



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

JOSÉ SAMUEL MACHADO

QUADRADOS MÁGICOS COM APLICAÇÕES

Fortaleza-Ce  
2013



**JOSÉ SAMUEL MACHADO**

**QUADRADOS MÁGICOS COM APLICAÇÕES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:  
Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

Fortaleza-Ce  
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

M131q Machado, José Samuel

Quadrados Mágicos com Aplicações / José Samuel Machado. – 2013.  
41 f. : il., enc. ; 31 cm

Dissertação(mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,  
Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em  
Rede Nacional, Fortaleza, 2013.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Quadrados mágicos. 2. Álgebra linear. 3. Espaços vetoriais I. Título.

CDD 511.64

---

**JOSÉ SAMUEL MACHADO**

**QUADRADOS MÁGICOS COM APLICAÇÕES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ (UFC)

---

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ (UFC)

---

Prof. Ms. David Carneiro de Souza  
INST. FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO CEARÁ (IFCE)

*Dedico este trabalho à minha esposa Isadora Bruna Luz Machado.*



# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida, pela salvação e por todas as bênçãos a mim concedidas.

Agradeço à minha esposa, Isadora Bruna Luz Machado, pela paciência, incentivo e cooperação em todos os momentos de nossa união.

Agradeço às minhas filhas, Melissa e Milena Machado, pela compreensão da ausência e pelo sorriso sempre marcante.

Agradeço ao meu pai e amigo José Edson Machado pelo apoio e auxílio em todos os momentos de minha vida.

Agradeço a toda minha família e a todos meus colegas do PROFMAT, que, não foram citados aqui, mas que contribuíram direta ou indiretamente para o fechamento deste trabalho.

Agradeço à SBM e toda a sua diretoria pela oportunidade ofertada no curso PROFMAT, que contribuiu significativamente para com a minha vida profissional.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro.

Por fim, agradeço aos meus professores Silvano Menezes, Fábio Montenegro, Cleon Barroso, Marcos Melo, Michel Rebouças e principalmente ao meu professor orientador, Marcelo Melo, pela dedicação na qual empregou na orientação deste trabalho, sobretudo, pela paciência.



“Muitos são os planos no coração do homem, mas o desígnio do Senhor, esse prevalecerá.”

Provérbios 19:21

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo</b>	<b>1</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Considerações Iniciais</b>	<b>7</b>
1.1 Quadrado Mágico Normal . . . . .	9
1.2 Forma Geral de um Quadrado Mágico $3 \times 3$ . . . . .	10
<b>2 Quadrados Mágicos e Álgebra Linear</b>	<b>13</b>
2.1 O Espaço Vetorial $Q_n$ . . . . .	13
2.2 Base e dimensão de $Q_n$ . . . . .	14
2.2.1 Dependência Linear e Matrizes . . . . .	15
2.2.2 Combinação Afim . . . . .	17
2.2.3 Funcionais Lineares e Variedade Afim . . . . .	19
2.2.4 Cálculo da Dimensão de $Q_n$ . . . . .	20
<b>3 Aplicações</b>	<b>25</b>
3.1 Uma base para $Q_3$ . . . . .	25
3.2 Uma base para $Q_4$ . . . . .	27
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>31</b>

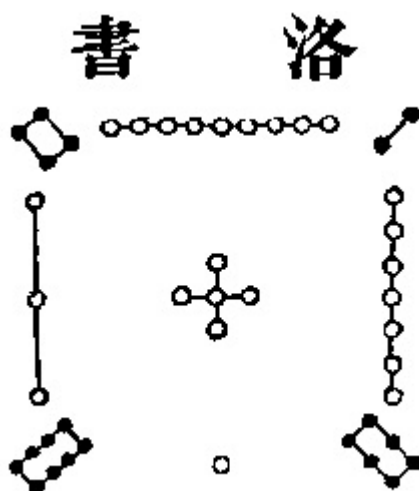
# Resumo

Neste trabalho, colocaremos a forma lendária de como os quadrados mágicos surgiram bem como sua utilização por artistas entre os séculos 15 e 18. Posteriormente definimos os quadrados mágicos e quadrados mágicos normais. Por fim, estabeleceremos o conjunto de todos os quadrados mágicos de mesma ordem como espaços vetoriais, determinando sua base e sua dimensão, exemplificando para os casos de ordem 3 e 4.



# Introdução

Acredita-se que os chineses foram os primeiros a descobrir as propriedades dos quadrados mágicos e provavelmente foram também seus inventores a menos de cinco séculos de nossa era. Eles o chamavam de Lo-Shu. A lenda conta que o imperador da antiga China, chamado Yu (2800 A. C.), da dinastia Hsia, estava meditando às margens do Rio Lo quando emergiu uma tartaruga (considerado um animal sagrado) com estranhas marcas no casco.



Yu percebeu que as marcas na forma de nós, feitos num tipo de barbante, podiam ser transformadas em números e que todos eles somavam quinze em todas as direções, como se fossem algarismos mágicos.

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

No século XI foi encontrado um quadrado mágico de ordem 3 pintado no assoalho

em um dos templos de Khajuraho na Índia. Este quadrado era semelhante ao quadrado de Lo-Shu adicionando-se 19 a cada valor, fazendo com que cada soma seja  $15 + 3 \times 19 = 72$ .

$$\begin{pmatrix} 23 & 28 & 21 \\ 22 & 24 & 26 \\ 27 & 20 & 25 \end{pmatrix}$$

Os quadrados mágicos chegaram ao ocidente através dos árabes, que os conheceram por influência da cultura hindu. Um quadrado de ordem 3 foi encontrado pela primeira vez em um manuscrito árabe, no fim do Século VIII, e atribuído a Appolonius de Tiana (I Século) por Berthelot. O físico e teologista alemão Heinrich Cornelius Agrippa (1486-1535) construiu sete quadrados mágicos de ordens 3 a 9 e lhes atribuiu um significado astronômico. Estes quadrados representavam simbolicamente os sete planetas conhecidos por ele incluindo o Sol e a Lua (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter, Saturno, o Sol e a Lua). Os quadrados mágicos têm grande interesse em alguns meios. Na China e na Índia, há quem use tais quadrados mágicos gravados em metal ou pedra, como amuletos ou talismãs. Despertaram também interesse em alguns matemáticos, pelos problemas difíceis que originaram, em relação à construção, classificação e enumeração dos quadrados de uma dada ordem. Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675), Claude-Gaspar Bachet (1581-1638), Pierre de Fermat (1601-1665) e Leonhard Euler (1707-1783) estudaram quadrados mágicos e cubos mágicos. Este último não relacionado neste trabalho.

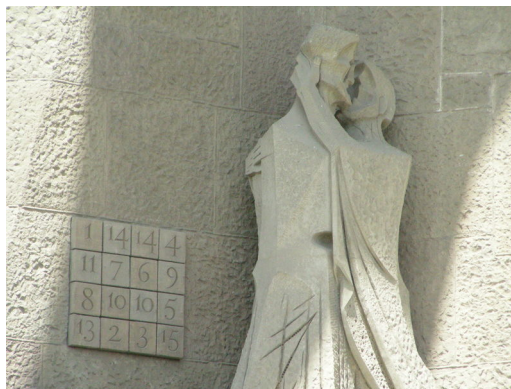
Também podemos constatar sua presença em uma das obras de Albrecht Dürer (1471-1528), que em seu quadro intitulado *Melancolia* insere em sua composição um quadrado mágico de ordem 4. Dürer aproveita o quadrado mágico para incorporar a data de criação do quadro (1514), usando os numerais 15 e 14 na parte inferior do quadrado mágico.

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Este quadrado mágico encontra-se localiza no lado direito superior, como mostra a figura abaixo:



Outro artista a se deixar utilizar dos quadrados mágicos foi Antoni Galdí. Na sua obra O Beijo de Judas, ele destaca um quadrado mágico de ordem 4.







# Capítulo 1

## Considerações Iniciais

Uma matriz  $n \times n$  chama-se um *quadrado mágico* de ordem  $n$  quando a soma dos elementos de cada uma de suas linhas, de cada coluna, da diagonal principal e da diagonal secundária (ao todo  $2n + 2$  somas) são iguais. Essa soma será chamada de *constante mágica* ou *soma mágica*.

Para  $n = 1$ , temos que qualquer matriz  $[a_{11}]$  será considerada um quadrado mágico cujo valor mágico será  $a_{11}$ .

Para  $n = 2$ , veremos que todos os elementos da matriz deve ter o mesmo valor, ou seja, todo quadrado mágico de ordem 2 deve ser múltiplo da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para provar isso, vamos considerar o quadrado mágico  $2 \times 2$  abaixo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sendo assim, o valor mágico

$$k = a + b = c + d = a + c = b + d = a + d = b + c$$

Como  $a + b = a + c$  implica que  $b = c$ , como  $c + d = a + c$  implica que  $d = a$  e como e como  $c + d = b + d$  implica que  $c = d$ . Sendo assim, usando transitividade, concluímos que  $a = b = c = d = \frac{k}{2}$ . Dessa forma temos o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \end{pmatrix} = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para  $n = 3$  temos uma situação mais complexa, pois para determinar seus nove elementos teremos que resolver um sistema de oito equações. Portanto, teremos diversos quadrados mágicos  $3 \times 3$  como o representado abaixo:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

**Aplicação:** Determine os 8 elementos restantes da matriz  $4 \times 4$  abaixo, de modo a obter um quadrado mágico:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & * \\ 4 & 5 & 6 & * \\ 7 & 8 & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Colocando na forma de sistema de equações, teremos o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + a = k \\ 4 + 5 + 6 + b = k \\ 7 + 8 + c + d = k \\ e + f + g + h = k \\ 1 + 4 + 7 + e = k \\ 2 + 5 + 8 + f = k \\ 3 + 6 + c + g = k \\ a + b + d + h = k \\ 1 + 5 + c + h = k \\ a + 6 + 8 + e = k \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 + a = k \\ 15 + b = k \\ 15 + c + d = k \\ e + f + g + h = k \\ 12 + e = k \\ 15 + f = k \\ 9 + c + g = k \\ a + b + d + h = k \\ 6 + c + h = k \\ a + 14 + e = k \end{array} \right.$$

Diminuindo a primeira equação da última temos  $e = -8$ . Sendo assim, a constante mágica,  $k = 4$ , é obtida pela quinta equação. Desta forma,  $a = -2$ ,  $b = f = -11$ . Simplificando ainda mais o sistema teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} c + d = -11 \\ g + h = 23 \\ c + g = -5 \\ d + h = 17 \\ c + h = -2 \end{array} \right.$$

Subtraindo a primeira equação pela quarta e somando com a quinta teremos:

$$c + d - d - h + c + h = -11 - 17 - 2$$

$$2c = -30$$

$$c = -15$$

Sendo assim,  $d = 4$ ,  $g = 10$  e  $h = 13$ . Portanto, o quadrado mágico em questão é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & -11 \\ 7 & 8 & -15 & 4 \\ -8 & -11 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

## 1.1 Quadrado Mágico Normal

Um quadrado mágico de ordem  $n$  é dito normal quando os elementos, distintos entre si, pertencem ao conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n^2\}$ . Dado um quadrado mágico normal de ordem  $n$ , podemos garantir que a constante mágica depende de única e exclusivamente de  $n$ , pois se somarmos todos os elementos do conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n^2\}$  teremos:

$$1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}.$$

Dividindo igualmente esse valor por cada uma das  $n$  linhas, temos que a constante mágica é:

$$k = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Vejamos por exemplo, os quadrados mágicos abaixo apresentados por Malba tahan em seu livro *As maravilhas da Matemática*:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow k = \frac{3(3^2 + 1)}{2} = 15$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 10 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 1 & 8 & 13 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow k = \frac{4(4^2 + 1)}{2} = 34$$

Fato curioso é que Malba Tahan considera em suas obras apenas os quadrados mágicos normais. Os quadrados mágicos, de acordo com a nossa definição, ele chama de imperfeitos ou quase mágicos. Por exemplo, segundo Tahan:

Outro fato curioso é que podemos construir um quadrado mágico de ordem ímpar obedecendo o seguinte procedimento. Para construir um de ordem 5, inicialmente colocaremos o número 1 como elemento central da primeira linha, o número 2 colocaremos na posição que fica duas linhas acima e uma coluna a direita. Como o número 2 saiu superiormente do quadrado mágico devemos descê-lo cinco posições verticalmente, repetindo o procedimento para o número 3 e assim sucessivamente. Caso a posição já esteja ocupada, devemos posicionar o número em questão abaixo do número anterior e caso ele saia do quadrado pela direita, devemos colocá-lo cinco posições à direita na mesma linha. Construindo dessa forma, obteremos o seguinte:

0	6	19	2	15	23
0	12	25	8	16	4
10	18	1	14	22	10
11	24	7	20	3	16
17	5	13	21	9	17
23	6	19	2	15	23
4	12	25	8	16	4

## 1.2 Forma Geral de um Quadrado Mágico $3 \times 3$

Iremos agora elaborar uma forma geral para os quadrados mágicos de ordem 3. Para isso, iremos considerar a matriz abaixo um quadrado mágico e  $k$  como sendo a sua constante mágica.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Pela definição, temos que a soma de duas linha é igual a soma das duas diagonais:  $a + b + c + g + h + i = a + e + i + c + e + g$ . Isso implica que  $b + h = 2e$ . Também temos que a soma da segunda coluna,  $b + e + h = (b + h) + e = 2e + e$ , é igual a  $3e$ . Baseado nisso, iremos estabelecer uma forma geral para o quadrado mágico de ordem 3, mas para isso precisaremos fixar três valores. Fixaremos  $a$  e  $b$  do quadrado mágico e  $k$  como o valor mágico. Facilmente, obtemos que:

$$c = k - a - b.$$

$$h = k - b - e = k - b - \frac{k}{3} = \frac{2}{3}k - b.$$

$$g = k - c - e = k - k + a + b - \frac{k}{3} = a + b - \frac{k}{3}.$$

$$d = k - a - a - b + \frac{k}{3} = \frac{4}{3}k - 2a - b.$$

$$f = k - \frac{4}{3}k + 2a + b - \frac{k}{3} = 2a + b - \frac{2}{3}k.$$

$$i = k - a - \frac{k}{3} = \frac{2}{3}k - a.$$

Sendo assim, podemos entender que a matriz abaixo, ou qualquer outra matriz obtida a partir da rotação da mesma, é a forma geral de um quadrado mágico de ordem 3.

$$\begin{pmatrix} a & b & k - a - b \\ \frac{4}{3}k - 2a - b & \frac{k}{3} & 2a + b - \frac{2}{3}k \\ a + b - \frac{k}{3} & \frac{2}{3}k - b & \frac{2}{3}k - a \end{pmatrix}$$

**Aplicação:** Vamos determinar um quadrado cujo valor mágico seja 21 e que todos os seus elementos sejam números inteiros.

O valor do quadrado é providencial, pois sendo múltiplo de 3 podemos garantir que o valor central é inteiro igual a 7. Como a forma geral depende ainda de dois elementos,  $a$  e  $b$ , iremos atribuir arbitrariamente os valores 5 e 4, respectivamente. Sendo assim, o quadrado em questão é:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 12 \\ 14 & 7 & 0 \\ 2 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$



## Capítulo 2

# Quadrados Mágicos e Álgebra Linear

Neste capítulo, estudaremos os quadrados mágicos do ponto de vista da Álgebra Linear. Iremos mostrar que um conjunto  $Q_n$ , formado por todos os quadrados mágicos de ordem  $n$ , é um espaço vetorial e com isso determinar uma base, ou seja, estabelecer um conjunto  $V \in Q_n$  com o menor número de quadrados mágicos possíveis linearmente independentes que geram  $Q_n$ .

### 2.1 O Espaço Vetorial $Q_n$

Chamaremos de  $Q_n$  o conjunto de todos os quadrados mágicos de ordem  $n$ . Note que  $Q_n$  é um subespaço vetorial do espaço das matrizes quadradas de ordem  $n \times n$ . De fato, pois:

(i)  $0 \in Q_n$ , considerando que  $0$  é a matriz quadrada de  $Q_n$  na qual todos os seus elementos são nulos.

(ii) Dados os elementos  $A$  e  $B$  pertencentes a  $Q_n$ , com  $k_1$  e  $k_2$  como suas respectivas constantes mágicas. Temos que:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

Somando os elementos da primeira linha da matriz  $A + B$  obteremos:

$$\begin{aligned} a_{11} + b_{11} + a_{12} + b_{12} + \cdots + a_{1n} + b_{1n} &= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) + (b_{11} + b_{12} + \cdots + b_{1n}) \\ &= k_1 + k_2 \end{aligned}$$

Repetindo esse procedimento para as demais linhas, para as colunas e para as diagonais, obteremos o mesmo resultado. Ou seja, um quadrado mágico de ordem  $n$  cuja constante mágica é  $k_1 + k_2$ .

(iii) Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\alpha A$  também é um quadrado mágico, já que:

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix}$$

Somando os elementos da primeira linha de  $\alpha A$  obteremos:

$$\alpha a_{11} + \alpha a_{12} + \cdots + \alpha a_{1n} = \alpha(a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n}) = \alpha k_1$$

Repetindo esse procedimento para as demais linhas, para as colunas e para as diagonais, obteremos o mesmo resultado. Ou seja, um quadrado mágico de ordem  $n$  cuja constante mágica é  $\alpha k_1$ .

Isto prova que  $Q_n$  é um subespaço vetorial e, portanto, um espaço vetorial.

## 2.2 Base e dimensão de $Q_n$

Consideremos inicialmente os casos  $n = 1$  e  $n = 2$ .

Caso  $n = 1$ :  $\{(1)\}$  é uma base de  $Q_1$  e, portanto, a dimensão  $\dim(Q_1) = 1$ .

Caso  $n = 2$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  é uma base e, portanto, a dimensão  $\dim(Q_2) = 1$ .

Caso  $n \geq 3$  mostraremos que  $Q_n$  tem dimensão  $n^2 - 2n$ . Para provar isso deveremos fazer algumas considerações.



### 2.2.1 Dependência Linear e Matrizes

Primeiramente consideremos as seguintes definições:

**Definição 2.2.1.1:** Denotaremos  $M(m \times n)$  como o conjunto de todas as matrizes  $m \times n$  e o consideraremos um espaço vetorial já que nele se define a soma das matrizes  $\mathbf{a} = [a_{ij}]$  e  $\mathbf{b} = [b_{ij}]$  pertencentes a  $M(m \times n)$  como  $\mathbf{a}_{ij} + \mathbf{b}_{ij} = [a_{ij} + b_{ij}]$  e o produto da matriz  $\mathbf{a}$  pelo número real  $\alpha$  como  $\alpha\mathbf{a} = [\alpha a_{ij}]$ .

**Definição 2.2.1.2:** Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz  $m \times n$ . Para cada  $1 \leq i \leq m$ , denotemos por  $L_i$  a  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{a}$ . Definimos as transformações elementares nas linhas da matriz  $\mathbf{a}$  como se segue:

1. Permutação das linhas  $L_i$  e  $L_j$ , indicada por  $L_i \leftrightarrow L_j$ .
2. Substituição de uma linha  $L_i$  pela adição desta mesma linha com  $\alpha$  vezes uma outra linha  $L_j$ , indicada por  $L_i \rightarrow L_i + \alpha L_j$ .
3. Multiplicação de uma linha  $L_i$  por um número real  $\alpha$  não nulo, indicada por  $L_i \rightarrow \alpha L_i$ .

**Definição 2.2.1.3:** Uma *matriz elementar de ordem  $n$*  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  obtida da matriz identidade  $I_n$  a partir da aplicação de uma transformação elementar. Para fins deste trabalho, definimos apenas as matrizes elementares do tipo  $e_{ij}$ , que é uma matriz  $n \times n$  onde  $a_{ij} = 1$  e as demais posições tem valor zero.

Sejam  $\mathbf{a}$  uma matriz de  $M(m \times n)$  e  $s_i, t_j : M(m \times n) \rightarrow \mathbb{R}$  as funções definidas por  $s_i(\mathbf{a}) =$  soma dos elementos da  $i$ -ésima linha de  $\mathbf{a}$  e  $t_j(\mathbf{a}) =$  soma dos elementos da  $j$ -ésima coluna de  $\mathbf{a}$ . Provaremos que as funções  $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n$  são linearmente dependentes no espaço vetorial  $E = \mathcal{F}(M(m \times n); \mathbb{R})$ , mas o conjunto  $\{s_1, \dots, s_{m-1}, t_1, \dots, t_n\}$  é linearmente independente.

Claramente vemos que a soma de todos os elementos da matriz  $\mathbf{a}$  é igual a soma de todos os  $s_i$  que também é igual a soma de todos os  $t_j$ . Ou seja:

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} a_{ij} = \sum_{i=1}^m s_i(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n t_i(\mathbf{a}),$$

para qualquer matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n)$ . Portanto,  $\sum s_i - \sum t_i = 0$  é uma combinação linear dos  $s_i$  e  $t_j$  com coeficientes não-nulos que dá a função nula de  $\mathcal{F}(M(m \times n); \mathbb{R})$ , e portanto  $\{s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n\}$  é linearmente dependente. Suponhamos que

$$\sum_{i=1}^{m-1} x_i s_i + \sum_{j=1}^n y_j t_j = 0.$$

Considere as matrizes elementares da forma  $e_{mk}$  onde  $k = 1, 2, \dots, n$ . Note que a soma dos termos de cada linha e cada coluna é zero, exceto pela última linha e pela última coluna, que têm soma 1. Assim, aplicando a função acima a esta matriz, teremos que  $s_i(e_{mj}) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, m-1$ ;  $t_j(e_{mk}) = 0$  para  $j \neq k$ ; e  $t_k(e_{mk}) = 1$ . Então o somatório acima aplicado a  $e_{mj}$  é, simplesmente

$$y_k = 0.$$

Como isso pode ser feito para  $k = 1, 2, \dots, n$ , concluímos que  $y_1 = y_2 = \dots = y_k = 0$ , e ficamos com apenas

$$\sum_{i=1}^{m-1} x_i s_i = 0.$$

Consideremos agora as matrizes elementares da forma  $e_{k1}$  onde  $k = 1, 2, \dots, m-1$ . Temos  $s_i(e_{k1}) = 0$  para  $i \neq k$  e  $s_k(e_{k1}) = 1$ . Então a expressão acima torna-se simplesmente

$$x_i = 0.$$

para  $i = 1, 2, \dots, m-1$ . Com isso concluímos que  $\{s_1, \dots, s_{m-1}, t_1, \dots, t_n\}$  é linearmente independente.

Sejam  $\tau, \sigma : M(n \times n) \rightarrow \mathbb{R}$  as funções definidas por  $\tau(\mathbf{a}) =$  soma dos termos da diagonal principal (traço) e  $\sigma(\mathbf{a}) =$  soma dos termos da diagonal secundária. Provaremos que, ainda para  $n \geq 3$ ,  $\{s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma\}$  ainda são funções linearmente independentes.

Para isso iremos mostrar que uma combinação linear dessas funções só será igual a zero se todos os seus coeficientes forem nulos. Sendo assim:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i s_i + \sum_{j=1}^n y_j t_j + \alpha \tau + \beta \sigma = 0.$$

Inicialmente vamos mostrar que  $\alpha = \beta = 0$ . Consideremos a matriz  $\mathbf{a} = e_{11} + e_{22} - e_{12} - e_{21}$ , isto é:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Suponha que  $n \geq 4$ . Então a soma dos elementos de cada linha e de cada coluna é zero, mas  $\tau(\mathbf{a}) = 2$  e  $\sigma(\mathbf{a}) = 0$  (esta última afirmação usa o fato de que  $n \geq 4$ ). Portanto, aplicando a soma acima a  $\mathbf{a}$ , temos que  $2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ . Agora, se usarmos  $\mathbf{b} = e_{1n} + e_{2(n-1)} - e_{1(n-1)} - e_{2n}$ , ou seja,

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a soma de cada linha e de cada coluna é zero,  $\tau(\mathbf{b}) = 0$  e  $\sigma(\mathbf{b}) = 2$ , para  $n \geq 4$ . Sendo assim,  $2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$ . No caso de  $n = 3$ , temos que

$$\begin{aligned} S_i(\mathbf{a}) &= t_i(\mathbf{a}) = 0; \tau(\mathbf{a}) = 2 \text{ e } \sigma(\mathbf{a}) = 1 \\ S_i(\mathbf{b}) &= t_i(\mathbf{b}) = 0; \tau(\mathbf{b}) = 1 \text{ e } \sigma(\mathbf{b}) = 2 \end{aligned}$$

e portanto teríamos

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Sendo assim da equação inicial  $\sum_{i=1}^{n-1} x_i s_i + \sum_{j=1}^n y_j t_j + \alpha\tau + \beta\sigma = 0$  sobrou apenas

$\sum_{i=1}^{n-1} x_i s_i + \sum_{j=1}^n y_j t_j = 0$ . Como já mostramos que  $s_i$  e  $t_i$  são linearmente independentes, concluímos que  $\{s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma\}$  são linearmente independentes.

### 2.2.2 Combinação Afim

Num espaço vetorial  $E$ , diz-se que o vetor  $v$  é uma *combinação afim* dos vetores  $v_1, \dots, v_r$  quando se tem  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$ , com  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 1$ . Diz-se que os vetores

$v_1, \dots, v_r$  são *afim-independentes* quando nenhum deles é uma combinação afim dos demais. Segundo Elon Lages Lima, as afirmações abaixo são equivalentes:

- (1) Os vetores  $v_1, \dots, v_r$  são afim-independetes.
- (2) Se  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0$  e  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = 0$  então  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ .
- (3) Se  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r$  com  $\sum_{i=1}^r \alpha_i = \sum_{i=1}^r \beta_i$  então  $\alpha_1 = \beta_1; \dots; \alpha_r = \beta_r$ .
- (4) Os vetores  $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_r - v_1$  são L.I.
- (5) A variedade afim gerada por  $v_1, \dots, v_r$  tem dimensão  $r - 1$ .

De fato, se os vetores  $v_k - v_1$  com  $k = 2, 3, \dots, r$  fossem linearmente dependentes, algum deles seria combinação linear dos anteriores, e então

$$v_{N+1} - v_1 = \sum_{k=1}^N c_k (v_k - v_1) \Rightarrow v_{N+1} = \left(1 - \sum_{k=1}^N c_k\right) v_1 + \sum_{k=1}^N c_k v_k$$

que é uma combinação afim de  $v_1, \dots, v_N$ . Devo ressaltar que a soma dos coeficientes dessa combinação é igual a um.

Por outro lado, se  $v_{N+1}$  fosse uma combinação afim dos anteriores, teríamos

$$v_{N+1} = \sum_{k=1}^N \alpha_k v_k \Rightarrow v_{N+1} - \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k\right) v_1 = \sum_{k=1}^N \alpha_k (v_k - v_1)$$

e, como  $\sum \alpha_k = 1$ , isso significa que  $v_{N+1} - v_1$  é uma combinação linear dos vetores  $v_k - v_1$ . Com isso concluímos que (1)  $\Leftrightarrow$  (4).

Para provar (4)  $\Leftrightarrow$  (5) consideraremos uma variedade afim  $F$  gerada por  $v_1, v_2, \dots, v_r$ . Assim,  $F - v_1$  é um subespaço gerado por  $0, v_2 - v_1, \dots, v_r - v_1$ . Se (4) ocorre, temos que esses últimos  $r - 1$  vetores são linearmente independentes, então a dimensão de  $F - v_1$  é  $r - 1$ , ou seja, a dimensão de  $F$  é  $r - 1$ .

Se (5), estes últimos  $r - 1$  vetores geram um espaço de dimensão  $r - 1$ , então eles têm de ser linearmente independentes.

(4)  $\Leftrightarrow$  (2). Se a soma dos coeficientes  $\alpha_k$  é nula, a combinação linear na hipótese de (2) pode ser escrita como

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k v_k = \left(\sum_{k=1}^r \alpha_k\right) v_1 + \sum_{k=2}^r \alpha_k (v_k - v_1) = \sum_{k=2}^r \alpha_k (v_k - v_1) = 0.$$

Mas, se vale (4), a última igualdade implica em  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 0$ . Enfim, como a soma de todos os coeficientes  $\alpha_k$  é zero, devemos ter também  $\alpha_1 = 0$ .

(2)  $\Leftrightarrow$  (3). Suponhamos que vale (2), e que

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^r \beta_k v_k \quad \text{onde} \quad \sum_{k=1}^r \alpha_k = \sum_{k=1}^r \beta_k.$$

Tomando  $\gamma_k = \alpha_k - \beta_k$  e rearranjando estas igualdades, temos

$$\sum_{k=1}^r \gamma_k v_k = 0 \quad \text{onde} \quad \sum_{k=1}^r \gamma_k = 0.$$

Por (2), sabemos que  $\gamma_k = 0$  para todo  $k$ , isto é,  $\alpha_k = \beta_k$  para  $k = 1, 2, 3, \dots, r$ .

(3)  $\Leftrightarrow$  (4). Suponhamos (3) válida e consideremos uma combinação linear dos vetores  $v_k - v_1$  que se anule:

$$\sum_{k=2}^r c_k (v_k - v_1) = 0.$$

A nossa intenção é mostrar que estes coeficientes têm de ser nulos, comprovando assim (4). Mas esta igualdade pode ser arranjada da seguinte forma:

$$0v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \dots + c_rv_r = (c_2 + c_3 + \dots + c_r)v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_r.$$

Mas segundo a afirmação (3), os coeficientes de cada  $v_i$  em ambos os membros devem permanecer iguais, portanto  $c_2 = c_3 = \dots = c_r = 0$ . O que nos leva a concluir que  $v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_r - v_1$  são linearmente independentes.

### 2.2.3 Funcionais Lineares e Variedade Afim

Consideraremos  $f_1, \dots, f_m : E \rightarrow \mathbb{R}$  funcionais lineares no espaço vetorial  $E$  de dimensão  $n$ . Suponhamos que estes funcionais gerem no espaço dual  $E^* = \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$  uma variedade afim de dimensão  $r$ . Iremos provar que o conjunto  $F$ , formado pelos vetores  $v \in E$  tais que

$$f_1(v) = f_2(v) = \dots = f_m(v),$$

é um subespaço vetorial de dimensão  $n - r$ .

Para provar isso, vamos considerar uma variedade afim  $V$  gerada por  $f_1, \dots, f_m$ . Então  $V$  é paralela ao subespaço vetorial  $V - f_1$  (gerado pelos funcionais lineares  $g_k = f_k - f_1$  para  $k = 1, 2, \dots, m$ , note que  $g_1 = 0$ ). Se a dimensão de  $V - f_1$  é  $r$ , isto significa que podemos supor (possivelmente após uma reordenação) que os funcionais  $\{g_2, g_3, \dots, g_{r+1}\}$  são uma base  $G$  de  $V - f_1$  e os funcionais  $\{g_{r+2}, g_{r+3}, \dots, g_m\}$  são combinações lineares dos vetores de  $G$ .

Seja  $A : E \rightarrow \mathbb{R}^r$  definida por  $Av = (g_2(v), g_3(v), \dots, g_{r+1}(v))$ . Notemos que o conjunto  $F$  do enunciado é exatamente  $N(A)$ , isto é, o núcleo de  $A$ . De fato, pois se  $v \in F$ , então  $f_1(v) = f_2(v) = \dots = f_{r+1}(v)$  e, portanto,  $g_2(v) = g_3(v) = \dots, g_{r+1}(v) = 0$ . Por outro lado, se  $v \in N(A)$ , então  $g_2(v) = g_3(v) = \dots, g_{r+1}(v) = 0$ ; como os outros funcionais  $g_{r+2}, g_{r+3}, \dots, g_m$  são combinações lineares destes últimos, teremos também  $g_{r+2}(v) = g_{r+3}(v) = \dots = g_m(v) = 0$ , e portanto,  $f_1(v) = f_2(v) = \dots = f_m(v)$ , isto é,  $v \in F$ . Assim,  $F = N(A)$  já é um subespaço vetorial.

Note também que  $A$  é sobrejetiva. Se não fosse assim, a imagem de  $A$  estaria contida num subespaço de  $\mathbb{R}^r$  de dimensão  $r - 1$ , isto é, um hiperplano da forma  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0$  (com os  $\alpha$ 's não todos nulos). Isto significa que  $\alpha_1 g_2(v) + \alpha_2 g_3(v) + \dots + \alpha_r g_{r+1}(v) = 0$  para todo  $v$ , caracterizando que  $\alpha_1 g_2 + \alpha_2 g_3 + \dots + \alpha_r g_{r+1} = 0$  e  $\{g_2, g_3, \dots, g_{r+1}\}$  não seria uma base.

Então  $Im(A) = \mathbb{R}^r$ . Enfim, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,  $dim(N(A)) = dim E - dim(Im(A)) = n - r$ .

### 2.2.4 Cálculo da Dimensão de $Q_n$

Aproveitando a notação utilizada no subtópico 2.2.1 e seu objetivo principal que foi provar que os  $2n + 1$  funcionais  $\{s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma\}$  são linearmente independentes, podemos concluir que os  $2n$  funcionais  $\{s_1 - \tau, \dots, s_{n-1} - \tau, t_1 - \tau, \dots, t_n - \tau, \sigma - \tau\}$  são linearmente independente também. Isto significa que a variedade afim gerada por  $\{s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma\}$  tem dimensão  $2n$ .

Como a soma de todas as entradas da matriz  $\mathbf{a}$  pode ser escrita de duas formas distintas, a saber,

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} + s_n = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n,$$

concluimos que

$$s_n = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n - s_1 - s_2 - \dots - s_{n-1},$$

isto é,  $s_n$  é uma combinação afim dos outros  $2n + 1$  funcionais e, assim, os  $2n + 2$  funcionais originais geram a mesma variedade afim  $V$  de dimensão  $2n$ .

Enfim, o conjunto  $Q_n$  dos quadrados mágicos de ordem  $n$  será um subespaço vetorial de  $M(n \times n)$  de dimensão  $\dim(M(n \times n)) - 2n = n^2 - 2n$ .

Podemos verificar isso de outra forma. Observemos a seguinte definição e o lema a seguir:

**Definição:** Sejam  $F_1$  e  $F_2$  subespaços vetoriais de  $E$  tais que  $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ . A soma direta  $F_1 \oplus F_2$  é o conjunto de todas as somas  $u + v$ , onde  $u \in F_1$  e  $v \in F_2$ .

**Lema:** Sejam  $f_1, \dots, f_k$  funcionais lineares L.I. em  $V' = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ . Mostre que existem  $v_1, \dots, v_k$  vetores L.I. em  $V$  tais que:

$$\text{a) } V = \left( \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i) \right) \oplus [v_1] \oplus \dots \oplus [v_k]$$

$$\text{b) } \{v \in V ; f_1(v) = \dots = f_k(v)\} = \left( \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i) \right) \oplus [v_1 + \dots + v_k]$$

Consideremos o conjunto  $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n\}$  uma base de  $V$  e os vetores  $v_1, \dots, v_k$ , como os duais dos funcionais  $f_1, \dots, f_k$ , isto é

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ e & \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Suponhamos  $v \in \left( \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i) \right) \oplus [v_1] \oplus \dots \oplus [v_k]$ . Isso implica que  $f_1(v) = f_2(v) = \dots = f_k(v) = 0$  e  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ . Sendo assim

$$f_1(v) = \alpha_1 f_1(v_1) + \alpha_2 f_1(v_2) + \dots + \alpha_k f_1(v_k) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$f_2(v) = \alpha_1 f_2(v_1) + \alpha_2 f_2(v_2) + \dots + \alpha_k f_2(v_k) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$f_k(v) = \alpha_1 f_k(v_1) + \alpha_2 f_k(v_2) + \dots + \alpha_k f_k(v_k) = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$$

logo  $v = 0$  e, portanto,  $\left(\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i)\right) \oplus [v_1] \oplus \cdots \oplus [v_k] \subset V$ .

Suponhamos agora que  $v \in V$  então  $v = w + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ , com  $w$  sendo uma combinação linear de  $w_1, \dots, w_n$ .

Supondo  $w \in \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i)$  temos que

$$f_1(v) = f_1(w) + \alpha_1 f_1(v_1) + \alpha_2 f_1(v_2) + \cdots + \alpha_k f_1(v_k) \Rightarrow f_1(v) = f_1(w) + \alpha_1 \Rightarrow f_1(v) = \alpha_1$$

$$\vdots$$

$$f_k(v) = f_k(w) + \alpha_1 f_k(v_1) + \alpha_2 f_k(v_2) + \cdots + \alpha_k f_k(v_k) \Rightarrow f_k(v) = f_k(w) + \alpha_k \Rightarrow f_k(v) = \alpha_k$$

Dessa forma

$$w_i = v - \sum_{i=1}^k f_i(v)v_i \Rightarrow v = w + \sum_{i=1}^k f_i(v)v_i.$$

Logo  $V \subset \left(\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i)\right) \oplus [v_1] \oplus \cdots \oplus [v_k]$  e, portanto,  $V = \left(\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i)\right) \oplus [v_1] \oplus \cdots \oplus [v_k]$ .

Para provar (b), consideremos  $v \in \left(\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i)\right) \cap [v_1 + \cdots + v_k]$ . Como  $v \in \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i)$  e  $v \in [v_1 + \cdots + v_k]$ , implica que

$$\begin{cases} v \in \text{Ker}(f_i) \\ e \\ v = \lambda(v_1 + \cdots + v_k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_i(v) = 0 \\ e \\ f_1(v) = \lambda f_1(v_1) + \lambda f_1(v_2) + \cdots + \lambda f_1(v_k) \\ f_1(v) = \lambda = 0 \end{cases}$$

Logo  $v = 0$ .



Por outro lado, se  $v \in \left( \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i) \right) + [v_1 + \dots + v_k]$ , isso implica que  $v = w + \lambda(v_1 + \dots + v_k)$ , onde  $w \in \bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i)$ . Portanto

$$f_1(v) = f_1(w) + \lambda f_1(v_1) + \lambda f_1(v_2) + \dots + \lambda f_1(v_k) \Rightarrow f_1(v) = f_1(w) + \lambda \Rightarrow f_1(v) = \lambda$$

$$f_2(v) = f_2(w) + \lambda f_2(v_1) + \lambda f_2(v_2) + \dots + \lambda f_2(v_k) \Rightarrow f_2(v) = f_2(w) + \lambda \Rightarrow f_2(v) = \lambda$$

$$\vdots$$

$$f_k(v) = f_k(w) + \lambda f_k(v_1) + \lambda f_k(v_2) + \dots + \lambda f_k(v_k) \Rightarrow f_k(v) = f_k(w) + \lambda \Rightarrow f_k(v) = \lambda$$

Como se vê acima  $f_1(v) = \dots = f_k(v) = \lambda$ .

Aproveitando a notação de **2.2.1**, temos que os funcionais  $s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma$  é uma base dual como o lema mostrado acima. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$\dim(Q_n) = \dim\left(\bigcap_{i=1}^k \text{Ker}(f_i)\right) + \dim(\text{Im}\mathbb{R})$$

Consideremos cada  $f_i$  como um elemento do conjunto  $\{s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_n, \tau, \sigma\}$ .

De acordo com (a), todo elemento do núcleo deve ser escrito como  $w_i = v - \sum_{i=1}^k f_i(v)v_i$ ;

$v$  é uma matriz de ordem  $n$  e sua dimensão é  $n^2$  e existem  $2n + 1$  funcionais linearmente independentes. Sendo assim

$$\dim(Q_n) = n^2 - (2n + 1) + 1$$

$$\dim(Q_n) = n^2 - 2n - 1 + 1$$

$$\dim(Q_n) = n^2 - 2n$$



# Capítulo 3

## Aplicações

Neste capítulo, trataremos de aplicações relacionadas com resultados obtidos no capítulo anterior. De fato, determinaremos explicitamente uma base para  $Q_3$  e  $Q_4$ . Finalmente, mostraremos como construir, por meio de combinação linear, qualquer quadrado mágico de ordem  $3 \times 3$  e  $4 \times 4$ .

### 3.1 Uma base para $Q_3$

Sabemos pelo capítulo anterior que, para  $n \geq 3$ , uma base de  $Q_n$  tem dimensão  $n^2 - 2n$  elementos. Para  $Q_3$  temos que sua dimensão é 3. Tomaremos a princípio o quadrado mágico já relaciona nesta:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Nosso objetivo agora é encontrar mais dois quadrados mágicos de tal forma que os três sejam linearmente independentes, ou seja, um deles não possa ser escrito como combinação linear dos outros dois.

Consideremos então o quadrado mágico  $\mathbf{b}$  obtido da rotação de  $\mathbf{a}$  no sentido horário. Sendo assim,

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vemos que não existe  $\lambda$  que torne a igualdade  $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ , pois dessa forma  $4 = 8\lambda$  e  $9 = 3\lambda$  o que é uma contradição. Sendo assim,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são linearmente independentes.

Consideremos agora o quadrado mágico  $\mathbf{c}$  obtido da rotação de  $\mathbf{b}$  no sentido horário. Sendo assim

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Veremos agora se existe  $\lambda$  e  $\gamma$  que satisfazem a equação  $\mathbf{a}\lambda + \mathbf{b}\gamma = \mathbf{c}$ . Desta forma teremos o seguinte sistema sem solução:

$$\begin{cases} 4\lambda + 8\gamma = 6 \\ 2\lambda + 4\gamma = 8 \end{cases}.$$

O que nos leva a concluir que o conjunto formado pelas matrizes  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , linearmente independentes, formam uma base de  $Q_3$ . Sendo assim, qualquer quadrado mágico de ordem 3 pode ser escrito como combinação linear de  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ .

**Exemplo:** Tomemos o quadrado mágico  $\mathbf{d}$  obtido da rotação de  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

provaremos que existe  $\lambda$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  reais que satisfazem a equação  $\mathbf{d} = \mathbf{a}\lambda + \mathbf{b}\gamma + \mathbf{c}\delta$ .

$$\begin{cases} 4\lambda + 8\gamma + 6\delta = 2 \\ 3\lambda + \gamma + 7\delta = 9 \\ 8\lambda + 6\gamma + 2\delta = 4 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação e subtraindo pela terceira, encontramos que  $\gamma = -\delta$ . Substituindo no sistema acima, obteremos o novo sistema

$$\begin{cases} 4\lambda + 2\gamma = 2 \\ 3\lambda - 6\gamma = 9 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema acima, encontraremos  $\lambda = -\frac{1}{3}$ ,  $\gamma = -\frac{5}{3}$  e  $\delta = \frac{5}{3}$ .

Enfim, todo quadrado mágico  $m$  de ordem 3 pode ser escrito da forma

$$m = \lambda \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

### 3.2 Uma base para $Q_4$

Vimos que a dimensão do espaço  $Q_n$  dos quadrados mágicos  $n \times n$  é igual a  $n^2 - 2n$ . No caso em que  $n = 4$ , obtemos  $\dim(Q_4) = 8$ . Consideremos inicialmente um conjunto com oito quadrados mágicos de ordem 4 representados pelas matrizes abaixo:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos  $x_i$  com  $i = 1, 2, \dots, 8$  números reais tais que

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 + fx_6 + gx_7 + hx_8 = 0.$$

Dessa forma obteremos o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_8 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_8 = 0 \\ x_5 = 0 \\ x_6 + x_7 = 0 \\ x_5 + x_6 + x_8 = 0 \\ x_7 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_8 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_7 = 0 \\ x_2 + x_5 + x_8 = 0 \\ x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_8 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_7 + x_8 = 0 \\ x_3 + x_5 + x_8 = 0 \end{array} \right. .$$

Substituindo em todas as equações os valores de  $x_4 = x_5 = x_7 = 0$ , o sistema acima se reduz a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_8 = 0 \\ x_3 + x_8 = 0 \\ x_6 = 0 \\ x_6 + x_8 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_8 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 + x_8 = 0 \\ x_1 + x_8 = 0 \\ x_1 + x_6 = 0 \end{array} \right. .$$

E, finalmente, substituindo  $x_2 = x_3 = x_6 = 0$  no sistema acima obteremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_8 = 0 \\ x_8 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right. .$$

Podemos concluir com isso, que o sistema acima tem como única solução a trivial, com todos os coeficientes nulos. Logo, o conjunto de matrizes  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}\}$  é linearmente independente e, como o número de elementos desse conjunto é igual a dimensão de

$Q_4$ , esse conjunto é uma base de  $Q_4$ .

**Exemplo:** Como toda matriz  $m \in Q_4$  pode ser escrita na forma

$$m = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 + fx_6 + gx_7 + hx_8,$$

iremos determinar os valores de cada  $x_i$  para

$$m = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para isso, resolveremos o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_8 = 16 \\ x_3 + x_4 + x_8 = 3 \\ x_5 = 2 \\ x_6 + x_7 = 13 \\ x_5 + x_6 + x_8 = 5 \\ x_7 = 10 \\ x_1 + x_3 + x_8 = 11 \\ x_2 + x_4 = 8 \\ x_3 + x_7 = 9 \\ x_2 + x_5 + x_8 = 6 \\ x_4 + x_6 = 7 \\ x_1 + x_8 = 12 \\ x_4 = 4 \\ x_1 + x_6 = 15 \\ x_2 + x_7 + x_8 = 14 \\ x_3 + x_5 + x_8 = 1 \end{array} \right. .$$

Substituindo os valores de  $x_4$ ,  $x_5$  e  $x_7$  no sistema acima, obteremos o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_8 = 16 \\ x_3 + x_8 = -1 \\ x_6 = 3 \\ x_6 + x_8 = 3 \\ x_1 + x_3 + x_8 = 11 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \\ x_2 + x_8 = 4 \\ x_1 + x_8 = 12 \\ x_1 + x_6 = 15 \end{array} \right. .$$

Substituindo os valores de  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_6$  no sistema acima obteremos o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_8 = 12 \\ x_8 = 0 \\ x_1 = 12 \end{array} \right. .$$

Assim,  $m$  pode ser escrito de acordo com a combinação linear abaixo:

$$m = 12a + 4b - c + 4d + 2e + 3f + 10g.$$



# Referências Bibliográficas

- [1] Lima, E. L., *Álgebra Linear*. 5 ed. IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro. (2001). 1–102.
- [2] Teixeira, R. C., *Álgebra Linear. Exercícios e soluções*. 3 ed. IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro. (2012). 199–202, 266–267.
- [3] Januario, G., *Quadrados Mágicos: uma proposta de aprendizado com enfoque etnomatemático*. CBEm3: Etnomatemática: novos desafios teóricos e pedagógicos. Niterói: UFF, 2008. v. único. 1-15.
- [4] Tahan, M., *As Maravilhas da Matemática*. 2 ed. Bloch Editora. Rio de Janeiro. (1973). 91–96.
- [5] Boyer, Carl B., *História da Matemática*. (Trans. Elza F. Gomide.) São Paulo: Edgard Blücher.(1974).