir como material de qualificação profissional para os professores

do ensino médio e também como inspiração da forma que o assunto pode ser apresentado.

Este trabalho foi dividido em cinco capítulos, Introdução, Conhecimentos Essenciais, Avançando um Pouco, Sequência Didática e Considerações Finais. O capítulo 2, Conhecimentos Essenciais, foi subdividido em quatro seções e nele fornecemos a base para o estudo de Cálculo. No início do capítulo são apresentados os dois símbolos essenciais d e \int e é feita uma sucinta explicação sobre o uso destes símbolos. Na seção 2.1 fornecemos uma noção de infinitesimal, apesar deste nome não ser citado e não haver uma definição formal; são apresentados vários exemplos práticos para fixar o conceito. Na seção 2.2 é apresentada a ideia de taxa de variação e a noção de derivada, também se fala sobre constantes e variáveis. A seção 2.3 apresenta a diferenciação de potências de x , iniciando com exemplos bem simples, com números naturais, e depois generalizando para os inteiros e os racionais. Na seção 2.4 é mostrado como desenvolver a diferenciação quando, além de potências de x temos constantes envolvidas, são apresentadas regras para quando as constantes são somadas ou subtraídas e também para quando elas multiplicam ou dividem a potência de x .

O capítulo 3 é um avanço considerável de complexidade, na seção 3.1 trabalhamos com somas e produtos de funções, sendo mostradas algumas maneiras de se chegar aos resultados da diferenciação quando as funções são somadas ou multiplicadas. Na seção 3.2 é explicado de forma breve as diferenciações sucessivas. Na seção 3.3 considera o tempo como a variável independente e nele são mostradas algumas aplicações interessantes na Física.

O capítulo 4 consiste de uma sequência didática, sobre o uso do cálculo em máximos e mínimos de funções quadráticas

O capítulo 5 apresenta as considerações finais.

A obra "*Calculus Made Easy*" é bem mais completa, possuindo 23 capítulos que cobrem praticamente todo o assunto usualmente ensinado em Cálculo I e II, mas para a finalidade desta dissertação os capítulos abordados são suficientes, permitindo ao professor do ensino médio uma revisão rápida e vários exemplos que podem ser aproveitados nas salas de aula.

2 Conhecimentos Essenciais

É bastante comum que um primeiro contato com o Cálculo cause um temor paralisante. Este temor é causado pelo desconhecimento dos símbolos, e pode ser vencido de uma vez por todas simplesmente dizendo em termos do cotidiano o significado dos dois principais símbolos que são utilizados no cálculo.

Estes símbolos terríveis são:

(1) d que significa simplesmente “um pouco de”

Assim dx significa um pouco de x ; e du significa um pouco de u . Normalmente a maioria dos Matemáticos pensa em uma forma mais elegante e diz “um elemento de” em vez de “um pouco de”. Como você vai chamar fica a seu critério, mas você precisa ter sempre em mente que estes pequenos pedaços (ou elementos) podem ser tão pequenos quanto se queira.

(2) \int que é meramente um longo S, e pode ser chamado (se você quiser) de “a soma de”.

Assim $\int dx$ significa a soma de todos os pequenos pedaços de x ; e $\int dt$ significa a soma de todos os pequenos pedaços de t . Matemáticos normalmente chamam este símbolo de “a integral de”. Agora é fácil ver que, se x é considerado como feito de um monte de pequenos pedaços, cada um dos quais é chamado dx , se adicioná-los todos juntos você terá a soma de todos os dx , que é a mesma coisa que o x completo.

A palavra “integral” significa simplesmente “o todo”. Pense na duração do tempo de uma hora, este período de tempo pode ser considerado como cortado em 3.600 pequenos pedaços chamados segundos, 3.600 pequenos pedaços que somados formam uma hora.

Quando surgir uma expressão que começa com este símbolo \int , sabe-se agora que ela representa a seguinte instrução: execute, se possível, a operação de somar todos os pequenos pedaços que são indicados pelas expressões depois deste símbolo.

2.1 Diferentes Graus de Pequenez

Durante o estudo de Cálculo temos de lidar com pequenas quantidades em variados graus de pequenez e é fundamental termos uma noção sob quais circunstâncias podemos considerar estas pequenas quantidades tão ínfimas que poderemos omití-las sem consequências desastrosas.

Tudo depende da pequenez relativa. Antes de fixar quaisquer regras pensemos em alguns casos familiares. Uma hora tem 60 minutos, o dia 24 horas, a semana 7 dias. Há, portanto, 1.440 minutos durante o dia e 10.080 minutos na semana.

Obviamente, um minuto é uma quantidade muito pequena de tempo em comparação com uma semana inteira. Na verdade, os nossos antepassados consideraram pequeno quando comparado com uma hora, e esta fração do tempo foi chamada de “um minùte”, significando uma diminuta fração, ou seja um sexagésimo, de uma hora. Quando eles precisaram dividir o tempo em subdivisões ainda menores, eles dividiram cada minuto em 60 partes menores, que, na época da rainha Elizabeth, eles chamavam “segundas minùtes” (ou seja, pequenas quantidades de segunda ordem de pequenez). Hoje em dia nós chamamos essas pequenas quantidades de segunda ordem de pequenez “segundos”, mas poucas pessoas conhecem a origem do nome.

Agora, se um minuto é tão pequeno em comparação com um dia inteiro, o segundo é muito menor quando comparado a um dia.

Outro exemplo, pense em um centavo em comparação com dez reais: é a fração $\frac{1}{1.000}$. Um centavo pode ser considerado pequeno, de pouco valor, comparado com dez reais. Da mesma forma dez reais tem pouco valor quando comparado com dez mil reais. Então 10, em relação a 10.000, pode ser considerado como uma pequena quantidade. Agora compare um centavo com dez mil reais, relativamente a esta soma maior, o centavo não é de maior importância do que $\frac{1}{1.000}$ da sua importância em relação aos dez reais. Mesmo 10 mil reais é, relativamente, uma quantidade insignificante na fortuna de um milionário.

Agora, se nós fixarmos uma fração como a proporção que, para qualquer finalidade prática, a consideraremos como relativamente pequena, podemos facilmente fixar outras frações de um grau mais elevado de pequenez. Assim se, para a propósito do tempo, $\frac{1}{60}$ pode ser chamado de uma *pequena* fração, então, $\frac{1}{60}$ de $\frac{1}{60}$ (sendo uma *pequena* fração de uma *pequena* fração) pode ser considerado como uma pequena quantidade da segunda ordem de pequenez.*

Outro exemplo, se para qualquer finalidade fôssemos tomar 1% (*i.e.* $\frac{1}{100}$) como uma *pequena* fração, então 1% de 1% (*i.e.* $\frac{1}{10.000}$) seria uma pequena fração da segunda ordem

*Formalmente se usa a expressão segunda ordem de “magnitude” (*i.e.* grandeza) quando o verdadeiro significado é segunda ordem de *pequenez*. Isto pode causar confusão nos estudantes.

de *pequenez*; e $\frac{1}{1.000.000}$ seria uma pequena fração da terceira ordem de pequenez, sendo 1% de 1% de 1%.

Por último, suponha que por algum motivo muito preciso devemos considerar $\frac{1}{1.000.000}$ como “pequeno”, assim, se um cronômetro é considerado como de primeira linha se não perde ou ganha mais de meio minuto em um ano, ele deve manter o tempo com uma precisão de 1 parte em 1.051.200. Se para esse fim nós considerássemos $\frac{1}{1.000.000}$ (ou um milionésimo) como uma pequena quantidade, então $\frac{1}{1.000.000}$ de $\frac{1}{1.000.000}$, que é $\frac{1}{1.000.000.000.000}$ (ou um trilionésimo) será uma pequena quantidade de segunda ordem de pequenez, e pode certamente ser posta de lado, comparativamente.

Então pelos exemplos pudemos verificar que quanto menor for uma pequena quantidade em si, mais negligenciável a pequena quantidade de segunda ordem se torna. Por isso sabemos que *em todos os casos estamos justificados em negligenciar as pequenas quantidades de segunda -ou terceiras (ou superiores) ordens*, bastando apenas que escolhamos a pequena quantidade de primeira ordem suficientemente pequena.

Mas é preciso lembrar que as pequenas quantidades, se ocorrerem em nossas expressões como fatores multiplicados por algum outro fator, podem tornar-se importantes se o outro fator é suficientemente grande. Até mesmo um centavo se torna importante quando é multiplicado por alguns milhares.

Em Cálculo nós escrevemos dx para indicar “um pouco” de x . Os símbolos dx , du , e dy , são chamadas de “diferenciais”, o diferencial de x , de u , ou de y , conforme o caso. Se dx é um pequeno pedaço de x , e suficientemente pequeno ele mesmo, não podemos concluir que as quantidades tais como $x \cdot dx$, ou $x^2 dx$, ou $a^x dx$ são desprezíveis, pois x , x^2 , ou a^x podem ser grandes o suficiente. Mas $dx \times dx$, *com certeza* seria insignificante, sendo uma quantidade de segunda ordem de pequenez.

Um exemplo muito simples servirá como ilustração. Pensemos em x como uma quantidade que pode crescer um pequeno valor de modo a se tornar $x + dx$, onde dx é o pequeno incremento adicionado pelo crescimento. O quadrado disto é $x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2$. O segundo termo não é insignificante, porque é uma quantidade de primeira ordem; enquanto o terceiro termo é de segunda ordem de pequenez, sendo um pouco de um pouco de x , assim, se dx significa numericamente, digamos, $\frac{1}{60}$ de x , então o segundo termo seria $\frac{2}{60}$ de x , enquanto que o terceiro termo seria de $\frac{1}{3.600}$ de x . Este último termo é claramente menos importante do que o segundo. Mas se formos mais longe e considerarmos dx como $\frac{1}{1.000}$ de x , então o segundo termo será $\frac{2}{1.000}$ de x , enquanto o terceiro termo será de apenas um milionésimo, ou seja, $\frac{1}{1.000.000}$ de x .

Geometricamente isso pode ser mostrado da seguinte forma: Desenhe um quadrado (Fig. 1) com o lado medindo x .

Agora, suponha que o quadrado cresça por um pequeno pedaço, dx , acrescentado

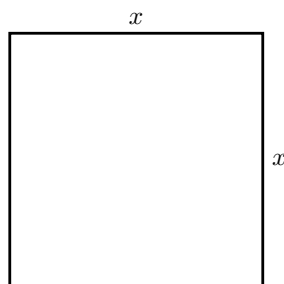


FIG. 1.

ao seu tamanho em cada sentido. O quadrado aumentado, Fig. 2, é constituído pelo quadrado original x^2 , os dois retângulos na parte superior e no lado direito, cada um dos quais é de área $x \cdot dx$ (ou, em conjunto, $2x \cdot dx$), e o pequeno quadrado no canto superior direito é $(dx)^2$ neste exemplo colocamos dx como uma fração muito grande de x , cerca

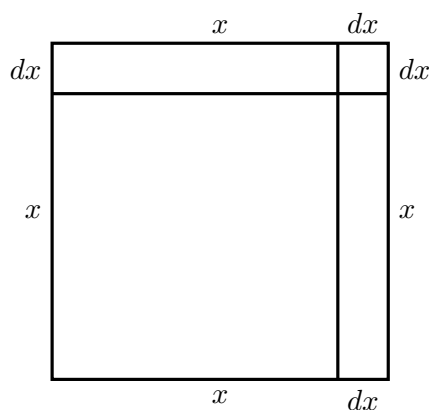


FIG. 2.

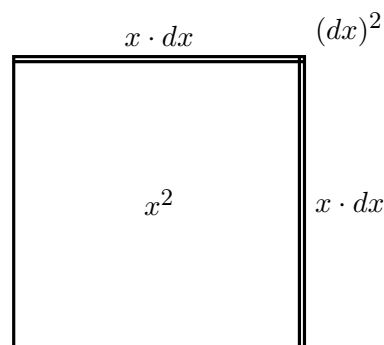


FIG. 3.

de $\frac{1}{5}$. Mas suponha que fosse apenas $\frac{1}{100}$, aproximadamente a espessura de uma linha de uma caneta fina, (Fig. 3). Então o pequeno quadrado do canto superior terá uma área de apenas $\frac{1}{10.000}$ de x^2 , e será praticamente invisível. Claramente $(dx)^2$ é insignificante somente se nós considerarmos o incremento dx suficientemente pequeno por si só.

2.2 Crescimento Relativo

No decorrer desta introdução ao estudo de Cálculo estaremos lidando principalmente com quantidades que estão crescendo e com taxas de crescimento. Classificamos todas as quantidades em duas classes: *constantes* e *variáveis*. Aquelas que consideramos de valor fixo, vamos chamar de *constantes*, e geralmente são representadas algebricamente por letras do início do alfabeto tais como a , b , ou c ; enquanto que aquelas que consideramos capazes de crescer, ou (em uma forma mais elegante) de “variar”, representaremos por letras do fim do alfabeto, tais como x , y , z , u , v , w , ou às vezes t .

Além disso, normalmente vamos lidar com mais do que uma variável ao mesmo tempo e consideraremos o modo que uma variável depende da outra: por exemplo, pensemos na maneira em que a altura atingida por um projétil depende do tempo decorrido para atingir essa altura. Ou, se considerarmos um retângulo de determinada área fixa, veremos como qualquer aumento no comprimento vai acarretar uma diminuição correspondente na largura do mesmo. Verificaremos a maneira como qualquer variação na inclinação de uma escada faz com que se altere a altura que ela atinge.

Suponha que temos duas dessas variáveis que dependem uma da outra. Uma variação em uma provocará uma alteração na outra, *causada* por esta dependência. Vamos chamar uma das variáveis x , e a outra, que depende dela, de y .

Suponha que façamos x variar, isto é, vamos alterá-lo, podemos imaginar que ele seja alterado acrescentando-lhe um pequeno valor, o que nós chamamos dx , assim x torna-se $x + dx$. Então, porque x foi alterado, y também será alterado e torna-se $y + dy$. Aqui, dy pode ser positivo, em outros casos, negativo e ele não será (exceto em raras situações) do mesmo tamanho que dx .

Tomemos dois exemplos.

Exemplo 2.2.1

Sejam x e y respectivamente a base e a altura de um triângulo retângulo (Fig. 4), no qual, a inclinação do outro lado é fixa em 30° . Se nós supusermos que esse triângulo

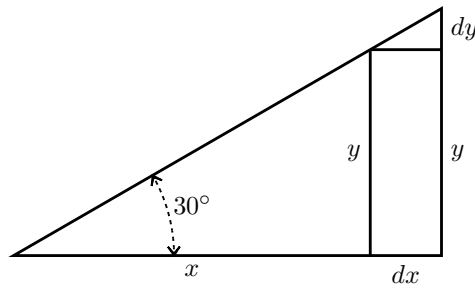


FIG. 4.

se expande e não altera seus ângulos então, quando a base cresce de modo a tornar-se $x + dx$, a altura se torna $y + dy$. Aqui, o aumento de x resulta em um aumento do y . O pequeno triângulo, de altura dy e base dx , é semelhante ao triângulo original; e o valor $\frac{dy}{dx}$ é o mesmo de $\frac{y}{x}$, por semelhança de triângulos, como o ângulo é de 30° verificamos então que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1,73} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}30^\circ.$$

Exemplo 2.2.2

Façamos x representar, na Fig. 5, a distância horizontal a partir de uma parede da extremidade inferior de uma escada de comprimento fixo AB ; e chamemos de y altura que

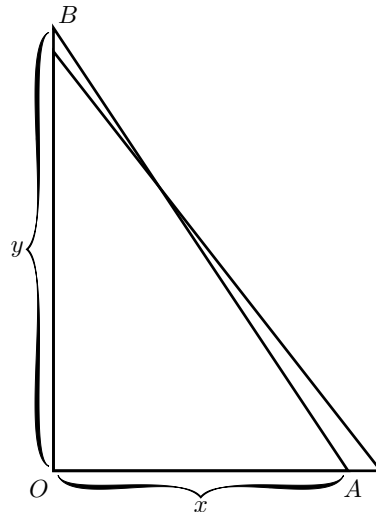


FIG. 5.

esta escada atinge na parede. Claramente y depende de x . É fácil ver que se afastarmos a extremidade inferior da escada, A , um pouco da parede, o topo da escada, B , vai descer um pouco. Vamos dizer isto em uma linguagem mais científica. Se aumentarmos x para $x + dx$, então y se tornará $y - dy$; isto é, quando x recebe um incremento positivo isto resulta em um incremento negativo em y .

Sim, mas quanto? Suponha que o comprimento da escada é tal que quando a extremidade inferior A estava a 19 centímetros da parede, o topo da escada, B , atingiu 1,8 metros de altura. Agora, se você fosse puxar a extremidade inferior para longe do muro mais 1 centímetro, quanto que a extremidade superior desceria? Coloquemos tudo em centímetro: $x = 19$ centímetros, $y = 180$ centímetros. Agora, o incremento de x que chamamos de dx , é de 1 centímetro: ou $x + dx = 20$ centímetros.

Quanto y será diminuído? A nova altura será $y - dy$. Se nós calcularmos a altura pelo Teorema de Pitágoras acharemos o valor final de dy . O comprimento da escada é

$$\sqrt{(180)^2 + (19)^2} = 181 \text{ centímetros.}$$

Então, a nova altura, que é $y - dy$, será tal que:

$$\begin{aligned} (y - dy)^2 + (20)^2 &= (181)^2 \\ (y - dy)^2 &= (181)^2 - (20)^2 = 32.761 - 400 = 32.361, \\ y - dy &= \sqrt{32.361} = 179,89 \text{ centímetros.} \end{aligned}$$

Como y é 180, dy é $180 - 179,89 = 0,11$ centímetros.

Então nós vimos que um crescimento de 1 centímetro em dx resulta em um decréscimo

em dy de 0,11 centímetros.

E a proporção de dy para dx pode ser expressa por:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0,11}{1}.$$

Também é fácil ver que (exceto em uma posição particular) dy vai ser de um tamanho diferente de dx .

O que fazemos no Cálculo Diferencial é procurar, esta razão, ou seja, a proporção que dy varia em relação a dx quando ambos são suficientemente pequenos.

Note-se que só podemos achar essa razão, $\frac{dy}{dx}$, quando y e x são relacionados entre si de alguma forma, de modo que sempre que x varia y também varia. No primeiro exemplo se a base do triângulo, x , é aumentada, a altura y do triângulo também se torna maior, e no segundo exemplo, se x , a distância entre o pé da escada e a parede, aumentar, a altura atingida pela escada, y , diminui de um modo correspondente, lentamente no início, mas mais e mais rapidamente à medida que x se torna maior. Nestes casos a relação entre x e y é perfeitamente definida e pode ser representada matematicamente, sendo $\frac{y}{x} = \tan 30^\circ$ e $x^2 + y^2 = l^2$ (onde l é o comprimento da escada), respectivamente, e $\frac{dy}{dx}$ tem o significado que encontramos em cada caso.

Mas se x é, como antes, a distância do pé da escada à parede, e y é, em vez da altura alcançada, o comprimento horizontal da parede, ou o número de blocos na mesma, ou o número de anos desde que ela foi construída, qualquer mudança em x não causaria nenhuma mudança em y ; nestes casos $\frac{dy}{dx}$ não tem significado nenhum e não é possível encontrar uma expressão para isso, pois nesses exemplos uma variação em x não causa uma variação em y .

Sempre que usamos diferenciais dx , dy , dz , etc., a existência de alguma relação entre x , y , z , etc., é implícita, e esta relação é chamada de “função” em x , y , z , etc.; as duas expressões dadas acima, por exemplo, $\frac{y}{x} = \tan 30^\circ$ e $x^2 + y^2 = l^2$, são funções de x e y . Tais expressões contêm implicitamente (ou seja, sem mostrar de forma explícita) os meios de expressar, ou x em termos de y , ou y em termos de x , e por esta razão eles são chamados *funções implícitas* em x e y ; elas podem ser postas, respectivamente, na forma:

$$y = x \tan 30^\circ \quad \text{ou} \quad x = \frac{y}{\tan 30^\circ}$$

e

$$y = \sqrt{l^2 - x^2} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{l^2 - y^2}.$$

Estas últimas expressões mostram explicitamente (ou seja, diretamente) o valor de x em termos de y , ou de y em termos de x , e por esta razão são chamadas de funções

explícitas de x ou y .

Por exemplo: $x^2 + 3 = 2y - 7$ é uma função implícita em x e y ; e pode ser escrita $y = \frac{x^2 + 10}{2}$ (função explícita de x) ou $x = \sqrt{2y - 10}$ (função explícita de y). Vemos que uma função explícita em x, y, z , etc., é simplesmente o valor de algo que muda quando x, y, z , etc., variam, quer um de cada vez ou vários em conjunto. Por causa disso, o valor da função explícita é chamado de *variável dependente*, uma vez que depende do valor das outras quantidades variáveis na função; estas outras variáveis são chamadas de *variáveis independentes* porque o seu valor não é determinado a partir da valor assumido pela função. Por exemplo, se $u = x^2 \sin \theta$, x e θ são as variáveis independentes, e u é a variável dependente.

Às vezes, a relação exata entre várias quantidades x, y, z ou não é conhecida ou não é conveniente indicá-la; ela só é conhecida, ou é conveniente afirmar, que há algum tipo de relação entre estas variáveis, de modo que não se pode alterar ou x ou y ou z sozinhos sem afetar as outras quantidades; a existência de uma função de x, y, z é então indicada pela notação $F(x, y, z)$ (função implícita) ou por $x = F(y, z)$, $y = F(x, z)$ ou $z = F(x, y)$ (função explícita). Às vezes a letra f ou ϕ é usada em vez de F , de modo que $y = F(x)$, $y = f(x)$ e $y = \phi(x)$ todos significam a mesma coisa, ou seja, que o valor de y depende do valor de x de alguma forma que não é indicada.

Chamamos a razão $\frac{dy}{dx}$ de *coeficiente diferencial* de y em relação a x , mas devemos ter sempre em mente que o valor do coeficiente diferencial é aquele calculado quando cada uma das variações é *infinitamente pequena*.

2.3 Casos Mais Simples

Veremos agora como podemos diferenciar algumas expressões algébricas simples.

Começemos com a expressão $y = x^2$. Agora lembre-se que a noção fundamental do cálculo é a ideia de *crescimento*, formalmente chamada de *variação*. É claro que se x cresce x^2 também irá crescer. E como y e x^2 são iguais, se x^2 cresce, então y também crescerá. O que temos que descobrir é a proporção entre o crescimento de y e o crescimento de x . Em outras palavras nossa tarefa é achar a razão entre dy e dx , ou, em resumo, achar o valor de $\frac{dy}{dx}$.

Então façamos x crescer um pouco e se tornar $x + dx$, da mesma forma, y crescerá um pouco e irá se tornar $y + dy$. É claro que ainda será verdade que o y aumentado será igual ao quadrado do x aumentado. Escrevendo isto abaixo temos:

$$y + dy = (x + dx)^2.$$

Desenvolvendo achamos:

$$y + dy = x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2.$$

O que $(dx)^2$ significa? Lembre-se que dx significa um pouco—muito pouco— de x . Então $(dx)^2$ significará um pouco de um pouco de x ; isto é, como explicado anteriormente (p. 15), uma quantidade de segunda ordem de pequenez. Portanto podemos considerar como muito insignificante em comparação com os outros termos. Deixando isto de fora teremos:

$$y + dy = x^2 + 2x \cdot dx.$$

Como $y = x^2$; podemos subtrair y do lado esquerdo e x^2 do direito:

$$dy = 2x \cdot dx.$$

Dividindo ambos os lados por dx , teremos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Isso é exatamente o que nos propusemos a achar. A razão entre o crescimento de y e o crescimento de x , quando o *crescimento* de x é suficientemente pequeno. Neste caso a razão é $2x$.

Exemplo 2.3.1

Suponha que $x = 100$ então $y = 10.000$. Deixemos x crescer até que se torne 101 (isto é, faça $dx = 1$). Em seguida, o y aumentado será $101 \times 101 = 10.201$. Mas se nós concordamos que podemos ignorar pequenas quantidades de segunda ordem, 1 pode ser rejeitado em comparação com 10.000. Assim, podemos “arredondar” o y aumentado para 10.200, y cresceu de 10.000 para 10.200, o pedaço adicionado é dy , que é 200. $\frac{dy}{dx} = \frac{200}{1} = 200$. De acordo com o exemplo algébrico e o parágrafo anterior, $\frac{dy}{dx} = 2x$. E assim temos para $x = 100$ e $2x = 200$.

Mas pode-se argumentar que uma “unidade inteira” foi negligenciada, bem, façamos novamente escolhendo um dx um pouco menor.

Tentemos $dx = \frac{1}{10}$. Então $x + dx = 100,1$, e

$$(x + dx)^2 = 100,1 \times 100,1 = 10.020,01.$$

Agora, o último dígito 1 é apenas um milionésimo de 10.000, e é absolutamente insignificante; por isso, podemos usar 10.020 sem o pequeno decimal no final. E isso faz com que $dy = 20$; e $\frac{dy}{dx} = \frac{20}{0,1} = 200$, que ainda é o mesmo resultado, $2x$.

Vamos diferenciar $y = x^3$ da mesma maneira.

Faremos y crescer para $y + dy$, enquanto x cresce para $x + dx$.

Então:

$$y + dy = (x + dx)^3.$$

Desenvolvendo a potência obtemos:

$$y + dy = x^3 + 3x^2 \cdot dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3.$$

Agora sabemos que podemos negligenciar pequenas quantidades de segunda e terceira ordens; uma vez que quando dy e dx são ambos feitos indefinidamente pequenos, $(dx)^2$ e $(dx)^3$ ficarão indefinidamente menores em comparação. Assim, considerando-os como insignificantes, ficamos com:

$$y + dy = x^3 + 3x^2 \cdot dx.$$

Mas $y = x^3$; e, subtraindo isso, temos:

$$dy = 3x^2 \cdot dx,$$

e

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Vejamos quando

$y = x^4$. Começando como antes, deixemos tanto y quanto x crescerem um pouco, temos:

$$y + dy = (x + dx)^4.$$

Elevando à quarta potência, obtemos:

$$y + dy = x^4 + 4x^3 dx + 6x^2(dx)^2 + 4x(dx)^3 + (dx)^4.$$

Eliminando todos os termos que contêm as potências mais altas de dx , pois são comparativamente insignificantes, temos:

$$y + dy = x^4 + 4x^3 dx.$$

Subtraindo o original $y = x^4$, ficamos com:

$$dy = 4x^3 dx,$$

e
$$\frac{dy}{dx} = 4x^3.$$

Até agora as situações foram muito simples. Vamos tabular os resultados para ver se conseguimos inferir alguma regra geral. Colocando em duas colunas, em uma os valores de y e na outra os valores correspondentes encontrados para $\frac{dy}{dx}$:

y	$\frac{dy}{dx}$
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$

Basta olhar com atenção para estes resultados. A operação de diferenciação parece ter tido o efeito de diminuir a potência de x por 1 (no último caso, por exemplo, a redução de x^4 para x^3), e ao mesmo tempo multiplicar por um outro número (o mesmo número que originalmente apareceu como potência). Depois vimos isto uma vez, podemos facilmente conjecturar como as outras vão se comportar. Esperamos que diferenciar x^5 daria $5x^4$ e que diferenciar x^6 daria $6x^5$.

Vejamos $y = x^5$.

Então
$$\begin{aligned} y + dy &= (x + dx)^5 \\ &= x^5 + 5x^4 dx + 10x^3(dx)^2 + 10x^2(dx)^3 \\ &\quad + 5x(dx)^4 + (dx)^5. \end{aligned}$$

Negligenciando todos os termos que contêm pequenas quantidades de ordens superiores, ficamos com:

$$y + dy = x^5 + 5x^4 dx,$$

e subtraindo $y = x^5$ nos deixa com

$$dy = 5x^4 dx,$$

onde $\frac{dy}{dx} = 5x^4$, exatamente como se supunha.

Seguindo a lógica desta nossa observação devemos concluir que podemos resolver da mesma maneira com qualquer potência superior, vamos chamar de n .

Temos $y = x^n$,

então, deveríamos esperar encontrar

$$\frac{dy}{dx} = nx^{(n-1)}.$$

Por exemplo, para $n = 8$, então $y = x^8$; e diferenciando teremos $\frac{dy}{dx} = 8x^7$.

E, de fato, a regra de que diferenciar x^n dá como resultado nx^{n-1} é verdade para todos os casos em que n é um número inteiro e positivo. [Verificamos isto fazendo a expansão de $(x + dx)^n$ pelo Binômio de Newton (veja Apêndice A, p. 64)] Mas a questão de saber se é verdade nos casos em que n tem valores negativos ou fracionários requer uma análise mais aprofundada.

Vejam os dois exemplos.

Exemplo 2.3.2

Seja $y = x^{-2}$. Façamos como antes:

$$\begin{aligned} y + dy &= (x + dx)^{-2} \\ &= x^{-2} \left(1 + \frac{dx}{x}\right)^{-2}. \end{aligned}$$

Utilizando a expansão pela Série Binomial* teremos:

$$\begin{aligned} &= x^{-2} \left[1 - \frac{2 dx}{x} + \frac{2(2+1)}{1 \times 2} \left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \text{etc.} \right] \\ &= x^{-2} - 2x^{-3} \cdot dx + 3x^{-4}(dx)^2 - 4x^{-5}(dx)^3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

*A série Binomial é a série de Maclaurin da função $f(x) = (1+x)^c$ com c complexo. A demonstração foge ao escopo deste trabalho

Então, negligenciando as pequenas quantidades de ordens mais elevadas de pequenez, nós temos:

$$y + dy = x^{-2} - 2x^{-3} \cdot dx.$$

Subtraindo o original $y = x^{-2}$, encontramos

$$\begin{aligned} dy &= -2x^{-3}dx, \\ \frac{dy}{dx} &= -2x^{-3}. \end{aligned}$$

E isso ainda está em conformidade com a regra inferida anteriormente.

Exemplo 2.3.3 - Caso de uma potência fracionária.

Façamos $y = x^{\frac{1}{2}}$. Então, como antes,

$$\begin{aligned} y + dy &= (x + dx)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{dx}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \frac{(dx)^2}{x\sqrt{x}} + \dots \end{aligned}$$

termos com
maior
potência de dx .

Subtraindo o original $y = x^{\frac{1}{2}}$, e negligenciando potências superiores nós temos:

$$dy = \frac{1}{2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot dx,$$

e $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$. De acordo com a regra geral.

Em resumo, encontramos a seguinte regra: para diferenciar x^n , multiplique pela potência n e diminua um da potência de x ficando com nx^{n-1} como resultado.

2.4 Sobre as Constantes

Nosso próximo assunto é o que fazer com as Constantes.

Em nossas equações temos considerado x como crescendo, e como um resultado deste crescimento de x , o valor de y é alterado. Normalmente pensamos em x como uma quantidade que pode variar, considerando a variação de x como uma espécie de *causa* e a variação de y como um *efeito*. Em outras palavras, nós consideramos que o valor de y depende do valor de x . Tanto x quanto y são variáveis, mas x é a variável que operamos

e y é a “variável dependente”. Em todas as discussões anteriores temos tentado descobrir regras para a variação causada em y pela a variação independente de x .

Nosso próximo passo é descobrir qual é o efeito causado no processo de diferenciação pela presença de *constantes*, isto é, de números que não se alteram quando x ou y mudam seus valores.

Vamos começar com alguns casos simples onde adicionamos uma constante.

Considere $y = x^3 + 5$.

Tal como antes, suponhamos que x cresça para $x + dx$ e y cresça para $y + dy$.

$$\begin{aligned} \text{Teremos:} \quad y + dy &= (x + dx)^3 + 5 \\ &= x^3 + 3x^2 dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3 + 5. \end{aligned}$$

Negligenciando as pequenas quantidades de ordens superiores:

$$y + dy = x^3 + 3x^2 \cdot dx + 5.$$

Subtraia o original $y = x^3 + 5$, e nós ficamos com:

$$\begin{aligned} dy &= 3x^2 dx. \\ \frac{dy}{dx} &= 3x^2. \end{aligned}$$

Assim, o 5 simplesmente desapareceu por completo. Ele não acrescentou nada ao crescimento de x , e portanto não entra no coeficiente diferencial. Se tivéssemos colocado 7, ou 700, ou qualquer outro *número* em vez de 5, ele também teria desaparecido. Então, se usarmos a letra a , ou b , ou c para representar qualquer constante, ela vai simplesmente desaparecer quando diferenciarmos.

Se a constante adicional tivesse sido de valor negativo, como $-a$ ou $-b$, teria desaparecido da mesma maneira.

Analisemos agora o que ocorre quando multiplicamos por constantes.

Façamos uma experiência com um caso simples: considere $y = 7x^2$.

Então, repetindo o processo que fizemos antes, chegamos em:

$$\begin{aligned} y + dy &= 7(x + dx)^2 \\ &= 7\{x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2\} \\ &= 7x^2 + 14x \cdot dx + 7(dx)^2. \end{aligned}$$

Em seguida, subtraindo o original $y = 7x^2$, e negligenciando o último termo, temos

$$\begin{aligned} dy &= 14x \cdot dx. \\ \frac{dy}{dx} &= 14x. \end{aligned}$$

Vamos ilustrar este exemplo trabalhando nos gráficos das equações $y = 7x^2$ e $\frac{dy}{dx} = 14x$, atribuindo a x um conjunto de valores sucessivos, 0, 1, 2, 3, etc., e encontrando os valores correspondentes de y e de $\frac{dy}{dx}$.

Tabulamos estes valores como se segue:

x	0	1	2	3	4	5	-1	-2	-3
y	0	7	28	63	112	175	7	28	63
$\frac{dy}{dx}$	0	14	28	42	56	70	-14	-28	-42

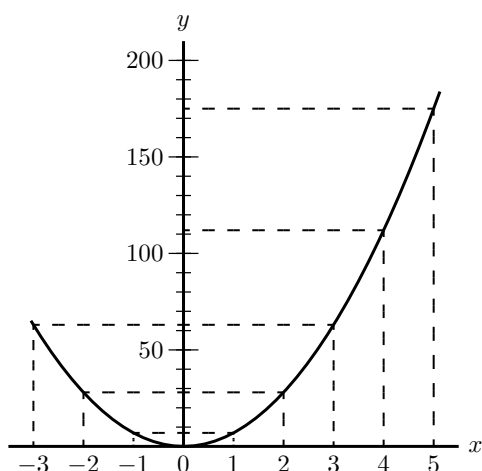


FIG. 6.—Gráfico de $y = 7x^2$.

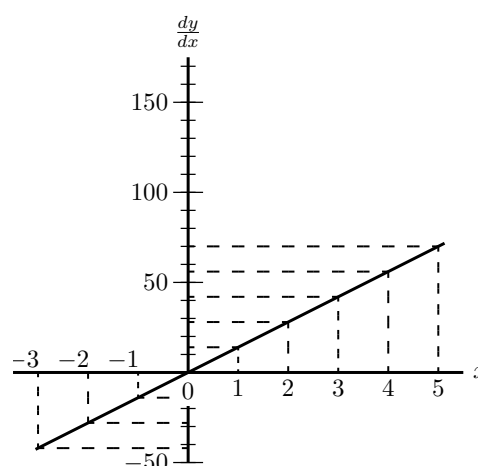


FIG. 6a.—Gráfico de $\frac{dy}{dx} = 14x$.

Agora traçamos esses valores em alguma escala conveniente e obtemos as duas curvas, Fig. 6 e Fig. 6a.

Comparando cuidadosamente as duas figuras verificamos, por inspeção, que a altura

da ordenada da curva derivada, Fig. 6a, é proporcional à *inclinação* * da curva original, Fig. 6, pelo valor correspondente de x . À esquerda da origem, onde a curva original tem uma inclinação negativa (isto é, para baixo a partir da esquerda para a direita) as ordenadas correspondentes da derivada são negativas.

Agora, se olharmos para trás, p. 50, veremos que diferenciar x^2 nos dá $2x$. Assim o coeficiente diferencial de $7x^2$ é exatamente 7 vezes maior que o de x^2 . Se tivéssemos tomado $8x^2$, o coeficiente diferencial teria sido oito vezes maior que o de x^2 . Se colocarmos de forma genérica $y = ax^2$ (lembrando que a é uma constante), teremos:

$$\frac{dy}{dx} = a \times 2x.$$

Se tivéssemos começado com $y = ax^n$, então teríamos $\frac{dy}{dx} = a \times nx^{n-1}$. De modo que qualquer mera multiplicação por uma constante se mantém como uma mera multiplicação quando é feita a diferenciação. E o que é verdade sobre multiplicação é igualmente verdade sobre *divisão*; porque, se no exemplo acima, nós tivéssemos tomado como constante $\frac{1}{7}$ em vez de 7, teríamos o mesmo $\frac{1}{7}$ no resultado depois da diferenciação.

A seguir vejamos mais alguns exemplos, resolvidos detalhadamente, que irão nos auxiliar no domínio completo do processo de diferenciação das expressões algébricas comuns. Nestes exemplos consideramos a e b como constantes.

Exemplo 2.4.1

Diferencie $y = \frac{x^5}{7} - \frac{3}{5}$.

$\frac{3}{5}$ é uma constante adicionada e desaparece (ver pág. 27).

Podemos, então, escrever de uma só vez

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{7} \times 5 \times x^{5-1},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{7}x^4.$$

Exemplo 2.4.2

Diferenciar $y = a\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{b}$.

O termo $\frac{1}{2}\sqrt{b}$ desaparece, pois é uma constante adicionada; e como $a\sqrt{x}$, sob a forma

*Ver o Apêndice B, p. 65, sobre *inclinação* de curvas.

de índice, é escrito $ax^{\frac{1}{2}}$, nós temos

$$\frac{dy}{dx} = a \times \frac{1}{2} \times x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{a}{2} \times x^{-\frac{1}{2}},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{x}}.$$

Exemplo 2.4.3

Se $ay+bx = by-ax+(x+y)\sqrt{a^2-b^2}$, com $a > b > 0$, encontre o coeficiente diferencial de y em relação a x .

Como regra uma expressão deste tipo vai precisar de um pouco mais de conhecimento do que o adquirido até agora; mas sempre vale a pena verificar se conseguimos colocar a expressão em uma forma mais simples.

Primeiro temos de tentar trazê-la para o formato de alguma expressão envolvendo somente o x .

A expressão pode ser escrita

$$(a-b)y + (a+b)x = (x+y)\sqrt{a^2-b^2}.$$

Elevando ao quadrado, obtemos

$$(a-b)^2y^2 + 2(a+b)(a-b)xy + (a+b)^2x^2 = (x^2 + 2xy + y^2)(a^2 - b^2),$$

o que simplificando fica:

$$(a-b)^2y^2 + (a+b)^2x^2 + 2xy(a^2-b^2) = x^2(a^2-b^2) + y^2(a^2-b^2) + 2xy(a^2-b^2);$$

$$(a-b)^2y^2 + (a+b)^2x^2 = x^2(a^2-b^2) + y^2(a^2-b^2);$$

ou

$$[(a-b)^2 - (a^2-b^2)]y^2 = [(a^2-b^2) - (a+b)^2]x^2,$$

que é

$$2b(b-a)y^2 = -2b(b+a)x^2;$$

Portanto,

$$y = x\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

Exemplo 2.4.4

O volume de um cilindro com um raio r e altura h é dado pela fórmula $V = \pi r^2 h$. Encontre a taxa de variação do volume em relação ao raio, quando $r = 5,5$ cm. e $h = 20$ cm. Se $r = h$, encontre as dimensões do cilindro de modo que uma alteração de 1 cm

no raio causa mudança de 400 cm^3 no volume.

A taxa de variação de V em relação à r é

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi r h.$$

Se $r = 5,5 \text{ cm}$, $h = 20 \text{ cm}$ e $\pi = 3,14$ o resultado é $690,8 \text{ cm}^3$. Isto significa que uma mudança no raio de 1 centímetro irá causar uma mudança de volume de $690,8 \text{ cm}^3$. Podemos verificar isto facilmente, para $r = 5$ e $r = 6$, os volumes são, respectivamente, 1570 cm^3 . e $2260,8 \text{ cm}^3$. e $2.260,8 - 1.570 = 690,8$.

Além disso, se

$$r = h, \quad \frac{dV}{dr} = 2\pi r^2 = 400 \quad \text{e} \quad r = h = \sqrt{\frac{400}{2\pi}} = 7,98 \text{ cm}.$$

Ao longo deste capítulo apresentamos os conhecimentos essenciais para o estudo do Cálculo, inicialmente mostramos os dois símbolos fundamentais d e \int , depois fornecemos uma noção de infinitesimal, então apresentamos a ideia de taxa de variação e a noção de derivada, em seguida escrevemos sobre a diferenciação de potências de x , e por fim mostramos como desenvolver a diferenciação quando, além de potências de x , temos constantes envolvidas.

3 Avançando um pouco

3.1 Somando, Subtraindo, Multiplicando e Dividindo

Agora que já foi construído o conhecimento de como diferenciar funções algébricas simples como $x^2 + c$ e ax^4 , temos que considerar como lidar com a soma, a subtração, a multiplicação e a divisão de duas ou mais funções. Tratemos inicialmente da soma

SOMA

Por exemplo façamos:

$$y = (x^2 + c) + (ax^4 + b);$$

Qual será o seu $\frac{dy}{dx}$?

Como podemos resolver?

A resposta a esta pergunta é bastante simples: basta diferenciá-los, um após o outro, e somar os resultados da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 4ax^3$$

Se houver alguma dúvida se isso está certo, podemos tentar um caso mais geral, trabalhando-o pelas definições.

Faça $y = u + v$, onde u é qualquer função de x e v qualquer outra função de x . Em seguida, deixando x aumentar para $x + dx$, y aumentará para $y + dy$; e u irá aumentar para $u + du$; e v para $v + dv$.

E teremos:

$$y + dy = u + du + v + dv.$$

Subtraindo o original $y = u + v$:

$$dy = du + dv,$$

e dividindo por dx , resulta em:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$

Isso justifica o procedimento. Você diferencia cada função separadamente e adiciona os resultados. Agora se tomarmos o exemplo do parágrafo anterior, e colocar os valores das duas funções, teremos, usando a notação mostrada anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(x^2 + c)}{dx} + \frac{d(ax^4 + b)}{dx} \\ &= 2x + 4ax^3, \end{aligned}$$

exatamente como antes.

Se houvessem três funções de x , que podemos chamar de u , v e w , de modo que:

$$y = u + v + w;$$

então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}.$$

SUBTRAÇÃO

Quanto a *subtração*, o resultado é imediato, pois se a função v já tem um sinal negativo, o seu coeficiente diferencial também seria negativo; então através da diferenciação

$$y = u - v,$$

nós teremos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$

MULTIPLICAÇÃO

Mas quando vamos lidar com *produtos*, a coisa não é assim tão simples.

Suponha que temos que diferenciar a expressão:

$$y = (x^2 + c) \times (ax^4 + b).$$

O resultado certamente *não* será $2x \times 4ax^3$; isto é fácil de ver pois nem $c \times ax^4$, nem $x^2 \times b$, fazem parte do produto.

Podemos desenvolver de dois modos diferentes.

Primeiro modo. Fazer primeiro a multiplicação e então diferenciar o resultado.

Assim, nós multiplicaríamos $x^2 + c$ por $ax^4 + b$.

Isto dá $ax^6 + acx^4 + bx^2 + bc$.

Agora fazemos a diferenciação e teremos:

$$\frac{dy}{dx} = 6ax^5 + 4acx^3 + 2bx.$$

Segundo modo. Voltemos aos fundamentos e consideremos a equação:

$$y = u \times v;$$

em que u é uma função de x e v é qualquer outra função de x . Então, se x cresce para $x + dx$; y para $y + dy$; u torna-se $u + du$, e v passa a $v + dv$, teremos:

$$\begin{aligned} y + dy &= (u + du) \times (v + dv) \\ &= u \cdot v + u \cdot dv + v \cdot du + du \cdot dv. \end{aligned}$$

Agora $du \cdot dv$ é uma pequena quantidade de segunda ordem de pequenez e, portanto, pode ser descartado, deixando:

$$y + dy = u \cdot v + u \cdot dv + v \cdot du.$$

Em seguida, subtraindo o original $y = u \cdot v$, de ambos os lados temos:

$$dy = u \cdot dv + v \cdot du;$$

e, dividindo por dx , obtemos o resultado:

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Isso mostra que as nossas instruções serão as seguintes: *Para diferenciar o produto de duas funções, multiplicamos cada função pelo coeficiente diferencial da outra, e somamos os dois produtos assim obtidos.*

Você deve observar que esse processo equivale ao seguinte: tratar u como constante enquanto você diferencia v e em seguida tratar v como constante enquanto você diferencia u . O coeficiente diferencial total $\frac{dy}{dx}$ será a soma destes dois tratamentos.

Agora que encontramos esta regra vamos aplicá-la ao exemplo concreto que foi considerado anteriormente.

Queremos diferenciar o produto

$$(x^2 + c) \times (ax^4 + b)$$

Chame $(x^2 + c) = u$; e $(ax^4 + b) = v$.

Então, pela regra geral encontrada podemos escrever:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x^2 + c) \frac{d(ax^4 + b)}{dx} + (ax^4 + b) \frac{d(x^2 + c)}{dx} \\ &= (x^2 + c) 4ax^3 + (ax^4 + b) 2x \\ &= 4ax^5 + 4acx^3 + 2ax^5 + 2bx, \\ \frac{dy}{dx} &= 6ax^5 + 4acx^3 + 2bx, \end{aligned}$$

exatamente como antes.

DIVISÃO

Por último, temos de diferenciar *quocientes*.

Pense neste exemplo, $y = \frac{bx^5 + c}{x^2 + a}$. Nesse caso não adianta tentar fazer a divisão antes, porque $x^2 + a$ não divide $bx^5 + c$, e nem tentar simplificar, pois eles também não têm nenhum fator em comum. Então não há nada a fazer exceto voltar aos fundamentos e encontrar uma regra.

Coloquemos $y = \frac{u}{v}$;

em que u e v são duas funções diferentes da variável independente x . Então, quando x se torna $x + dx$, y se tornará $y + dy$, u , $u + du$; e v , $v + dv$. Então

$$y + dy = \frac{u + du}{v + dv}.$$

Executando a divisão algébrica temos que $\frac{u + du}{v + dv}$ resulta no quociente de $\frac{u}{v} + \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2}$ com resto igual a $-\frac{du \cdot dv}{v} + \frac{u \cdot dv \cdot dv}{v^2}$

Como o resto é representado por pequenas quantidades de segunda ordem, que podem ser desprezadas, a divisão pode ser representada pelo quociente.

Assim temos:

$$y + dy = \frac{u}{v} + \frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2};$$

que pode ser escrita como

$$= \frac{u}{v} + \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$$

Agora subtraia o original $y = \frac{u}{v}$, e nós temos:

$$dy = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2};$$

resultando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Isto nos dá as instruções de como *como diferenciar um quociente* de duas funções. *Multiplique a função divisor pelo coeficiente diferencial da função dividendo; em seguida, multiplique a função dividendo pelo coeficiente diferencial da função divisor e subtraia. Por último divida esta subtração pelo quadrado da função divisor.*

Voltando ao nosso exemplo $y = \frac{bx^5 + c}{x^2 + a}$,

substituindo

$$bx^5 + c = u;$$

e

$$x^2 + a = v,$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(x^2 + a) \frac{d(bx^5 + c)}{dx} - (bx^5 + c) \frac{d(x^2 + a)}{dx}}{(x^2 + a)^2} \\ &= \frac{(x^2 + a)(5bx^4) - (bx^5 + c)(2x)}{(x^2 + a)^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3bx^6 + 5abx^4 - 2cx}{(x^2 + a)^2}. \end{aligned}$$

O desenvolvimento de quocientes é muitas vezes tedioso, mas não há nada de difícil nesta diferenciação.

A seguir temos alguns outros exemplos, totalmente desenvolvidos.

Exemplo 3.1.1

Diferencie $y = \frac{a}{b^2}x^3 - \frac{a^2}{b}x + \frac{a^2}{b^2}$.

Sendo uma constante, $\frac{a^2}{b^2}$ desaparece, e temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b^2} \times 3 \times x^{3-1} - \frac{a^2}{b} \times 1 \times x^{1-1}.$$

Mas $x^{1-1} = x^0 = 1$; então temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a}{b^2}x^2 - \frac{a^2}{b}.$$

Exemplo 3.1.2

Diferenciar $y = 2a\sqrt{bx^3} - \frac{3b\sqrt[3]{a}}{x} - 2\sqrt{ab}$.

Colocando x , sob a forma de índice, obtemos

$$y = 2a\sqrt{bx^{\frac{3}{2}}} - 3b\sqrt[3]{ax^{-1}} - 2\sqrt{ab}.$$

Agora

$$\frac{dy}{dx} = 2a\sqrt{b} \times \frac{3}{2} \times x^{\frac{3}{2}-1} - 3b\sqrt[3]{a} \times (-1) \times x^{-1-1};$$

ou,

$$\frac{dy}{dx} = 3a\sqrt{bx} + \frac{3b\sqrt[3]{a}}{x^2}.$$

Exemplo 3.1.3

Diferenciar $z = 1,8\sqrt[3]{\frac{1}{\theta^2}} - \frac{4,4}{\sqrt[5]{\theta}} - 27^\circ$.

Isso pode ser escrito: $z = 1,8\theta^{-\frac{2}{3}} - 4,4\theta^{-\frac{1}{5}} - 27^\circ$.

O 27° desaparece, e temos

$$\frac{dz}{d\theta} = 1,8 \times -\frac{2}{3} \times \theta^{-\frac{2}{3}-1} - 4,4 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \theta^{-\frac{1}{5}-1};$$

ou,

$$\frac{dz}{d\theta} = -1,2\theta^{-\frac{5}{3}} + 0,88\theta^{-\frac{6}{5}};$$

ou,

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{0,88}{\sqrt[5]{\theta^6}} - \frac{1,2}{\sqrt[3]{\theta^5}}.$$

Exemplo 3.1.4

Diferenciar $v = (3t^2 - 1, 2t + 1)^3$.

Desenvolvendo o cubo, obtemos

$$v = 27t^6 - 32,4t^5 + 39,96t^4 - 23,328t^3 - 13,32t^2 - 3,6t + 1;$$

consequentemente

$$\frac{dv}{dt} = 162t^5 - 162t^4 + 159,84t^3 - 69,984t^2 + 26,64t - 3,6.$$

3.2 Diferenciação Sucessiva

Vamos agora verificar o efeito de repetir várias vezes a operação de diferenciar uma função. Vejamos através de um exemplo.

Exemplo 3.2.1

Façamos $y = x^5$.

Primeira diferenciação, $5x^4$.

Segunda diferenciação, $5 \times 4x^3 = 20x^3$.

Terceira diferenciação, $20 \times 3x^2 = 60x^2$.

Quarta diferenciação, $60 \times 2x = 120x$.

Quinta diferenciação, $120 \times 1 = 120$.

Sexta diferenciação, $= 0$.

Há uma certa notação, que já vimos anteriormente, (veja p. 21), usada por alguns autores, que é muito conveniente. É empregar o símbolo geral $f(x)$ para qualquer função de x . Aqui o símbolo $f(\)$ é lido como “função de,” sem especificar a qual função particular de x se refere. Então a notação $y = f(x)$ simplesmente nos diz que y é uma função de x , pode ser x^2 ou ax^n , ou $\cos x$ ou qualquer outra função de x .

O símbolo correspondente para o coeficiente diferencial é $f'(x)$, que é mais simples de escrever do que $\frac{dy}{dx}$. Isto é chamado de a “função derivada” de x .

Suponha que nós fizéssemos a diferenciação novamente, teríamos a “segunda função derivada” ou segundo coeficiente diferencial, que é representado por $f''(x)$; e assim se segue.

Podemos generalizar.

Temos $y = f(x) = x^n$.

Primeira diferenciação, $f'(x) = nx^{n-1}$.

Segunda diferenciação, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$.

Terceira diferenciação, $f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$.

Quarta diferenciação, $f''''(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$.
etc., etc.

Mas esta não é a única maneira de indicar a diferenciação sucessiva.

Se a função original for $y = f(x)$;

diferenciar uma vez dá $\frac{dy}{dx} = f'(x)$;

diferenciar uma segunda vez nos dá $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = f''(x)$;

e isto é mais convenientemente escrito como $\frac{d^2y}{(dx)^2}$, ou o mais usual $\frac{d^2y}{dx^2}$. Da mesma forma podemos escrever o resultado da terceira diferenciação, $\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$.

Exemplo 3.2.2

Faça $y = f(x) = 7x^4 + 3,5x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2$.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 28x^3 + 10,5x^2 - x + 1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 84x^2 + 21x - 1,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = 168x + 21,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = f''''(x) = 168,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = f'''''(x) = 0.$$

Exemplo 3.2.3

Se $y = \phi(x)^* = 3x(x^2 - 4)$,

$$\phi'(x) = \frac{dy}{dx} = 3[x \times 2x + (x^2 - 4) \times 1] = 3(3x^2 - 4),$$

$$\phi''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = 3 \times 6x = 18x,$$

$$\phi'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = 18,$$

$$\phi''''(x) = \frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

3.3 Quando o tempo varia

Alguns dos mais importantes problemas de Cálculo são aqueles em que o tempo é a variável independente e nós temos que analisar os valores de alguma outra quantidade que se altera quando o tempo varia. Algumas quantidades crescem quando o tempo passa, outras se tornam menores. A distância entre um trem e a sua estação de partida aumenta conforme o tempo passa. Árvores ficam mais altas com o avanço dos anos. Qual crescimento ocorre com uma taxa maior, uma planta de 12 centímetros que em um mês passa a ter 14 centímetros de altura, ou uma árvore de 12 metros que em um ano passa a ter 14 metros?

Nesta seção faremos muito uso da palavra *taxa*. Nada a ver com a taxa de luz, ou a taxa de água (exceto que ainda neste contexto a palavra sugere uma proporção —uma razão—entre um valor e uma determinada quantidade).

Uma boa situação para ilustrar a ideia de taxa é a de corpos em movimento. Podemos entender a velocidade como a taxa da variação da distância em relação ao tempo. A distância do Rio de Janeiro a São Paulo é, aproximadamente, 400Km. Se um carro sai de São Paulo às 7 horas da manhã e chega ao Rio de Janeiro ao meio dia, como ele viajou 400Km em 5 horas, isto nos dá uma velocidade média de 80 Km por hora, pois $\frac{400Km}{5h} = \frac{80Km}{1h}$. Aqui estamos realmente fazendo uma comparação entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la. Nós dividimos um pelo outro. Se y é a distância total e t o tempo total, claramente a velocidade média será $\frac{y}{t}$. Obviamente a velocidade não foi constante o tempo todo, em alguns momentos o carro acelerava e em outros era obrigado a frear. Se durante qualquer elemento[†] particular de tempo dt a distância percorrida correspondente era dy , então naquele trecho da viagem a velocidade era $\frac{dy}{dt}$. Como estamos considerando um instante, ou seja, um período de tempo tão curto quanto se queira, podemos falar em coeficiente diferencial e a *taxa* em que uma quantidade (no nosso exemplo, *distância*) varia em relação a outra quantidade (neste

*Aqui usamos $\phi(x)$ como outra representação para função.

†Aqui usamos *elemento* como aquela ideia inicial apresentada na introdução, um pequeno pedaço.

caso *tempo*) pode então ser expressa pelo coeficiente diferencial de uma em relação a outra. A *velocidade instantânea*, cientificamente falando, é a taxa em que uma distância é percorrida em um intervalo de tempo muito, muito pequeno, e pode ser escrita como:

$$v = \frac{dy}{dt}.$$

Mas se a velocidade não é uniforme então ela está ou crescendo ou diminuindo. A taxa na qual a velocidade está aumentando é chamada de *aceleração*. Se um corpo em movimento, em um determinado instante, está ganhando uma velocidade adicional dv em um elemento de tempo dt , então a aceleração a naquele instante pode ser expressa por:

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Visto que dv é $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, podemos escrever

$$a = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dt};$$

e usualmente escrevemos desta forma $a = \frac{d^2y}{dt^2}$;

ou: a aceleração é a segunda derivada da distância em relação ao tempo.

Aceleração é expressa como a alteração da *velocidade* em relação ao tempo, por exemplo de 0 a 100Km por hora em 4 segundos, ou metro por segundo, por segundo; e a notação usada é metro \div segundo², ou $\frac{m}{s^2}$.

Quando é dada a largada em uma corrida de fórmula 1 e o carro começa a se mover sua velocidade v é pequena, mas ele ganha velocidade rapidamente, ou podemos dizer, ele é acelerado pelo esforço do motor. Então neste estágio inicial $\frac{d^2y}{dt^2}$ é grande. Quando no meio da reta o carro atinge sua velocidade máxima ele não é mais acelerado e então $\frac{d^2y}{dt^2}$ é igual a zero. Mas quando ele se aproxima de uma curva fechada e precisa frear, sua velocidade diminui, ele é *desacelerado* e o valor de $\frac{dv}{dt}$, que é o mesmo que $\frac{d^2y}{dt^2}$, será negativo.

Acelerar um corpo de massa m requer a aplicação contínua de uma força, no exemplo de um carro, o motor “produz” esta força. A força necessária para acelerar um corpo é proporcional à sua massa e também é proporcional à aceleração que este corpo vai sofrer.

Então nós podemos escrever a força f com a seguinte expressão:

$$f = ma;$$

ou

$$f = m \frac{dv}{dt};$$

ou

$$f = m \frac{d^2y}{dt^2}.$$

O produto da massa pela velocidade desenvolvida pelo corpo é chamado de *Quantidade de Movimento* e é representado por $Q = mv$. Se nós diferenciarmos a Quantidade de Movimento em relação ao tempo teremos $\frac{d(mv)}{dt}$ para a taxa de variação de Quantidade de Movimento. Mas, considerando que a massa m de um corpo é constante, isto é igual a $m \frac{dv}{dt}$, que como visto anteriormente, é a mesma coisa que f . Isto quer dizer que força pode ser expressa tanto como massa vezes aceleração ou como a taxa de variação da Quantidade de Movimento.

Novamente, se uma força é aplicada para mover um corpo (contra uma força de reação, de igual intensidade e direção oposta) ela produz *trabalho* e a quantidade de trabalho é medida pelo produto da força pela distância (na direção em que a força foi aplicada) que o corpo se deslocou. Então se uma força f move um corpo uma distância y o trabalho produzido será

$$w = f \times y;$$

onde nós consideramos f como uma força constante. Se a força varia ao longo do distância y , então teremos que encontrar uma expressão para o seu valor em cada ponto do percurso. Se f é a força durante o pequeno elemento de comprimento dy , o trabalho produzido será $f \times dy$. Mas como dy é somente um elemento do comprimento então isto é somente um elemento do trabalho produzido. Se usamos w para representar o trabalho, então um elemento do trabalho será dw e teremos:

$$dw = f \times dy;$$

que pode ser escrito como

$$dw = ma \cdot dy;$$

ou

$$dw = m \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dy;$$

ou

$$dw = m \frac{dv}{dt} \cdot dy.$$

Por último podemos reescrever a expressão inicial como

$$\frac{dw}{dy} = f.$$

Isto nos dá uma terceira definição de *força*; ela é a derivada do trabalho em relação a *distância*, em outras palavras, se ela está sendo usada para produzir um deslocamento em qualquer direção, a força (naquela direção) é igual a razão entre o trabalho que está sendo produzido e a unidade de comprimento naquela direção.

Sir Isaac Newton e Leibnitz desenvolveram, de forma autônoma, o Cálculo e para quem acha que ciência é um assunto enfadonho, o livro “*A guerra do Cálculo*” é suficiente para mudar de opinião.* Newton classificava todas as quantidades que variavam como *fluentes* e o que hoje chamamos de coeficiente diferencial ele chamava de taxa de variação do fluente ou *fluxo* da quantidade em questão. Ele não usava a notação dy , dx , e dt , isto foi uma invenção de Leibnitz, ao invés disto ele criou uma notação própria. Se uma quantidade y variava, ou “fluía,” então o símbolo para esta taxa de variação (ou “fluxo”) era \dot{y} . Se x era a variável então o seu fluxo é chamado de \dot{x} . O ponto sobre a letra indica que a variável foi diferenciada, mas esta notação não nos diz em relação a qual variável que ocorreu a diferenciação. Quando vimos $\frac{dy}{dt}$ logo sabemos que o y está sendo diferenciado em relação ao t . Mas se o símbolo é simplesmente \dot{y} , não conseguimos saber, sem olhar o contexto, se isto significa $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{dy}{dt}$ ou $\frac{dy}{dz}$, ou ainda qualquer outra variável. Por este motivo a notação de fluxo nos dá menos informação que a notação diferencial e em consequência é muito menos usada hoje em dia. Mas esta simplicidade nos dá uma vantagem se pudermos concordar em usá-la somente quando *tempo* for a variável independente. Neste caso \dot{y} significará $\frac{dy}{dt}$ e \dot{u} significará $\frac{du}{dt}$; e \ddot{x} será o mesmo que $\frac{d^2x}{dt^2}$.

Adotando esta notação de fluxo, podemos escrever as equações de mecânica consideradas antes nesta seção como se segue:

distância	$x,$
velocidade	$v = \dot{x},$
aceleração	$a = \dot{v} = \ddot{x},$
força	$f = m\dot{v} = m\ddot{x},$
trabalho	$w = x \times m\ddot{x}.$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.3.1

Um corpo se move de tal forma que a distância x (em metros, m) em relação a um certo ponto O é dada pela relação $x = 0,2t^2 + 10,4$ onde t é o tempo em segundos, s,

*O livro narra a disputa, nem sempre com jogadas respeitáveis, pela autoria do Cálculo.

desde um dado instante inicial. Ache a velocidade e aceleração 5 segundos após o corpo começar a se mover para a *direita*, e também encontre os valores correspondentes quando a distância percorrida foi de 100 metros. Também ache a velocidade média nos primeiros 10 segundos de movimento à direita. (Suponha que distância e movimento para a direita são positivos.)

Temos a relação $x = 0,2t^2 + 10,4$. Então,

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 0,4t; \quad e \quad a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0,4 = \text{constante}.$$

Quando $t = 0$, $x = 10,4$ e $v = 0$. O corpo começa a se mover em um ponto localizado 10,4 metros à direita do ponto O , e o tempo começou a ser contado quando o corpo iniciou seu movimento.

Quando $t = 5$, $v = 0,4 \times 5 = 2$ m/s; $a = 0,4$ m/s².

Quando $x = 100$, $100 = 0,2t^2 + 10,4$, ou $t^2 = 448$, e $t = 21,17$ s; $v = 0,4 \times 21,17 = 8,468$ m/s

Quando $t = 10$,

$$\text{distância percorrida} = 0,2 \times 10^2 + 10,4 - 10,4 = 20 \text{ m}$$

$$\text{Velocidade média} = \frac{20}{10} = 2 \text{ m/s}$$

(Esta é a mesma velocidade de quando o corpo está no meio do intervalo, $t = 5$, pois como a aceleração é constante, a velocidade variou uniformemente de zero (quando $t = 0$) até 4 m/s, quando $t = 10$.)

Exemplo 3.3.2

Com as mesmas hipóteses do exemplo anterior, consideremos

$$x = 0,2t^2 + 3t + 10,4.$$

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 0,4t + 3; \quad a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0,4 = \text{constante}.$$

Em $t = 0$, $x = 10,4$ e $v = 3$ m/s, ou seja, a contagem do tempo é iniciada quando o corpo está passando pelo ponto localizado a 10,4 m do ponto O e sua velocidade neste ponto já é 3m/s. Para achar o tempo decorrido desde que o corpo começou a se mover para a direita temos que considerar a posição quando a velocidade é zero, então $v = 0$; e $0,4t + 3 = 0$, $t = -\frac{3}{0,4} = -7,5$ s. O corpo começa a se mover 7,5 s antes do tempo começar a ser observado; 5 segundos depois do corpo começar seu movimento temos $t = -2,5$ e

$$v = 0,4 \times -2,5 + 3 = 2 \text{ m/s.}$$

Quando $x = 100 \text{ m}$,

$$100 = 0,2t^2 + 3t + 10,4; \quad \text{ou } t^2 + 15t - 448 = 0;$$

então $t = 14,95 \text{ s}$, $v = 0,4 \times 14,95 + 3 = 8,98 \text{ m/s}$.

Para encontrar a distância percorrida nos 10 primeiros segundos precisamos saber a posição inicial do corpo, ou seja a que distância ele estava do ponto O quando começamos a considerar o tempo.

Quando $t = -7,5$:

$$x = 0,2 \times (-7,5)^2 - 3 \times 7,5 + 10,4 = -0,85 \text{ m.},$$

não existe distância negativa, o que isto significa é que naquele instante inicial o corpo estava em um ponto $0,85 \text{ m}$ à *esquerda* do ponto O .

E quando $t = 2,5$,

$$x = 0,2 \times 2,5^2 + 3 \times 2,5 + 10,4 = 19,15.$$

Então, em 10 segundos, a distância percorrida foi $19,15 + 0,85 = 20 \text{ m}$, e

$$\text{a velocidade média} = \frac{20}{10} = 2 \text{ m/s.}$$

Exemplo 3.3.3

Considere um problema similar no qual a distância é dada por $x = 0,2t^2 - 3t + 10,4$. Então $v = 0,4t - 3$, $a = 0,4 = \text{constante}$. Quando $t = 0$, $x = 10,4$, como antes, e

$v = -3$; então agora o corpo está se movendo em uma direção contrária ao movimento dos exemplos anteriores. Como, no entanto, a aceleração é positiva, veremos que a velocidade irá diminuir até se tornar igual a zero, então temos $v = 0$ ou $0,4t - 3 = 0$; ou $t = 7,5 \text{ s}$. Depois deste instante a velocidade se torna positiva, ou seja, o corpo começa a se mover para a direita. Então, 5 segundos depois, em $t = 12,5$,

$$v = 0,4 \times 12,5 - 3 = 2 \text{ m/s.}$$

Quando $x = 100$,

$$100 = 0,2t^2 - 3t + 10,4, \quad \text{ou } t^2 - 15t - 448 = 0,$$

e

$$t = 29,95; \quad v = 0,4 \times 29,95 - 3 = 8,98 \text{ m/s}$$

Quando v é zero, $x = 0,2 \times 7,5^2 - 3 \times 7,5 + 10,4 = -0,85$, isto nos dá a informação que o corpo se moveu de volta a um ponto $0,85$ m à esquerda do nosso ponto O quando então ele para e passa a se mover para a direita. Dez segundo depois que o corpo começou a se mover para a direita temos:

$$t = 17,5 \text{ e } x = 0,2 \times 17,5^2 - 3 \times 17,5 + 10,4 = 19,15.$$

A distância percorrida $= 0,85 + 19,15 = 20,0$, e a velocidade média é novamente 2 m/s.

Aqui podemos perceber os benefícios do ensino do Cálculo no Ensino Médio, fica muito mais simples para professor de Física ensinar velocidade instantânea como a primeira derivada da distância e a aceleração como a segunda derivada da distância em relação ao tempo. Essa interdisciplinariedade é extremamente positiva, tanto para uma compreensão mais profunda dos fenômenos físicos quanto para mostrar que a Matemática não é uma matéria isolada.

4 Sequência Didática - Ponto crítico na função quadrática

Neste capítulo propomos uma sequência didática para o ensino do ponto crítico nas funções quadráticas. O objetivo desta sequência é mostrar como o Cálculo pode contribuir para solidificar outros conhecimentos matemáticos nos alunos do ensino médio.

Dividimos esta sequência em 3 etapas e cada etapa será subdividida em atividades a serem realizadas na sala de aula.

Segundo Zabala, as sequências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos, tanto pelos professores quanto pelos alunos. (ZABALA, 1998, p.18)

Planejamento da Sequência

ÁREA: Matemática e suas tecnologias

DISCIPLINA: Matemática

SÉRIE: 1ª Série (Ensino Médio)

CONTEÚDO: Ponto Crítico na Função Quadrática

OBJETIVOS

Geral: Encontrar o ponto crítico nas funções quadráticas.

Específicos: Compreender o gráfico da função quadrática; compreender como o gráfico da função quadrática está relacionado ao gráfico de sua derivada; calcular máximos ou mínimos das funções quadráticas com o uso da derivada.

TEMPO ESTIMADO: 5 aulas

DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA 1ª Etapa: 1 aula

Esta primeira etapa será realizada em sala de aula e servirá para equalizar o conhecimento e aguçar a curiosidade sobre a utilidade de descobrir o ponto crítico. Será mostrado, através de exemplos, que uma função do 2º grau apresenta um ponto onde seu valor é

máximo, ponto de máximo, ou um ponto onde seu valor é mínimo, ponto de mínimo.

Esta etapa é composta de uma aula, onde será realizada duas atividades.

Aula 1, atividade 1.

Consiste em desenhar o gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = -x^2$. O objetivo desta atividade é chamar a atenção para o fato que a função quadrática pode apresentar um valor máximo ou mínimo. Devemos dar ênfase a este fato e aproveitar para explicar que em muitas situações é necessário saber o valor máximo (ou mínimo) atingido por uma função quadrática. É o caso, por exemplo, de quando precisamos saber o quão alto chega uma bola lançada do chão ou qual é a maior área retangular que conseguimos com um perímetro fixo.

Aula 1, atividade 2.

Desenhar o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Nesta atividade aproveitamos para mostrar graficamente que esta função apresenta um ponto em que nenhum valor é menor do que aquele e chamaremos este valor de ponto de mínimo, também daremos ênfase na forma geral da função quadrática, também chamada de função do segundo grau:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a, b, c \text{ Reais e } a \neq 0.$$

Relembraremos que uma função do segundo grau é sempre representada por uma parábola. Analisaremos o motivo da restrição para o valor de a . Consideremos a hipótese que $a = 0$, então nossa função ficaria: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \cdot x^2 + bx + c = bx + c$, mas $f(x) = bx + c$ é uma função do primeiro grau e não do segundo.

2ª Etapa: 2 aulas

A finalidade desta etapa é introduzir o conhecimento de derivadas e mostrar que sempre há um ponto em que a derivada de uma função do segundo grau é igual a zero. Outro objetivo desta etapa é mostrar a relação entre o ponto em que a derivada é nula com o ponto de máximo ou de mínimo da função do segundo grau original. A primeira aula é uma introdução da derivada, com 4 atividades. A segunda aula desta etapa tem 4 atividades e o objetivo da aula é a aplicação do conhecimento recém adquirido de derivada no cálculo do valor máximo ou mínimo de uma função do segundo grau.

Aula 2, atividade 3.

Esta atividade pode ser feita tanto no quadro como com o uso de projetor e objetiva apresentar o símbolo de diferencial.

Desenharemos no quadro o símbolo d e explicaremos que, de uma maneira simplificada, ele pode ser entendido simplesmente como “um pouco de”, mas precisamos ter sempre em mente que estes pequenos pedaços (ou elementos) podem ser tão pequenos quanto se queira.

Aula 2, atividade 4.

Nesta atividade faremos uma introdução da derivada.

A noção fundamental do cálculo é a ideia de *variação*.

Suponha que temos duas variáveis que dependem uma da outra. Uma variação em uma provocará uma alteração na outra, *causada* por esta dependência. Vamos chamar uma das variáveis x , e a outra, que depende dela, de y .

Suponha que façamos x variar, isto é, vamos alterá-lo acrescentando-lhe um pequeno valor, o que nós chamamos dx , assim x torna-se $x + dx$. Então, porque x foi alterado, y também será alterado e torna-se $y + dy$.

Começemos com a expressão $y = x^2$.

É claro que se x cresce, x^2 também irá crescer. E como y e x^2 são iguais, se x^2 cresce, então y também crescerá. O que temos que descobrir é a proporção entre o crescimento de y e o crescimento de x .

Nossa tarefa é achar a razão entre dy e dx , ou, em resumo, achar o valor de $\frac{dy}{dx}$. Lembrando que dx é suficientemente pequeno.

Geometricamente isso pode ser mostrado da seguinte forma, considere que y é a medida da área e x é a medida do lado de um quadrado: (Fig. 7).

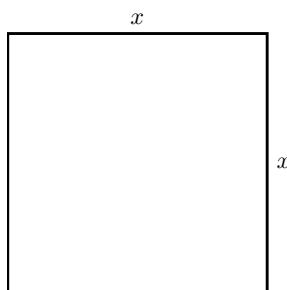


FIG. 7.

Agora, suponha que o quadrado cresça por um pequeno pedaço, dx , acrescentado ao seu tamanho em cada sentido. O quadrado aumentado, Fig. 8, é constituído pelo quadrado original x^2 , os dois retângulos na parte superior e no lado direito, cada um dos quais é de área $x \cdot dx$ (ou, em conjunto, $2x \cdot dx$), e o pequeno quadrado no canto superior direito é $(dx)^2$ neste exemplo colocamos dx como uma fração muito grande de x , cerca de $\frac{1}{5}$. Mas suponha que fosse apenas $\frac{1}{100}$, aproximadamente a espessura de uma linha de uma caneta fina, (Fig. 9). Então o pequeno quadrado do canto superior terá uma área de apenas $\frac{1}{10.000}$ de x^2 , e será praticamente invisível. Claramente $(dx)^2$ é insignificante somente se nós considerarmos o incremento dx suficientemente pequeno por si só.

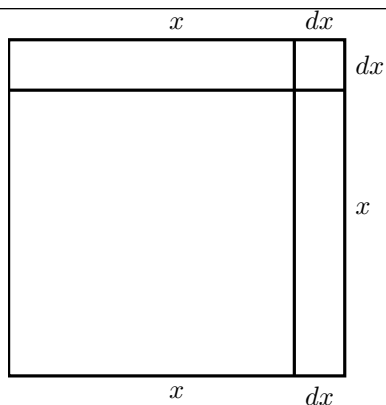


FIG. 8.

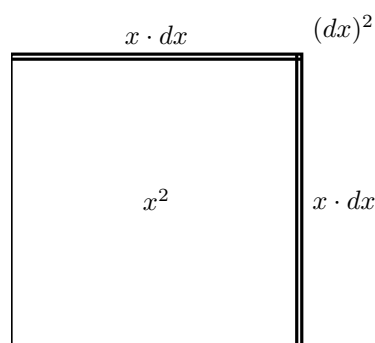


FIG. 9.

Desenvolvendo algebricamente temos:

$$y + dy = (x + dx)^2.$$

Logo:

$$y + dy = x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2.$$

O que $(dx)^2$ significa? Lembre-se que dx significa um pouco—muito pouco— de x . Então $(dx)^2$ significará um pouco de um pouco de x ; uma quantidade de segunda ordem de pequenez. Portanto podemos considerar como muito insignificante em comparação com os outros termos. Deixando isto de fora teremos:

$$y + dy = x^2 + 2x \cdot dx.$$

Como $y = x^2$; podemos subtrair y do lado esquerdo e x^2 do direito:

$$dy = 2x \cdot dx.$$

Dividindo ambos os lados por dx , teremos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Isso é o que nos propusemos a achar, a razão entre o crescimento de y e o crescimento de x , quando o *crescimento* de x é suficientemente pequeno. Neste caso a razão é $2x$.

Aula 2, atividade 5

Esta atividade continua a introdução de derivada.

Desenharemos a seguinte tabela no quadro, ou usaremos o projetor:

y	$\frac{dy}{dx}$
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$

Explicaremos que chegamos a estes resultados algebricamente, da mesma forma que usamos para calcular no caso de $y = x^2$ e diremos também que podemos inferir uma regra:

Se $g(x) = ax^n$,

com a número real e n inteiro, então:

$$\frac{dg}{dx} = nax^{(n-1)}.$$

Esta regra pode ser demonstrada como válida pra todos os números naturais, usando a expansão de $(x + dx)^n$ pelo Binômio de Newton (Caso haja interesse em aprofundar isto, veja Apêndice A, p. 64).

Aula 2, atividade 6.

Nesta atividade desenvolvemos a derivada da função quadrática.

Como $\frac{dg}{dx} = nax^{(n-1)}$.

Quando $n=2$, teremos:

$$g(x) = ax^2, e$$

$$\frac{dg}{dx} = 2ax.$$

Analogamente:

Sendo $h(x) = bx^n$,

Segue que $\frac{dh}{dx} = nbx^{(n-1)}$.

Quando $n=1$, teremos:

$$h = bx, e$$
$$\frac{dh}{dx} = b.$$

A derivada de uma constante é zero, e como a derivada da soma de funções é igual a soma das derivadas, temos que a primeira derivada de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é:

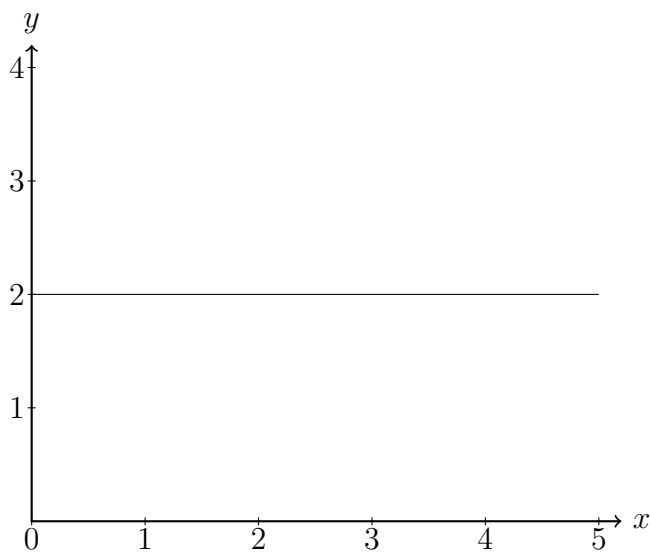
$$f'(x) = 2ax + b$$

Aula 3, atividade 7.

O objetivo desta atividade é mostrar os casos em quais o gráfico da função do primeiro grau é paralelo ao eixo x .

A função $2ax + b$ representa uma reta. Sabemos da geometria Euclidiana que dadas duas retas coplanares existem somente duas possibilidades, ou elas são paralelas ou são concorrentes. Considerando a reta $2ax + b$ analisemos se ela pode ser paralela ao eixo x .

No desenho abaixo temos um exemplo de uma reta paralela ao eixo x :

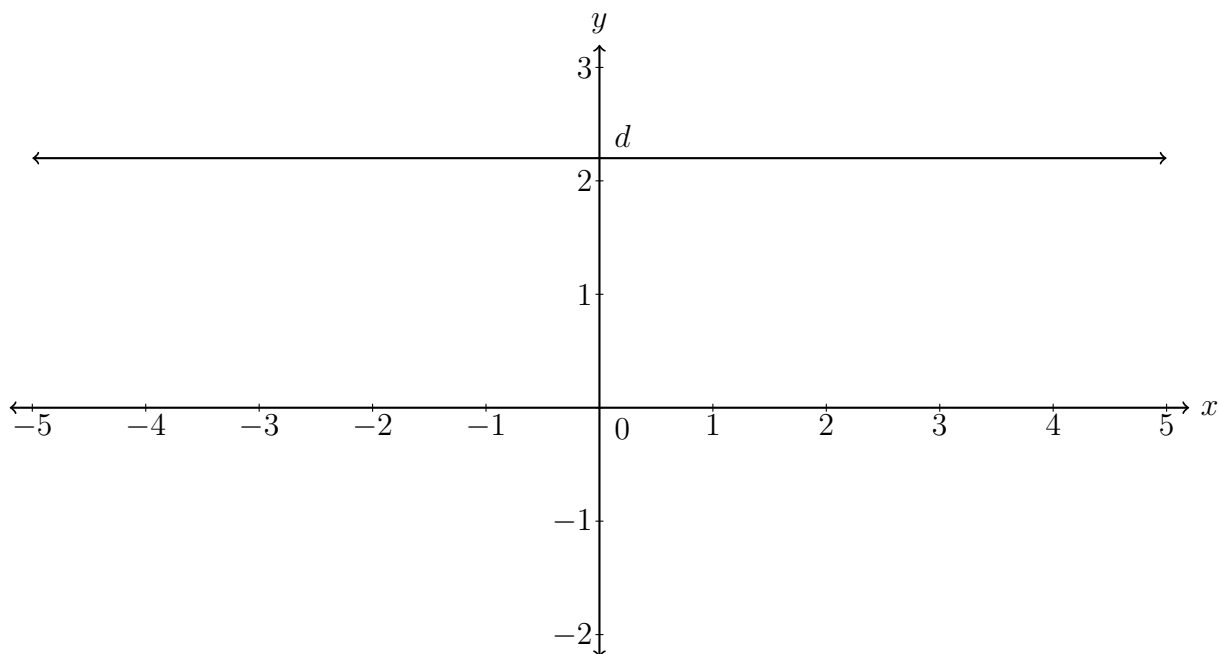


Verificamos que para qualquer valor de x o valor de y é sempre o mesmo, 2. Podemos

então representar esta situação como $y = 2$.

Aula 3, atividade 8, nesta atividade generalizamos o exemplo da atividade anterior.

Analogamente vemos no gráfico abaixo uma representação de uma reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto d .



Esta reta pode ser representada por $y = d$, ou também por $y = 0x + d$ que é equivalente a $y = ax + d$, com $a = 0$. Ou seja, as retas paralelas ao eixo x são sempre da forma $y = ax + d$, com $a = 0$.

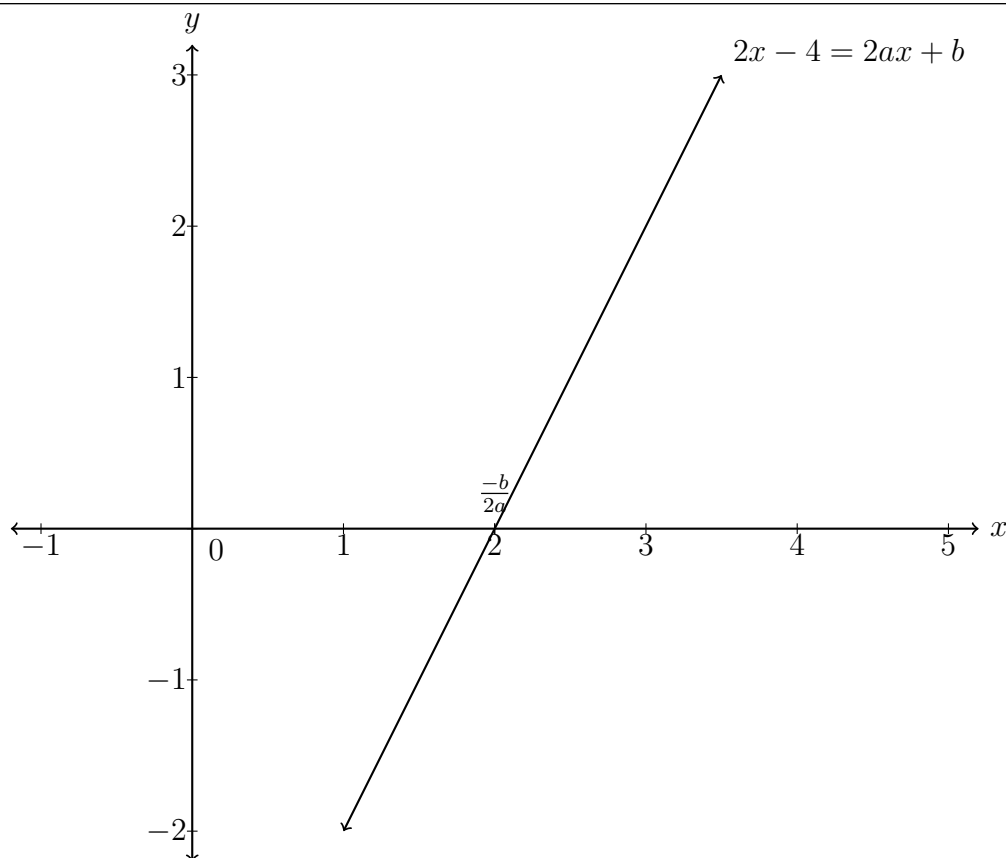
Aula 3, atividade 9, nesta atividade mostramos que quando a derivada é igual a zero, temos um ponto de máximo ou de mínimo da função original.

A primeira derivada de $f(x) = ax^2 + bx + c$, nossa $f'(x) = 2ax + b$, não pode ser paralela ao eixo x . Como só existem duas possibilidades se a reta não é paralela então ela é concorrente a este eixo. Mas o que significa a reta ser concorrente ao eixo de x ? Significa que há um único ponto em comum entre esta reta e o eixo x .

Como o eixo x pode ser representado por $y = 0x + 0$ neste ponto em comum temos que $f'(x) = 2ax + b = 0$, portanto, quando

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \text{ então: } 2ax + b = 0 \text{ e } x = \frac{-b}{2a}$$

Esta atividade usa como função original $f(x) = x^2 - 4x + 4$, cuja derivada é $f'(x) = 2x - 4$



Lembrando que $f'(x) = 2ax + b$ é a primeira derivada da nossa função quadrática original e representa também a “inclinação” da curva da função original em relação ao eixo x .

A primeira derivada é o nosso já conhecido $\frac{dy}{dx}$ e quando $\frac{dy}{dx} = 0$ estamos somente dizendo que neste ponto as variações suficientemente pequenas em x não causam nenhuma variação em y . Ou seja temos um ponto de máximo ou mínimo!

Aula 3, atividade 10, nesta atividade utilizamos uma função do movimento para mostrar a aplicabilidade do ponto de máximo.

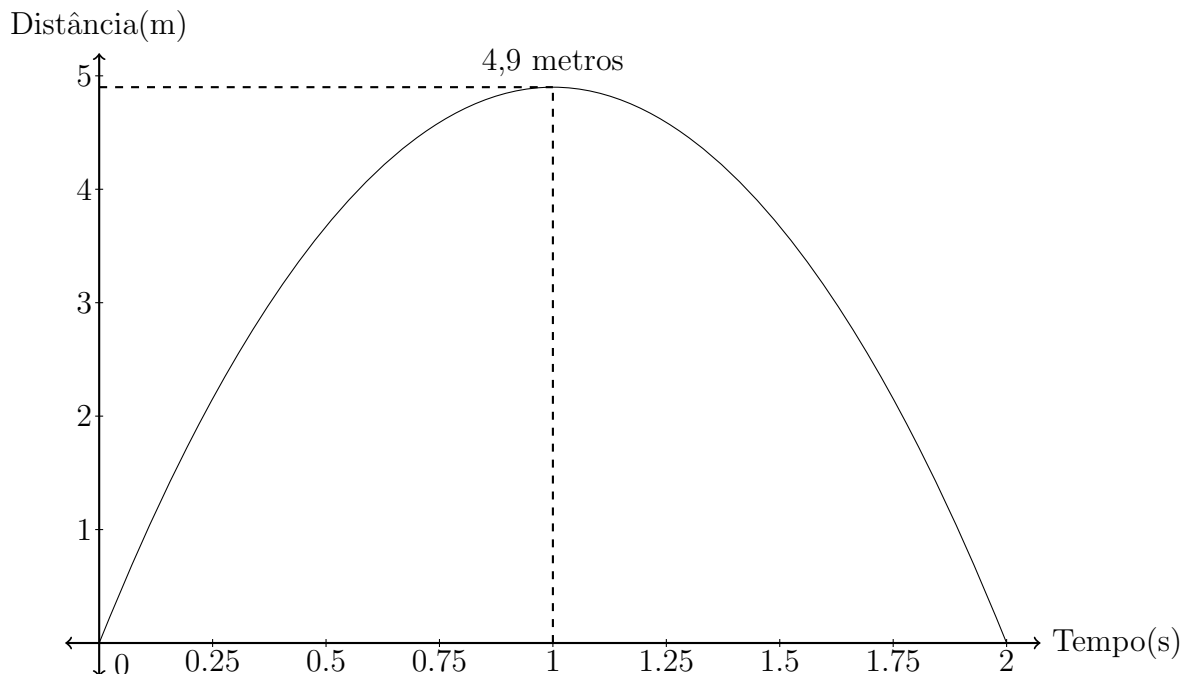
Sabemos da física que um corpo em lançamento vertical tem a seguinte função do movimento:

$$S = S_0 + V_0t - \frac{g}{2}t^2$$

Reescrevendo temos: $S = -\frac{g}{2}t^2 + V_0t + S_0$

Considerando o S como o y e o t como o x , e comparando com a nossa função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é fácil perceber que o a é $-\frac{g}{2}$, que o b é V_0 e o c é S_0 .

Desenhamos então no quadro o seguinte gráfico que representa um corpo sendo lançado verticalmente a partir do chão, ou seja, $S_0 = 0$, com velocidade inicial igual a $9,8 \frac{m}{s}$ e a aceleração da gravidade é considerada como $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$.



Para calcular a maior altura atingida, basta lembrar que a derivada da distância é a velocidade instantânea. No ponto de máxima altura a velocidade instantânea é igual a zero. Tendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, nossa $f'(x) = 2ax + b$, então:

$$2ax + b = 0 \text{ e } x = \frac{-b}{2a}$$

Substituindo na função da distância que foi dada, onde a é $-\frac{g}{2}$, e o b é V_0 , ou seja, $9,8 \frac{m}{s}$, teremos:

$$x = -9,8 / (-\frac{g}{2} * 2)$$

$$x = \frac{9,8}{g}$$

Portanto, quando a velocidade é nula, x , que representa o tempo, é igual a $1s$.

Substituindo em $S = -\frac{g}{2}t^2 + V_0t$, teremos $S = -\frac{9,8}{2}1^2 + 9,8 * 1$ e $S = -4,9 + 9,8$, portanto a altura máxima é de $4,9$ metros.

Esta atividade pode ainda ser usada para mostrar que o que define se uma função quadrática vai ter um ponto de máximo ou mínimo é o sinal da segunda derivada.

No caso do movimento retilíneo uniformemente variado a velocidade varia, mas a aceleração é constante, portanto a aceleração instantânea é igual a aceleração inicial. Podemos explicar que se a velocidade inicial é positiva e a aceleração é negativa, haverá um momento onde a velocidade instantânea será nula, como a partir deste ponto a velocidade instantânea passa a ser negativa é fácil ver que este é o ponto mais distante atingido pelo

objeto. Aqui relembramos a relação entre primeira e segunda derivada com velocidade e aceleração instantâneos.

Caso o professor prefira, por restrição na carga horária, ou qualquer outro motivo, a sequência pode terminar nesta 2ª etapa.

3ª Etapa:

Esta 3ª etapa se divide em duas aulas. O objetivo agora é analisar o sinal da primeira derivada e ver como isto está relacionado com a variação da função do segundo grau original, como objetivo secundário desta etapa está a fixação do conhecimento sobre derivadas.

A primeira aula desta etapa tem 3 atividades e trata da situação quando a é positivo.

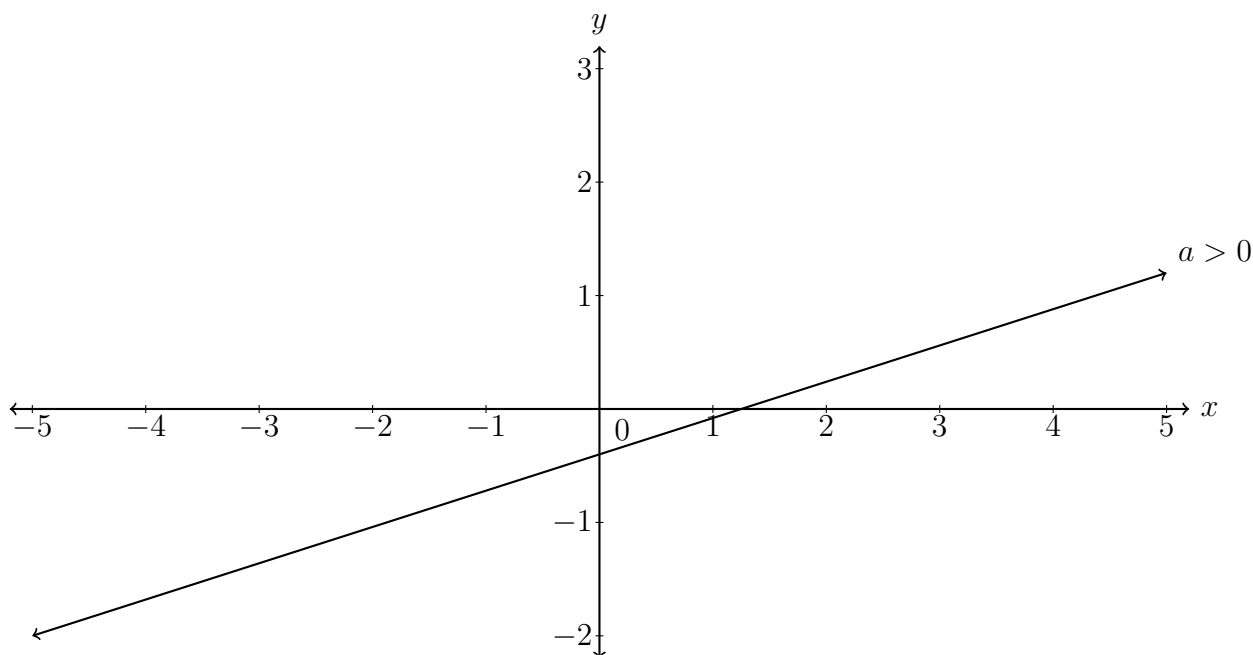
A última aula também tem 3 atividades e analisa o caso em que a é negativo.

Aula 4, atividade 11.

Nesta atividade desenhamos o gráfico de $f'(x) = 2ax + b = 0$ quando $a > 0$ e aproveitamos para rever o conhecimento da função do primeiro grau.

Agora que sabemos que a $f'(x) = 2ax + b = 0$ é concorrente ao eixo x temos duas possibilidades, quando $a > 0$ e quando $a < 0$.

Vejamos primeiramente o gráfico quando $a > 0$.



Neste primeiro gráfico temos que $a > 0$ e podemos verificar que se o valor absoluto de x for suficientemente grande e x tiver o sinal negativo o resultado de $2ax + b$ também será negativo; por outro lado se o valor absoluto de x for suficientemente grande e x positivo o valor de $2ax + b$ será positivo.

Como $2ax + b$ é a primeira derivada de $f(x) = ax^2 + bx + c$ o sinal de $2ax + b$ também indica a inclinação da curva de $f(x) = ax^2 + bx + c$; $2ax + b$ é negativa se e somente se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é decrescente, quando $2ax + b$ é igual a zero temos um ponto de máximo ou mínimo e $2ax + b$ é positiva se e somente se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é crescente.

Aula 4, atividade 12.

Agora analisamos o sinal da função utilizada na atividade anterior, relacionando com a função original do segundo grau.

Então fazendo o estudo de sinal de $2ax + b$ temos a inclinação da curva representada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Resumindo, quando a é positivo teremos:

$a > 0$	$-\infty$ até $\frac{-b}{2a}$	$\frac{-b}{2a}$	$\frac{-b}{2a}$ até ∞
$2ax + b$	-	0	+
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Decrescente	Ponto de Mínimo	Crescente

Aula 4, atividade 13.

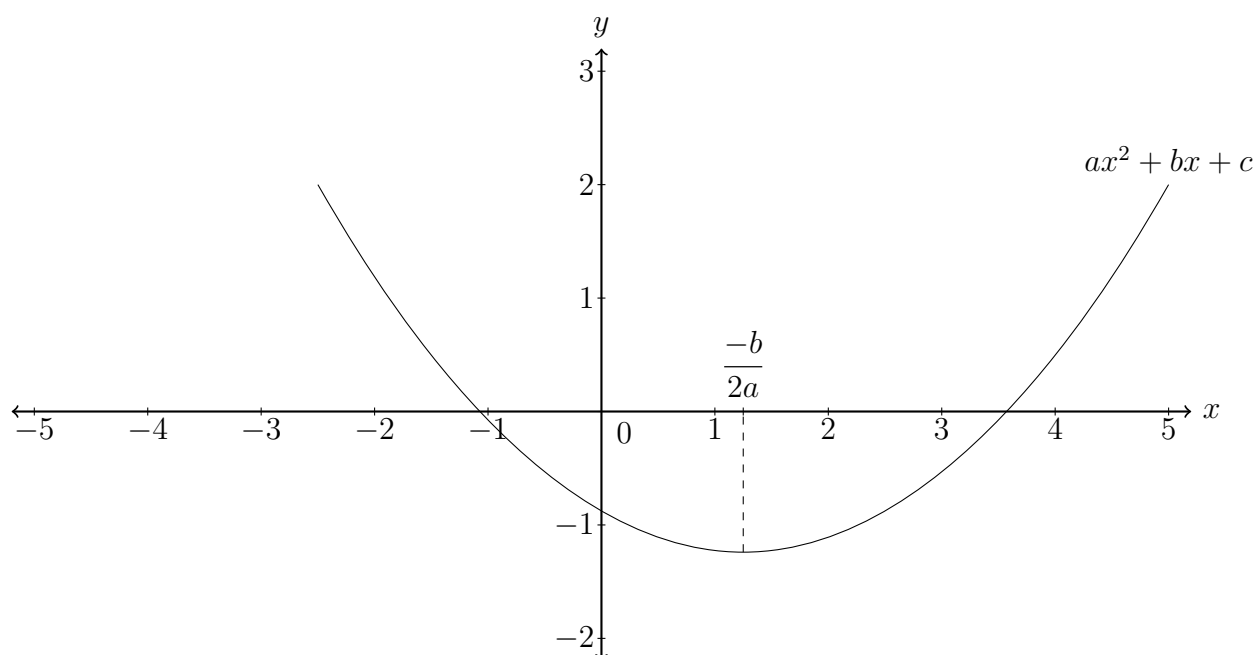
Esta atividade tem por objetivo exemplificar como a função original e a função derivada estão relacionadas.

Falta explicar o motivo de termos um Ponto de Mínimo quando $a > 0$.

Quando os valores de x são maiores do que $\frac{-b}{2a}$ a nossa função original, $f(x) = ax^2 + bx + c$, é crescente, ou seja quando nos distanciamos do ponto $\frac{-b}{2a}$ indo para a direita os valores de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são cada vez maiores.

Quando os valores de x são menores do que $\frac{-b}{2a}$ a nossa função original, $f(x) = ax^2 + bx + c$, é decrescente, ou seja quando nos *aproximamos* do ponto $\frac{-b}{2a}$ pela esquerda os valores de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são cada vez menores, isto é o mesmo que dizer que se nos afastamos do ponto $\frac{-b}{2a}$ indo para a esquerda os valores de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são cada vez maiores.

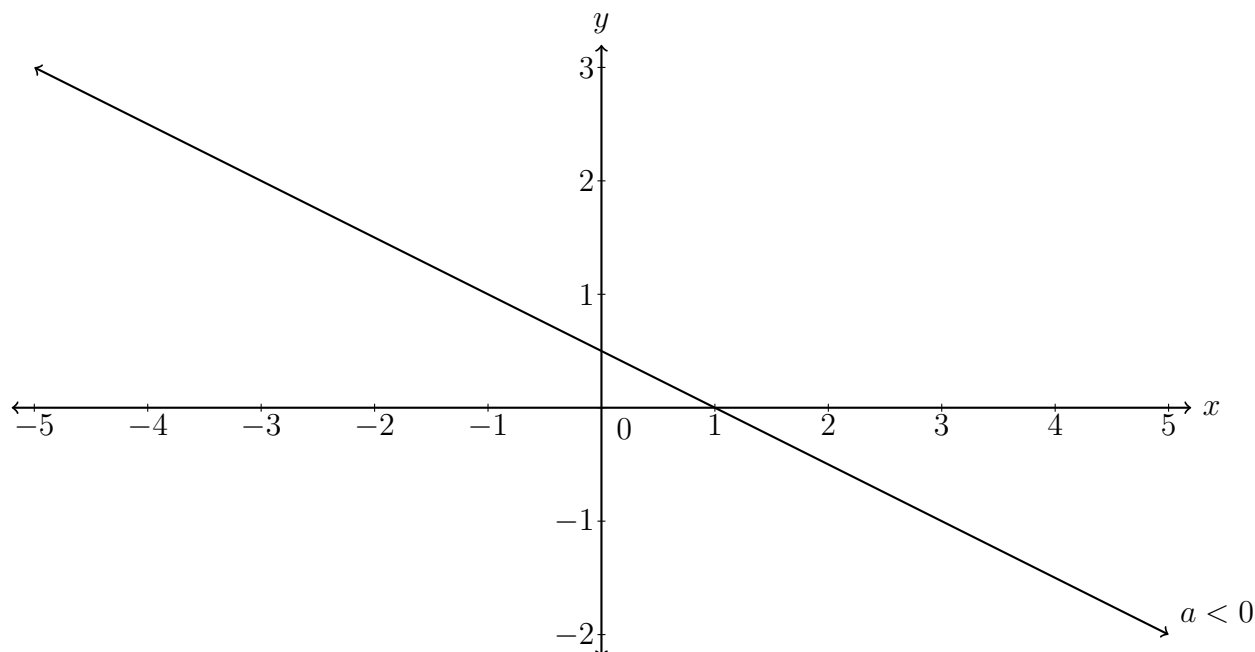
Analisando os dois parágrafos anteriores temos que se nos afastamos do ponto $\frac{-b}{2a}$ pela direita os valores de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são cada vez maiores e o mesmo acontece quando nos afastamos pela esquerda. Logo, quando $x = \frac{-b}{2a}$ o valor de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o menor possível.



3ª Etapa: aula 5

Aula 5, atividade 14, esta atividade é a mesma atividade 6, mas com $a < 0$, aqui reforçamos o conteúdo e avançamos para o caso da primeira derivada ser decrescente.

Vejam agora um gráfico quando $a < 0$.



Neste gráfico $a < 0$ e verificamos que se x tiver o valor absoluto suficientemente grande e x tiver o sinal negativo, o resultado de $2ax + b$ será positivo e se o valor absoluto de x for suficientemente grande e x positivo o valor de $2ax + b$ será negativo.

Aula 5, atividade 15, o objetivo é analisar o sinal da primeira derivada e reforçar o assunto.

Como $2ax + b$ é a primeira derivada de $f(x) = ax^2 + bx + c$ temos que $2ax + b$ é positiva se e somente se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é crescente, quando $2ax + b$ é igual a zero temos um ponto de máximo ou mínimo e $2ax + b$ é negativa se e somente se $f(x) = ax^2 + bx + c$ é decrescente.

Resumindo, quando $a < 0$ teremos:

$a < 0$	$-\infty$ até $\frac{-b}{2a}$	$\frac{-b}{2a}$	$\frac{-b}{2a}$ até ∞
$2ax + b$	+	0	-
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Crescente	Ponto de Máximo	Decrescente

Aula 5, atividade 16, aqui relacionamos a derivada com a função original do segundo grau.

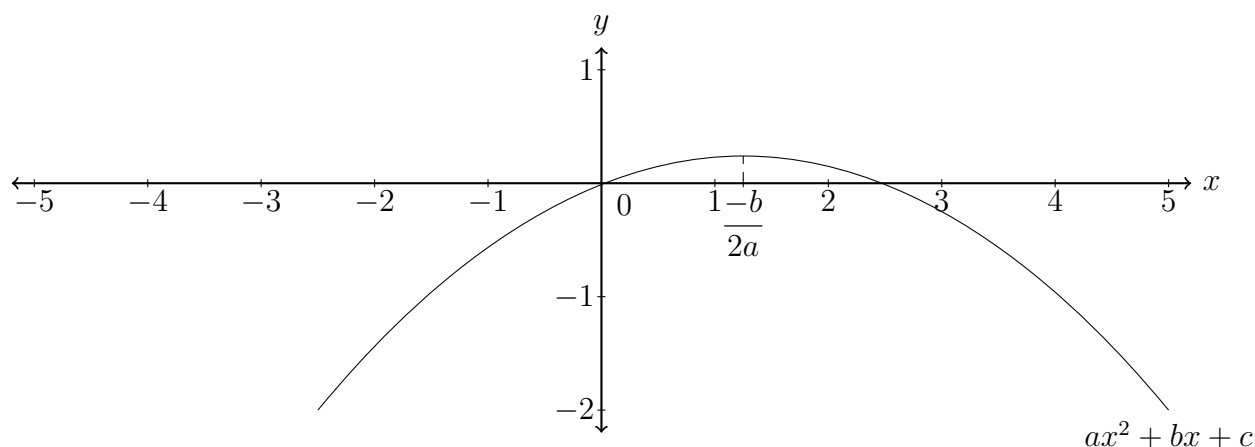
A explicação do motivo de termos um Ponto de Máximo quando $a < 0$ é análoga ao

caso anterior.

Quando os valores de x são maiores do que $\frac{-b}{2a}$ a nossa função original, $f(x) = ax^2 + bx + c$, é decrescente, ou seja quando nos distanciamos do ponto $\frac{-b}{2a}$ indo para a direita os valores de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são cada vez menores.

Quando os valores de x são menores do que $\frac{-b}{2a}$ a nossa função original, $f(x) = ax^2 + bx + c$, é decrescente, ou seja quando nos aproximamos do ponto $\frac{-b}{2a}$ pela esquerda os valores de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são cada vez maiores, isto é o mesmo que dizer que se nos afastamos do ponto $\frac{-b}{2a}$ indo para a esquerda os valores de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são cada vez menores.

Então temos que se nos afastamos do ponto $\frac{-b}{2a}$ tanto pela direita quanto pela esquerda os valores de $f(x) = ax^2 + bx + c$ são cada vez menores. Então, quando $x = \frac{-b}{2a}$ o valor de $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o maior possível.



5 Considerações Finais

Ao longo deste trabalho foi dada uma abordagem não usual ao estudo do cálculo.

O rigor foi sacrificado pela fluidez, na esperança de que uma leitura mais leve e rápida seja mais interessante e atraia melhor a atenção dos leitores.

Acreditamos que o contato do aluno do ensino médio com o cálculo traz vários benefícios. Podemos destacar, entre outros, a interdisciplinaridade, estes conhecimentos de cálculo são diretamente aplicados na Física, principalmente no estudo do movimento uniformemente variado. Quando o aluno entende que tendo uma função da distância em relação ao tempo, a velocidade instantânea é a expressa pela primeira derivada desta função e a aceleração instantânea a segunda derivada, a compreensão do fenômeno fica muito mais completa e a facilidade para encontrar as soluções é muito maior. Outro benefício que não pode ser desprezado é que o estudo dos fundamentos do cálculo no Ensino Médio pode tornar os primeiros anos da Universidade menos difíceis para aqueles que optarem pelas áreas de ciências exatas.

Apesar dos vários benefícios possíveis, o conteúdo de Cálculo deve ser dado de uma maneira mais leve e ágil, para que não haja uma perda de interesse, pois esta seria a forma mais ajustada ao público do Ensino Médio.

Os conhecimentos iniciais constantes neste trabalho permitem tanto solucionar uma boa gama de problemas reais quanto fornecem uma base razoável para estudos posteriores.

Esperamos que este trabalho possa ser usado pelos professores e alunos do Ensino Médio, aumentando o interesse destes pela Matemática e incentivando-os a estudar mais, pois acreditamos que o estudo é o caminho mais seguro para um futuro melhor.

Referências

AVILA, G. S. de S. O ensino de cálculo no 2.º grau. **Revista do Professor de Matemática**, v. 1, n. 18, p. 1–9, março 1991. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/18/1.htm>>. Acesso em: 10 fev. 2016.

DUCLOS, R. C. Cálculo do 2.º grau. **Revista do Professor de Matemática**, v. 1, n. 20, p. 26–30, jan/abr 1992. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/20/8.htm>>. Acesso em: 10 fev. 2016.

HEFEZ, A. **Aritmética**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

MORGADO, e. a. A. C. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 2**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

NATURE. 1911. Disponível em: <<http://www.nature.com/nature/journal/v86/n2158/abs/086041c0.html>>. Acesso em: 06 fev. 2016.

THOMPSON, S. **Calculus Made Easy, Being a very-simplest introduction to those beautiful methods wich are generally called by the terrifing names of the Diferentia**. 2nd. ed. London: The MacMillan and CO, 1914.

Apêndice A - Binômio de Newton

Toda esta seção está baseada nas excelentes obras (MORGADO, 2006) e (HEFEZ, 2013).

Antes de explicarmos o Binômio de Newton, vamos relembrar um pouco de combinatória e analisar o Triângulo de Pascal.

A Combinação Simples nos dá a resposta a seguinte pergunta: De quantas formas podemos escolher p objetos distintos entre n objetos distintos dados. Cada seleção de p objetos é chamada de uma combinação simples de classe p dos n objetos e é representada por C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

Assim, por exemplo, se temos 5 objetos, a, b, c, d, e e queremos selecionar 3 deles, as combinações simples de classe 3 dos 5 objetos são $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}$. Assim $C_5^3 = \binom{5}{3} = 10$.

Também conhecido como triângulo aritmético de Tartaglia-Pascal, ou simplesmente Triângulo Aritmético, o quadro abaixo, formado pelos diversos valores de $\binom{n}{p}$ é o nosso Triângulo de Pascal:

0	$\binom{0}{0}$						
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$					
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$				
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$			
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$		
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$	
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$
	0	1	2	3	4	5	6

Observe que enumerando as linhas como n e as colunas como p o $\binom{n}{p}$ aparece na linha n e coluna p .

Abaixo segue a forma mais conhecida e útil do triângulo, com os valores. A propriedade que nos permite calcular e construir rapidamente o triângulo é a relação de Stifel, que nos diz que somando dois elementos lado a lado no triângulo obtém-se o elemento situado

abaixo do da direita.

0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6

Logo a sétima linha seria, $1, 1 + 6 = 7, 6 + 15 = 21, 15 + 20 = 35, 20 + 15 = 35, 15 + 6 = 21, 6 + 1 = 7, 1$.

Em linguagem matemática a Relação de Stifel pode ser escrita da seguinte forma:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Uma das provas da Relação de Stifel é a que se segue: Considere um conjunto A de $n + 1$ elementos, um dos quais é x . O número de subconjuntos de A com $p + 1$ elementos é $\binom{n+1}{p+1}$. Este número é igual à soma do número de subconjuntos nos quais x não figura, $\binom{n}{p+1}$, com o número de subconjuntos nos quais x figura, $\binom{n}{p}$.

A fórmula do Binômio de Newton é a que nos dá o desenvolvimento de $(x + a)^n$. Para obtê-la, basta multiplicar $(x + a) \cdot (x + a) \cdot \dots \cdot (x + a)$. O termo genérico do produto é encontrado tomando em p dos fatores, $p = 0, 1, 2, \dots, n$, a segunda parcela e tomando nos restantes $n - p$ fatores a primeira parcela. Como isto pode ser feito de $\binom{n}{p}$ modos o termo genérico do produto é $\binom{n}{p} a^p x^{(n-p)}$ e

$$(x + a)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p x^{(n-p)}$$

Apêndice B - Inclinação de Curvas

Inclinação da Curva Qualquer função, como x^2 , ou \sqrt{x} , ou $ax + b$, pode ser plotada como uma curva.

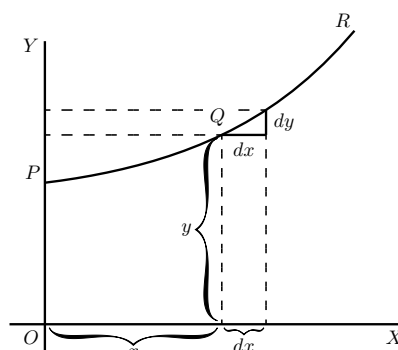


FIG. 10.

Deixe PQR , na Fig. 10, ser um trecho da curva plotada em relação aos eixos OX e OY . Considere qualquer ponto Q desta curva, onde a abscissa deste ponto é x e sua ordenada é y . Agora observe como y varia quando x é modificado. Se x sofre um pequeno incremento dx , para a direita, então observamos que y também (*nesta* curva em particular) é aumentado de um pequeno valor dy (porque esta curva em particular é uma curva *ascendente*). Então a razão entre dy e dx é a medida do grau em que a curva está inclinada entre os dois pontos Q e T . Na verdade, podemos ver na figura que a curva entre Q e T tem tantas inclinações diferentes que nós nem podemos falar corretamente em inclinação da curva entre Q e T . No entanto, se Q e T são tão próximos que o pequeno trecho QT na curva é praticamente uma linha reta, então podemos dizer que a razão $\frac{dy}{dx}$ é a inclinação da curva no trecho QT . O segmento de reta QT toca a curva somente nos pontos Q e T . Se a distância entre Q e T for indefinidamente pequena este segmento tocará a curva em praticamente somente um ponto e será então a *tangente* à curva naquele ponto.

É evidente que esta tangente à curva tem a mesma inclinação que QT , então $\frac{dy}{dx}$ é a inclinação da tangente a curva no ponto Q para o qual encontramos o valor de $\frac{dy}{dx}$.

Nós vimos que a expressão “inclinação da curva” não tem um significado preciso, pois a curva tem várias inclinações, na verdade cada pequeno trecho da curva tem uma inclinação

diferente. No entanto, “inclinação da curva em um determinado ponto” é uma coisa bem definida, sendo a inclinação de um trecho da curva tão pequeno quanto se queira que contenha aquele ponto, e isto é o mesmo que a “inclinação da tangente à curva naquele ponto”.

Observe que na figura dx é um pequeno pedaço à direita e dy é um pequeno pedaço acima. Estes pedaços têm que ser considerados tão pequenos quanto possível, na verdade, indefinidamente pequenos, entretanto nos desenhos eles são representados muito maiores, pois de outra forma não poderiam ser vistos.