UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Logaritmo de Número Real Negativo: Uma Proposta Didática para a Série Final do Ensino Médio

Marciel da Silva

Instituto de Matemática

Maceió, Maio de 2016

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MARCIEL DA SILVA

LOGARITMO DE NÚMEROS REAIS NEGATIVOS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA A SÉRIE FINAL DO ENSINO MÉDIO.

MACEIÓ
2016

MARCIEL DA SILVA

LOGARITMO DE NÚMEROS REAIS NEGATIVOS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA A SÉRIE FINAL DO ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, sob coordenação nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcio Henrique Batista

MACEIÓ

2016

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

S586l Silva, Marciel da.
Logaritmo de números reais negativos: uma proposta didática para a série final do Ensino Médio / Marciel da Silva. – 2016.
90 f. ; il.

Orientador: Marcio Henrique Batista.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

Bibliografia: f. 61.
Apêndice: f. 62-89.
Anexo: f. 90.

1. Matemática – Estudo ensino. 2. Logaritmos – Números negativos. 3. Números Complexos. 4. Euler, Equação de. 5. Sequência didática. I. Título.

CDU: 519.662:37

Folha de Aprovação

MARCIEL DA SILVA

LOGARITMO DE NÚMEROS REAIS NEGATIVOS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA A SÉRIE FINAL DO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 27 de maio de 2016.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva - UFAL (Presidente)

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros - UFAL

Prof. Dr. José Ivan da Silva Santos - UNIT

A minha família por acreditar em mim, e sempre estar ao meu
lado nas minhas decisões.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por cada conquista alcançada e por me fortalecer diante das adversidades;

A minha esposa Elenilda aos meus filhos Rhuan e Lhorane pelo apoio, carinho e paciência a mim sempre prestado;

A minha mãe, por promover minha educação e ser um exemplo em minha vida;

A minha família e amigos pela colaboração constante a cada passo da minha caminhada;

Ao meu amigo Ewerton Roosewelt por ter dedicado um pouco do seu tempo para me ajudar, durante o período da minha dissertação;

Aos professores do PROFMAT, por todo o carinho e dedicação que tiveram conosco;

Ao grupo de Estudos, que mesmo diante dos maiores desafios fez da amizade e ajuda mútua o alicerce das nossas realizações;

Aos meus amigos, turma PROFMAT 2013, por toda a solidariedade e companheirismo;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - pelo apoio financeiro;

Ao meu orientador Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva, pelo apoio, confiança e paciência que teve comigo durante a elaboração deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho propõe uma sequência didática ao educando que está concluindo o ensino médio para que o mesmo possa responder com clareza e eficiência se existe ou não logaritmo de um número real negativo. No primeiro ano do ensino médio, as definições e propriedades dos logaritmos são apresentadas apenas para os números reais positivos. Os alunos terminam o ensino médio e não é feita a ligação de logaritmos e números complexos para demonstrar que existem sim logaritmos de números reais negativos, logo esses estudantes concluem a educação básica acreditando que não existe logaritmo de números negativos. A partir dessa ótica elaboramos uma sequência didática, fazendo a ligação entre história da matemática, números complexos, funções logarítmicas, exponenciais e também a equação de Euler, com objetivo de mostrar que existem logaritmos de números reais negativos. Só que a solução não vai ser um número real, como acreditava alguns matemáticos dos séculos XVII e XVIII, mas sim um número imaginário.

Palavras-chave: logaritmo de números negativos. Números complexos. Equação de Euler e sequência didática.

ABSTRACT

This paper proposes a teaching sequence to the student who is finishing high school so that it can respond clearly and effectively whether or not logarithm of negative real number. In the first year of high school, the definitions and properties of logarithms are presented only for positive real numbers. Students finish high school and the connection of logarithms and complex numbers is not done to show that there are rather logarithms of negative real numbers, then these students complete their basic education believing that there is no logarithm of negative numbers. From this perspective we developed a didactic sequence, making the connection between the history of mathematics, complex numbers, logarithmic, exponential functions and also the Euler equation, in order to show that there are logarithms of negative real numbers. But the solution will not be real, as some believed mathematicians of the seventeenth and eighteenth centuries, but an imaginary number.

Keywords: Logarithms of negative numbers. complex numbers. Euler equation and didactic sequence.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$..Conjunto dos números naturais.

$\mathbb{N}_*$..Conjunto dos números naturais diferente de zero.

$\mathbb{Z}$..Conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{Z}_*$...Conjunto dos números inteiros diferentes de zero.

$\mathbb{Q}$...Conjunto dos números racionais.

$\mathbb{R}$..Conjunto dos números reais.

$\mathbb{R}^+$.. Conjunto dos números reais não negativos.

$\mathbb{R}_*^+$...Conjunto dos números reais positivos.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$...Conjunto dos números irracionais.

$\mathbb{C}$.. Conjunto dos números complexos.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Fazer o educando aprender o conteúdo nem sempre é finalizado de maneira eficaz, o docente ministra suas aulas, mas o educando na maioria das vezes, nem sempre aprende, apenas reproduz e decora fórmulas e cálculos, sem saber em que será útil a ele. Se o aluno não aprende o conteúdo de forma eficaz, então ele não fará a ligação deste conteúdo com outros vistos anteriormente. Neste trabalho intitulado: "Logaritmos de Números Reais Negativos: Uma Proposta Didática para a Série Final do Ensino Médio". Propomos uma sequência didática para os alunos que estão concluindo o ensino médio, possam fazer a ligação entre o conteúdo de números complexos e outros conteúdos vistos anteriormente, para que os mesmos possam compreender de forma eficiente sobre a existência de logaritmos de números negativos.

As Orientações Curriculares do Ensino Médio recomendam que na abordagem do tema não seja enfatizado um trabalho exaustivo dos logaritmos, mas que sejam apresentados aos estudantes situações-problemas que ilustram os modelos exponenciais e logarítmicos. Tais aplicações podem ser encontradas em tópicos da Matemática Financeira (Juros e Correção Monetária), crescimento populacional, entre outros. Um fato importante dessas aplicações é que a função logarítmica é a inversa da função exponencial.

A inversa da função exponencial de base a é a função $log_a\colon \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número real positivo x o número real $log_a x$, chamado logaritmo de x na base a, com a real positivo e $a \neq 1$. Assim, $log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x, ou seja, $log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, Dante (2005).

A afirmação de Dante em definir função logarítmica como inversa da função exponencial é uma afirmação usada por vários autores de livros didáticos da educação básica. Já o autor, Elon Lages Lima (2013) define funções logarítmicas de forma semelhante à definição do Dante (2005), ele também prova que é possível encontrar o logaritmo natural $log_e x = \ln(x)$ de forma geométrica, ou seja, Lima usa o teorema da caracterização de funções logarítmicas para mostrar que $\ln(x) = área(\ H_1^x)$, onde H_1^x é a área sob a hipérbole $f(x) = 1/x$, para todo $x \in \mathbb{R}_*^+$. Logo conforme Lima (2013) definirmos:

O logaritmo natural do número $x \in \mathbb{R}_*^+$ é o logaritmo de x na base e, definido por $\ln(x)$, onde $\ln(x)$ é numericamente igual à área da faixa H_1^x, ou seja, $\ln(x) = área(\ H_1^x)$.

Sendo que a área da faixa H_1^x nada mais é do que a área da figura delimitada inferiormente pelo eixo das abscissas, superiormente pelo ramo positivo da hipérbole $f(x) = 1/x$, e lateralmente pelas retas verticais $x = 1$ e $x = a$.

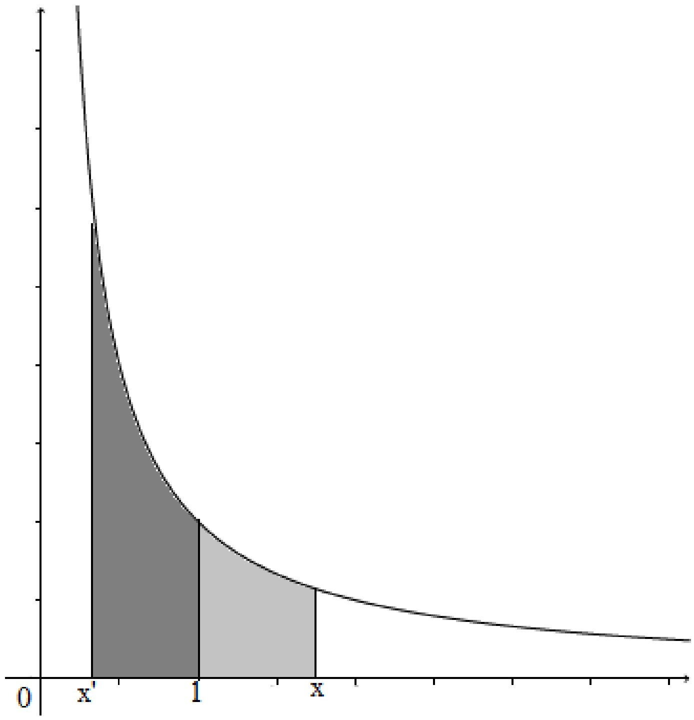
Assim, $\ln(x) = área(\ H_1^x)$, com a convenção de que $área(\ H_1^x) < 0$ quando $0 < x < 1$. Logo

$$\begin{cases} \ln(1) = 0, pois\ \ H_1^1\ se\ resume\ a\ um\ segmento\ de\ reta \\ \ln(x) > 0\ se\ x > 1 \\ \ln(x') < 0\ se\ 0 < x' < 1. \end{cases}$$

Geometricamente temos, $\ln(x) = área(\ H_1^x) > 0$ é a região mais clara, então

$\ln(x) = área\left(\ H_1^{x'}\right) < 0$ é a região mais escura, conforme figura 1.

Figura 1 - Áreas das faixas H_1^x e $H_1^{x'}$



Fonte: autor, 2016.

Mas o discente poderá nos perguntar: como representar geometricamente o logaritmo de uma base diferente da base e? Para responder essa pergunta iremos utilizar algumas das definições dadas por Lima (1996). Na pagina 63 definiu *outras bases*, através da área sob o ramo positivo da hipérbole $g(x) = k/x$, onde k é um número real positivo, logo:

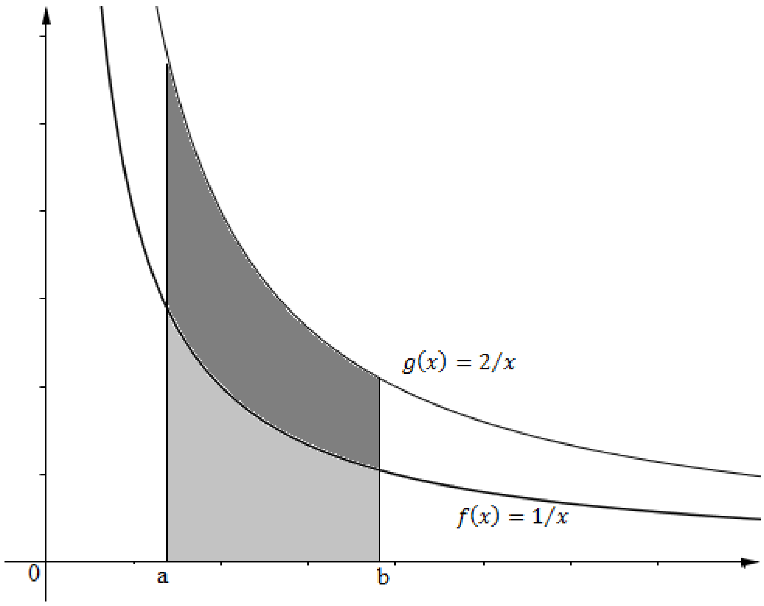
Dado dois pontos a e b no eixo x, indiquemos com $H(k)_a^b$ a faixa da hipérbole $g(x) = k/x$ compreendida entre as retas $x = a$ e $x = b$.

Como $g(x) = k/x$, então $g(x) = k.f(x)$. Daí se $k > 1$ o gráfico da hipérbole $f(x)$ será esticado verticalmente. Se $0 < k < 1$ o gráfico da hipérbole $f(x)$ será comprimido verticalmente. Logo a área da faixa $H(k)_a^b$ é igual a k vezes a área da faixa H_a^b, ou seja, $área\ H(k)_1^x = k.(área\ H_1^x) = k \ln(x)$. Fixada a constante $\mathrm{k} > 0$, introduzimos um novo sistema de logaritmo. Temos então a seguinte definição:

Para todo $\mathrm{x} > 0$ temos, $\log_a \mathrm{x} = \text{área } \mathrm{H(k)}_1^{\mathrm{x}}$, isto é: $\log_a \mathrm{x} = \mathrm{k}.\ln(\mathrm{x})$.

Logo já podemos responder a pergunta feita anteriormente (como representar geometricamente o logaritmo de uma base diferente da base e?), pois, para qualquer $k \in \mathbb{R}_*^+$ vamos esticar ou comprimir verticalmente a hipérbole $f(x) = 1/x$ e a área sob essa nova faixa irá representar geometricamente o logaritmo de base diferente do número irracional e. Daí essa nova faixa representará a propriedade de mudança de base do logaritmo. Para $k = 2 > 1$, veja o esboço da hipérbole $g(x) = 2/x$ na figura 2.

Figura 2 - Área sob a hipérbole $g(x) = 2/x$.



Fonte: autor, 2016.

Portanto em virtude dessas Orientações Curriculares do Ensino Médio, é que a maioria dos livros didáticos para o ensino médio define a função logarítmica basicamente de duas maneiras diferentes, uma como a função inversa da função exponencial e a outra como a área sob a hipérbole $g(x) = k/x$; para todo k e x real positivo. Sendo que os livros didáticos mais utilizados no ensino médio utilizam a definição de que a função logarítmica é a inversa da função exponencial, principalmente devido as suas aplicações.

Logo os estudantes estão acostumados a verem a função logarítmica como inversa da função exponencial ou como área sob o ramo positivo da hipérbole, mas ambos os conceitos não são úteis quando falamos em logaritmo de números negativos. Porque na primeira definição $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, não tem sentido definir $y = \log_a x$, quando $x < 0$, pois, $a^y > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Na segunda definição temos que $\ln(x) = área(\,H_1^x)$, onde a área é sempre positiva, logo também não tem sentido definir $y = \ln(x)$, quando $x < 0$. Logo em ambas as definições não faz sentido falar em logaritmo real de números negativos.

Carlos, Boyer (2012), constrói sua narrativa referindo-se aos fatos matemáticos bem aceitos atualmente como descobertas e percepções, embora se refira aos logaritmos reais dos números negativos como crenças erradas que dominaram o debate, entre Johann Bernoulli e Leibinz, até que o brilhante Euler resolveu definitivamente a questão.

Este trabalho tem como objetivo propor atividades diferenciadas que possam proporcionar a oportunidade ao aluno de compreender de forma eficaz e ativa o conceito e as propriedades de alguns conteúdos da matriz curricular do ensino médio e também interligá-lo, como por exemplo, as funções logarítmicas, funções exponenciais, números complexos e trigonometria. Depois de integrarmos um conteúdo com outro, poderemos utilizar a equação de Euler para responder uma pergunta que foi motivo de muita discussão entre alguns matemáticos dos séculos XVII e XVIII. A pergunta é a seguinte: existem logaritmos de números reais negativos? E se existir então o conjunto solução está no conjunto dos reais ou no conjunto dos números complexos? Para responder a essas perguntas, propomos uma sequência didática para ser desenvolvida em sala de aula com os estudantes que estão concluindo o ensino médio, mas já estudaram números imaginários, interligando os conteúdos citados nesse parágrafo. A ideia de elaborar esse trabalho surgiu devido à dúvida de muitos alunos e até mesmo alguns professores do ensino médio sobre a existência ou não dos logaritmos de números complexos, em particular logaritmos de números reais negativos.

Este trabalho destina-se também aos professores do ensino médio que por muitas vezes sem o conhecimento mais aprofundado sobre o tema logaritmos, vê-se restrito apenas aos livros didáticos, não fazendo a integração entre alguns conteúdos do ensino médio, não conseguindo transmitir ao discente a contextualização e importância necessária ao ensino dos logaritmos de números reais negativos.

Para ajudar a responder, com clareza e eficiência, a pergunta sobre a existência ou não dos logaritmos de números negativos, é que dividimos este trabalho em cinco capítulos.

O segundo capítulo traz uma abordagem histórica a respeito da criação dos logaritmos de números reais positivos e também um resumo do surgimento dos logaritmos de números negativos e imaginários. Onde o logaritmo de número real negativo é o nosso eixo norteador para criação da sequência didática.

Este terceiro capítulo está reservado para os conteúdos que são pré-requisitos para aplicação da sequência didática, pois os mesmos fazem parte da matriz curricular do ensino médio, eles serão revisados e interligados um com outro pelo professor que desejar aplicar esse projeto. A função inversa tem um papel de interligar a função exponencial com a função logarítmica assim como os números complexos são fundamentais para que possamos relacioná-los com a equação de Euler e mostrar que existem logaritmos de números negativos.

No capítulo quatro temos a proposta da sequência didática. Ela é constituída por quatro propostas de atividade que trabalham conceitos de paradoxos, propriedades de funções exponenciais e logarítmicas, opiniões de grandes matemáticos do século XVIII sobre a existência ou não dos logaritmos de números negativos e por fim na última proposta veremos que existe sim logaritmos de números reais negativos, só que a solução vai ser um número complexo. As atividades expostas nas aulas tornam a sequência interessante e prazerosa. Já no capítulo cinco temos as considerações finais.

No apêndice A, estão os tópicos das aulas do terceiro e quarto encontro, onde os mesmos ajudarão o professor a chegar ao objetivo desta proposta, que é mostrar aos alunos que existem logaritmos de números negativos e como encontrar esses logaritmos.

No apêndice B, estão às quatro atividades que serão aplicadas no decorrer da proposta, sendo que estas atividades seguem uma sequência lógica, como por exemplo, na atividade 1 temos como foco principal o conceito de paradoxo, já na atividade 2 mostraremos que $\ln(-x) = \ln(x)$ é um paradoxo para qualquer x real positivo. Já atividade 3 é o nosso eixo norteador, pois nessa atividade iremos sondar os conhecimentos dos alunos sobre logaritmos de números imaginários em particular logaritmos de números reais negativos e por último a atividade 4, onde iremos avaliar o educando comparando as respostas da atividade 3 e da atividade 4.

No apêndice C, teremos os comentários sobre cada questão das atividades, mostrando que as questões não foram escolhidas aleatoriamente, mas de forma que venha haver ligação entre elas. Estes comentários são importantes porque ajudarão o professor a entender qual propósito de cada questão nas atividades propostas.

2. ASPECTO HISTÓRICO SOBRE LOGARITMOS

2.1 Origem dos Logaritmos de Números Reais Positivos

Os logaritmos surgiram, principalmente com o objetivo de facilitar os cálculos, pois, no século XVII, o desenvolvimento da Astronomia e da navegação exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos. Neste século para efetuar com presteza as operações de multiplicação, divisão, potência e extração de raiz era realmente um problema fundamental. Então com a invenção das tábuas logarítmicas esses cálculos foram simplificados, porque, elas ajudaram a facilitar os cálculos, como por exemplo, transformando a multiplicação em soma e a divisão em subtração. John Napier (1550-1617) um nobre escocês, teólogo e matemático preocupado em resolver o problema das longas multiplicações e das complicadas divisões e potenciações que perturbavam os astrônomos, os navegadores, os comerciantes e engenheiros, então ele observou que era possível associar a progressão geométrica $b, b^2, b^3, \cdots, b^m, \cdots, b^n$ com a progressão aritmética $1, 2, 3, \cdots, m, \cdots, n$. Ao comparar estas duas progressões, Napier constatou que o produto de dois termos quaisquer da primeira progressão, por exemplo, $b^m . b^r = b^{m+r}$, estava associado à soma $m + n$, dos termos correspondentes a segunda progressão. Estava aí lançada a ideia de logaritmo. Antes da invenção dos logaritmos o produto de dois números poderia ser feito com a seguinte fórmula trigonométrica:

$$\cos(x).\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x + y).\cos(x - y)]$$

Antes da invenção dos logaritmos as multiplicações e as divisões, poderiam ser simplificadas em soma e subtração através das fórmulas trigonométrica. As fórmulas usadas para essa finalidade são as fórmulas de Werner (Johannes Werner 1468-1528).

As fórmulas de Werner são:

1. $2\cos(A).\cos(B) = \cos(A + B) + \cos(A - B)$;
2. $2\,\mathrm{sen}(A).\cos(B) = \mathrm{sen}(A + B) + \mathrm{sen}(A - B)$;
3. $2\cos(A).\mathrm{sen}(B) = \mathrm{sen}(A + B) - \mathrm{sen}(A - B)$;
4. $2\mathrm{sen}(A).\mathrm{sen}(B) = \cos(A - B) + \cos(A + B)$.

Essas fórmulas passaram a ser largamente usadas por matemáticos e astrônomos perto do fim do século XVII como um método de conversão de produtos em soma. O método torna-se conhecido como *Prostaférese,* a partir de uma palavra grega que significa "adição e subtração". Uma divisão pode ser tratada da mesma maneira, assim utilizando a primeira das fórmulas de Werner, temos:

$$2\frac{\cos(A)}{\operatorname{sen}(B)} = 2\cos(A).\sec(B) = 2\cos(A).\cos(90^0 - B)$$

$$2\frac{\cos(A)}{\operatorname{sen}(B)} = 2\cos\big(A + (90^0 - B)\big) + \cos[A - \cos(90^0 - B)].$$

Para calcular o produto ou a divisão de dois números utilizando a primeira fórmula de Werner, os matemáticos, comerciantes e astrônomos do século XVI utilizavam alguns métodos. Mesmo com esses métodos ainda continuava o desperdício de tempo, então foi preciso criar as tábuas logarítmicas para resolver esse problema do desperdício de tempo.

De acordo com Eves (2004), a palavra "Logaritmo" significa "número de Razão", sendo que inicialmente Napier utilizou a expressão "número artificial". Porém antes de anunciar a sua descoberta ele adotou a nomenclatura utilizada atualmente. É possível que Napier deixou-se influenciar pelo método da *prostaférise* na criação dos logaritmos (porque ele inicialmente restringiu seus logaritmos aos senos de ângulos). Mas sua abordagem difere consideravelmente da prostaférise, e basear-se no fato de associar os termos de uma progressão geométrica (P.G) com os termos de uma progressão aritmética (P.A). Ou seja, a progressão geométrica $(b, b^2, b^3, b^4, \cdots,\ b^m, \cdots, b^n, \cdots)$ está associado com a progressão aritmética $(1, 2, 3, 4, \cdots, m, \cdots,\ n, \cdots)$.

Um dos exemplos que Napier utilizou para relacionar a progressão aritmética com a progressão geométrica (ou seja, P.A com a P.G) foi: P.A: $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ e a P.G: $(1, 2, 4, 8, 16, 32\ , 64, 128, 256)$. Nesse caso, observou que o produto de termos da progressão geométrica possuía uma correspondência com a adição de termos da progressão aritmética. Pois, o elemento 2 da progressão geométrica corresponde ao elemento 1 da progressão aritmética e o elemento 8 da progressão geométrica corresponde ao elemento 3 da progressão aritmética. Através do produto destes dois elementos da progressão geométrica obtém-se o elemento $16 = 2 * 8$ que por sua vez corresponde ao elemento $4 = 1 + 3$ da progressão aritmética. Mas uma sequência de potência inteira de uma base, tal como 2, não poderia ser utilizada para computações, porque as grandes lacunas entre termos sucessivos tornavam a interpolação muito imprecisa. Daí para diminuir as lacunas entre os números, Napier construiu uma progressão geométrica com razão próxima de 1. No caso adotou razão $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$.

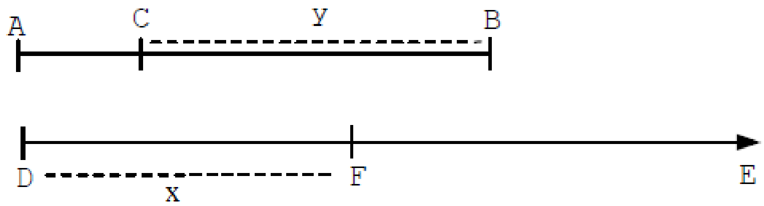
> Como produto $b^m.b^n = b^{m+n}$ de dois termos da progressão geométrica está associado à soma $m + n$ dos termos correspondente da progressão aritmética. Para manter os termos da progressão geométrica suficiente próxima de modo que possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos na correspondência procedente, deve-se escolher o número b bem próximo de 1. Com essa finalidade Napier tomou $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$. Para evitar decimais ele multiplicava cada

> potência por 10^7. Assim o Napier-logaritmo de $10^7 = 0$ e o de $10^7(1-10^{-7}) = 1$, então se $N = 10^7(1-10^{-7})^L$, teremos que L é o logaritmo do número N, (EVES, 2004, p. 344).

Logo, ele usou o número $(1-10^{-7})$ como um tipo de "proporção", pois, na construção de sua tabela foi utilizado o termo inicial 10^7, ou seja, ele iniciou a tabela com 10^7, seguida de $10^7(1-10^{-7})$, $10^7(1-10^{-7})^2$, $10^7(1-10^{-7})^3$, $\cdots$, e assim sucessivamente. E com isso está relacionando a progressão geométrica $[10^7, 10^7(1-10^{-7}), 10^7(1-10^{-7})^2, 10^7(1-10^{-7})^3, \cdots]$ com a progressão aritmética $(0, 1, 2, 3, \cdots)$, ou seja, o logaritmo de 10^7 é zero, o logaritmo de $10^7(1-10^{-7})$ é um, e assim sucessivamente.

Ainda segundo Eves (2004), a abordagem utilizada por Napier na descoberta dos logaritmos foi geométrico-mecânica, pois, ele considerou um segmento de reta $\overline{AB}$ e uma semi-reta $\overrightarrow{DE}$ de origem D. Conforme a figura a seguir:

Figura 3 – Representação gráfica da ideia geométrica de logaritmo



Fonte: Eves (2004), p.334

Suponha que o ponto C percorra o segmento $\overline{AB}$ e o ponto F percorra a semi-reta $\overrightarrow{DE}$ de forma que ambos se iniciem simultaneamente a partir dos extremos A e D respectivamente, com a mesma velocidade inicial. Admitindo que C se mova com uma velocidade dada pela medida da distância $\overline{CB}$ e que F se mova com velocidade uniforme igual à velocidade inicial, $\overline{CB} = y$, x é o Napier-logaritmos de y. Mas ainda existia o incômodo das frações, então para facilitar o incômodo das frações, Napier tomou o comprimento de $\overline{AB} = 10^7$ como unidade. Fazendo uma relação com a abordagem numérica, temos que sobre uma sucessão de períodos de tempo iguais, y decresce em progressão geométrica enquanto x cresce em progressão aritmética, estabelecendo assim, a relação entre as progressões. Podemos observar que nesta definição *não aparece explicitamente o conceito de base*, *mas pode-se provar* que $x = 10^7.\log_{1/e}(y/10^7)$ (EVES, 2004, P. 345). Ainda, em relação aos logaritmos de Napier é possível observar algumas características, tais como:

a) A tabela de logaritmos é decrescente.
b) O logaritmo do produto não é igual à soma dos logaritmos.

c) O logaritmo do quociente não é a diferença entre os logaritmos.

Daí, podemos afirmar que os logaritmos de Napier não satisfazem as propriedades atualmente conhecidas da função logarítmica quanto aos logaritmos do produto e do quociente.

Propriedade atual: $\log(a.b) = \log(a) + \log(b)$ e $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ para todo $a, b \in \mathbb{R}^{+}$.

Propriedade de Napier: $\mathrm{N}.\log(a.b/10^{7}) = \mathrm{N}.\log(a) + \mathrm{N}.\log(b)$ e $\mathrm{N}.\log(10^{7})(a/b) = \mathrm{N}.\log(a) - \mathrm{N}.\log(b)$.

Demonstração:

Sejam $a_n = 10^{7}(1-10^{-7})^{n}$ e $a_m = 10^{7}(1-10^{-7})^{m}$ termos de uma progressão geométrica tal que

$$a_n.a_m = 10^{7}(1-10^{-7})^{n}.10^{7}(1-10^{-7})^{m} = 10^{7}.10^{7}(1-10^{-7})^{n+m}$$

$$a_n.a_m = 10^{7}(a_{n+m})$$

$$10^{-7}(a_n.a_m) = a_{n+m}$$

Daí

$$\mathrm{N}.\log(a.b/10^{7}) = \mathrm{N}.\log(a) + \mathrm{N}.\log(b)$$

De maneira análoga concluí-se que $\mathrm{N}.\log(10^{7})(a/b) = \mathrm{N}.\log(a) - \mathrm{N}.\log(b)$.

Conforme Lima (2013) o número "e" é o número irracional dado pelo limite da sequência numérica $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ quando n tende ao infinito, ou seja, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$ (sendo que "e" é um número irracional: $e \cong 2{,}718281828459\ldots$). Onde o logaritmo natural é o logaritmo de base e, ou seja, $\log_e x = \ln x$, para quaisquer x real positivo. Este número "e" está presente em várias aplicações de funções logarítmicas e funções exponenciais, como por exemplo: juros, desintegração radiativa, crescimento populacional, entre outros.

Alguns autores chamam o logaritmo natural de logaritmo neperiano em homenagem a John Napier. Entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois, o logaritmo definido por Napier tem como base $b = (1-10^{-7})^{10^{7}} \cong \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$, ou seja, podemos afirmar que os logaritmos neperianos são decrescentes enquanto os logaritmos naturais são crescentes.

O único rival de Napier como pretendente á invenção dos logaritmos foi Jost Burgi (1552-1632), suíço fabricante de instrumento astronômico e matemático inventor. Burgi e Napier trabalharam independentemente, mas ambos buscavam um processo que se elimina o fantasma das longas multiplicações e complicadas divisões que assombravam muitos matemáticos e astrônomos do século XVII. As tábuas de Napier foram publicadas em 1614 (intitulada *Mirifici logaritbmorum canonis descriptio,*ou seja, Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos) e as de Burgi em 1620. A influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior do que a de Burgi, devido as suas publicações e seu relacionamento com professores universitários.

Segundo Boyer (2012), o conceito de função logarítmica está implícito na definição de Napier assim como em todo seu trabalho a respeito dos logaritmos. Esse conceito não se despertou na sua mente pelo fato de que ele estava mais preocupado com a simplificação das computações numéricas, especialmente de produtos e quocientes.

Ultimamente, todavia, com o advento dos computadores e das potentes calculadoras (cada vez mais baratas que encontramos em qualquer feira livre) os logaritmos perderam sua importância como instrumento de cálculo aritmético, mas a função logarítmica e sua inversa não perderam suas importâncias, pois, posso afirmar sem exageros, que em quanto houver ciências haverá aplicações das funções logarítmicas e exponenciais.

2.2 Logaritmos de Números Negativos e Imaginários

Napier construiu uma tabela logarítmica baseado num modelo mecânico-geométrico de pontos em movimento, estabelecendo uma relação entre os termos de uma progressão geométrica e os termos de uma progressão aritmética. A definição inicial de logaritmo bem como as tabelas logarítmicas não permitia estender o conceito para números negativos muito menos para números imaginários, pois o principal objetivo de Napier, na construção dessas tabelas era deixar os cálculos de números racionais positivos mais simples. Ao contrário dos números racionais positivos que têm raiz em experimentações geométrica, os números negativos, os irracionais e os complexos surgiram da manipulação algébrica, como resolução de equações do primeiro e segundo grau (BOYER, 2012).

Conforme Tatiana Roque (2012) em 1750 começou um intenso debate entre Fontenelle, Clairaut e d'Alembert sobre as quantidades negativas, esse debate iniciou na França e chegou até a Inglaterra. O motivo desse debate foi o estudo dos logaritmos, pois os logaritmos de números positivos eles já tinham conhecimento de como encontrar, mas eles discutiam sobre como definir o logaritmo de números negativos.

Para Fontenelle os números negativos se diferenciavam em dois aspectos: um propriamente quantitativo, comumente admitido, e outro qualitativo relacionado à ideia de oposição, ou seja, esses números não possuíam apenas um ser numérico, mais também um ser especifico o que permitia dizer que eram opostas. Clairaut tinha esse mesmo pensamento, pois admitia que quantidades negativas como soluções de equações, mas ambos foram duramente criticados por d'Alembert, que na encyclopédie, criticou radicalmente a aceitação dos números negativos. Para d'Alembert se as quantidades negativas fossem admitidas como solução de equações então se estava dando lugar a uma metafísica equivocada, ou seja, pode-se admitir a regra de sinais, mas não era legitimo conceber soluções de equações como quantidades negativas, admitindo que elas fossem menores que zero. Essa ruptura provocada por d'Alembert se deve pelo fato de sua posição com relação aos logaritmos de números negativos, ou seja, ele acreditava que esses logaritmos deveriam ser reais e tentou demonstrar a todo custo (ROQUE, 2012, P. 439).

O estudo da decomposição de uma fração em elementos simples, também está ligado à teoria dos logaritmos, pois podemos decompor o polinômio racional em outros mais simples.

> As contribuições de Leibniz e Bernoulli para a integração de funções racionais, com base nessa decomposição, foi o primeiro passo para estudo geral dos logaritmos. Para integrar uma função racional inteira de variável x, era preciso decompô-la em um produto de fatores de primeiro grau da forma $(x-a)$ ou $\left(x-a-b\sqrt{-1}\right)$. A integração desses fatores colocaria o problema dos logaritmos dos números negativos e imaginários (ROQUE, 2012, P. 440).

Como por exemplo, $P(x)=\frac{1}{x^2+1}$ é um polinômio racional tal que,

$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{-1}}-\frac{1}{x+\sqrt{-1}}\right)$, onde se observa que aparecem números imaginários nos denominadores da decomposição. Então utilizando a regra $\int\frac{1}{x}dx=\ln x$, então as integrais $\int\frac{1}{x-\sqrt{-1}}dx$ e $\int\frac{1}{x+\sqrt{-1}}dx$, deixa claro o problema de logaritmos de números imaginários.

Partindo do fato que $\log(+1)=0$, então Bernoulli e d'Alembert havia propostos que:

$$0=\log 1=\log(-1)^2=2\log(-1).$$

Logo

$$\log(-1)=0.$$

Agora, $\log\sqrt{-1}=\log(-1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log(-1)=0$, ou seja, $\log\sqrt{-1}=0$.

Eles deduziam daí que *todo número negativo possui um logaritmo real* que é igual ao logaritmo de seu valor absoluto. Essa conclusão (que sabemos hoje *não ser verdadeira*) pode ser expressa por:

$$(-x)^2=x^2\Rightarrow\log(-x)^2=\log x^2\Rightarrow 2\log(-x)=2\log x\Rightarrow\log(-x)=\log x$$

Logo, um número e seu oposto devem possuir o mesmo logaritmo. Leibniz tinha enunciado a regra de que a derivada de $\log(x)$ é igual a $\frac{1}{x}$, mas afirmava que ela só era válida para valores reais positivos de x. Mas o gênio Euler mostrou que a regra da derivada era válida para qualquer valor de x, seja ele positivo, negativo ou imaginário, conforme Roque (2012). Segundo Boyer (2012), em 1728 Euler enviou uma carta para Bernoulli e diversas cartas para d'Alembert em 1747 e 1748 explicando que o logaritmo de números negativos não é real, conforme eles acreditavam, mas sim imaginário. Euler conhecia muito bem a fórmula $e^{i\pi} = \cos(\pi) + \mathrm{isen}(\pi)$, ou seja, $e^{i\pi} = -1$. Logo $\ln(-1) = \pi.i$, ele também definiu o logaritmo de um número complexo não nulo w como sendo um número complexo z, tal que $e^z = w$.

> Se $w = e^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{isen}(i\theta) = re^{i\theta}$ é a "forma polar" do número complexo w então, $w = e^{\ln r}(\cos(\theta) + \mathrm{isen}(i\theta)) = e^z$ onde $z = \ln r + i\theta$. Como o ângulo θ está definido a menos de um múltiplo inteiro de 2π, e como $r = |w|$, temos $\ln w = \ln|w| + i(2k\pi + \theta)$ onde k é inteiro (LIMA, 2012, P. 211).

Logo temos explicitamente que o logaritmo de um número complexo tem uma infinidade de valores, em particular tomando $w = -x$ para todo x real positivo concluímos que cada número negativo tem uma infinidade de logaritmos imaginários e todos diferentes. Então logaritmos de números negativos ou imaginários são sem exceção, imaginários.

2.3 Paradoxos Matemáticos em Aritmética.

Um paradoxo é uma proposição que, apesar de apresentar um raciocínio coerente, demonstra falta de nexo ou de lógica, escondendo condições decorrentes de uma análise incorreta de sua estrutura.

Quando se analisa apenas a teoria subjacente de certa operação matemática, há o perigo de se aplicar essa operação de maneira formal, cega e talvez ilógica. O executante da operação é levado a usá-la em exemplos nas quais ela não se aplica necessariamente. Os exemplos de paradoxos abaixo ilustram alguns absurdos que apareceram em aritmética elementar que efetuam certas operações sem dar contas de suas limitações.

Exemplo 2.3.1: Explique onde está o erro dos paradoxos abaixo.

a) Como $i = \sqrt{-1}$, então $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = i^2 = -1$. Daí

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1.$$

Logo,

$$1 = -1.$$

b) Temos sucessivamente que,

$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$, logo, $\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$, ou seja, $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$, ou ainda, $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{1}.\sqrt{1}$

Logo,

$$-1 = 1.$$

c) O paradoxo seguinte perturbou os matemáticos do tempo de Euler.

Se x é um número real positivo, então para o conjunto dos números reais temos,

$$(-x)^2 = x^2 \Rightarrow \ln(-x)^2 = \ln x^2 \Rightarrow 2\ln(-x) = 2\ln(x) \Rightarrow \ln(-x) = \ln(x).$$

Explicação:

Na letra a), o erro está em não analisar a definição de radiciação, pois $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$ e só está definido para $a, b \in \mathbb{R}^+$, ou seja, o erro está na passagem $\sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{-1}.\sqrt{-1}$. De modo análogo conclui-se b).

Já na letra c), o erro está na passagem, $2\ln(-x) = 2\ln(x) \Longrightarrow \ln(-x) = \ln(x)$, porque pela definição da função logarítmica, $\log_a: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\ln(x)$ só está definido quando x for um número real positivo.

Na sequência didática do nosso trabalho iremos, mostrar que essa igualdade contínua falsa para todo x real e diferente de zero. Iremos definir que o logaritmo de um número complexo z não nulo, no ramo $arg(z) \in [y_0, y_0 + 2\pi\,[$, é um número imaginário. Logo seja,

$$\ln z = \ln|z| + i.arg(z).$$

Então, $\ln(\mathrm{x}) = \ln|x| + i.arg(z)$ e $\ln(-\mathrm{x}) = \ln|-x| + i.arg(z)$, daí para qualquer x real positivo e ramo $[0, 2\pi\,[$ temos, $\ln(\mathrm{x}) = \ln|x| + i.0 = \ln x$ e $\ln(-\mathrm{x}) = \ln x + i.\pi$, logo $\ln(\mathrm{x}) \neq \ln(-\mathrm{x})$ para todo x real e diferente de zero.

3. PRÉ-REQUESITO

3.1 Funções Inversas

Antes de falarmos sobre função inversa, iremos primeiro definir função injetiva, sobrejetiva e bijetiva, pois, essas funções são pré-requisitos para definirmos funções inversas. Este capítulo está baseado em [3], [8], [10] e [11].

Definição 3.1.1: Uma função $f: X \to Y$ chama-se *injetora* (ou injetiva) quando para quaisquer $x, y \in X$, $f(x) = f(y)$, implica $x = y$. Em outras palavras: quando $x \neq y$ em X, implica $f(x) \neq f(y)$ em Y.

Definição 3.1.2: Uma função $f: X \to Y$ chama-se *sobrejetora* (ou sobrejetiva) quando para todo $y \in Y$ existe pelo menos um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Definição 3.1.3: Uma função $f: X \to Y$ chama-se *bijetora* (ou *bijetiva*) quando for sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.

Agora sim iremos definir função inversa,

Definição 3.1.4: Dizemos que a função $g: Y \to X$ é a inversa da função $f: X \to Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

Consequência da definição:

1. $gof(x) = I_X$ e $fog(x) = I_Y$;

2. A função g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g;

3. Quando g é inversa de f, tem-se $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y; \forall\, x \in X,$ e $y \in Y$.

Teorema 3.1.5: Uma função $f: X \to Y$ é bijetora se, e somente se, possui uma inversa $g: Y \to X$.

Na ida iremos demonstrar que se $f: X \to Y$ é uma função bijetora, então f possui uma função inversa $g: Y \to X$.

Com efeito, seja $y \in Y$ qualquer, notamos que sendo f sobrejetora, para todo $y \in Y$ existe algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Além disso, como f é injetora, este x é único. Pomos então $g(y) = x$. Assim $g: Y \to X$ é a função que associa a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. É imediato que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.

Agora na volta iremos demonstrar que se a função $f: X \to Y$ possui inversa, então ela é bijetora.

Por definição de funções inversas temos que se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então a função $f: X \to Y$ é injetora, pois, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ temos que se $f(x_1) = f(x_2)$, então $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, implica $x_1 = x_2$. Logo f é injetora.

Por sua vez a igualdade $f(g(y)) = y$, valendo para todo $y \in Y$, implica que f é sobrejetora, pois, dado $y \in Y$ arbitrário, tomamos $x = g(y) \in X$ e temos $f(x) = y$.

Observação 3.1.6: Quando $g: Y \to X$ é a função inversa de $f: X \to Y$, escreve-se $g = f^{-1}$. Mas essa notação não deve ser confundida com o inverso multiplicativo, ou seja,
$f^{-1} \neq 1/f(x)$.

Observação 3.1.7: Se uma função $f: X \to Y$ é injetora, a função f será invertível. Em outras palavras se restringirmos o contradomínio de uma função a sua imagem, então ela será invertível.

Exemplo 3.1.8: Sejam $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ e $g: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, definidas respectivamente por $f(x) = x^2$ e $g(y) = \sqrt{y}$. Mostre que a função g não poderá ser inversa de f.

Solução: Temos por definição de funções inversas que $f(g(y)) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$ para todo $y \geq 0$, mas $g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$, logo $g(f(x)) = x$ se $x \geq 0$. Se $x \in \mathbb{R}$ for negativo, então $g(f(x)) = -x$. Portanto g não é inversa de f.

Na realidade nenhuma função φ: $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ pode ser inversa de f porque f não é injetora.

Exemplo 3.1.9: Sejam $h: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ e $G: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, definida respectivamente por $h(x) = x^2$ e $G(y) = \sqrt{y}$. Mostre que a função G é função inversa de h.

Solução: Temos por definição de funções inversas que $h(G(y)) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$ para todo $y \geq 0$ e $G(h(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x$, pois $x \geq 0$. Portanto G é inversa de h.

Observação 3.1.10: A inversa de uma função crescente é crescente e a inversa de uma função decrescente é decrescente.

Antes de definirmos função exponencial, vamos tratar de potência e radiciação, pois, ambas são pré-requisitos para falarmos dessa função. Sendo que depois iremos falar sobre funções logarítmicas e para descrevermos os logaritmos como função, necessitamos antes apresentar outra função, esta função que estamos falando é a função exponencial. A ideia central é apresentar a função logarítmica como função inversa da função exponencial.

As seções que trata sobre funções exponenciais e funções logarítmicas respectivamente estão baseadas em Dante (2005), Lima (1996), Lima (2013) e Longen (2003).

3.2 Potenciações e Suas Propriedades

Definição 3.2.1: Seja a um número real positivo. Para todo inteiro $n > 0$, a potencia a^n, de base a e expoente n, definida como o produto de n fatores iguais a a. Ou seja,

$$a^n = a.a.\cdots a \text{ (n fatores).}$$

Da definição acima decorre a *propriedade fundamental*:

$$a^n.a^m = a^{n+m} \text{ (m, n inteiros positivos)}$$

O que se deve ao fato que em ambos os membros da igualdade temos o produto de $m+n$ fatores iguais a a.

O produto $a^0.a^n = a^n$ nos conduz à seguinte igualdade $a^0 = 1$. Esse é o único resultado possível que mantém válida a propriedade fundamental acima, segundo a qual $a^0.a^n = a^{0+n} = a^n$.

A extensão da noção de potência a expoentes negativos, de modo a manter válida a propriedade fundamental, nos conduz à:

$$a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

Consequentemente,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Observe que $a.a^{-1} = a.\frac{1}{a} = 1$, ou seja, $a.a^{-1} = 1$, com $a \neq 0$. Assim, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ é chamado *inverso de* a. A relação fundamental se verifica também para o produto de várias potências. Desse modo, por exemplo,

$$a^m.a^n.a^p.a^q = a^{m+n+p+q}.$$

No caso de todos esses expoentes serem iguais $(m_1 = m_2 = \cdots = m_p = m)$. Temos,

$$a^{m_1}.a^{m_2}.\cdots.a^{m_p} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_p} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{p\ parcelas}} = a^{mp}.$$

Ou seja,

$$(a^m)^p = a^{mp}.$$

Para $a \neq 0$, é possível também estabelecer o quociente entre potência de mesma base a. Observe que,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m.\frac{1}{a^n} = a^m.a^{-n} = a^{m-n};\ \forall\, n, m \in \mathbb{Z}.$$

Logo, para $a \neq 0$,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Estendendo a noção de potência de um número real positivo a expoente fracionário, temos a seguinte definição:

Definição 3.2.2: Dado um número real $a > 0$, chama-se *potência de expoente racional*, da forma $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}_*$, de base a a potência denotada por $a^{p/q}$, que satisfaz:

$$(a^r)^q = \left(a^{p/q}\right)^q = a^{p/q}.a^{p/q}.\cdots.a^{p/q} = a^{p/q+p/q+\cdots+p/q} = a^{\frac{p}{q}.q} = a^p.$$

Proposição 3.2.3: Dado um número real $a > 0$, e $r, s \in \mathbb{Q}$, mantém-se válida a propriedade fundamental $a^r.a^s = a^{r+s}$.

Demonstração: Sejam os números racionais $r = p/q$ e $s = u/v$, onde $p, u \in \mathbb{Z}$ e $q, v \in \mathbb{N}$. Sabemos que $(a^r)^q = a^p$ e $(a^s)^v = a^u$. Assim,

$$(a^r.a^s)^{q.v} = \underbrace{(a^r.a^s).(a^r.a^s).\cdots.(a^r.a^s)}_{q.v\ fatores},$$

$$(a^r.a^s)^{q.v} = \underbrace{(a^r.a^r.\cdots.a^r)}_{q.v\ fatres}.\underbrace{(a^s.a^s.\cdots.a^s)}_{q.v\ fatres},$$

$$(a^r.a^s)^{q.v} = (a^r)^{q.v}.(a^s)^{q.v},$$

$$(a^r.a^s)^{q.v} = a^{p.v}.a^{q.v},$$

$$(a^r.a^s)^{q.v} = a^{p.v+q.u}.$$

Segue que,

$$a^r.a^s = a^{\frac{p.v+q.u}{q.v}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{u}{v}} = a^{r+s}.$$

Como queríamos demonstrar.

■

Proposição 3.2.4: Dado os números reais $a, b > 0$ e n natural, vale a igualdade $a^n.b^n = (a.b)^n$.

Demonstração: Pela definição de potência, podemos escrever,

$$a^n.b^n = \underbrace{a.a.\cdots a}_{n\ fatores}.\underbrace{b.b.\cdots b}_{n\ fatores} = \underbrace{(a.b).(a.b).\cdots.(a.b)}_{n\ fatores} = (a.b)^n$$

■

Proposição 3.2.5: Dado os números reais $a, b > 0$ e r um número *racional*, da forma $r = p/q$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, vale a igualdade $a^r.b^r = (a.b)^r$.

A demonstração desta proposição ficará a cargo do leitor.

Observação 3.2.6: A propriedade fundamental $a^n.a^m = a^{n+m}$ é válida para todo número real m e n.

Como o conjunto dos números, irracionais é denso em $\mathbb{R}$ todo número irracional, por exemplo, $\sqrt{2}$ pode ser aproximado por um número racional. Então $\sqrt{2}$, pode ser aproximado pelos racionais $1,4; 1{,}41; 1{,}4142$. Assim, $5^{1,4}$; $5^{1,41}$; $5^{1,4142}$ se aproxima de $5^{\sqrt{2}}$. Desta forma quanto mais próximo o número k estiver de $\sqrt{2}$, mais próximo estará o número 5^k de $5^{\sqrt{2}}$. Com isto, podemos estender o conceito de expoente irracional. Logo a propriedade $a^n . a^m = a^{n+m}$ vale para todo m, n real.

3.3 Radiciação e Suas Propriedades.

Definição 3.3.1: Dados um número real a não negativo e um número natural $n > 1$, chama-se *raiz n-ésima* (aritmética) de a o número real e *não negativo* b tal que $b^n = a$. Em símbolos temos,

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

No radical $\sqrt[n]{a}$ o número n é chamado de *índice do radical* e o número a é chamado de *radicando*.

Em particular, se $a < 0$, e n é par, então $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$.

Observação 3.3.2: Seja $r = p/q$ um número racional, então $a^{p/q}$ deve ser o número real positivo cuja *q-ésima* potência é igual a a^p. Por definição de raiz, isso significa afirmar que $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$. Em particular, $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$.

Considerando a e b reais não negativos, m inteiro n e p naturais, temos as seguintes propriedades:

(I). Raiz de um produto é igual ao produto dos fatores.

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

Demonstração. $\sqrt[n]{a.b} = (a.b)^{1/n} = a^{1/n}.b^{1/n} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$.

■

Essa propriedade pode ser generalizada para uma quantidade finita arbitrária (≥ 2) de fatores que constituem o radicando.

(II). $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Em outras palavras: a raiz do quociente $\frac{a}{b}$, com $a \geq 0$ e $b > 0$. É igual ao quociente das raízes a e b.

Demonstração. Para $a \geq 0$ e $b > 0$, temos

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

■

(III). $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)$. Em outras palavras: a potência de uma raiz é obtida elevando-se o radicando ao referido expoente.

Demonstração:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right).$$

■

(IV). $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$ e $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div p]{a^{m \div p}}$. Em outras palavras: podemos alterar o índice de uma raiz, sem alterar o seu valor numérico, multiplicando ou dividindo o expoente e o índice pelo mesmo número inteiro e positivo (no caso da divisão, exige-se que p seja um divisor de n para assegurar que o índice seja um número natural maior do que um).

Demonstração:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p.m}{p.n}} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}.$$

De modo análogo conclui-se que:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div p]{a^{m \div p}}.$$

■

(V). $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p.n]{a^m}$. Em outras palavras: podemos calcular a raiz de um radical duplo multiplicando os índices das raízes e mantendo o radicando.

Demonstração: Considere o número natural positivo p podemos afirmar que:

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{1/p} = a^{\frac{m}{n}.\frac{1}{p}} = a^{\frac{m}{n.p}} = \sqrt[p.n]{a^m}.$$

3.4 Função Exponencial

Nessa seção faremos uma "construção" da função exponencial, partindo de três propriedades básicas. Sendo assim definirmos.

Definição 3.4.1: Seja a um número real positivo e diferente de 1. Chamaremos de função exponencial de base a, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ expressa pela notação $y = f(x) = a^x$, será definida de modo que satisfaça as seguintes propriedades:

I. $f(1) = a$;

II. Para $x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x).f(y)$;

III. $\begin{cases} x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \; quando \; a > 1, \\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \; quando \; 0 < a < 1. \end{cases}$

É interessante observar que se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem a propriedade II), isto é, $f(x).f(y) = a^x.a^y = a^{x+y} = f(x+y)$, então f não pode assumir o valor igual a zero, exceto se a função for identicamente nula. Como demonstração adote que existe um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos,

$$f(x) = f(x + x_0 - x_0) = f(x_0).f(x - x_0) = 0.f(x - x_0) = 0.$$

Logo, f será identicamente nula.

Se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tiver a propriedade II) e não é identicamente nula, então ela será positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, pois,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Lema 3.4.2: Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}_*^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.

O leitor curioso pode encontrar o lema 3.4.2, demonstrado em Lima (2013). Vamos agora mostrar que $f(x) = a^x$ é válida para todo x real.

Se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$, tem as propriedades I), II), então para todo $x \in \mathbb{Q}$, tem-se que $f(x) = a^x$. Já a propriedade III) nos garante que existe uma única maneira de definir $f(x) = a^x$ quando x é irracional e o lema 3.4.2, garante que podemos encontrar este número x, aproximando o quanto quisermos de dois números racionais a direita e a esquerda de x. Logo a função $f(x) = a^x$ é válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Veja,

Sem perda de generalidade vamos supor $a > 1$, assim supondo $r, s \in \mathbb{Q}$ temos:

$$r < x < s \Rightarrow f(r) < f(x) < f(s) \Rightarrow a^r < f(x) < a^s.$$

Assim concluímos que $f(x)$ é um número cujas aproximações por excesso são a^s e as aproximações por falta são a^r. Ora, não existem dois números diferentes com essas propriedades, pois caso existissem dois números, R, S (com $R < S$), com essas propriedades o intervalo $[R, S]$ não conteria nenhuma potência racional de a, contrariando o lema 3.4.2.

Portanto, quando x é irracional, a^x é o (único) número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, com r racional menor que x e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, com s racional maior que x.

Logo $f(x) = a^x$ está definido para todo $x \in \mathbb{R}$. Não há dificuldade para verificar que são válidas as propriedades I), II) e III) acima enunciadas. Além disso, tem-se ainda.

IV. A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

V. A função exponencial é contínua.

VI. A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$, $f(x) = a^x, a \neq 1$, é sobrejetiva.

Demonstração da propriedade IV): Com efeito, todo intervalo em $\mathbb{R}_*^+$ contém valores $f(r) = a^r$ segundo o lema 3.4.2.

Mais precisamente: se $a > 1$ então a^x cresce sem limites quando $x > 0$ é muito grande. E se $0 < a < 1$ então a^x torna-se arbitrariamente grande quando $x < 0$ tem valor absolutamente grande.

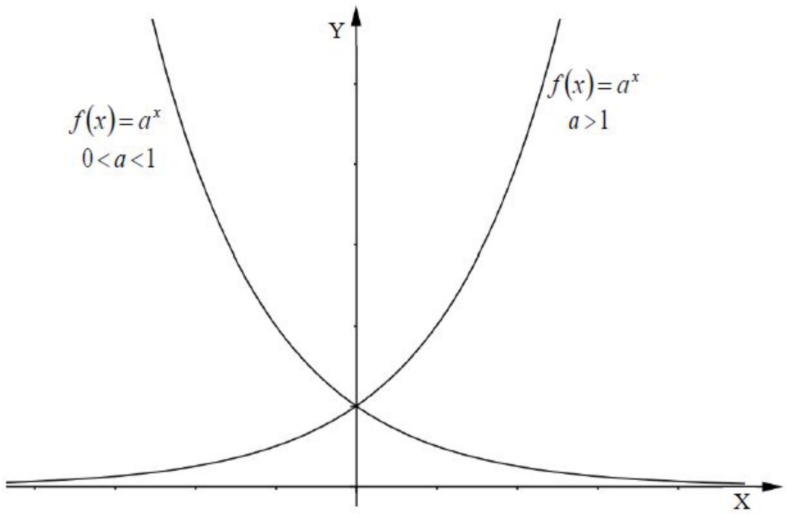
As propriedade V) e VI) estão demonstradas em (LIMA, 2013, P.181).

A função exponencial é injetiva, devido a sua monotonicidade. Como por exemplo, se $a > 1$, por exemplo, então:

$x > y \Longrightarrow a^x > a^y$ e $x < y \Longrightarrow a^x < a^y$, logo $x \neq y$, implica $a^x \neq a^y$, ou seja, a função exponencial é injetiva quando $a > 1$. De modo análogo conclui-se que a função também é injetiva quando $0 < a < 1$.

A figura a seguir apresenta o gráfico da função $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Figura 4 – Gráfico da função exponencial quando $a > 1$ e $0 < a < 1$.



Fonte: Lima (2013), p.183.

Vamos agora vê dois teoremas que caracterizam as funções exponenciais.

Teorema 3.4.3 (CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL). Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
3. $f(x + y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.4.4 (CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE TIPO EXPONENCIAL). Seja $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ uma função monótona injetora (isto é, crescente ou decrescente) tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, o acréscimo relativo $[g(x-h) - g(x)]/g(x)$ depende apenas de h, mas não depende de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A demonstração dos dois teoremas acima, sobre caracterização da função exponencial, encontra-se em LIMA (2013).

3.5 Função Logarítmica

3.5.1 Logaritmo definido como inverso da potência

Conhecendo algumas propriedades exponenciais para números reais, fica fácil caracterizar o que é logaritmo. A ideia é bem simples, podemos definir logaritmo usando exponencial, veja definição abaixo.

Definição 3.5.1.1: Sejam a e b dois números reais positivos, com $a \neq 1$, denomina-se logaritmo de "b" na base "a" o expoente x ao qual de deve elevar a base "a" para resultar o número "b", ou seja, $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.

De uma maneira bem simples, escrever $\log_a b = x$ é o mesmo que perguntar qual é o valor numérico do expoente x da equação $a^x = b$.

Consequências da definição:

a) $\log_a 1 = 0$

De fato, se $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$;

b) $\log_a a = 1$

De fato, se $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$;

c) $a^{\log_a b} = b$

Para justificar tal propriedade temos que $\log_a b = x \Longrightarrow a^x = b$, então;

$$a^{\log_a b} = a^x = b$$

d) $\log_a b = \log_a c \Longrightarrow b = c$

Se $\log_a b = \log_a c$, então $b = a^{\log_a b} = a^{\log_a c} = c$.

Propriedades operatórias

Vamos agora apresentar quatro propriedades operatórias dos logaritmos que têm grande importância neste estudo, são elas:

a) Logaritmo de um produto:

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c.$$

b) Logaritmo de um quociente:

$$\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c.$$

c) Logaritmo de uma potência

$$\log_a b^r = r.\log_a b\,;\ r \in \mathbb{R}.$$

d) Mudança de base, $\log_a b = \log_c b / \log_c a$.

Esta última propriedade se chama mudança de base, a demonstração da sua validade é consequência da propriedade fundamental, ou seja;

$$\log_a b = x \Longrightarrow a^x = b,\ \log_c b = y \Longrightarrow c^y = b \text{ e } \log_c a = z \Longrightarrow c^z = a, \text{ então;}$$

$$a^x = b \Longrightarrow (c^z)^x = c^y \Longrightarrow c^{zx} = c^y \Longrightarrow y = z.x \Longrightarrow x = y/z.$$

Portanto concluímos que $\log_a b = \log_c b / \log_c a$.

As propriedades operatórias: de um produto, de um quociente e de uma potência está demonstrado em Dante (2005).

3.5.2 Função logarítmica definido na base a

Para descrevermos os logaritmos como função, necessitamos antes de apresentar outra função, a exponencial. A ideia central é apresentar a função logarítmica como função inversa da função exponencial.

Para todo número real positivo $a \neq 1$, temos que a função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$, $f(x) = a^x$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_*^+$, crescente se a > 1 e decrescente se $0 <$ a < 1, com a propriedade adicional $f(x+y) = f(x).f(y)$.

Segue que a inversa da função exponencial de base "a" é a função

$$\log_a\colon \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}.$$

que associa a cada número real positivo x o número real $y = \log_a x$, denominado *logaritmo de x na base* a. Por definição de função inversa, tem-se:

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Portanto, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x, isto é,

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Da relação $a^u.a^v = a^{u+v}$, segue imediatamente que;

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y.$$

Para quaisquer x, y positivos. De fato, se $u = \log_a x$ e $v = \log_a y$, então $a^u = x$ e $a^v = y$, logo,

$$x.y = a^u.a^v = a^{u+v}.$$

Ou seja,

$$\log_a(x.y) = \log_a(a)^{u+v} = u + v = \log_a x + \log_a y.$$

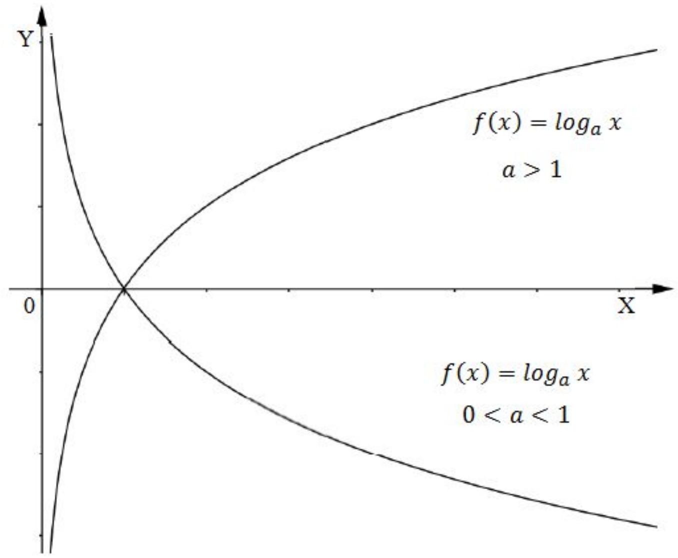
Esta propriedade de transformar produto em soma foi à motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século XVII e de sua popularidade, conforme foi visto no capitulo 2.

Consequentemente, todas as propriedades operatórias logarítmicas apresentadas na seção anterior, também tem validade para as funções logarítmicas.

A função logarítmica $\log_a: \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ é crescente quando $a > 1$ e como $a^0 = 1$, segue que para os números compreendidos entre 0 e 1 tem logaritmo negativo e para os números maiores que 1 o logaritmo é positivo. Ao contrário, para $0 < a < 1$ temos que a função é decrescente de modo que $\log_a x$ é negativo quando $x > 1$ e positivo quando $0 < x < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se $\log_a 1 = 0$.

Como $\log_a: \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca, portanto sobrejetora, segue-se que $y = \log_a x$ é uma função ilimitada, tanto superiormente quanto inferiormente. A figura a seguir mostra os gráficos da função $f(x) = log_a x$ com $a > 1$ e quando $0 < a < 1$.

Figura 5 – Representação gráfica da função logarítmica quando $a > 1$ e $0 < a < 1$.



Fonte: autor, 2016.

As funções logarítmicas mais utilizadas são aquelas de base $a > 1$, especialmente as de base 10 (logaritmos *decimais*), base 2 (logaritmo *binários*) e base e (logaritmos *naturais*, às vezes impropriamente chamados *neperianos*). Esta última base será de grande importância para nosso trabalho, pois, iremos definir logaritmo de um número imaginário na base e.

É importante destacar que a função exponencial $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$, $f(x) = a^x, a \neq 1$ é sempre positivo para $x \in \mathbb{R}$, logo sua inversa, função logarítmica, só terá sentido para números reais positivos, ou seja, somente números positivos possuem logaritmo real. Nosso trabalho trata justamente desse tema, pois, alguns alunos terminam o ensino médio sem saber realmente se existe ou não logaritmos de números reais negativos. Na proposta didática desenvolvida para ser aplicada para os alunos do terceiro ano do ensino médio, os discentes irão aprender que existe sim logaritmos de números reais negativos, só que o conjunto solução não vai mais está contido no conjunto dos números reais, mas sim no conjunto dos números complexos. Além disso, eles também irão ver que a função exponencial definida no conjunto dos complexos pode sim ter solução negativa, como por exemplo, temos a equação de Euler: $e^{i\pi} = -1$, contrariando a função exponencial $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$, $f(x) = a^x, a \neq 1$ que só pode ser positiva.

3.5.3 Caracterização das funções logarítmicas

O teorema a seguir garante que, entre as funções monótonas injetivas $\mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$, somente as funções logarítmicas têm a propriedade de transformar produto em soma.

Teorema 3.5.3.1: Seja $f: \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(x.y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}_*^+$.

Esse teorema que caracteriza a função logarítmica pode ser encontrado demonstrado em Lima (2013).

3.5.4 Logaritmos naturais definido de forma geométrica

Mostraremos agora como os logaritmos podem ser apresentados de forma geométrica, usando para isso o teorema da caracterização citado na seção anterior.

Começaremos pelo estudo de uma transformação geométrica bastante simples, que se revela útil para os nossos propósitos.

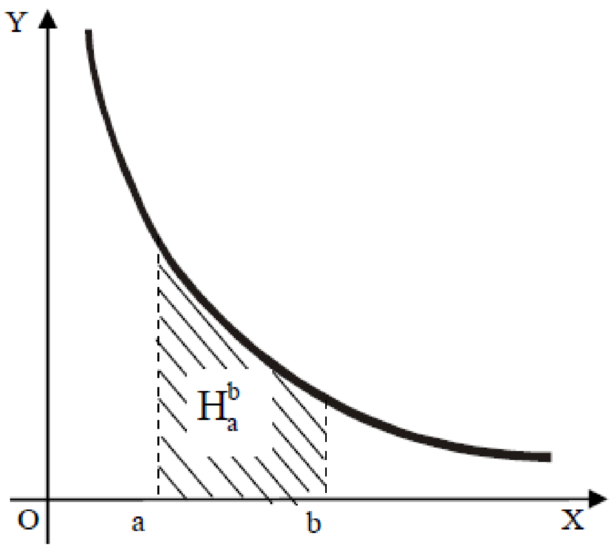
Para cada número real $k > 0$, definirmos a transformação (= função) $T = T_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o ponto $T(x, y) = (kx, ky)$, obtido de (x, y) multiplicando a abscissa por k e dividindo a ordenada pelo mesmo k.

Um retângulo X de lados paralelos aos eixos, com base medindo b e altura medindo a, é transformado por T num retângulo $X' = T(X)$, ainda com lados paralelos aos eixos, porém com base $k.b$ e altura a/x. Portanto, X e seu transformado $X' = T(X)$, têm áreas iguais. Mas geralmente, T transforma toda figura F do plano numa figura $F' = T(F)$, cujas dimensões em relação a F são alteradas pelo fator k na horizontal e $1/k$ na vertical. Logo F e F' têm a mesma área.

Interessa-nos em particular o efeito da transformação T nas faixas de hipérboles.

Seja $H = \{(x, 1/x);\ x > 0\}$ o ramo positivo da hipérbole equilátera $x.y = 1$, H é o gráfico da função $h: \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$, $h(x) = 1/x$. Dados $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, o conjunto H_a^b dos pontos (x, y) do plano, tais que x está entre a e b e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ chama-se uma faixa de hipérbole. H_a^b é o conjunto do plano limitado lateralmente pelas verticais $x = a$ e $x = b$, ao sul pelo eixo das abscissas e ao norte pela hipérbole H. Veja a figura 6,

Figura 6 – Área da faixa H_a^b.

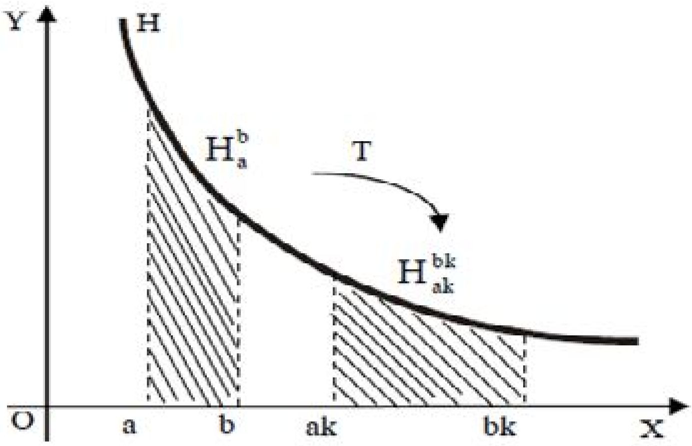


Fonte: Lima (2013), p. 198

A transformação $T = T_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva a faixa H_a^b na faixa H_{ka}^{kb}.

Como T preserva área, segue-se que, para todo $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ka}^{kb} têm a mesma área.

Figura 7 – As faixas H_a^b e H_{ka}^{kb} têm a mesma área.



Fonte: Lima (2013), p.199.

Normalmente, a área de uma figura não é um número negativo. Mas ás vezes é conveniente usar "áreas orientadas", ou seja, providas de sinal + ou –. É o que faremos agora.

Convencionaremos que a área da faixa de hipérbole H_a^b será positiva quando $a < b$, negativa quando $b < a$ e zero quando $a = b$.

Para deixar mais claro esta convenção, escreveremos ÁREA H_a^b, com letras maiúsculas, para indicar a área orientada (provida de sinal). A área usual, com valores positivos, será escrita como área H_a^b. Assim temos:

ÁREA $H_a^b = \acute{a}rea\ H_a^b > 0$ se $a < b$;

ÁREA $H_a^b = -\acute{a}rea\ H_a^b < 0$ se $b < a$;

ÁREA $H_a^a = \acute{a}rea\ H_a^a = 0$ se $a = b$.

É óbvio que, quando $a < b < c$, tem-se: $\acute{a}rea\ H_a^b + \acute{a}rea\ H_b^c = \acute{a}rea\ H_a^c$. Uma consequência da adoção de áreas orientadas é que se tem ÁREA $H_a^b = -$ÁREA H_b^a.

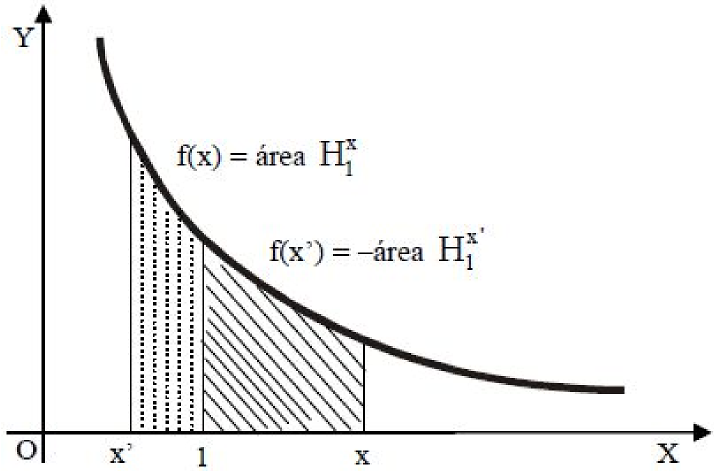
Daí segue que vale a igualdade ÁREA $H_a^b +$ ÁREA $H_b^c =$ ÁREA H_a^c.

Em quaisquer dos seis casos $a \leq b \leq c$, $a \leq c \leq b$, $b \leq a \leq c$, $b \leq c \leq a$, $c \leq a \leq b$ e $c \leq b \leq a$. A igualdade acima é fácil de provar. Basta ter paciência de considerar separadamente cada uma destas seis possibilidades.

Definamos uma função $f: \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ pondo, para cada número real $x > 0$, então

$$f(x) = \text{ÁREA } H_1^x$$

Figura 8 – Orientações de $\boldsymbol{f(x) = \acute{a}rea\ H_1^x}$ e $\boldsymbol{f(x') = -\acute{a}rea\ H_1^{x'}}$.



Fonte: Lima (2013), p.200.

$f(x)$ = área da região hachurada

$f(x')$ = área da região pontilhada.

Resultam imediatamente da definição as seguintes propriedades:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0;$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1;$$

$$f(1) = 0;$$

$$f \text{ é crescente.}$$

Além disso, observamos que, para $x, y \in \mathbb{R}_*^+$ quaisquer:

$$f(x.y) = \text{ÁREA } H_1^{xy} = \text{ÁREA } H_1^x + \text{ÁREA } H_x^{xy}.$$

Mas, como vimos pela transformação $T = T_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que leva a faixa H_a^b na faixa H_{ka}^{kb}, temos ÁREA H_x^{xy} = ÁREA H_1^y, assim:

$$\text{ÁREA } H_1^{xy} = \text{ÁREA } H_1^x + \text{ÁREA } H_1^y.$$

Logo

$$f(x.y) = f(x) + f(y).$$

Pelo teorema de caracterização das funções logarítmicas, existe um número real positivo, que chamaremos de e, tal que $f(x) = \log_e x$ para todo $x \in \mathbb{R}_*^+$.

Escreveremos $\ln(x)$ em vez de $\log_e x$ e chamaremos o número $\ln(x)$ de logaritmo natural de x, conforme já definirmos anteriormente.

Definição 3.5.4.1: A função $f: \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) =$ ÁREA H_1^x chamada de logaritmo *natural* de x, sendo $f(x) = \ln(x)$.

A função logarítmica natural terá todas as propriedades de uma função logarítmica, visto que, é monótona crescente (para todo $x > x'$, com $x, x' \in \mathbb{R}_*^+$, assim temos, ÁREA $H_1^x >$ ÁREA $H_1^{x'}$ e satisfaz a propriedade geral dos logaritmos descrita na seção anterior como restrita a funções deste tipo.

O número e, base dos logaritmos naturais, é caracterizado pelo fato de que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja, ÁREA $H_1^e = 1$.

O número e é irracional. Um valor aproximado dessa importante constante é $e = 2,718281828459$. Este número vai ser de extrema importância para nossos estudos, pois, foi com a equação $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$ e mais algumas propriedades de função exponencial e trigonométrica que Euler conseguiu resolver a controvérsia entre dois matemáticos (Leibniz e Johann Bernoulli), sobre o logaritmo de números reais negativos.

Os logaritmos naturais, de base e, são os mais importantes nas aplicações, especialmente aquelas que envolvem o uso do Cálculo Infinitesimal.

3.6 Números Complexos

Esta seção está baseada em: Ávila (2011), Gentil (2000), Hefez (2012), Iezzi (2013) e Soares (2012).

3.6.1 Introdução

Em 1545, Jerônimo Cardano (1501-1576), em seu livro "Ars Mag-na" (A grande arte), mostrou o método para resolver equações do terceiro grau que é hoje chamada de Fórmula de Cardano. Bombelli (1526-1572), discípulo de Cardano, em sua "Álgebra", aplicou a fórmula de Cardano à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ obtendo,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Embora não se sentisse completamente à vontade em relação às raízes quadradas de números negativos (dizia que eram inúteis e sofísticas), Bombelli operava livremente com elas, aplicando-se as regras usuais da Álgebra.

No caso, Bombelli mostrou que,

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{-1} + 3.2.\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3,$$

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1},$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1},$$

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}.$$

Analogamente temos que,

$$\left(2-\sqrt{-1}\right)^3 = 2 - \sqrt{-121}.$$

Portanto, o valor de x é $x = 2 - \sqrt{-121} + 2 + \sqrt{-121} = 4$. Como 4 é realmente raiz da equação, a partir de Bombelli os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos, embora se sentissem um pouco desconfortáveis com isso. Bombelli trabalhava sistematicamente com a quantidade $\sqrt{-1}$, que hoje chamamos de unidade imaginária e representamos por i. Apenas no século XIX, quando Gauss (1787-1855), o grande matemático da época e um dos maiores de todos os tempos, divulga a representação geométrica dos números complexos é que essa sensação de desconforto desaparece.

Exemplo 3.6.1.1: A equação $x^2 - 4x + 5 = 0$, tem como solução $x' = 2 + i$ ou $x'' = 2 - i$.

3.6.2 Conjunto dos números complexos

Chama-se conjunto dos números complexos, e representa-se por $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a adição, a multiplicação e a igualdade.

Seja $\mathbb{R}$ conjunto dos números reais e definirmos $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$, com isto, estamos dizendo que $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) onde x e y são números reais.

Dados dois elementos (a, b) e $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, apresentamos as seguintes definições:

i. Igualdade:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \; e \; b = d.$$

ii. Adição:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

iii. Multiplicação:

$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

É comum representar cada elemento (x, y) como o símbolo z, portanto

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y), \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

Denotamos os números imaginários $(0,0)$ e $(1,0)$ respectivamente por 0 e 1.

Teorema 3.6.2.1: (Propriedades da adição). Para quaisquer z, v e $w \in \mathbb{C}$, onde $z = (x, y)$, $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$, a operação de adição definida em $\mathbb{C}$, atende as seguintes propriedades:

A.1 **Propriedade associativa**

$$z + (v + w) = (z + v) + w.$$

A.2 **Propriedade comutativa**

$$z + v = v + z.$$

A.3 **Propriedade do elemento neutro**

$$z + 0 = z.$$

A.4 **Existência do elemento simétrico**

$$z + (-z) = 0.$$

Iremos demonstrar a propriedade do elemento neutro (A.3). As propriedades da comutatividade, existência do elemento simétrico e da associatividade está demonstrado em Iezzi (2013).

A.3 **Propriedade do elemento neutro**

Sejam z e v dois números imaginários tal que $z + v = z$. Substituindo estes números por coordenadas temos:

$$z + v = z,$$

$$(x, y) + (a, b) = (x, y),$$

$$(x + a, y + b) = (x, y).$$

Logo utilizando a propriedade de igualdade temos que:

$$\begin{cases} x + a = x \Rightarrow a = 0 \\ y + b = y \Rightarrow b = 0. \end{cases}$$

Como $v = (a, b) = (0,0) = 0$, portanto existe $(0,0)$, chamado elemento neutro para a adição, que somado a qualquer número complexo z dá como resultado o próprio z, isto é:

$$z + 0 = z.$$

Teorema 3.6.2.2: (Propriedades da multiplicação). Para quaisquer z, v e $w \in \mathbb{C}$, onde $z = (x, y)$, $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$, a operação de multiplicação definida em $\mathbb{C}$, atende as seguintes propriedades:

M.1 **Propriedade associativa**

$$(z.v).w = z.(v.w).$$

M.2 **Propriedade comutativa**

$$z.v = v.z.$$

M.3 **Propriedade do elemento neutro**

$$z.1 = z.$$

M.4 **Existência do elemento inverso**

$$z.z^{-1} = 1.$$

M.5 **Propriedade distributiva.**

$$z.(v + w) = z.v + z.w.$$

Iremos demonstrar as propriedades M.5 (propriedade distributiva). As demais estão demonstradas em Iezzi (2013).

Demonstração.

M.5 **Propriedade distributiva.**

Considere os números complexos $z = (x, y)$,$v = (a, b)$ e $w = (c, d)$ logo temos:

$$z.(v + w) = (x, y).[(a, b) + (c, d)] = (x, y).(a + c, b + d),$$

$$z.(v + w) = [x(a + c) - y(b + d), x(b + d) + y(a + c)].$$

Usando a distributividade dos números reais, temos que a última expressão é igual a:

$$z.(v + w) = [(xa + xc - yb - yd, xb + xd + ya + yc)].$$

Aplicando a associatividade dos números reais, segue:

$$z.(v + w) = \big[\big((xa - yb) + (xc - yd), (xb + ya) + (xd + yc)\big)\big],$$

$$z.(v + w) = (xa - yb, xb + ya) + (xc - yd, xd + yc),$$

$$z.(v + w) = (x, y).(a, b) + (x, y).(c, d).$$

Logo

$$z.(v + w) = z.v + z.w.$$

Observação 3.6.2.1. Todas as propriedades acima decorrem diretamente da definição de igualdade e das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$.

Após definir as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, definiremos as operações de subtração e divisão de maneira usual.

Dados $z, v \in \mathbb{C}$, podemos escrever:

$$z - v = z + (-v) \text{ e } \frac{z}{v} = z.v^{-1}, \text{ com } v \neq 0$$

Além disso, a potenciação também é definida de maneira usual:

$$z^0 = (x, y)^0 = 1 = (1,0),$$

$$z^n = z.z.z.\cdots.z \; se \; z \neq 0 \text{ e } n \text{ é um número natural } (n \geq 1).$$

Decorre das propriedades da adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, que diversas propriedades das operações aritméticas de números reais são válidas para números complexos. Por exemplo, a soma e o produto de duas frações de números complexos podem ser obtidos pelas fórmulas:

$$\frac{z}{v}+\frac{w}{t}=\frac{zt+vw}{vt},$$

$$\frac{z}{v}\times\frac{w}{t}=\frac{zw}{vt}.$$

Exatamente como ocorre no caso real.

3.6.3 Forma algébrica

Vamos representar o número imaginário $(x, 0)$, simplesmente por x. Note que isso está de acordo com o que já fizemos com o elemento neutro $(0,0) = 0$ e $(1,0) = 1$ de adição (A.3) e multiplicação (M.3), respectivamente.

Desta forma, dizemos que em $\mathbb{C}$ existe um subconjunto $A = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ que possuem todas as característica de $\mathbb{R}$.

Note que:

$$(0,1)^2 = (0,1).(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0), \text{ isto é,}$$

$$(0,1)^2 = (-1,0) = -1.$$

Daí o número -1 possui uma "*raiz quadrada*" em $\mathbb{C}$. O número imaginário $(0,1)$ é chamado *unidade imaginária* e denotada por i.

Assim, temos a propriedade básica do algarismo imaginário:

$$i^2 = -1$$

Finalmente, dado um número complexo qualquer $z = (x, y)$, temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0,1), \text{ isto é,}$$

$$z = (x, 0) + (y, 0)(0,1).$$

Logo

$$z = x + yi.$$

A expressão $z = x + yi$ é chamada ***forma algébrica*** do número complexo z.

Assim um número imaginário $z = (x, y)$ pode ser escrito sob a forma $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. O número real x é chamado *parte real* de z e y é chamado *parte imaginária* de z. Em símbolos indica-se:

$$x = Re(z) \text{ e } y = Im(z).$$

É chamado *real puro* todo número complexo na forma $z = x + 0i = x$ e *imaginário puro* todo número complexo na forma $z = 0 + yi = yi$ para qualquer $y \neq 0$.

Observação 3.6.3.1. É mais prático e intuitivo a forma algébrica $z = x + yi$ que o par ordenado $z = (x, y)$ na representação dos números imaginários, pois ela facilita as operações.

Vejamos como ficam definidas a igualdade, adição, e multiplicação na forma algébrica. Dados os números imaginários $z = a + bi$ e $v = c + di$, temos a:

- **Igualdade**

Se $z = v$, então $a + bi = c + di$, ou seja:

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ c = d. \end{cases}$$

- **Adição:**

$$z + v = (a + c) + (b + d)i.$$

- **Multiplicação:**

$$z.v = ac - bd + (ad + bc)i.$$

3.6.4 Potencia de i

Analisemos como se comporta as potências de i. Temos que $i^0 = 1$; $i^1 = i$; $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$.

Nota-se que estas potências se repetem em ciclos de 4. Segue que podemos estabelecer uma regra para calcular a potência de i. Seja i^n, onde n é um número natural, divida n por 4, se r é o resto dessa divisão, logo $i^n = i^r$, pois se q é o quociente da divisão, então:

$$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q . i^r, \text{ isto é,}$$

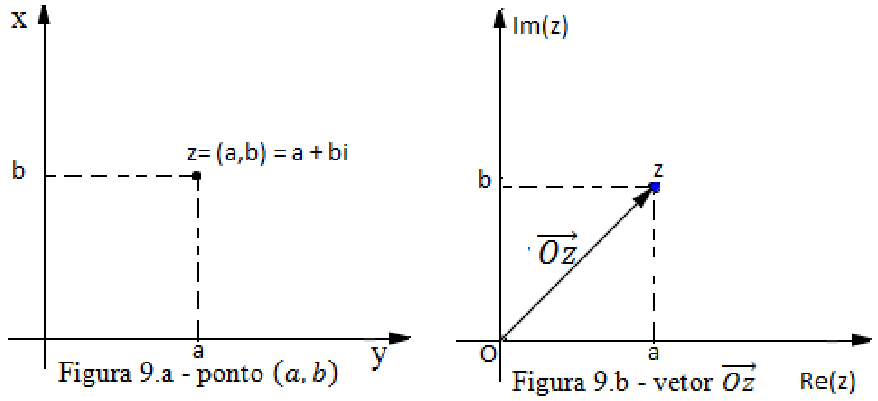
$$i^n = (1)^q . i^r, \text{ ou seja,}$$

$$i^n = i^r.$$

3.6.5 Forma geométrica de um número complexo

Conforme definição da forma algébrica para número imaginário, podemos pensar no número $z = a + bi$ como o ponto (a, b) do plano cujas coordenadas são a e b, veja figura 9, abaixo.

Figura 9 – Representação do número complexo por pontos do plano e por vetor.



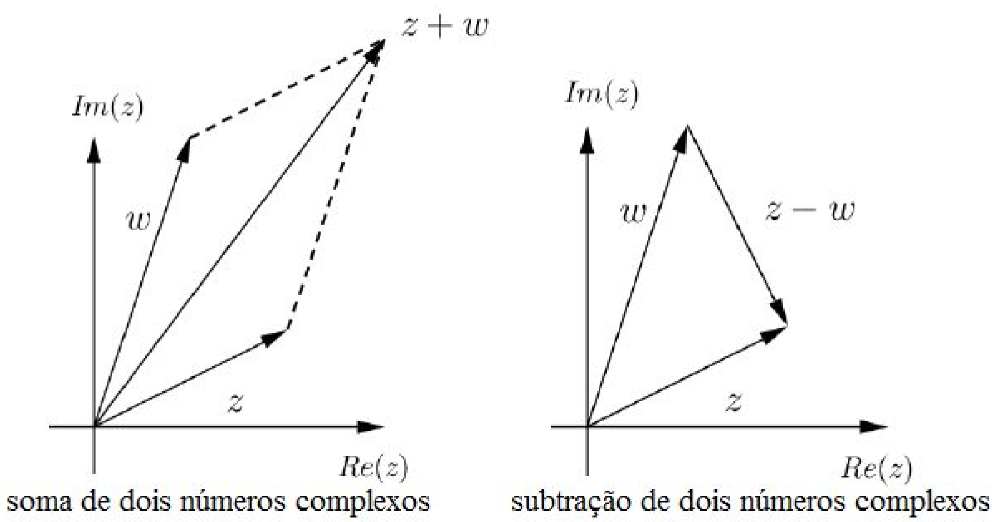
Fonte: autor, 2016.

Na figura 9.a, temos a forma geométrica do número complexo $z = (a, b) = a + bi$, já na figura 9.b, temos a representação do número complexo z na forma de vetor.

O ponto (a, b) é chamado de afixo do número imaginário z, ou ainda como vetor de origem na origem O do sistema de coordenadas e extremidade (a, b), isto é, o número imaginário z é representado pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$, veja figura 9.b.

O plano em que representamos os complexos é chamado como Plano Argand-Gauss, em homenagem a Jean Robert Argand que primeiro sugeriu em um livreto publicado em Paris no ano de 1806, ignorado até que Gauss propusesse quase a mesma ideia em 1831. Como o número imaginário $z = a + bi$ é o par ordenado (a, b), então vejamos as interpretações geométricas da adição e da subtração de números complexos na figura a seguir.

Figura 10 – Representação geométrica da soma e subtração de z e w.



Fonte: autor, 2016

v)

Na figura 10, temos a representação geométrica da soma de dois números complexos e também temos a representação da diferença de dois números complexos.

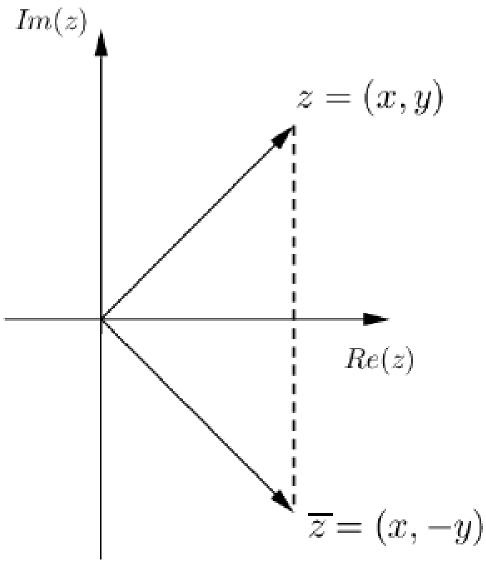
3.6.6 Conjugado

Definirmos o conjugado de um número imaginário $z = (x, y) = x + yi$, como sendo o número complexo $\bar{z} = (x, -y) = x - yi$, isto é:

$$z = (x, y) = x + yi \Leftrightarrow \bar{z} = x - yi.$$

Geometricamente, $\bar{z}$ é o ponto do plano Argand-Gauss, obtido por meio da reflexão de z em relação ao eixo real (simétrico de z em relação ao eixo real).

Figura 11 – Representação gráfica do conjugado de z.



Fonte: autor, 2016

Teorema 3.6.6.1 (Propriedade do Conjugado). Para todo $z, w \in \mathbb{C}$, temos:

i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;

ii) $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$;

iii) $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$;

iv) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, se $w \neq 0$;

v) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z = Re(z)$;

vi) $z + \bar{z} = 2Re(z)$;

vii) $z - \bar{z} = 2Im(z)$;

viii) $(\bar{z})^n = \overline{z^n}$, se $n \in \mathbb{N}$.

A demonstração dos itens deste teorema 6.5.3 pode ser encontrada em: Ávila (2011), Gentil (2000), Hefez (2012) e Iezzi (2013).

3.6.7 Forma trigonométrica (ou forma Polar)

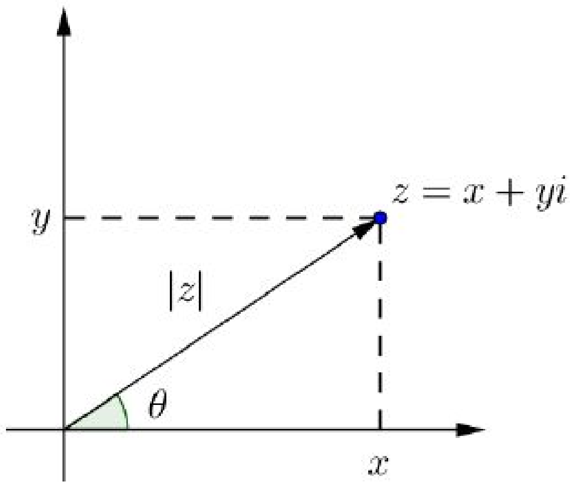
Vimos, conforme figura 9.b, que o número complexo pode ser representado por um vetor. Então podemos definir o módulo de um número imaginário $z = x + yi$, como sendo o módulo do vetor que o representa, ou seja, é a medida da distância de sua imagem (ponto que representa z) á origem. Portanto

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ás vezes em lugar de $|z|$ é usado os símbolos p ou r.

Sabemos que o número imaginário $z = x + yi$ é representado pelo ponto (x, y) identificado como coordenadas cartesianas do ponto z. Agora esse mesmo ponto será representado nas coordenadas polares. Veja figura 12.

Figura 12 – Plano de Argand-Gauss.



Fonte: Iezzi, (2013), p.21.

Na figura 12, temos a representação polar do complexo $z = (x, y)$ de raio $|z|$ e ângulo θ. Onde os elementos identificados na figura 12 são:

1. θ é o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z no sentido anti-horário, chamado *argumento* de z, representado por arg (z);

2. Da trigonometria, temos que $\cos(\theta) = \frac{x}{|z|}$ e $sen(\theta) = \frac{y}{|z|}$;
3. Fixando $z \neq 0$, estão fixados $\cos(\theta)$ e $sen(\theta)$, o ângulo θ tem uma infinidade de valores, congruentes dois a dois (congruência módulo 2π). Onde $z \neq 0$ tem argumento $\theta = \theta_0 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$, em que θ_0 é chamado argumento principal onde $0 \leq \theta_0 < 2\pi$.

Se θ é um argumento de $z = x + yi$, substituindo pelas coordenadas polares $x = |z|\cos(\theta)$, $y = |z|\text{sen}(\theta)$ e $r = |z|$ temos:

$$z = |z|\cos(\theta) + |z|sen(\theta).i \Rightarrow z = r(\cos(\theta) + i.sen(\theta)).$$

A qual é chamada *forma trigonométrica* ou *polar* do complexo z.

Esta forma de representar um número imaginário é mais prática que a forma algébrica para as operações de potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$.

Proposição 3.6.7.1 (Propriedades do módulo de um número complexo). As propriedades seguintes se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:

i) $z.\overline{z} = |z|^2$;

ii) $|z| = |\overline{z}|$;

iii) $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$e $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$;

iv) $|z.w| = |z|.|w|$;

v) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, w \neq 0$;

vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$;

vii) $|z + w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

A demonstração das propriedades de módulo de número imaginário pode ser encontrada em pesquisa realizada em: Hefez (2012), Iezzi (2013) e Soares (2012).

Proposição 3.6.7.2 (Desigualdades triangulares estendidas). As desigualdades seguintes se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:

Conforme analisado acima, sabemos que $|z + w| \leq |z| + |w|$ e $|z + w| \geq |z| - |w|$ e interpretando $|z + w|$, $|z|$ e $|w|$ como lados de um triângulo qualquer, temos:

- O Comprimento de um lado de um triângulo é menor que a soma dos comprimentos de outros dois lados;
- O comprimento de um lado de um triângulo é maior que a diferença dos comprimentos dos outros dois lados.

Dados z_1,z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$, onde $z_1 = z$ e $z_2 + z_3 = w$, aplicando a primeira desigualdade, temos:

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

Para a segunda desigualdade, temos:

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| \geq |z_1| - |z_2 + z_3|.$$

Como

$$-|z_2 + z_3| \geq -|z_2| - |z_3|, \text{ temos,}$$

$$|z_1 + z_2 + z_3| \geq |z_1| - |z_2| - |z_3|.$$

Assim, dados n números complexos $z_1, z_2, \cdots, z_n$ concluímos que:

$$|z_1| - |z_2| - \cdots - |z_n| \leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

Convém ressaltar que sua prova é feita pelo princípio de indução finita.

Vejamos agora como se expressa na forma polar a **igualdade** de dois números complexos não nulos.

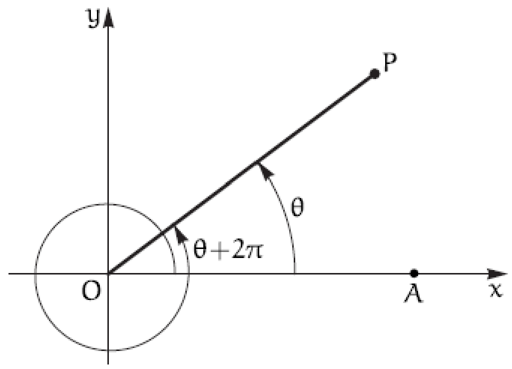
Sejam $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $z = r(\cos(\theta) + i.sen(\theta))$ e $v = r'(\cos(\theta') + i.sen(\theta'))$. Suponhamos que $z = v$. Então,

$$r(\cos(\theta) + i.sen(\theta)) = r'(\cos(\theta') + i.sen(\theta')).$$

Logo $r = |z| = |v| = r' > 0$ e cancelando r na igualdade acima, obtemos $\cos(\theta) + i.sen(\theta) = \cos(\theta') + i.sen(\theta')$. Da igualdade de números imaginários, decorre que $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ e $sen(\theta) = sen(\theta')$. Da periodicidade das funções trigonométricas, segue-se que $\theta = \theta' + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, dizemos que θ é congruente a θ' módulo 2π´ e escrevemos assim $\theta \equiv \theta' mod 2\pi$, ou seja θ e θ' são iguais a cada ciclo de 2π. Como por exemplo, $\theta = 5\pi/2$ e $\theta' = \pi/2$ são congruentes.

Ao marcarmos sobre o círculo unitário os comprimentos de θ radianos, $\theta + 2k\pi$ radianos, no sentido anti-horário ou horário, dependendo dos sinais de θ e de k e começando no ponto $A = (1,0)$, que corresponde a 0 radianos, paramos nos mesmo ponto P. Assim, os segmentos OA e OP, segmentos inicial e final para a determinação do ângulo em graus correspondente a θ radianos e a $\theta + 2k\pi$ radianos, coincidem.

Figura 13 – Congruência de $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\theta + 2\pi}$.



Fonte: Hefez (2012), p. 29.

Proposição 3.6.7.3: (Produto de números complexos na forma polar). Dados $z = r(\cos(\theta) + i.sen(\theta))$ e $v = r'(\cos(\theta') + i.sen(\theta'))$, temos que

$$z.v = r.r'(\cos(\theta + \theta') + i.sen(\theta + \theta')).$$

De fato,

$$z.v = r(\cos(\theta) + i.sen(\theta)).r'(\cos(\theta') + i.sen(\theta')),$$

$$z.v = r.r'\big((\cos\theta.\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta') + i(\cos\theta\operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen}\theta\cos\theta')\big).$$

Como $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta.\cos\theta' - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'$ e$\operatorname{sen}(\theta + \theta') = \cos\theta\operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen}\theta\cos\theta'$, Logo,

$$z.v = r.r'(\cos(\theta + \theta') + i\operatorname{sen}(\theta + \theta')).$$

■

A relação da proposição anterior dá a seguinte interpretação geométrica para o produto de números imaginários não nulos: *para calcular o produto de z com v, calculamos o produto dos módulos de z e v e somamos os seus argumentos principais θ e θ'.*

Mais ainda, com as notações da proposição anterior, a **divisão** de z por v é determinada dividindo os módulos de z e v e subtraindo do argumento principal de z o argumento principal de v, ou seja:

$$\frac{z}{v} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta - \theta') + i.sen(\theta - \theta')).$$

3.6.8 Potenciação

A multiplicação na forma polar permite determinar uma expressão para potência de expoente inteiro n cuja base é um número complexo não nulo, conforme veremos na seguinte proposição.

Proposição 3.6.8.1. (Primeira Fórmula de Moivre). Dado $z = r(\cos(\theta) + i.sen(\theta))$, um número complexo não nulo na forma polar, então para cada número inteiro n, tem-se

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i.sen(n\theta)).$$

Hefez (2012) demonstrou essa proposição utilizando o principio de indução finita.

3.6.9 Radiciação

Dado um número imaginário z, chama-se raiz n-ésima de z, e denota-se $\sqrt[n]{z}$, a um número imaginário w tal que $w^n = z$. Matematicamente, temos:

$$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow w^n = z.$$

Como calcular essas raízes?

Faremos uso da expressão conhecida por Segunda Fórmula de Moivre.

Proposição 3.6.9.1. (Segunda Fórmula de Moivre). Considere o número imaginário $z = p(\cos(\theta) + i.sen(\theta))$ e $n \in \mathbb{N}(n \geq 2)$, então existem n raízes enésimas de z que são da forma:

$$w = \sqrt[n]{p}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right],$$

onde $k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n-1$ e $n \in \mathbb{N}^+$.

A demonstração da proposição 3.6.9.1 pode ser encontrada em Gentil (2000).

Observação 3.6.9.2: As raízes enésimas de $z \neq 0$ têm todas o mesmo módulo $\sqrt[n]{|z|}$, argumentos formando uma progressão aritmética (PA) de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$ e graficamente, são vértices de um polígono regular de **n** lados, inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[n]{|z|}$.

4 PROPOSTA DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.

É consensual que os logaritmos detêm grande importância na História da Matemática, tanto pela finalidade com que foram criados quanto por suas aplicações. Quando este conteúdo é ensinado no primeiro ano do ensino médio, são apresentadas suas definições e propriedades para logaritmos de números reais positivos, excluindo os logaritmos de números reais negativos.

> **Números negativos têm logaritmos?**
> **Resposta**: números (reais) negativos têm logaritmo complexo. Essa resposta sugere duas novas perguntas: como se define o logaritmo (complexo) de um número real negativo? E a outra pergunta é: seria possível organizar uma teoria de logaritmos de tal maneira que todos os números reais (positivos ou não) tivessem logaritmo real?(LIMA, 2012,P.206).

Existem logaritmos de números reais negativos? Essa pergunta feita ao educando que está concluindo ou já concluiu recentemente o ensino médio, terão como resposta da maioria que: não existe. Logo os alunos concluem a educação básica até mesmo o ensino superior acreditando que não existem logaritmos de números reais negativos.

O objetivo geral desta proposta é criar uma sequência didática para que o aluno possa compreender de forma eficaz que existe sim logaritmo de número real negativo, além disso, definir de forma eficiente como encontrar esses logaritmos. São objetivos específicos:

- Mostrar a aplicabilidade da fórmula de Euler, para resolver a controvérsia entre alguns matemáticos do século XVIII, como por exemplo: entre Leibniz e Johann Bernoulli;
- Apresentar aos discentes que é possível encontrar logaritmos de números imaginários e que sua solução vai ser um número complexo;
- Mostrar que existe solução não nula para equação $\ln(-1) = y$;
- Fazer os estudantes compreenderem que existe logaritmo de números reais negativos, só que a solução vai ser um número imaginário;
- Mostrar que se não restringirmos um ramo da função logarítmica, então existira infinitas soluções para logaritmos de números negativos e nenhuma delas é real. Caso seja restringido o ramo, então haverá uma única solução complexa.

Considerando o currículo atual da Educação Básica, esta proposta tem como público-alvo o 3ª ano do Ensino Médio e abordará os números imaginários a partir do conhecimento prévio sobre funções exponenciais, logarítmicas, periódicas e trigonométricas. Em particular, será estudada a relação entre os conjuntos de domínio e contradomínio de uma função e a relação entre o conjunto solução e o conjunto universo.

Recomendações Metodológicas:

- As atividades poderão ser abordadas através de aulas expositivas e dialogadas, abrindo espaço para debates de modo que os alunos possam propor hipóteses e fazer observações com relação ao assunto tratado. Para isso os conhecimentos prévios dos discentes deverão ser valorizados e deve-se dá total liberdade ao aluno para que possa construir significados do conteúdo abordado.

Descrição Geral:

- Para realizarmos a proposta deste trabalho, vamos dividi-la em passos que deverão ser realizados ao longo de dez horas-aula, as quais serão distribuídas em quatro encontros. Além disso, para os três primeiros encontros a turma será dividida em grupos e cada grupo registrará suas observações nas atividades propostas e poderá expô-las para o restante da turma. Já para o último encontro, ou seja, após discussão de todos os itens sugeridos e sanados todas as dúvidas (se existirem), a atividade avaliativa vai ser individual, pois, além do questionário avaliativo também iremos usar a avaliação contínua para cada educando, pois a participação, comprometimento e atenção são fundamentais para o êxito do projeto.

4.1 Primeiro Momento (Atividade 1)

Nesse primeiro encontro, com duração estimada de duas horas-aula, propõem-se apresentar a definição de paradoxo e questões que ajudem a encontrar o erro em alguns paradoxos que envolva radiciação, bem como uma revisão sobre radiciação e equações.

São objetivos específicos deste momento:

- Entender o significado da palavra paradoxo em matemática;
- Entender e aplicar corretamente as propriedades de radiciação;
- Usar as propriedades de radiciação para explicar alguns paradoxos;
- Compreender que as propriedades de radiciação, vistas até agora são definidas para os números reais e não para os números complexos;
- Compreender o conceito de conjunto universo de uma equação.

Para execução dos procedimentos seguintes, será necessário a utilização de notebook, projetor multimídia, lousa e pincel.

4.1.1 Procedimentos

- Utilizar uma apresentação de slides para definir paradoxo, dar exemplos de paradoxos em aritmética. Relembrar algumas propriedades de radiciação e sobre equação do segundo grau, com soluções reais e complexas. (Ver capítulo 3);
- Dividir a turma em cinco equipes. Para cada equipe será sorteada uma questão da Atividade 1 (apêndice B);
- Solicitar que cada equipe resolva sua questão. O professor deverá auxiliar as equipes de modo a garantir sucesso nas resoluções;
- Após quinze minutos, solicitar que cada equipe indique um aluno para explicar sua solução aos demais, sendo mais quarenta minutos estimados para os alunos concluírem a apresentação de resolução das questões;
- As questões não sorteadas serão resolvidas na sala de aula pelo professor.

4.2 Segundo Momento (Atividade 2)

Nesse segundo encontro, com duração estimada de duas horas-aula, propõem-se apresentar as definições, propriedades e caracterização das funções logarítmicas e exponenciais, assim como o paradoxo $\log(-x) = \log(x)$ para x real positivo. Para tanto, utiliza-se aspectos históricos descritos no capítulo 2.

São objetivos específicos deste momento:

- Compreender as definições, propriedades e características das funções exponenciais e logarítmicas;
- Realizar operações com as propriedades das funções exponenciais e logarítmicas;
- Compreender que a função exponencial é inversa da função logarítmica e vice e versa.
- Demonstrar algumas propriedades básicas de funções logarítmicas e funções exponenciais.
- Mostrar que a igualdade das funções $\ln(-x) = \ln(x)$ é um paradoxo no conjunto dos números reais.

Para execução dos procedimentos seguintes, será necessário a utilização de notebook, projetor multimídia, lousa e pincel.

4.2.1 Procedimentos:

- Utilizar uma apresentação de slides para revisar algumas definições e propriedades de funções logarítmicas e exponenciais (esses conteúdos estão no capítulo 3);
- Dividir a turma em cinco grupos. Para cada grupo será sorteada uma questão da atividade 2 (Apêndice B);
- Cada grupo vai responder e explicar a sua questão sorteada para os demais colegas da sala, o professor deverá auxiliar os grupos nas dúvidas que surgirem;
- As demais questões serão resolvidas na sala de aula pelo professor;
- Duração: duas horas-aula, uma hora-aula para exposição da proposta e mais uma hora-aula para discutir e apresentar as soluções da atividade proposta.

4.3 Terceiro Momento (Atividade 3)

Nesse terceiro encontro, com duração estimada de três horas-aula, iremos iniciar com a atividade 3 (no apêndice B) para testar o conhecimento dos alunos sobre logaritmos de números complexos em particular logaritmo de número real negativo. Além disso, vamos discutir em sala de aula as opiniões dos matemáticos Leibniz e Johann Bernoulli sobre a existência de logaritmos de números negativos, como também iremos mostrar através de um resumo sobre a biografia de ambos que esses dois homens eram bastante reconhecidos pelos seus trabalhos, mas mesmo assim não conseguiram uma definição concreta sobre logaritmos de números negativos. Informar aos alunos que foi o discípulo de Johann, (o jovem Euler) que conseguiu uma definição concreta que atendia as hipóteses de Leibniz e de Johann Bernoulli.

São objetivos específicos deste momento:

- Utilizar a atividade 3 (no apêndice B), para explorar o conhecimento prévio dos discentes sobre logaritmos de números reais negativos;
- Expor as ideias de Leibniz e Johann Bernoulli sobre o logaritmo de números negativos, onde ambas as ideias pareciam ser opostas;
- Fazer os estudantes entenderem que tanto Leibniz como Bernoulli eram dois matemáticos renomados bastante conhecidos no século XVIII;
- Mostrar que nem Leibniz nem Bernoulli conseguiram uma solução concreta sobre $\ln(x)$ para todo x real negativo.

As aulas serão expositivas e dialogadas e para a execução dos procedimentos seguintes, será necessário à utilização de notebook, projetor multimídia, lousa e pincel.

4.3.1 Procedimentos:

- Aplicação da atividade 3 no início do terceiro encontro, para sondar o conhecimento dos alunos sobre logaritmos de números complexos e números reais negativos;
- Utilizar uma apresentação de slides com os tópicos definidos para o terceiro encontro no apêndice A;
- Dividir a turma em dois grupos. Onde um grupo vai defender a ideia de Leibniz e o outro grupo vai defender a ideia de Johann Bernoulli;
- Mostrar que nem Leibniz nem Bernoulli conseguiram uma definição concreta sobre os logaritmos de números reais negativos (ver item correspondente no apêndice A);
- Duração: três horas-aula, sendo quinze minutos para os alunos reponderem a atividade 3, uma hora-aula para exposição da proposta e o restante do tempo destinado aos dois grupos que irão defender as ideias dos matemáticos.

4.4 Quarto Momento (Atividade 4)

Nesse quarto encontro, com duração estimada de três horas-aula, propõem-se apresentar a fórmula de Euler para chegarmos a apresentar a definição de logaritmos de números imaginários, em particular encontraremos uma fórmula para logaritmo de número negativo. Mostraremos que algumas propriedades de logaritmos válidas para os números reais positivos também continuam válidas para os números imaginários. Além disso, também iremos mostrar a representação geométrica da equação $f(z) = e^z$, onde z é um número complexo. A atividade 4 (no apêndice B) será posta como atividade avaliativa em virtude que ela é um complemento da atividade 3, pois o comparativo dessas duas atividades irá mostrar se houve ou não avanço no conhecimento dos logaritmos de quantidades negativas.

São objetivos específicos deste momento:

- Compreender que tanto as ideias de Leibniz quanto de Jean Bernoulli estavam equivocadas e que Euler teve um papel muito importante para resolver a controvérsia entre o senhor Leibniz e o senhor Johann Bernoulli.
- Apresentar a fórmula de Euler.
- Concluir que $e^{i\pi} = -1$.
- Definir logaritmos de números imaginários não nulos.
- Compreender que existe $\ln(-1) \neq 0$, contrariando as ideias de Leibniz e Johann Bernoulli.

- Mostrar que pode haver apenas uma única solução para logaritmos de números reais negativos, se restringirmos o ramo da função logarítmica, caso contrário terá infinitas soluções, mas nesse caso não será uma função monovalente e sim multivalente.
- Mostrar que a propriedade $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$, válida para números reais também é válida para números complexos.
- Utilizar a propriedade de mudança de base para encontrar logaritmos de números reais negativos em uma base diferente do número irracional e.
- Utilizar a atividade 4 para verificar se houve ou não aprendizagem.

Para execução dos procedimentos seguintes, será necessário a utilização de notebook, projetor multimídia, lousa e pincel.

4.4.1 Procedimentos

- Utilizar uma apresentação de slides, com os tópicos definidos para o quarto encontro no apêndice A;
- Utilizar a serie de Maclaurin (no anexo) para chegarmos à fórmula de Euler;
- Induzir o aluno a utilizar a fórmula de Euler para concluir que $e^{i\pi} = -1$, pelo desafio de encontrar uma forma diferente de escrever o número –1;
- Integrar os conceitos de números imaginários, funções trigonométricas, funções logarítmicas e exponenciais junto com a fórmula de Euler para definirmos logaritmos de números complexos. Para tanto, utilizar a definição de função inversa (capítulo 3)
- Utilizar a fórmula de logaritmo de número imaginário para concluir que existe logaritmo de número real negativo;
- Mostrar que algumas propriedades de logaritmos de números reais também podem ser válidas para logaritmos de números complexos;
- Mostrar que podemos também relacionar os números imaginários com as funções exponenciais e funções logarítmicas para resolver as controvérsias entre Leibniz e Johann Bernoulli;
- Aplicar atividade 4 e utilizá-la como instrumento de verificação da aprendizagem, comparando os resultados com aqueles obtidos na atividade 3;
- Duração: duas horas-aula para exposição dos tópicos do quarto encontro (no apêndice A) e mais uma hora-aula para aplicar a atividade 4 (no apêndice B) e com isso fazermos o comparativo das duas atividades).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Napier estava preocupado em diminuir o trabalho de certos profissionais que trabalhavam com cálculo, então ele criou as tábuas logarítmicas para diminuir o tempo que alguns matemáticos, comerciantes e astrônomos passavam com algumas questões matemáticas. Mesmo que Napier não tenha falado em função logarítmica, esse conceito estava presente em suas definições, pois havia uma correspondência biunívoca entre as duas colunas da tabela. Na maioria dos livros didáticos, percebe-se que essa função pode ser definida basicamente de duas maneiras diferentes, uma como a inversa da função exponencial e a outra como área sob a faixa positiva da hipérbole $y = 1/x$, para todo x real positivo. Mas como falar em logaritmos de números reais negativos se nem as tábuas de Napier, nem a primeira, nem a segunda definição (citada neste parágrafo) ajudam sobre esse tema. Até grandes matemáticos dos séculos XVIII tiveram problemas com esse tema, como por exemplo, temos a controvérsia entre Leibniz e Johann Bernoulli, sendo que foi Euler que colocou um fim nesse debate.

As ideias de Leibniz e Johann deverão ser defendidas por grupos de alunos na sala de aula, mas se espera que os alunos tenham uma leve impressão que a ideia de Leibniz está correta e a de Bernoulli não, pelo fato de que eles estão acostumados com a definição que a função exponencial é a inversa da função logarítmica no conjunto dos números reais, além disso, eles terão visto na segunda atividade que a igualdade $\ln(-x) = \ln(x)$ defendida por Johann é um paradoxo no conjunto dos reais.

Espera-se que na terceira atividade os estudantes consigam oferecer poucas respostas, pois está subtendido que eles ainda não sabem que existem logaritmos de números complexos, nem muito menos como calcular esses logaritmos. Já na quarta atividade espera-se que todas as questões sejam respondidas, pois ela contém as questões da terceira atividade acrescida de mais algumas questões, e também servirá como mais uma forma de avaliação da aprendizagem dos estudantes.

Os comentários colocados sobre cada questão e a ligação que venha haver entre elas são de suma importância para orientação dos professores que desejarem utilizar esse material, com seus discípulos.

Nesse trabalho deve-se mostrar aos discentes que existe uma relação entre números complexos e logaritmos, pois o produto de dois números imaginários na forma polar está relacionado com a soma de seus argumentos. E a partir daí utilizar a equação de Euler para então concluirmos que existe logaritmo de números complexos, em particular que existe solução para logaritmo de números reais negativos.

Em virtude do que foi mencionado durante todo trabalho é necessário que os professores não fiquem restritos apenas aos livros didáticos direcionados para aquele público que o mesmo está lecionando, é preciso buscar outras fontes, é preciso buscar mais aplicações para uma melhor visão do todo, pois os nossos alunos necessitam de criticidade para uma melhor aprendizagem.

A pesquisa deste trabalho ampliou meu conhecimento sobre o tema, pois, no início da pesquisa eu sabia que existia, mas não sabia como calcular, então através de Lima (2012) e Boyer (2012) eu aprendi que existem infinitos resultados diferentes e complexos para todos os logaritmos de números reais negativos. Mas como podemos falar em funções monovalentes para o educando do ensino médio, se cada logaritmo tem infinitas soluções e todas complexas, então através de Soares (2012), chegamos a conclusão que para a função logarítmica ter uma única solução é preciso restringir a função a um ramo de largura 2π.

Assim como podemos informar ao aluno do nono ano que ele vai encontrar solução para equação do segundo grau quando seu discriminante for menor que zero ($\Delta < 0$), mas isso só quando ele for estudar o conjunto dos números complexos, também podemos informar ao educando do primeiro ano do ensino médio que existe sim logaritmos de números reais negativos só que a solução vai ser um número imaginário, número este que vai ser visto no terceiro ano do ensino médio. Logo esses discentes poderão fazer essa pergunta ao seu professor quando ele ministrar o conteúdo de números complexos, isto fará o professor pesquisar sobre o assunto e dá uma resposta favorável.

Apesar da proposta deste trabalho não ter sido aplicada em sala de aula, os objetivos foram alcançados, e espera-se que os docentes que pretendam aplicar essa sequência didática possam colher bons resultados. Além disso, em trabalhos futuros, este autor pretende dar continuidade a esta pesquisa, aplicando a proposta e divulgando os resultados em outros trabalhos acadêmicos direcionados aos professores de matemática.

REFERÊNCIAS

Ávila, Geraldo. **Variáveis complexas e aplicações**. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

Boyer, Carl B., **História da matemática.**Tradução: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

Dante, Luiz Roberto. **Matemática, volume único**. São Paulo: Ática, 2005.

Eves, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 2004.

Gentil, Nelson; et al. **Matemática para o 2º grau,** volume 3. 7 ed. São Paulo: Ática, 2000.

Hefez, Abramo; Villela, Maria Lúcia Torres**. Polinômios e Equações Algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Iezzi, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 6:** complexos, polinômio, equações. 8 ed. São Paulo: Atual, 2013.

Lima, Elon Lages. **Logaritmos**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996.

Lima, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Lima, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

Longen, Adilson. **Matemática: uma atividade humana**: 1ª série. 21 ed. Curitiba : Base Editora, 2003.

Roque, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Soares, Marcio G. **Cálculo em uma variável complexa**. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPAR, 2012.

APÊNDICE A – Tópicos de aula do terceiro e quarto encontro.

Neste apêndice estão os tópicos das aulas das propostas das atividades 3 e 4. Já as aulas das propostas das atividades 1 e 2, vamos deixar para o professor que queira aplicar essa sequência didática, faça sua aula pautada neste trabalho, pois, os conteúdos dessas atividades fazem parte da matriz curricular do ensino médio e os alunos certamente já viram. Logo o professor poderá fazer uma revisão detalhada desses conteúdos para então aplicar as atividades 1 e 2.

TÓPICOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DO TERCEIRO ENCONTRO

Nestes tópicos de aulas iniciaremos com a atividade 3 para testar o conhecimento dos discentes sobre a existência dos logaritmos de números complexos. Aqui também estão relatadas as opiniões dos matemáticos Leibniz e Johann Bernoulli, sobre a existência dos logaritmos dos números negativos, além disso, mostraremos que nem Leibniz, nem Bernoulli, conseguiram uma definição concreta sobre esses logaritmos.

1. Aplicar a atividade 3 no início do terceiro encontro.

Essa atividade 3 é o eixo norteador para aplicarmos a sequência didática, pois espera-se que os alunos não respondam as questões que envolvam logaritmos de números imaginários ou logaritmos de números reais negativos.

2. Opiniões dos matemáticos Leibniz e Jean Bernoulli.

Desde o último ano do ensino fundamental, aprendemos que não existe solução real para equações do segundo grau ($ax^2 + bx + c = 0$) quando seu discriminante é menor que zero ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$), logo só encontramos solução quando passamos a estudar o conjunto dos números complexos, onde a solução existirá nesse conjunto, a qual chamaremos de solução imaginária. Da mesma forma vimos no primeiro ano do ensino médio que não existe solução real para o logaritmo de número negativo, devido ao fato que a função exponencial ser a inversa da função logarítmica. Iremos aprender que existe sim solução para logaritmo de números reais negativos, só que não será uma solução real e sim uma solução imaginária, ou seja, uma solução no conjunto dos números complexos.

Começaremos com as discussões de dois grandes matemáticos do século XVIII (Leibniz e Johann Bernoulli).

Leibniz afirmava que não existia logaritmo real para número negativo, já Bernoulli afirmava que existia e tentava provar a todo custo. Leibniz olhava para o logaritmo de x na base a como o expoente y tal que $a^y = x$. Johann Bernoulli insistia na validez da regra $\log(x.y) = \log x + \log y$.

- **Opinião de Leibniz.**

Leibniz era de opinião que um número negativo não pode ter logaritmo real porque toda potência de expoente real de um número positivo a é sempre um número positivo (LIMA, 2012, p.209).

Logo Leibniz tem opinião semelhante aos conceitos dos livros didáticos atuais sobre função exponencial, pois a imagem da mesma está no conjunto dos números reais positivos, ou seja, $a^x = y > 0$, para qualquer $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

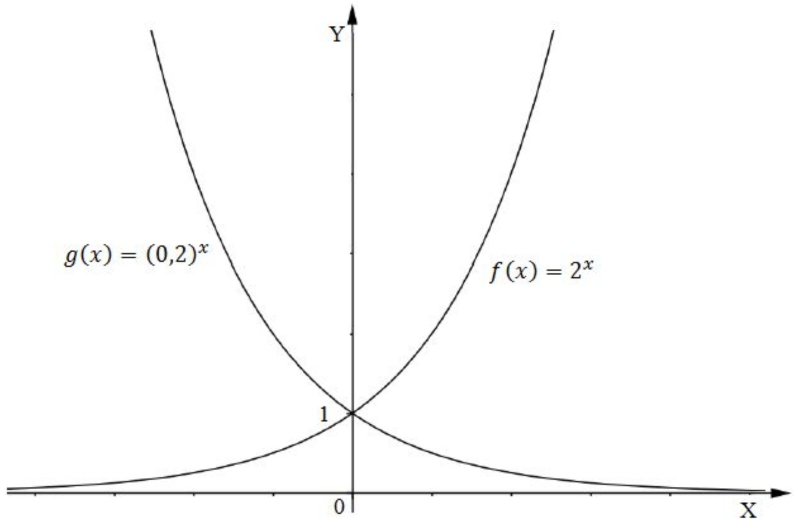
Exemplo 1. Se $a = 2$, então $y = 2^x$, logo $y > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2. Se $a = 0{,}2$, então $y = (0{,}2)^x$, logo $y > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$ tem sentido apenas para $a > 0$ e $a \neq 1$, isso mostra coerência na afirmação de Leibniz.

Então analisando os gráficos das funções exponenciais: $y_1 = f(x) = 2^x$ e $y_2 = g(x) = (0{,}2)^x$, fica fácil enxergar geometricamente que $y_1 > 0$ e $y_2 > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Figura 14 – Gráfico da função $f(x) = a^x$, quando $a = 2$ e $a = 0,2$.



Fonte: autor, 2016.

Leibniz defendia a tese que toda função logarítmica, pode ser vista como uma função inversa da função exponencial. Leibniz olhava o logaritmo de x na base a como $a^y = x$, ou seja, $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$, o que é compatível para logaritmos de números positivos. Se a função exponencial assume somente valores positivos e como ela é a função inversa da função logarítmica, **não teria sentido a existência de logaritmo real para um número negativo.**

- **Opinião de Johann Bernoulli**

Johann Bernoulli afirmava que números negativos têm logaritmo real. E mais ainda: que $\log(-x) = \log x$ (LIMA, 2012, P.209).

A ideia de ser $\log(-x) = \log x$ era defendida por alguns matemáticos do século XVIII, como por exemplo, Jean Bernoulli e D´Alembert. (BOYER, 2012, p. 307). Logo Bernoulli foi um dos matemáticos que afirmavam que números negativos têm logaritmo real e ainda, que $\log(-x) = \log x$.

Em uma função $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = \log y$, sendo g a inversa da função exponencial, então: $x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y$. Assim por definição temos que,

$$a^{\log_a y} = y.$$

Leibniz olhava para função logarítmica como a inversa da função exponencial, mas Johann Bernoulli argumentava que o sistema de logaritmo foi inventado muito antes da função logarítmica, Howard Eves (2004), informa que o escocês John Napier (1550-1617) e o

Suíço Joost Burgi (1552-1632) lançaram suas tábuas logarítmicas em 1614 e 1620 respectivamente, onde a abordagem de Napier era geométrica e a de Burgi era algébrica, sendo que os logaritmos foram descobertos antes de se usarem expoentes. Logo Johann Bernoulli criou uma função logarítmica que não precisava necessariamente ser definida como a inversa da função exponencial. Assim *Johann criou uma função logarítmica* preservando a propriedade básica $\log(y.x) = \log y + \log x$ e acrescentando a propriedade $\log(-x) = \log x$.

Segundo Lima (2012), para que a afirmativa de Bernoulli estivesse correta, era necessário obter uma função *contínua* ou *monótona*, de forma que as propriedades abaixo sejam satisfeitas:

$$L_1: \varphi(x.y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$L_2: \varphi(a) = 1.$$

Logo Johann tentou simplesmente obter uma função contínua $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com as propriedades L_1 e L_2 (isto é $\varphi(x.y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ e $\varphi(a) = 1$). Sabemos que conforme a caracterização das funções logarítmicas temos que $\varphi(x) = \log x$ é a única maneira de definir uma função contínua $\varphi: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Tomando-se $\varphi(x) = \log x$, com $x > 0$, e $\varphi(y) = 0$, obtém-se das propriedades dos logaritmos reais que $\varphi(x.0) = \varphi(x) + \varphi(o)$, isto é $\varphi(0) = \varphi(x) + \varphi(0)$, então $\varphi(x) = 0$, isto contradiz que $L_2: \varphi(a) = 1$. Logo removendo o zero do domínio, podemos definir uma função contínua $\varphi: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, que satisfaça as propriedades L_1 e L_2

Portanto $\varphi(y) \neq 0$, deve ser definida por $\varphi: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ e $\varphi(x) = \log|x|$.

Como $0 = \log 1$, então $0 = \log 1 = \varphi(1) = \varphi[(-1).(-1)]$.

$$\text{Daí, } \varphi[(-1).(-1)] = \varphi(-1) + \varphi(-1) = 0, \text{ isto é,}$$

$$2\varphi(-1) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\varphi(-1) = 0.$$

Assim, $\varphi(-y) = \varphi(-1.y) = \varphi(-1) + \varphi(y) = 0 + \varphi(y)$, logo $\varphi(-y) = \varphi(y)$. Daí

$$\varphi(-y) = \log y = \log|-y|, \forall\, y > 0.$$

Portanto a regra $\log x = \log(-x)$ permite estender a função logarítmica aos números negativos, de modo que seus valores continuem reais e ainda se tenha que o logaritmo do produto seja a soma dos logaritmos dos fatores.

3. Biografia dos matemáticos Leibniz e Johann Bernoulli.

Nosso principal objetivo nesse tópico é mostrar que Leibinz e Johann Bernoulli, não eram apenas pessoas comuns que estudavam matemática, mas grandes matemáticos de renomes do século XVIII.

Figura 15 - Gottfried Wilhelm Leibniz

Fonte: [1]Widipedia

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, onde estudou teologia, direito e filosofia e matemática na Universidade de Leipzig. Aos vinte anos ele estava preparado para o grau de doutor em direito, mas esse título lhe foi recusado, por causa disso deixou Leipzig e obteve seu doutorado na Universidade de Altdorf, em Nuremberg (BOYER, 2012, p. 287).

Leibniz era também filósofo, além de matemático; sua contribuição mais significativa, além do cálculo, foi em lógica. Seu primeiro artigo de matemática tinha sido uma tese sobre análise combinatória em 1666 (BOYER, 2012, p. 289).

Como Leibinz era formando em filosofia, ele tinha umas ideias bastante interessantes, como por exemplo: que Deus podia ser representado pelo número binário, ou seja, pela unidade e pelo zero, ele imaginava que Deus tivesse criado o tudo do nada, assim como na aritmética binária todos os números se expressam por meio da unidade e do zero, outro exemplo das tendências teológicas dele se encontram na observação que fez a respeito dos números imaginários que seriam como os espíritos sagrados das escrituras: espécies de

---

[1] Disponível<https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried Wilhelm Leibniz>

anfíbios, entre coisas que são e coisas que não são (EVES, 2004, p. 445). Logo ele afirma que os números imaginários são uma espécie de anfíbio, a meio caminho entre existência e não existência.

Leibniz criou uma máquina de calcular, superior à que fora criada por Blaise Pascal, fazendo as quatro operações. Em 1676, já tinha desenvolvido algumas fórmulas elementares do cálculo e tinha descoberto o *teorema fundamental do cálculo*, que só foi publicado em 11 de julho de 1677, onze anos depois da descoberta não publicada de Newton.

Antes de assumir o rendoso posto de bibliotecário e conselheiro do eleitor de Hanover, Leibniz já havia descoberto o teorema fundamental do cálculo (EVES, 2004, p. 442). E com as fórmulas simbólicas ele enunciou as regras para encontrar a derivada de soma, diferença, produto, quociente, potência e raízes (Tatiane Roque, 2012, p.335).

Durante toda a vida, paralelamente à Matemática, Leibniz trabalhou para aristocratas, buscando nas genealogias provas legais do direito ao título, tendo passado os últimos quarenta anos trabalhando exclusivamente para a família Brunswick, chegando a confirmar para os empregadores o direito a metade de todos os tronos da Europa. As pesquisas levaram-no pela Alemanha, Áustria e Itália de 1687 a 1690. Em 1700, Leibniz organizou a Academia de Ciências da Prússia, da qual foi o primeiro presidente. Esta Academia permaneceu como uma das três principais do mundo até que os nazistas a eliminaram.

A matemática se compõe de dois domínios amplos e antitéticos, o contínuo e o discreto; e em toda história da matemática o único homem a transitar nesses dois domínios com soberbo desembaraço foi Leibniz (EVES, 2004, p. 445).

Portanto Leibiniz foi um filósofo e matemático alemão. Estudioso do cálculo integral e do cálculo binário, que hoje é muito importante no desenvolvimento dos programas de computadores. Também foi criador da teoria das Mônadas. É considerado uma das mentes mais brilhantes da história.

Morreu solitário e esquecido. O funeral foi acompanhado pelo secretário, única testemunha dos últimos dias. Encontra-se sepultado em *NeustädterHof- undStadtkirche St. Johannis*, Hanôver, Baixa Saxônia na Alemanha.

Newton, infelizmente, era demasiadamente sensível e não se comunicava livremente, por isso o método dos fluxos não era bem conhecido fora da Inglaterra. Leibniz, por outro lado encontrou discípulos dedicados que estavam ansiosos por aprender o cálculo diferencial e integral e transmitir o conhecimento a outros. Na primeira linha desses entusiastas estavam dois irmãos suíços, Jacques Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748), frequentemente conhecidos também pela forma anglicizada de seus nomes, James e John (ou pelos equivalentes alemães, Jakob e Johann), Carl B. Boyer (2012).

Figura 16 - Johann Bernoulli

Fonte: [2]Widipedia

Johann Bernoulli (Basileia, 6 de agosto de 1667 — Basileia, 1 de Janeiro de 1748) foi um matemático suíço. Estudou inicialmente medicina. Seu irmão Jakob Bernoulli ensinou-lhe matemática. O fato de seu nome aparecer numerado deve-se à existência de um Johann II Bernoulli, nascido posteriormente na família. Com o seu irmão Jakob, desenvolveu trabalhos que precediam em muito o cálculo de Gottfried Leibniz. Foi acusado de ter roubado ideias de seu irmão Jakob e de expulsar o seu filho Daniel Bernoulli de casa, por ter ganhado um prêmio da Academia Francesa de Ciências, para o qual ele próprio estava competindo. Fez fundamentais pesquisas sobre *cálculo variacional*. Seu primeiro emprego acadêmico foi em Groningem, em 1695, como professor de matemática. Após a morte de Jakob, em 1705, ocupou seu lugar em Basileia. Muito fez para divulgar o cálculo na Europa. Seu campo de atuação incluía *física, química, astronomia*, além da matemática. Em ciência aplicada contribuiu extensamente com a *óptica*, escreveu sobre a *teoria das marés* e a teoria matemática da navegação. Permaneceu ativo até alguns dias antes de sua morte, com a idade de oitenta anos. Contribuiu ainda em várias áreas da matemática aplicada, incluindo o

[2] Disponível<https://pt.wikipedia.org/wiki/Johann Bernoulli>

movimento de uma partícula num campo gravitacional. Estabeleceu a *equação da catenária* em 1690. Bernoulli propôs um engenho de *movimento do perpétuo*.

4. Dividir os alunos da sala de aula em dois grupos.

Iremos dividir a turma em dois grupos com objetivo de fazer com que um grupo defenda a opinião de Leibniz e o outro grupo defenda a ideia de Johann Bernoulli. O professor será o mediador do conhecimento para as possíveis dúvidas que poderão surgir com essa atividade.

Espera-se do segundo grupo que não venha surgir muitas dúvidas, pois os alunos estão familiarizados com a definição de que a função logarítmica é inversa da função exponencial. Além disso, espera-se que os mesmo estejam muito confiantes na defesa da ideia do matemático Leibniz, ou seja, que não existem logaritmos reais de números negativos. Até mostramos no encontro da aula anterior que $\log(-x) = \log(x)$ é um paradoxo, contrariando a opinião de Johann Bernoulli.

Primeiro grupo: Discutir e apresentar em sala de aula que existe *logaritmo real* de números negativos utilizando o seguinte argumento:

$$\log x.y = \log x + \log y.$$

Segundo grupo: Discutir e apresentar em sala de aula que não existe *logaritmo real* de números negativos utilizando o seguinte argumento: O logaritmo de x na base a tem a seguinte forma exponencial, $a^y = x$, ou seja, um número positivo e diferente de zero elevado a um número real, jamais vai ser um número negativo.

5. Apresentar aos alunos que os argumentos de Leibniz e Johann Bernoulli só serão compatíveis quando nos limitamos a considerar logaritmos de números reais positivos.

Leibniz olhava para o logaritmo de x na base a como o expoente y tal que $a^y = x$. Johann Bernoulli insistia na validez da regra $\log x.y = \log x + \log y$. O fato é que estas duas atitudes só podem ser compatíveis quando nos limitamos a considerar logaritmos de números positivos Lima (2012).

Os argumentos de ambos são compatíveis quando consideramos os logaritmos de números reais positivo, conforme está definido desde o primeiro ano do ensino médio. A dúvida é gerada quando passamos a analisar logaritmos de números negativos, pois ambas opiniões são respeitáveis, mas inconciliável, pois o argumento de Bernoulli falha na seguinte propriedade: $a^{\log_a x} = x$, pois teremos apenas : $a^{\log_a x} = |x|$.

6. **Concluir que nem Leibniz nem Johann Bernoulli conseguiram dá uma definição concreta sobre a teoria de logaritmos de números negativos.**

Leibniz argumentava que números negativos não têm logaritmos reais; Bernoulli acreditava que a curva logarítmica é simétrica com relação a eixo de ordenadas, afirmava que $\ln(-x) = \ln(x)$, o que parecia confirmado pelo fato que $d/dx \ln(-x) = d/dx \ln(x) = 1/x$. A questão da natureza dos logaritmos dos números negativos não foi definitivamente resolvida por nenhum dos dois, mas pelo brilhante aprendiz de Bernoulli, ou seja, por seu famoso discípulo Euler, cujas contribuições à análise, inclusive logaritmos de números negativos, foram núcleo essencial dos desenvolvimentos da matemática durante os meados do século dezoito (BOYER, 2012, p. 301).

Pelo fato de que a maioria dos livros didático, assumir que a função logarítmica é a inversa da função exponencial e também da atividade 2, onde mostramos que $\ln(-x) = \ln(x)$ é um paradoxo no conjunto dos números reais, então espera-se que os alunos que defenderam a opinião de Leibniz, estejam confiantes que o grupo deles estão corretos e o grupo que defenderam a opinião de Johann Bernoulli estejam errados. Logo iremos mostrar neste tópico que nem um dos dois conseguiu chegar a uma definição concreta e eficiente sobre logaritmos de números negativos.

Segundo Lima (2012), Johann Bernoulli afirmava que números negativos têm logaritmo real e insistia na validez da regra $\log(y.x) = \log(y) + \log(x)$. E ainda mais: que $\log x = \log(-x)$. Isto evidencia a teoria de Bernoulli, mas a igualdade $a^{\log_a x} = x$ não valeria mais. Passaria a $a^{\log_a x} = |x|$. Leibniz afirmava que não teria sentido a existência de logaritmo real de números negativos, pois a função logarítmica é inversa da função exponencial, logo $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ e $1 \neq a > 0$.

Logo tanto Johann Bernoulli como Leibniz tentaram criar teoria que explicasse o logaritmo de números reais negativos, mas ambos ficaram sem uma definição concreta, ou seja, não obtiveram êxito em suas teorias, e ainda, elas pareciam um tanto antagônicas, ou seja, opostas. Mas mesmo assim nada foi concluído sobre uma definição concreta sobre o logaritmo de números negativos. Daí quem conseguiu resolver esse dilema foi o matemático

Euler, pois ele mostrou que se a solução for um número complexo, então é sim possível encontrar solução para logaritmos de números negativos.

O argumento de Bernoulli falha quando ele afirma que a igualdade $\log(-x) = \log(x)$ é verdadeira no conjunto dos números reais não nulos e falha também na seguinte propriedade: $a^{\log_a x} = x$. O argumento de Leibniz falha quando ele afirma que não tem sentido em falar sobre solução para logaritmos de números reais negativos, ou seja, que não existe solução para os logaritmos de números negativos. Euler mostrou que existe sim, solução, mais ela vai ser um número imaginário.

No próximo e último encontro iremos demonstrar que no conjunto dos reais, realmente não é possível encontrar uma solução razoável para a controvérsia entre os senhores Leibniz e Bernoulli, mas no conjunto dos números complexos chegaremos à conclusão que a propriedade $\log(y.x) = \log(x) + \log(x)$ é verdadeira (para um determinado ramo) como afirmava Bernoulli e que a propriedade $a^{\log_a x} = x$ é verdadeira para números reais negativos como queria Leibniz.

TÓPICOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O QUARTO ENCONTRO

Nestes tópicos mostraremos que foi o matemático Euler que resolveu a controvérsia entre Leibinz e Johann Bernoulli, ou seja, foi ele quem mostrou que existe logaritmo de número negativo. Além disso, encontraremos uma fórmula para encontrar solução para qualquer número complexo, em particular para números negativos.

1. Apresentar a fórmula de Euler.

O objetivo deste tópico é mostrar para os estudantes como encontrar a fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + isen(\theta).$$

A fórmula do produto de dois números imaginários da *proposição 3.6.7.3*, no caso em que os números imaginários têm módulo iguais a 1, sugere a possibilidade de haver uma conexão entre números complexos e logaritmos (ou, equivalentemente, exponenciais), pois ao produto de dois números imaginários está associado a soma de seus argumentos principais. De fato, tal conexão é dada pela fórmula: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + isen(\theta)$, (HEFEZ, 2012, p. 34).

Logo da equação de Euler podemos afirmar que um número real positivo (e) elevado a um número complexo z$'$(z$' = i\theta$) é igual a um número complexo z (z $= \cos(\theta) + isen(\theta)$).

Segundo Ávila (2011), admitimos que os alunos tenham familiaridades com as funções trigonométricas, a constante de Euler "e" e a função exponencial e^x, conceito estes que são estudados nos cursos de cálculos. Sendo que para este trabalho as fórmulas abaixo serão tomadas como verdade, mas as mesmas estão demonstradas no anexo.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots;$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

A constante de Euler e, que é um número irracional compreendido entre 2 e 3 $(e \cong 2{,}71828\cdots)$, é dada pela série

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots;$$

Vamos tomar o desenvolvimento da equação $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots;$ como base para definir e^z, onde $\mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{iy}$ é um número imaginário. Logo

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots.$$

No caso particular em que $\mathrm{z} = \mathrm{iy}$ é um número "imaginário puro", levando-se em conta os valores das potências sucessivas de $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, temos:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots;$$

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots;$$

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(i)^2 y^2}{2!} + \frac{(i)^3 y^3}{3!} + \frac{(i)^4 y^4}{4!} + \frac{(i)^5 y^5}{5!} + \cdots;$$

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \cdots.$$

Admitindo ainda que seja possível arrumar os termos desta série, pondo juntos os termos reais e separadamente os termos imaginários, obtemos:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right).$$

Logo temos que:

$$e^{iy} = \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y).$$

2. Pedir para os alunos escreverem o número menos um (-1) de várias maneiras diferentes. Como por exemplo: $\boldsymbol{i^2 = -1}$ ou $\boldsymbol{\sqrt[3]{-1} = -1}$.

O objetivo deste tópico é sondar se algum aluno da classe irá conseguir fazer uma relação com fórmula de Euler e encontrar o número -1, ou seja, tomar $\theta = \pi$, onde $e^{i\pi} = -1$, logo,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Euler, então escreveu uma das mais belas fórmulas matemáticas, envolvendo cinco números importantes, 1, i, e, π, ou seja, o zero, a unidade, o número imaginário i, e os números irracionais π e "e" Hefez (2012, p. 34).

3. Definir que logaritmos de números complexos é um número imaginário.

Euler definiu o logaritmo de número complexo $z \neq 0$ como um número imaginário w tal que $e^w = z$. Dizemos que um número complexo w é um logaritmo de um número complexo não nulo z se $e^w = z$ (LIMA, 2012, p. 211).

Segundo Soares (2012) no caso real, a função logarítmica é a inversa da função exponencial, isto é, um número real y é o logaritmo do número real positivo x, $\ln(x) = y$, se, e somente se, $e^y = x$. No caso complexo temos um problema, pois a exponencial complexa é Periódica $e^z = e^{z+2\pi ik}$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim sendo, é preciso certa cautela para invertê-la, pois não é possível obter uma única função f satisfazendo $e^{f(z)} = z$, porque, dada uma tal f, para a função $g(z) = f(z) + 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$, também vale que:

$$e^{g(z)} = e^{f(z)+2\pi ik} = e^{f(z)}.e^{2\pi ik} = e^{f(z)}.$$

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, queremos definir o logaritmo de z por:

$$\text{Se } z = e^w, \text{ então } \mathrm{w} = \ln \mathrm{z}.$$

Considerando que a função exponencial é periódica de $2\pi i$ e fazendo algumas manipulações algébricas, chegaremos a:

$$\ln \mathrm{z} = \ln|\mathrm{z}| + \mathrm{i}(\theta + 2\pi \mathrm{k});\ k \in \mathbb{Z}.$$

Essa igualdade mostra explicitamente que o logaritmo de um número complexo tem uma infinidade de valores. Para obtemos uma função, somos forçados a nos restringir a domínios em $\mathbb{C}$ nos quais o argumento possa ser determinado univocamente. Tais domínios podem ser obtidos como se segue: tome uma semi-reta fechada emanando da origem, $L_\emptyset = \{(t\cos\emptyset\,, t\,\mathrm{sen}\,\emptyset): 0 \geq t \in \mathbb{R}\}$, onde $0 \leq \emptyset < 2\pi$ e ponha

$$D_\emptyset = \mathbb{C}\backslash L_\emptyset$$

para todo $z \in D_\emptyset$ temos precisamente um **único** valor $arg(z)$ satisfazendo $\emptyset \leq arg(z) < \emptyset + 2\pi$. Portanto a seguir iremos definir uma função, chamada um ramo da função logaritmo.

Definição 1: A função $log: D_\emptyset \to \mathbb{C}$, é definida por:

$$\ln \mathrm{z} = \ln|z| + i.arg(z),$$

onde $arg(z) \in [\emptyset, \emptyset + 2\pi\,[$. Esta função é chamada **um ramo da função logaritmo**

Observação 1: A função log só fica bem definida quando se especifica um intervalo de comprimento 2π onde $arg(z)$ toma os seus valores.

Exemplo 1: Calcule $\ln(1+i)$ nos seguintes ramos.

a) $arg(z) \in [0, 2\pi[$

b) $arg(z) \in [\pi, 3\pi[$

Solução:

a) Como $arg(z) \in [0, 2\pi[$, então $arg(z) = arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ e $|z| = \sqrt{2}$, logo,

$$\ln \mathrm{z} = \ln|z| + i.arg(z), \text{ então,}$$

$$\ln(1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + i.\frac{\pi}{4}.$$

b) Como $arg(z) \in [\pi, 3\pi[$, $arg(z) = arg(1+i) = \frac{9\pi}{4}$ e $|z| = \sqrt{2}$, logo,

$$\ln \mathrm{z} = \ln|z| + i.arg(z), \text{ ou seja,}$$

$$\ln(1+1) = \ln\sqrt{2} + i.\frac{9\pi}{4}.$$

■

4. Concluir que $\ln(-1)$ existe e que $\ln(-1) \neq 0$, contrariando as duas hipóteses históricas.

Vimos na definição acima que $\ln \mathrm{z} = \ln|z| + i.arg(z)$, onde $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Daí tome $arg(z) = \theta \in [0, 2\pi[$ como **um ramo da função logaritmo.**

Daí:

$$\ln(-1) = \ln|-1| + i.arg(z), \text{ isto é,}$$

$$\ln(-1) = \ln 1 + i.\theta.$$

Como $arg(z) = \theta \in [0, 2\pi[$, então $\theta = \arg(1 + 0.i) = \pi$, então,

$$\ln(-1) = i.\pi\ .$$

Logo concluímos que $\ln(-1)$ é diferente de zero (contrariando a ideia de Bernoulli, que afirmava que $\ln(-1) = 0$), e tem como solução um número imaginário puro (contrariando a ideia de Leibniz que afirmava não ter sentido em falar sobre logaritmos de números negativos).

5. Mostrar que a equação $\mathbf{y = \ln(-x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}_*^+$, pode ter uma única solução ou infinitas soluções e nenhuma delas é real.

Vimos anteriormente que dado um número complexo $z \neq 0$ e definindo um ramo principal para $arg(z) = \theta$, teremos que $\ln \mathrm{z} = \ln|z| + i.\theta$. Agora se não definirmos um ramo principal e como o ângulo θ está definido a menos de um múltiplo inteiro de 2π, então $\theta = \theta + 2k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Daí:

$$\ln \mathrm{z} = \ln|z| + i.\theta, \text{ isto é,}$$

$$\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k), \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Logo basta tomar $z = x \in \mathbb{R}_*^+$, tal que $\ln z = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k), \forall\, k \in \mathbb{Z}$, ou seja:

$$\ln(-x) = \ln|-x| + i(\theta + 2\pi k), \text{ ou seja,}$$

$$\ln(-x) = \ln x + i(\theta + 2\pi k), \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Concluímos então que para $\ln(-x)$ existe infinitas soluções distintas e nenhuma delas é real. Isto mostra explicitamente que o logaritmo de um número real negativo tem uma infinidade de valores e que todos esses logaritmos sejam diferentes, não somente entre si, mas também de todos os logaritmos dos demais números. Todos os logaritmos dos números negativos ou imaginários são sem exceção, imaginários.

Vimos que para $\ln(-x)$ podemos encontrar infinitas soluções, mas como estamos falando de função logarítmica, logo só podemos ter uma única solução, ou seja, temos que definir $arg(z) = \theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi\,[$ como **ramo principal,** caso contrário não seria função. Logo para $arg(x) = \theta \in [-\pi, \pi[$, como ramo principal temos:

$$\ln(-x) = \ln x - i\pi, \forall\, x \in \mathbb{R}_*^+.$$

Portanto concluímos que o logaritmo de um número real negativo poderá ter infinitas soluções, mas para assegura a **unicidade** de valor de $\ln(-x)\,;\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+$, devemos restringir $arg(x) = \theta$ a um intervalo semiaberto $I \subset \mathbb{C}$ de largura 2π.

Exemplo 2. Calcule $\ln(-2)$ no ramo $[0, 2\pi[$.

Solução:

Por definição temos que $\ln(-x) = \ln x + i\pi, \forall\, x \in \mathbb{R}_*^+$, logo $\ln(-2) = \ln 2 + i\pi$.

Portanto concluímos que logaritmos de números negativos têm soluções e já sabemos como calcular conforme fórmula acima.

6. Mostrar que a propriedade $\ln(x.y) = \ln x + \ln y$ válida para os números reais positivos, também é válida para os números complexos não nulo.

Proposição 1. Se $z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$, então $\ln(z.w) = \ln z + \ln w\ (mod 2\pi)$.

Demonstração: por definição temos que $\ln \mathrm{z\,.\,w} = \ln|z.w| + i.arg(z.w)$, onde $arg(z) \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi\,[$. Mas

$$\ln|\mathrm{z.w}| = \ln(|\mathrm{z}|.|\mathrm{w}|) = \ln|\mathrm{z}| + \ln|\mathrm{w}|,$$

e

$$arg(z.w) = arg(z) + arg(w)(mod 2\pi).$$

Assim,

$$\ln(\mathrm{z.w}) = \ln|\mathrm{z}| + \ln|\mathrm{w}| + i.[arg(z) + arg(w)(mod 2\pi)],$$

$$\ln(\mathrm{z.w}) = \ln|\mathrm{z}| + \mathrm{i}.arg(z) + \ln|\mathrm{w}| + i.arg(w)(mod 2\pi),$$

$$\ln(\mathrm{z.w}) = \ln(\mathrm{z}) + \ln(\mathrm{w})\ (mod 2\pi).$$

■

Exemplo 3. Calcule $\ln[(-1 - \mathrm{i}).(1 - \mathrm{i})]$, no ramo $[0,2\pi[$.

Solução: Por um lado já sabemos que $\ln[(-1 - \mathrm{i}).(1 - \mathrm{i})] = \ln(-2) = \ln 2 + i\pi$. Por outro lado.

$$\ln(-1 - \mathrm{i}) = \ln|-1 - \mathrm{i}| + \mathrm{i.arg}(-1 - \mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + i\frac{5}{4}\pi$$

e

$$\ln(1 - \mathrm{i}) = \ln|1 - \mathrm{i}| + \mathrm{i.arg}(1 - \mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + i\frac{7}{4}\pi$$

Logo

$$\ln[(-1 - \mathrm{i}).(1 - \mathrm{i})] = \ln(-1 - \mathrm{i}) + \ln(1 - \mathrm{i})\ (mod 2\pi).$$

$$\ln[(-1-\mathrm{i}).(1-\mathrm{i})] = \ln\sqrt{2} + i\frac{5}{4}\pi + \ln\sqrt{2} + i\frac{7}{4}\pi$$

$$\ln[(-1-\mathrm{i}).(1-\mathrm{i})] = \ln\left(\sqrt{2}\right)^2 + \mathrm{i}(3\pi)$$

$$\ln[(-1-\mathrm{i}).(1-\mathrm{i})] = \ln 2 + \mathrm{i}\pi.$$

Portanto as propriedades de logaritmos que eram válidas nos números reais positivos também continuam sendo válidas para logaritmos de números complexos, desde que esteja definido um ramo principal.

Observação 2: As demais propriedades ficam como exercício para casa, como por exemplo, temos: $\ln(z/w) = \ln z - \ln w\ (mod 2\pi)$; $\ln(z)^n = n \ln z\ (mod 2\pi), \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

7. Encontrar uma fórmula para calcular o logaritmo de número negativo em uma base $1 \neq a > 0$ qualquer.

Sabemos que a função $\ln \mathrm{z} = \ln|z| + i.arg(z)$, Onde $arg(z) = \theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi\,[$ é chamada um ramo da função logarítmica, então pela propriedade de mudança de base temos que

$$\ln(-x) = \frac{\log_a(-x)}{\log_a(e)}, \forall\, x \in \mathbb{R}_*^+,$$
$$\log_a(-x) = \ln(-x) . \log_a(e),$$
$$\log_a(-x) = [\ln x + i\pi]. \log_a(e),$$
$$\log_a(-x) = \ln x . \log_a(e) + i\pi. \log_a(e).$$

Logo pela propriedade mudança de base, $\log_a(x) = \ln x . \log_a(e)$, então,

$$\log_a(-x) = \log_a(x) + i\pi. \log_a(e), \forall\, x \in \mathbb{R}_*^+.$$

Exemplo 4. Calcule $\log_2(-2)$, no ramo $[0, 2\pi[$.

Solução: Já sabemos que $\log_a(-x) = \log_a(x) + i\pi. \log_a(e), \forall\, x \in \mathbb{R}_*^+$ onde $1 \neq a > 0$, então:

$$\log_2(-2) = \log_2(2) + i\pi. \log_2(e),$$
$$\log_2(-2) = 1 + i\pi. \log_2(e).$$

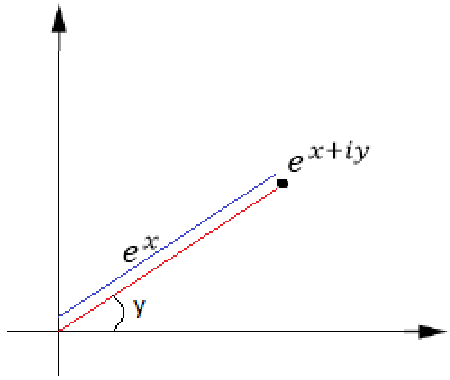
8. Representação geométrica de e^z no $\mathbb{R}^2$.

Da maravilhosa fórmula de Euler e de um número complexo $z = x + iy$ arbitrário, resulta que,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x[\cos(y) + isen(y)], \text{ isto é,}$$
$$e^z = e^x[\cos(y) + isen(y)].$$

Lembrando a **representação geométrica** dos números complexos no plano de Gauss, então e^x é à distância do ponto e^{x+iy} até a origem, e y é o ângulo compreendido entre o eixo das abscissas e o segmento e^x no sentido anti-horário, podemos então concluir que todo número complexo $w \neq 0$, pode ser escrito na forma e^z para algum $z \in \mathbb{C}$. Então a representão geométrica de e^z é:

Figura 17 – Representação geométrica da função $e^z = e^{x+iy}$.



Fonte: Lima (2012), p.221

Portanto chegamos à conclusão que a solução genial de Euler, foi crucial para resolver de uma vez por toda a controvérsia entre os senhores Leibniz e Johann Bernoulli, pois:

I. $e^{\ln w} = w$, como queria Leibniz;

II. $\ln(w.z) = \ln(w) + \ln(z)$, conforme pretendia Johann Bernoulli.

9. Aplicar a atividade 4 e fazer a análise de aprendizagem

Essa atividade 4 vai ser aplicada para que seja possível verificar se houve êxito na aprendizagem dos alunos, comparando com a atividade 3. Além dessa atividade 4, vamos também avaliar o aluno continuamente durante a aplicação do projeto, pois a atenção e comprometimento dos mesmos é fundamental para uma boa aprendizagem.

APÊNDICE B – Atividades.

Atividade 1

1º) Explique os seguintes paradoxos:

a) Se $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}, \forall\ a, b \in \mathbb{R}^+$, $i^2 = -1$, então,

$$-1 = i^2 = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Logo

$$-1 = 1.$$

b) Se $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \forall\ a \in \mathbb{R}^+\ e\ b \in \mathbb{R}^+_*$, então

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$$

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$

$$\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = \sqrt{1}.\sqrt{1}.$$

Portanto

$$-1 = 1.$$

2º) Pela definição de radiciação de um número real sabemos que:

- Se n é um número natural ímpar então $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$;
- Se n é um número natural par então $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$, para qualquer $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Então de acordo com a definição acima e considerando os números reais como domínio da função, Marque “V” para verdadeiro e “F” para falso.

a) ( ) $\sqrt[3]{-1} = -1$

b) ( ) $\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$

c) ( ) $\sqrt{(-3)^2} = 3$

d) ( ) $\sqrt{(-3)^2} = -3$

e) ( ) Como $(3)^2 = (-3)^2 = 9$, então $\sqrt{9} = \pm 3$

3º) Para que valores reais de x têm-se:

a) $\sqrt{x^2} = x$?

b) $\sqrt{x^2} = -x$?

c) $\sqrt{x^2} = |x|$?

4º) Conforme algumas propriedades envolvendo a radiciação, temos que $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$. Para quais números reais "a" e "b" essa propriedade é válida?

5º) Obtenha o valor de x na igualdade:

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

6º) Qual a solução real para $x^2 - 4x + 13 = 0$?

7º) Qual a solução complexa para $x^2 - 4x + 13 = 0$?

Atividade 2

1º) (FCMSC-SP) O valor de $\log_{\sqrt[4]{4}}(\log_{\sqrt[4]{4}} \sqrt[4]{\sqrt[4]{4}})$ é

a) -4
b) 0
c) 1
d) $\sqrt[4]{4}$
e) 4

2º) Estima-se que a população de certa cidade cresça 3% a cada 8 anos.

a) Qual é o crescimento estimado para um período de 24 anos?
b) Qual equação relaciona essa população em função do tempo?

3º) (UFSC) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ uma função exponencial definida por $f(x) = (1/2)^{-x}$, então as proposições:

I. $f(x)$ é crescente;
II. $f(x)$ é decrescente;
III. $f(3) = 8$;
IV. $(0,1) \in f(x)$.

Podemos afirmar que

a) Somente II é falsa.
b) Todas são falsas.
c) II e III são falsas.
d) Somente III e IV são verdadeiras.

4º) (FUVEST-SP) O número real $x > 1$, tal que $\log_x 2 = \log_4 x$ é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $2^{\sqrt{2}}$

c) $\sqrt{2}$

d) $2\sqrt{2}$

e) $4^{\sqrt{2}}$

5º) Mostre que $a^{\log_a n} = n$, para qualquer $a > 0$, $1 \neq a$ e $n > 0$.

6º) Sejam a e b números reais positivos. Qual relação entre a e b que torna verdadeira a igualdade:

$$\log(a + b) = \log a + \log b.$$

7º) Tendo o conjunto solução como o conjunto dos números reais. Obtenha o conjunto solução da seguinte equação logarítmica:

$$8.x^{\log_2 x} = x^4.$$

8º) Se $\log_a \theta = \log_a \beta$, para $a > 0$ e $a \neq 1$, então para quais números reais teremos que $\theta = \beta$.

9º) Explique o paradoxo seguinte, que tanto perturbou os matemáticos do tempo de Euler:

Seja $x \in \mathbb{R}_*^+$. Se $(-x)^2 = x^2$, então $\ln(-x)^2 = \ln x^2$, logo $2\ln(-x) = 2\ln(x)$, daí:

$$\ln(-x) = \ln(x).$$

Atividade 3

1º) Logaritmos de números negativos existem?

2º) Logaritmos de números imaginários (ou seja, números complexos) existem?

3º) Encontre uma solução real para os logaritmos dos números abaixo, caso não exista o logaritmo, explique porque não existe.

a) $\log_2 2 =?$

b) $\ln 1 =?$

c) $\log_2(-2) =?$

d) $\ln(-1) =?$

4º) Sabemos que no conjunto dos números reais, $\log 3 \cong 0{,}477$, quanto vale aproximadamente, no conjunto dos números complexos, $\log(-3)$, no ramo $[-\pi, \pi[$?

5º) Porque no primeiro ano do ensino médio vemos que a função logarítmica está definida apenas para números reais positivos?

6º) Se o logaritmo de $\ln(-1)$ existir, então a solução é única?

7º) Se o logaritmo de $\ln(-1)$ existir, no ramo $[-\pi, \pi[$, então a solução é única?

8º) Se o logaritmo de $\ln(-1)$, existir, no ramo $[-\pi, \pi[$, então a solução é um número real?

9º) Se o logaritmo de $\ln(-1)$, existir, no ramo $[-\pi, \pi[$, então a solução é um número complexo?

10º) Para qualquer x real positivo, é possível encontrar uma solução real para $\ln(-x)$?

11º) Para qualquer x real positivo, é possível encontrar uma única solução complexa para $\ln(-x)$?

12º) Para qualquer x real positivo, é possível encontrar infinitas soluções complexas para $\ln(-x)$?

13º) Seja x um número real positivo. Analisando $\ln(-x)$ no ramo $[-\pi, \pi[$. Marque "V" para verdadeiro e "F" para falso.

a) ( ) Existe uma solução real para $\ln(-x)$;

b) ( ) Existe uma solução complexa para $\ln(-x)$;

c) ( ) Não existe solução real para $\ln(-x)$;

d) ( ) Não existe solução complexa para $\ln(-x)$.

14º) Vocês já relacionaram o conteúdo de números complexos com qualquer outro conteúdo de matemática do ensino médio?

15º) Sabemos que para qualquer x real positivo, é possível encontrar um único logaritmo real. Mas para qualquer x real positivo, é possível encontrar um único logaritmo imaginário?

Atividade 4

1º) Logaritmos de números negativos existem?

2º) Logaritmos de números imaginários (ou seja, números complexos) existem?

3º) Encontre uma solução real para os logaritmos dos números abaixo, caso não exista o logaritmo, explique porque não existe.

a) $\log_2 2 =?$

b) $\ln 1 =?$

c) $\log_2(-2) =?$

d) $\ln(-1) =?$

4º) Sabemos que no conjunto dos números reais, $\log 3 \cong 0{,}477$, quanto vale aproximadamente, no conjunto dos números complexos, $\log(-3)$, no ramo $[-\pi, \pi[$?

5º) Porque no primeiro ano do ensino médio vemos que a função logarítmica está definida apenas para números reais positivos?

6º) Se o logaritmo de $\ln(-1)$ existir, então a solução é única?

7º) Se o logaritmo de $\ln(-1)$ existir, no ramo $[-\pi, \pi[$, então a solução é única?

8º) Se o logaritmo de $\ln(-1)$, existir, no ramo $[-\pi, \pi[$, então a solução é um número real?

9º) Se o logaritmo de $\ln(-1)$, existir, no ramo $[-\pi, \pi[$, então a solução é um número complexo?

10º) Para qualquer x real positivo, é possível encontrar uma solução real para $\ln(-x)$?

11º) Para qualquer x real positivo, é possível encontrar uma única solução complexa para $\ln(-x)$?

12º) Para qualquer x real positivo, é possível encontrar infinitas soluções complexas para$\ln(-x)$?

13º) Seja x um número real positivo. Analisando $\ln(-x)$ no ramo $[-\pi, \pi[$. Marque "V" para verdadeiro e "F" para falso.

a) ( ) Existe uma solução real para $\ln(-x)$;

b) ( ) Existe uma solução complexa para $\ln(-x)$;

c) ( ) Não existe solução real para $\ln(-x)$;

d) ( ) Não existe solução complexa para $\ln(-x)$.

14º) Vocês já relacionaram o conteúdo de números complexos com qualquer outro conteúdo de matemática do ensino médio?

15º) Sabemos que para qualquer x real positivo, é possível encontrar um único logaritmo real. Mas para qualquer x real positivo, é possível encontrar um único logaritmo imaginário?

16º) Quem foi o matemático que utilizou o conceito de função exponencial (de números reais) para argumentar que não existem logaritmos reais de números negativos?

17º) Os matemáticos do século XVIII Leibniz e Johann Bernoulli, discutiram bastante sobre a existência ou não de logaritmo real de números negativos, mas qual dos dois afirmava que $\ln(-1) = 0$

18º) Mostre que a igualdade $\ln(-x) = \ln(x)$ no ramo $[0, 2\pi[$, para todo x real não nulo é falsa, pois a equação $\ln(x) = y_1$ tem solução real e a equação $\ln(-x) = y_2$ tem solução complexa.

19º) As ideias de Leibniz e Bernoulli pareciam ser opostas, mas para quais valores reais de x podemos aplicar os conceitos de Leibniz e Bernoulli para que seja válida a igualdade no conjunto dos números reais.

$$a^{\log_a x} = x.$$

20º) Conforme as propriedades de funções logarítmicas e exponenciais, sabemos que é válida a seguinte propriedade $a^{\log_a x} = x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}_*^+$. Essa mesma propriedade poderá ser válida para os números imaginários, ou seja, $a^{\log_a x} = x$ para qualquer $x \in \mathbb{C}$?

21º) Quem foi o matemático que utilizou o conceito de função exponencial (de números complexos) para mostrar que existem logaritmos reais de números negativos?

APÊNDICE C – Comentários a Respeitos das Atividades.

Na primeira e segunda atividade a turma irá ser distribuída em cinco grupos, onde para primeira atividade teremos que as cinco primeiras questões desta atividade vão ser sorteadas para cada equipe. Já na segunda atividade não vamos separar apenas as cinco primeiras questões para o sorteio, mas todas as questões farão parte do sorteio. As demais questões não sorteadas serão respondidas pelo professor. Os alunos terão que indicar alguém do grupo para fazer a exposição da questão do seu grupo.

A estratégia da proposta da atividade três vai ser um pouco diferente das demais, porque primeiro iremos aplicar a terceira atividade, com objetivo de sondar o conhecimento dos alunos sobre logaritmos de número complexo não nulo, em particular sobre logaritmos de números negativos. Para só então aplicarmos os tópicos da sequência didática do terceiro encontro (apêndice A).

A quarta atividade servirá mais de análise de aprendizagem, pois, a maioria das questões vão ser da atividade 3, onde as perguntas da atividade 3, ajudou a criar o tema motivador da sequência didática.

O professor servirá como mediador do conhecimento, ele não vai ser detentor absoluto do saber, mas como alguém que irá colaborar com o educando na construção do conhecimento. Logo caso haja, dúvidas nas questões propostas, o professor não irá dá resposta pronta, mas sim mostrar o caminho para que o aprendiz encontre a resposta.

Comentário da Atividade 1

A primeira questão é proposta para que os discentes possam aplicar a definição de paradoxo em matemática e encontrar o possível erro, na operação dada sobre radiciação.

A segunda questão é proposta para levar os estudantes a relembrar a definição de radicais com índice par e índice ímpar.

A terceira questão é proposta com o objetivo de fazer um paralelo entre radicais de índice par e equação modular.

A quarta questão é proposta com objetivo de fixar que a propriedade $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$ só será válida para, a e b números reais não nulo.

A quinta questão é proposta com o objetivo de mostrar uma forma diferente de uma equação do segundo grau, pois os discentes estão acostumados a vê a equação do segundo grau de forma direta.

A sexta e sétima questões são colocadas para que os alunos relembrem o conceito de conjunto solução de um determinado conjunto universo, como por exemplo, temos a equação da sexta questão não há solução para o conjunto dos reais, mas a mesma equação haverá solução para o conjunto dos números complexos.

É importante destacar que o principal objetivo desta atividade é fazer com que os discentes compreendam a definição de paradoxo e tornem-se críticos na análise de certas operações matemáticas. Nessa atividade trataremos do significado de paradoxo para que junto com as definições de existência de logaritmos possamos concluir que a igualdade $\ln(-x) = \ln(x)$ é uma contradição para qualquer x real positivo.

Um ponto importante desta atividade é que a segunda, terceira e quarta questão foi colocada para auxiliar os alunos a compreender melhor o porquê da contradição na primeira questão, pois, caso haja alguém que não tenha entendido o paradoxo, essas questões irão ajudá-lo a compreender onde está o erro da operação matemática.

Comentário da Atividade 2

A primeira questão é proposta com objetivo de se aplicar as propriedades de logaritmos e radiciação.

A segunda questão é colocada para se colocar em prática o conceito de caracterização de função exponencial, pois, mesmo que a questão não fale nada nem defina fórmula é possível saber se é ou não função exponencial, devido a sua caracterização.

A terceira questão é proposta com objetivo de levar o educando a identificar algumas propriedades de função exponencial.

A quarta questão é proposta para que os discentes possam aplicar a propriedade mudança de base dos logaritmos, pois, essa propriedade é importante em nosso trabalho.

A quinta questão é proposta com objetivo de fazer o aluno se familiarizar com demonstrações de propriedades e não apenas com as memorizações aos quais estão acostumados. Além disso, essa propriedade foi um dos entraves entre as discussões dos matemáticos Leibniz e Johann Bernoulli, conforme pode ser visto em um dos tópicos do terceiro encontro (no apêndice A).

A sexta questão foi proposta porque o educando está acostumado a vê a propriedade fundamental dos logaritmos de transformar produto em soma, mas essa questão é proposta com objetivo de mostrar que é sim possível fazer com que o logaritmo da soma de dois números reais positivos e não nulo seja igual à soma dos logaritmos desses números, mas para isso acontecer é preciso existir uma relação entre esses dois números. Um exemplo que satisfaz a essa relação é tomando esse dois números iguais ao número dois, ou seja, $\log_a(2+2) = \log_a 2 + \log_a 2$.

A sétima questão foi colocada para mostrar que só é possível encontrar o conjunto solução para escolha de uma base apropriada, satisfazendo a condições de existência para logaritmos de números reais positivos.

A oitava questão foi proposta para mostrar que para o conjunto dos números reais essa igualdade só será possível se $\theta > 0$, $\beta > 0$, caso contrário essa igualdade não será válida, ou seja, $\theta = \beta \Leftrightarrow \log_a \theta = \log_a \beta$, desde que $\theta > 0, \beta > 0, a > 0$ e $a \neq 1$.

A nona questão foi colocada para abordar mais uma vez o conceito de paradoxo e também para antecipar que esse paradoxo vai ser tomado como verdade por um dos matemáticos, conforme um dos tópicos do apêndice A.

É necessário destacar que o principal objetivo desta atividade é utilizar as definições e propriedades de logaritmos para mostrar que a igualdade $\ln(-x) = \ln(x)$ é um paradoxo e que essa igualdade foi tomada como verdade por alguns matemáticos do século XVIII.

Outro ponto importante dessa atividade é que a sétima e oitava questão irá servir de base para um melhor entendimento da contradição da nona questão.

A igualdade $\ln(-x) = \ln(x)$ é incoerente para todo número real positivo, conforme vimos na nona questão, mas no quarto encontro desta sequência didática iremos mostrar que essa igualdade continuará sendo falsa para todo x real não nulo, ou seja, quando analisarmos a solução no conjunto dos números complexos e restringindo os logaritmos complexos a um determinado ramo de largura 2π.

Comentário da Atividade 3

A primeira questão é ponto crucial para nossa sequência didática, pois muitos alunos terminam o ensino médio e não sabem ou não tem certeza se existe ou não logaritmos de números reais negativos. Logo essa questão foi colocada com objetivo de fazer os alunos refletirem sobre essa pergunta, pois, espera-se que o educando responda que não existe solução para o logaritmo de número real negativo. Sendo que a resposta existe ou não existe solução, ambas estão corretas, pois na questão não definirmos em que conjunto queremos a solução (conjunto dos números reais ou conjunto dos números complexos). Veremos na proposta da sequência didática que se o conjunto solução estiver contido no conjunto dos números reais, então a resposta será "*não existe solução*". Agora se tiver contido no conjunto dos números complexos então a resposta será "*existe solução*". Portanto a melhor resposta para a primeira pergunta será "*pode existir ou não, pois, depende do conjunto solução universo escolhido*".

Na terceira questão espera-se que os estudantes encontrem solução para as duas primeiras alternativas, ou seja, (a) e (b), mas para as duas últimas alternativas, informe que não existe solução, porque não existe solução para logaritmos de números negativos.

A quinta questão foi proposta com objetivo de fazer os alunos refletirem que a função logarítmica é a inversa da função exponencial, logo só podemos definir logaritmos para os números reais positivos.

A décima quarta questão foi proposta com objetivo de fazer os discentes refletirem que os números complexos podem ser correlacionados com outros conteúdos do ensino médio, como por exemplo, temos geometria (envolvendo triângulo e comprimento de segmento); função modular e também trigonometria, onde a forma polar do número imaginário será de grande importância para concluí que existe sim logaritmos dos números reais negativos, através da fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.

Para as demais questões espera-se que os discentes respondam que não existe solução para os determinados logaritmos, ou deixa as questões em branco, sem nenhuma resposta.

O principal objetivo dessa atividade é sondar o conhecimento prévio dos alunos sobre logaritmos de número complexo não nulo, em particular dos logaritmos de números reais negativos, pois essa particularidade é o eixo motivador da nossa sequência didática.

Comentário da Atividade 4

A décima sexta e décima sétima questão foram colocadas para que o educando venha fixar no contexto histórico da sequência didática e não apenas em fórmulas, definições e teoremas.

A décima oitava questão foi proposta com o principal objetivo de mostrar que a igualdade que é considerada um paradoxo para todo x real positivo, continua sendo falsa para todo x real não nulo. Apesar de que agora podemos encontrar uma solução complexa para a equação $\ln(-x) = y$, desde que seja restringido a um ramo de largura 2π. Ou seja, uma questão pode não ter solução no conjunto dos números reais, mas poderá haver solução quando ampliamos para um conjunto maior, como por exemplo, o conjunto dos números complexos.

A décima nona questão foi colocada para testar à atenção dos estudantes durante as aulas, pois essa questão deverá ser apresentada e discutida em um dos tópicos do terceiro encontro.

A vigésima questão é uma questão muito interessante, pois, apenas aqueles alunos que entenderam e assimilaram a sequência didática é que irão responder com segurança. Porque essa questão pode ter mais de uma resposta, ou seja, vai depender da restrição ou não do ramo principal da função logarítmica $L: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $\ln z = \ln|z| + i.arg(z)$, Onde $arg(z) \in [y_0, y_0 + 2\pi\,[$. Esta função é chamada um ramo da função logaritmo. Logo a igualdade será verdadeira se restringirmos um ramo da função logarítmica, caso contrário essa igualdade é falsa.

Esta atividade terá como objetivo principal, a análise da aprendizagem do educando, já que a maioria das questões são da atividade 3. Espera-se que todas as questões da quarta atividade que também está na terceira atividade sejam todas respondidas, pois esse é um dos itens que iremos utilizar para avaliar se houve ou não aprendizagem. Além desse questionário, iremos também utilizar a avaliação contínua, pois a participação e interesse do educando durante a aula é de fundamental importância para êxito na aplicação da sequência didática.

ANEXO

As Séries de Taylor e de Maclaurin

As séries de Taylor e de Maclaurin contribuíram bastante para que o matemático Leonard Euler elaborasse a famosa equação de Euler ($e^{\theta i} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$). A seguir está definido a série de Taylor.

Definição: Seja $\mathrm{f}\colon \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função infinitas vezes derivável em I e seja $a \in I$. A série infinita

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{f(a)} + \mathrm{f}'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

é chamada *série de Taylor* da função f no ponto a.

Quando $a = 0$, a série de Taylor da função f centrada em a, recebe um nome especial, ou seja, fica conhecida como *série de Maclaurin*.

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{f}(0) + \mathrm{f}'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Como as funções $g(x) = e^x$, $\mathrm{f(x)} = \mathrm{sen}\,x$ e $\mathrm{m}(x) = \cos x$ são infinitas vezes deriváveis, então conforme a série de Maclaurin temos,

Como $g(x) = e^x$, então $g^{(n)}(x) = e^x$, assim $g^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n. Portanto a série de Maclaurin da função $g(x) = e^x$ é:

$$e^x = \mathrm{g}(0) + \mathrm{g}'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{n!}.$$

Como $\mathrm{f(x)} = \mathrm{sen}\,x$, então$f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\,\mathrm{sen}\,x$, $f'''(x) = -\cos x$, $\mathrm{f}^4(\mathrm{x}) = \mathrm{sen}\,x$. Derivando sucessivamente vemos que os valores da derivada se repete em ciclo de período 4, de tal forma que $\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(0) = 0$ se n for par e $\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(0)$ alterna entre 1 e -1 quando n é ímpar. Portanto da série de Maclaurin $\mathrm{f(x)} = \mathrm{f}(0) + \mathrm{f}'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ temos:

$$\mathrm{sen}\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

De maneira análoga concluímos que se $\mathrm{m(x)} = \cos x$, então:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$