2016: DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

A Hipótese de Riemann:
os Zeros de uma Região Retangular Complexa

Stênio Vidal Leite Ribeiro de Menezes [1]
Jorge Andrés Julca Avila[2]

Resumo: A Hipótese de Riemann trata especificamente de uma função (Zeta) intimamente ligada aos números primos, sua distribuição ao longo dos conjuntos numéricos, a frequência com que surgem à medida que avançamos nesses conjuntos e a probabilidade de que um número Natural aleatório seja primo ou não. Este trabalho estuda a Hipótese de Riemann, e apresenta uma demonstração da fórmula que estima assintoticamente o número de zeros não-triviais, da função Zeta, que existem em uma região retangular do plano complexo, segundo [3].

Palavras-chave: Teoria de Números. Números Primos. Teorema Fundamental da Aritmética. Distribuição dos Números Primos. Continuação Analítica. A Função Zeta de Riemann. Teorema dos Números Primos. Produto de Euler. A Hipótese de Riemann. Análise Complexa. Raízes da Função Zeta de Riemann.

1 Introdução

Os números primos sempre instigaram a mente dos matemáticos ao longo da história. Eratóstenes, ainda no terceiro século antes de Cristo, já buscava uma forma de obtê-los com seu *"Crivo"*. O maior livro de matemática da história, *"Os Elementos"* de Euclides ($\pm$ 300 a.C.) já tratava desses curiosos números em suas proposições.

A *"Hipótese de Riemann"*, por sua estreita ligação aos números primos, é uma das conjecturas que mais desafiou os matemáticos no último século e meio. Desde sua primeira publicação em 1859, inúmeros profissionais e amadores já se dedicaram à tentativa, até hoje infrutífera de transformá-la em mais um teorema no arcabouço da matemática.

Nesse trabalho, demonstraremos a fórmula assintótica dada por Riemann para o cálculo do número de raízes não triviais de sua função Zeta, cerne de sua Hipótese.

Começamos pela base teórica para a definição do que são os números primos e suas principais características no estudo da teoria dos números. Por fim atacamos a hipótese de Riemann, acompanhamos a construção da formulação de sua função, algumas versões do Teorema dos Números Primos e as ligações entre uns e outros até demonstrarmos o

[1]Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2014, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, stenio.vidal@gmail.com
[2]Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, avila_jaj@ufsj.edu.br

Teorema Principal que trata sobre uma estimativa assintótica para o número de raízes da função Zeta.

2 Resultados Preliminares

Serão abordados algumas propriedades, conceitos e/ou definições sobre os números primos, algumas definições sobre as notações ou funções usadas neste trabalho e, também, a importância do Teorema dos Números Primos - TNP, com a finalidade da compreensão do teorema principal desse trabalho.

2.1 Os Números Naturais e os Números Primos

Todo o estudo dos números e suas possíveis relações tem início no processo concreto de contagem. Quando contamos utilizamos uma sequência de números compreendidos intuitivamente e que podemos organizar em um conjunto que iremos chamar de Números Naturais, que é denotado por $\mathbb{N}$.

Em seu livro "*Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*" de 1889 Giuseppe Peano (1858-1932) estabelece axiomas para a aritmética dos Naturais [18]. Podemos apresentar o conjunto dos números Naturais de forma esquemática e simbólica por enumeração de seus elementos, assim:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Teorema 2.1 (Divisão Euclidiana) *Na divisão de m por n, com m maior do que n existem q e r, únicos e tais que*

$$m = nq + r, \quad r < n$$

Demonstração:

- Considere o conjunto $S = \{x = m - k \cdot n \ ; \ k \in \mathbb{N} \ e \ k \cdot n \leq m\}$
- $S \neq \{ \ \}$ pois, para $k = 1$ temos $x_1 = m - n$ e $x_1 \in S$
- Pelo Princípio da Boa Ordenação S possui um menor elemento r para um determinado valor de $k = q$ tal que $r = m - q \cdot n$
- Suponha que $r \geq n$, o que contradiz nossa hipótese.
- Logo $r - n = t$ assim $t < r$ e $t \in S$ pois $t = m - (q + 1) \cdot n$ o que contradiz o fato de r ser o menor elemento de S logo, $r < n$.
- Suponhamos agora que existem $r_1 < r_2 < n$ e tais que, $m = n \cdot q_1 + r_1 = n \cdot q_2 + r_2$
- Note que $n > r_2 - r_1 = n \cdot (q_1 - q_2)$ o que só é possível se $q_1 = q_2$ e, consequentemente, $r_1 = r_2$.

□

Definição 2.1 (Divisibilidade) Dizemos que a divide b se existe c, tal que $b = a \cdot c$.

Escrevemos $a|b$ quando a divide b e escrevemos $a \nmid b$ quando a não divide b.

Definição 2.2 (Máximo Divisor Comum - MDC) d é o máximo divisor comum de a e b se $d|a$, $d|b$ e, para todo c tal que $c|a$ e $c|b$, então $c|d$. Denotamos: $(a, b) = (b, a) = d$

Teorema 2.2 (Combinação Linear) *Seja $a < b$ e $(a, b) = d$ é sempre possível encontrar m e n, tais que, $ma - nb = d$*

Demonstração: Como $(a, b) = d$, e utilizando o Algoritmo de Euclides, [18] [3], temos

$$d = r_i$$

$$r_i = r_{(i-2)} - r_{(i-1)}q_i \tag{i}$$

$$r_{(i-1)} = r_{(i-3)} - r_{(i-2)}q_{(i-1)} \tag{ii}$$

$$r_{(i-2)} = r_{(i-4)} - r_{(i-3)}q_{(i-2)} \tag{iii}$$

Substituindo (ii) em (i), obtemos

$$\begin{aligned} r_i &= r_{(i-2)} - (r_{(i-3)} - r_{(i-2)}q_{(i-1)})q_i \\ &= r_{(i-2)}(1 + q_{(i-1)}q_i) - r_{(i-3)}q_i \end{aligned} \tag{iv}$$

Substituindo (iii) em (iv), obtemos

$$\begin{aligned} r_i &= (r_{(i-4)} - r_{(i-3)}q_{(i-2)})(1 + q_{(i-1)}q_i) - r_{(i-3)}q_i \\ &= r_{(i-4)}(1 + q_{(i-1)}q_i) - r_{(i-3)}(q_{(i-2)} + q_{(i-2)}q_{(i-1)}q_i - q_i) \end{aligned}$$

Da primeira e da última equação, sem perda de generalidade, podemos escrever:

$$d = r_{(i-4)}m_1 - r_{(i-3)}n_1$$

Repetindo o mesmo processo para os valores de r_k com $k < i - 2$ e substituindo sempre na equação resultante de r_i anterior, chegamos à primeira equação da divisão de Euclides, no processo do cálculo do MDC, onde encontraremos os valores de m e n, tais que, $d = ma - nb$ □

[3] Algoritmo de Euclides para determinação do MDC de a e b :

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_{i-1}	q_i	q_{i+1}
b	a	r_1	r_2	$\cdots$	r_{i-2}	r_{i-1}	$r_i = (a, b)$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_i		

Teorema 2.3 *Se $c|ab$ e $(a, c) = 1$ então $c|b$*

Demonstração:

- Se $c|a \cdot b$ então $a \cdot b = c \cdot k$
- Se $a < c$ Pelo Teorema 2.2 temos que: $m \cdot a - n \cdot c = 1$
- Analogamente, se $c < a$ temos que: $p \cdot c - q \cdot a = 1$
- Multiplicando ambos os termos da igualdade por b teremos:
  $m \cdot a \cdot b - n \cdot c \cdot b = b \quad ou \quad p \cdot c \cdot b - q \cdot a \cdot b = b$
- Como $a \cdot b = c \cdot k$ temos:
  $m \cdot c \cdot k - n \cdot c \cdot b = b \quad ou \quad p \cdot c \cdot b - q \cdot c \cdot k = b$
  $b = c \cdot (m \cdot k - n \cdot b) \quad ou \quad b = c \cdot (p \cdot b - q \cdot k) \Rightarrow \ c|b$

□

Definição 2.3 (Fatorar) Fatorar um número é determinar dois ou mais números, exceto o 1, que é o elemento neutro da multiplicação, que multiplicados resultam o número dado.

Definição 2.4 (Número composto) Número composto é todo número que possui divisores próprios, isto é, diferentes da unidade e dele mesmo, sendo assim possível fatorá-los.

Definição 2.5 (Número Primo) Números Primos são todos os números diferentes da unidade e que não possuem divisores próprios, ou seja, diferentes da unidade e dele mesmo.

Podemos também reescrever essa definição de forma equivalente como:

Definição 2.6 (Número Primo - alternativa) Números Primos são todos os números diferentes da unidade e que não podem ser fatorados.

Existe apenas um único primo par e é o menor dos primos, 2, pois todos os demais números pares são divisíveis por ele, logo compostos.
O conjunto dos números primos são conhecidos desde a antiguidade e denota-se por $\mathcal{P}$. Os primeiros elementos desse conjunto estão listados abaixo:

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$$

Teorema 2.4 (Infinitude dos primos) *O conjunto $\mathcal{P}$, dos Números Primos, é infinito.*

Demonstração:

- Suponhamos que o conjunto de números primos, $\mathcal{P}$, seja finito. O que contradiz nossa hipótese inicial.
- Logo o conjunto $\mathcal{P}$ é tal que: $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 1.., k\}$ onde k é o último e maior número primo.

- Façamos os números $M = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot ... \cdot k$ produto de todos os primos que existem e $N = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot k) + 1$ que são obviamente maiores que k e por isso não podem ser primos.

- Se N não é primo, então é divisível por um primo p qualquer pertencente a $\mathcal{P}$. Como M também é divisível por p teremos pela distributividade da divisão em relação à subtração que: $(N \div p) - (M \div p) = (N - M) \div p = 1 \div p$

- Como a diferença entre N e M é 1, isso significa que p , um número primo, é divisor de 1. O que é um absurdo pois 1 não possui divisores.

- Portanto a suposição de que o conjunto $\mathcal{P}$ dos números primos é finito não pode ser verdadeira e isso comprova que este conjunto é, de fato, infinito.

$\square$

Definição 2.7 (Fatoração em Números Primos) Fatoração em Números Primos é determinar uma fatoração de um número dado utilizando como fatores apenas números primos.

Teorema 2.5 (Divisibilidade por Primos) *Se p é um número primo e $p|(ab)$ então $p|a$ ou $p|b$.*

Demonstração:

- Basta provar que se $p|ab$ e $p \nmid a$ então $p|b$. Todas as demais situações se tornam obvias

- Mas se $p \nmid a$ e p é primo, temos que $(p, a) = 1$. Logo, pelo Teorema 2.3 $p|b$

$\square$

Teorema 2.6 *Se $p, p_1, p_2, ..., p_n$ são números primos e $p|p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n$ então $p = p_i$ para algum $i = 1, 2, ..., n$*

Demonstração:

- Pelo Teorema 2.5 se p, primo, divide um produto, então ele divide algum de seus fatores. Digamos que $p|p_k$ para $1 \leq k \leq n$

- Como p_k é primo, seus únicos divisores são a unidade ou ele mesmo

- Mas como p é primo, temos que $p \neq 1$. Logo, $p = p_k$

$\square$

Teorema 2.7 (Teorema Fundamental da Aritmética - TFA) *Para todo,* $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$ *, ou* n *é primo ou* n *pode ser fatorado em números primos de maneira única.*

Demonstração:

- Se $n = 2$, obviamente o teorema é válido, pois 2 é primo
- Suponhamos que o resultado seja válido para todo número menor que n
- Ou n é primo e nada há que precise ser demonstrado
- Ou n é composto, logo é fatorável
- Suponhamos $n = a \cdot b$, logo $a < n$ e $b < n$ portanto, pela hipótese de indução temos $a = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$ e $b = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_t$
- Logo, substituindo a e b teremos $n = a \cdot b = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_t$ que é uma fatoração em primos para n
- Suponhamos, agora, que existam duas fatorações em primos distintas para n: $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k = n = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_t$
- Como $p_1 | n \Rightarrow p_1 | q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_t$
- Pelo Teorema 2.6 $p_1 = q_i$ para algum i entre 1 e t
- Reordenando os fatores q_i podemos fazer $p_1 = q_1$
- Repetimos o processo para p_2, depois para $p_3, ..., p_k$
- Assim concluímos facilmente que $k = t$ e que p_j e q_i são iguais aos pares.

$\square$

2.2 Funções Reais e Aproximação Assintótica

Define-se algumas funções reais e aproximação assintóticas.

Definição 2.8 (Função Theta de Jacobi) Para todo $x > 0$, definimos a função $\vartheta(t)$ por

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x} \tag{1}$$

Proposição 2.1 (Equação Funcional para $\vartheta(x)$) *Para todo* $x > 0$*,*

$$x^{1/2} \vartheta(x) = \vartheta(x^{-1}) \tag{2}$$

Demonstração: A prova desta proposição encontra-se em [2].

A seguinte função é devido a Gauss.

Definição 2.9 (Função Integral Logarítmica)

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \tag{3}$$

Definição 2.10 (Big O) Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas em um mesmo conjunto universo e com interseção dos seus domínios diferente de vazio, temos

$$f(x) = g(x) + O(h(x)) \iff \exists k > 0 \wedge \exists x_0;\ |f(x) - g(x)| \leq k|h(x)|,\ \forall x > x_0 \tag{4}$$

***Observação* 2.1**

(a) A primeira parte de (4) lê-se: $f(x)$ é igual a $g(x)$ mais " big"O de $h(x)$.

(b) Quando $g(x) = 0$ denotamos $f(x) = O(h(x))$ ou $f \ll h$ (lê-se: f é muito menor que h).

(c) $f = O(h)$ significa que o crescimento de f é assintoticamente delimitado por h.

Definição 2.11 (Igualdade Assintótica) Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$ definidas em um mesmo conjunto universo e com interseção dos seus domínios diferente de vazio, temos

$$f \sim g \iff \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{5}$$

A primeira parte lê-se: f é assintoticamente igual a g.

2.3 Os Números Complexos

Define-se os números complexos e algumas funções complexas, assim como, também, os conceitos de Continuação Analítica e o Princípio do Argumento.

Definição 2.12 (Números Complexos) Um número complexo s é definido como

$$s = \sigma + it, \quad \sigma,\, t \in \mathbb{R}$$

A parte real de s é dada por $\Re(s) = \sigma$ e a parte imaginária por $\Im(s) = t$.

O Conjunto dos Números Complexos é denotado por $\mathbb{C}$.

Definição 2.13 (Função Holomorfa) Uma função definida em um subconjunto aberto do plano complexo $\mathbb{C}$ e diferenciável em todos os seus pontos é chamada "função holomorfa".

Definição 2.14 (Função Meromorfa) Uma função holomorfa, f, definida em um domínio $\mathbb{C}\backslash\mathfrak{D}$, onde $\mathfrak{D}$ é um conjunto discreto e para todo $z \in \mathfrak{D}$, z é um polo de f, é chamada "função meromorfa".

2.3.1 Continuação Analítica de uma Função Complexa

Uma série de potências convergente define uma função de uma região conexa e aberta dos complexos para o conjunto dos complexos que é derivável infinitas vezes. Esse tipo de função definida por uma série convergente em um determinado domínio contido nos complexos sempre será analítica, bem como toda função analítica pode ser interpretada como o resultado de uma série convergente para determinado domínio, como nos mostra Florentino (2011), em seu livro [9] "Introdução à teoria das funções complexas".

Continuação analítica é uma técnica que permite ampliar o domínio de uma função complexa analítica.

Dada uma função analítica definida por uma série convergente em um domínio conexo e aberto de $\mathbb{C}$ podemos encontrar uma outra série, também convergente para um certo domínio, que contenha, ao menos parcialmente, o domínio anterior, porém que inclua parcela diferente do conjunto complexo. Essa nova série deve coincidir com a anterior nos pontos da interseção dos domínios. Dessa forma podemos dizer que a segunda série é uma continuação analítica da primeira.

Por exemplo, de [11], tomemos a função definida por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = z^0 + z^1 + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + ...$$

Essa é uma função convergente para $\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{R} \ / \ |z| < 1\}$, logo podemos dizer que nesse domínio ela é uma função analítica. Porém, fora desse domínio, essa série não será convergente, ou seja, não define uma função qualquer fora desse domínio.

Tomemos agora uma outra função, também definida por uma série diferente:

$$g(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{1-i} \right)^n = \frac{1}{1-i} + \frac{z-i}{(1-i)^2} + \frac{(z-i)^2}{(1-i)^3} + \frac{(z-i)^3}{(1-i)^4} + ...$$

Essa nova função é definida para $\mathcal{D}_2 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z-i| < \sqrt{2}\}$, pois nesse subconjunto de $\mathbb{C}$ a série é convergente. Importante ainda notar que para $\mathcal{D}_1 \bigcap \mathcal{D}_2$ o conjunto imagem é coincidente, ou seja, $f(z) = g(z) \ \forall \ z \in (\mathcal{D}_1 \bigcap \mathcal{D}_2)$ já que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} \quad \text{em} \ \ \mathcal{D}_1$$

$$g(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{1-i} \right)^n = \frac{1}{z} \quad \text{em} \ \ \mathcal{D}_2$$

Diante disso podemos dizer que $g(z)$ é uma continuação analítica de $f(z)$ para o domínio $\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1$.

Uma observação importantíssima é que, caso seja encontrada mais de uma continuação analítica para uma mesma função, tais extensões coincidem em todos os pontos da interseção de seus domínios, conforme [11]. Ou seja, pode-se dizer que a continuação analítica de uma função é única.

Teorema 2.8 (O Princípio do Argumento) *Seja C um contorno fechado, simples e orientado positivamente, e suponha que*

(a) a função $f(z)$ é meromorfa no domínio interior a C;

(b) $f(z)$ é analítica e não nula sobre C;

(c) contando as multiplicidades, Z é o número de zeros e P o número de polos de $f(z)$ no domínio interior a C.

Então,

$$\frac{1}{2\pi}\ \Delta_C\ arg(f(z)) = Z - P \tag{6}$$

onde, $\Delta_C\ arg(f(z))$ contabiliza a diferença de argumento da imagem $f(z)$, quando percorremos o caminho C.

Demonstração: Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [4].

Definição 2.15 (Função Gama) Seja $s \in \mathbb{C}$. Definimos a função Gama por

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-u} u^{s-1} du \tag{7}$$

2.4 Teorema dos Números Primos - TNP

Um Teorema de Números Primos explica a quantidade de números primos através de aproximações assintóticas. Existem vários destes teoremas de significados equivalentes.

Definição 2.16 (Cardinalidade) A cardinalidade de um conjunto, dada pelo símbolo $\#$, é a quantidade de elementos que esse conjunto possui. Assim, $\#A$ denota o número de elementos do conjunto A.

Definição 2.17 (Função Quantidade de Primos) A função quantidade de números primos até x, representada pelo símbolo $\pi(x)$, é definida por

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathcal{P} : p < x\} \tag{8}$$

O matemático, astrônomo e físico alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), passou à história conhecido como *o Príncipe dos Matemáticos* devido a uma homenagem póstuma feita pelo rei de Hanover que assim o designou após sua morte. Em vida foi professor de matemática e diretor do observatório astronômico de Göttingen desde os 30 anos até o fim de sua vida. Perfeccionista em seus escritos matemáticos, Gauss era um calculista cuidadoso e detalhista. Ele produziu dezenas de tabelas estatísticas com a quantidade de números primos entre dois milhares e observando essas tabelas começou a conjecturar a respeito da distribuição dos números primos ao longo do conjunto dos naturais.

Tabela 1: Logaritmo natural e a densidade dos Primos.

N	**P**	**N/P**	**I**	**Ln N**
10	4	2,5		2,302585093
10^2	25	4	1,5	4,605170186
10^3	168	5,952380952	1,952380952	6,907755279
10^4	1.229	8,136696501	2,184315549	9,210340372
10^5	9.592	10,42535446	2,288657961	11,51292546
10^6	78.498	12,73917807	2,313823606	13,81551056
10^7	664.579	15,04712006	2,307941988	16,11809565
10^8	5.761.455	17,35672673	2,309606673	18,42068074
10^9	50.847.534	19,66663713	2,309910398	20,72326584
10^{10}	455.052.511	21,97548581	2,308848686	23,02585093

Em uma carta a um de seus alunos, datada de 24 de dezembro de 1849, Gauss afirma que dezenas de anos antes, por volta de 1792, quando tinha apenas 16 anos, ele já estudava tabelas logarítmicas e de primos e havia conjecturado que a quantidade de primos menores que um determinado número n seria próximo de $n/\ln n$. Observe na Tabela 1 que o número da quarta coluna se aproxima cada vez mais de $\ln 10 = 2,302...$, onde N é a ordem de grandeza, P é a Quantidade de Primos e I o Incremento da Razão.

Essa conjectura foi provada em 1896, independentemente por Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), francês, e Charles-Jean Étienne Gustave Nicolas de la Vallée Poussin (1866-1962), belga, comprovando o resultado do limite apresentado abaixo e conhecido hoje como um dos principais Teorema dos Números Primos.

Teorema 2.9 (Teorema dos Números Primos) *A quantidade de números primos menores que x pode ser aproximada, assintoticamente, por*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

Por (5), temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1$$

Adrien-Marie Legendre (1752-1833), matemático francês, observando a diferença entre os valores que vemos na terceira e quinta colunas da Tabela 1, tentou melhorar a conjectura de Gauss introduzindo uma constante. Assim, o TNP é dado por

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x - B}$$

E de fato é possível provar que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x - B}} = 1$$

Tabela 2: Estimativa e erro da quantidade de Primos.

N	**P**	**Gauss**	**erro**	**Legendre**	**erro**
10	4	4	0	8	4
10^2	25	21	4	28	3
10^3	168	144	24	171	3
10^4	1.229	1.085	144	1230	1
10^5	9.592	8.685	907	9.588	-4
10^6	78.498	72.382	6.116	78.543	5
10^7	664.579	620.420	44.159	665.139	-45
10^8	5.761.455	5.428.681	332.774	5.768.003	-560
10^9	50.847.534	48.254.942	2.592.592	50.917.518	-6.548
10^{10}	455.052.511	434.294.481	20.758.030	455.743.003	-69.984

Sendo que, para B, o melhor valor estimado é $B = 1,08366$. Na Tabela 2 apresentamos alguns valores, onde N é a ordem de grandeza e P é a quantidade de Primos. Mais tarde o próprio Gauss melhorou sua fórmula encontrando

$$\pi(x) \sim \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 5} + ... + \frac{1}{\ln x}$$

Desse modo a função integral logarítmica melhora a aproximação assintótica para o número de primos até x. Assim, novamente tem-se um TNP, dado por

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$$

Na Figura 1 podem ser observados os gráficos de $\pi(x)$, $\mathrm{Li}(x)$ e $\frac{x}{\ln x}$, com melhor aproximação assintótica para $\pi(x)$, a função integral logarítmica.

3 Função Zeta de Riemann

Neste seção descreveremo a função Zeta de Riemann: origem, extensão no plano complexo, os zeros, relação com os Teoremas de Números Primos.

3.1 A Origem da Função Zeta de Riemann

Pietro Mengoli (1626-1686), matemático italiano, publicou em 1650 um tratado matemático em que estuda as somas das séries.

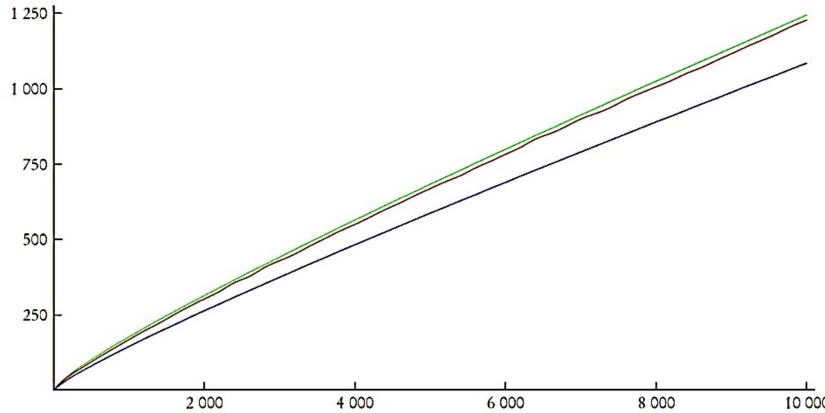

Figura 1: Gráfico de: $\pi(x)$ (centro), $\int_2^x \frac{1}{\ln t}dt$ (superior), $\frac{x}{\ln x}$ (inferior). Fonte[20].

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + ... = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + ...$$

Essa fórmula de somatório das potências dos inversos dos naturais só é convergente e resulta em um valor calculável se o valor de x for maior que 1 (para x igual a 1 temos a famosa série harmônica, notadamente divergente), esta série é chamada série harmônica generalizada. Ela foi analisada por Leonhard Paul Euler (1707-1783) que determinou o seu resultado, entre outros valores, para x igual a 2.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

Uma série harmônica generalizada é convergente para todo $x \in (1, +\infty)$, inclusive converge absolutamente nesse mesmo domínio. Então, a soma dessa série define uma função. Essa função é a chamada de *função Zeta de Riemann*, denotada por ζ, mais especificamente,

$$\begin{aligned} \zeta : \Omega \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \end{aligned}$$

onde, $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 1\}$.

Riemann propôs analisar esta função com a finalidade de estender seu domínio e imagem ao plano complexo.

Proposição 3.1 *Seja* $s \in \mathbb{C}$. *Então,*

$$\forall x > 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty, \quad \Re(s) > 1 \tag{9}$$

Demonstração: Como $s \in \mathbb{C}$ então $s = x + iy$. Logo, $n^s = n^{x+iy} = n^x n^{iy} = n^x e^{iy \ln n} = n^x e^{i \ln n^y}$. Pela fórmula de Euler, $n^s = n^x[\cos(\ln n^y) + i \operatorname{sen}(\ln n^y)]$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^s} &= \frac{1}{n^x[\cos(\ln n^y) + i \operatorname{sen}(\ln n^y)]} \\ &= \frac{\cos(\ln n^y) - i \operatorname{sen}(\ln n^y)}{n^x[\cos^2(\ln n^y) + \operatorname{sen}^2(\ln n^y)]} \\ &= \frac{\cos(\ln n^y) - i \operatorname{sen}(\ln n^y)}{n^x} \end{aligned}$$

Assim, $|\frac{1}{n^s}| = \frac{1}{n^x}$, $x = \Re(s) > 1$. Por tanto a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ converge absolutamente para todo $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$. □

3.2 Continuação Analítica da Função Zeta de Riemann

A convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ para todo $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$, garante a extensão da função $\zeta(x)$, $x > 0$, a uma porção do plano complexo, isto é,

$$\begin{aligned} \zeta : \Omega \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ s &\longmapsto \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \end{aligned} \tag{10}$$

onde, $\Omega = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$.

Com o intuito de estender a função Zeta a todo o plano complexo, Riemann construiu essa extensão utilizando a Teoria de Continuação Analítica.

(i) *Extensão de Zeta para todo* $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 0$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + ...$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \left(\frac{2}{2^s} - \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{3}{3^s} - \frac{2}{3^s}\right) + \left(\frac{4}{4^s} - \frac{3}{4^s}\right) + \left(\frac{5}{5^s} - \frac{4}{5^s}\right) ...$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{2}{2^s}-\frac{2}{3^s}+\frac{3}{3^s}-\frac{3}{4^s}+\frac{4}{4^s}-\frac{4}{5^s}+\frac{5}{5^s}...$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1\left(\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}\right)+2\left(\frac{1}{2^s}-\frac{1}{3^s}\right)+3\left(\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}\right)+4\left(\frac{1}{4^s}-\frac{1}{5^s}\right)+...$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(n\ g(n))$$

Seja

$$g(x)=\frac{1}{x^s}-\frac{1}{(x+1)^s}=x^{-s}-(x+1)^{-s}$$

então

$$g'(x)=-sx^{-s-1}-(-s)(x+1)^{-s-1}=s(x+1)^{-s-1}-sx^{-s-1}$$

$$g(x)=s\int_n^{n+1}x^{-s-1}\ dx$$

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(n\ g(n))=\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ s\int_n^{n+1}x^{-s-1}\ dx\right)=s\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ \int_n^{n+1}x^{-s-1}\ dx\right)$$

Tomemos agora como notação $x=[x]+\{x\}$ onde $[x]$ é a parte inteira de x e $\{x\}$ é a parte decimal de x.

Não é difícil perceber que $[x]=n$, $\forall\ x\in[n,n+1)$, assim podemos escrever:

$$\zeta(s)=s\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ \int_n^{n+1}x^{-s-1}\ dx\right)=s\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_n^{n+1}[x]x^{-s-1}\ dx\right)=s\int_1^{\infty}[x]x^{-s-1}\ dx$$

Trocando $[x]=x-\{x\}$

$$\zeta(s)=s\int_1^{\infty}(x-\{x\})x^{-s-1}\ dx=s\int_1^{\infty}xx^{-s-1}\ dx-s\int_1^{\infty}\{x\}x^{-s-1}\ dx$$

$$\zeta(s)=s\int_1^{\infty}x^{-s}\ dx-s\int_1^{\infty}\{x\}x^{-s-1}\ dx$$

Como

$$s\int_1^{\infty}x^{-s}\ dx=s\left(\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\bigg|_1^{\infty}\right)=0-\frac{s}{1^{s-1}(-s+1)}=\frac{s}{s-1}$$

Temos

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \{x\}x^{-s-1}\,dx$$

Como $0 < \{x\} < 1$ a integral da expressão acima converge para qualquer valor de s cujo $\Re(s) > 0$.

Dessa forma, construímos uma extensão para Zeta que cobre todo o semiplano complexo tal que $\Re(s) > 0$ com uma única exceção nesse domínio dada no ponto $s = 1$ devido ao denominador $s - 1$.

(ii) *Extensão de Zeta para todo* $s \in \mathbb{C}$:

Agora, para estendermos a função Zeta para todo o plano complexo precisaremos de um outro ponto de início, a função Gama.

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}\ t^{s-1}\ dt$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}\ t^{\frac{s}{2}-1}\ dt$$

Fazendo

$$t = n^2\pi x \quad \Rightarrow \quad dt = n^2\pi dx$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x}\ (n^2\pi x)^{\frac{s}{2}-1}\ n^2\pi dx$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x}\ x^{\frac{s}{2}-1}\ n^s\pi^{\frac{s}{2}}dx = n^s\pi^{\frac{s}{2}}\ \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x}\ x^{\frac{s}{2}-1}\ dx$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x}\ x^{\frac{s}{2}-1}\ dx$$

Introduzindo o somatório sobre n teremos

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\ dx$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\ \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\ dx$$

Definimos

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{\vartheta(x) - 1}{2}$$

onde, $\vartheta(x)$ é a função Theta de Jacobi. Logo

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\ h(x)\ dx$$

ou, equivalentemente,

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left[\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\ h(x)\ dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\ h(x)\ dx\right]$$

Considerando a equação funcional para $\vartheta(x)$, dada em (2), tomemos

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{\vartheta(x)-1}{2} = \frac{\vartheta(x)-x^{-\frac{1}{2}}}{2} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}+1}{2} \\
&= x^{-\frac{1}{2}}\frac{\vartheta(x)x^{\frac{1}{2}}-1}{2} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}+1}{2} \\
&= x^{-\frac{1}{2}}\frac{\vartheta(x^{-1})-1}{2} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}+1}{2} \\
&= x^{-\frac{1}{2}}h(x^{-1}) + \frac{x^{-\frac{1}{2}}+1}{2}
\end{aligned}$$

Voltando a $\zeta(s)$ e substituindo $h(x)$,

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left[\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\ \left(x^{-\frac{1}{2}}h(x^{-1}) + \frac{x^{-\frac{1}{2}}+1}{2}\right)\ dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\ h(x)\ dx\right]$$

Definimos

- $A = \displaystyle\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\ \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right)\ dx$

$$A = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\ \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\ dx$$

$$A = \frac{x^{\frac{s-1}{2}}}{s-1} - \frac{x^{\frac{s}{2}}}{s}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - 0 + 0 = \frac{s-s+1}{s(s-1)} = \frac{1}{s(s-1)}$$

- $B = \displaystyle\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\ \left(x^{-\frac{1}{2}}h(x^{-1})\right)\ dx$

$$B = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\ \left(x^{-\frac{1}{2}}h(x^{-1})\right)\ dx = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\ h(x^{-1})\ dx$$

Trocando: $x \longrightarrow x^{-1} \quad \Rightarrow \quad dx \longrightarrow -x^{-2}\ dx$ e invertendo os limites

$$B = \int_\infty^1 x^{-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}}\ h(x)\ (-x^{-2})\ dx = -\int_\infty^1 x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\ h(x)\ dx = \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\ h(x)\ dx$$

Retornando a $\zeta(s)$,

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left[A+B+\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\ h(x)\ dx\right] \\
&= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left[\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty} x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\ h(x)\ dx+\int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\ h(x)\ dx\right] \\
&= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left[\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\ h(x)\ dx\right] \\
&= \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left[\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\left(\frac{x^{\frac{1-s}{2}}+x^{\frac{s}{2}}}{x}\right)\ \left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)\ dx\right] \qquad (11)
\end{aligned}
$$

onde, $\vartheta(x)$ é a função Theta de Jacobi e $\Gamma(s)$ é a função Gama.

Desse modo a função $\zeta(s)$ tem seu domínio estendido a todo o plano complexo com exceção ao único ponto $s = 1$.

3.3 Região dos Zeros da Função Zeta

Segundo [3] o domínio da função Zeta de Riemann, $D_\zeta = \{s \in \mathbb{C} : s \neq 1\} = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, divide-se em três regiões:

- Região I: $\Omega_1 = \{s \in D_\zeta : \Re(s) > 1\}$
- Região II: $\Omega_2 = \{s \in D_\zeta : 0 \leq \Re(s) \leq 1\}$
- Região III: $\Omega_3 = \{s \in D_\zeta : \Re(s) < 0\}$

Riemann denominou a região II como *"Faixa Crítica"* e nela incluída a denominada *"Linha Crítica"*: $L_c = \{s \in D_\zeta : \Re(s) = \frac{1}{2}\} \subset \Omega_2$.

Os zeros da função Zeta de Riemann se classificam em:

Zeros triviais: São todos os zeros da Região III.

Zeros não-triviais: São todos os zeros da *Faixa Crítica*.

Em relação aos zeros da função Zeta, em cada região, podemos dizer:

(a) Em Ω_1 não existem zeros.

(b) Em Ω_2 existem os zeros não-triviais.

(c) Em Ω_3 só existem zeros triviais.

Analisando a função Zeta de Riemann, não é muito difícil verificar que não existem raízes na Região I, devido a sua formulação original que pode ser escrita como o produtório de termos positivos e maiores que zero.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \frac{p^s}{p^s - 1}$$

onde p é primo.

Não tão elementar é a prova na Região III, onde existem somente as raízes triviais dadas pelos inteiros negativos pares {-2,-4,-6,..}, [3] .

3.4 As Ligação entre a Função Zeta e o TNP

Esta ligação está relacionada com a seguinte pergunta: *o que tem a ver os zeros da função Zeta de Riemann com a distribuição dos números primos?*

3.4.1 A Fórmula do Produto de Euler

A primeira versão da função Zeta de Riemann, com domínio complexo, porém limitado á região com parte real maior que 1, é dada por:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + ...$$

Pelo Teorema 2.7, cada termo dessa série pode ser escrito como o produto de termos primos e de forma única. Por exemplo:

$$\frac{1}{150^s} = \frac{1}{2^s} \cdot \frac{1}{3^s} \cdot \frac{1}{5^{2s}}$$

Euler, percebendo essa possibilidade, separou cada termo formado por um único número primo e suas potências, transformando essa soma em um produto.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{2^{3s}} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{3^{2s}} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{5^{2s}} + \cdots\right) ...$$

onde, os termos da soma são dados pelas combinações únicas dos termos de cada fator, assim, por exemplo:

$$\frac{1}{1071^s} = 1 \cdot \frac{1}{3^{2s}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{7^s} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{17^s} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots$$

Esse produto se apresenta de tal forma que cada termo é a soma dos termos de uma PG de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{1}{p^s}$, logo

$$\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\frac{1}{p^{5s}}+\cdots\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\frac{p^s}{p^s-1}$$

então, teremos

$$\zeta(s)=\frac{2^s}{2^s-1}\cdot\frac{3^s}{3^s-1}\cdot\frac{5^s}{5^s-1}\cdot\cdots=\prod_{p=2}^{\infty}\frac{p^s}{p^s-1}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty}\frac{p^s}{p^s-1} \qquad (12)$$

onde p é primo.

A equação (12) é conhecida como a Fórmula do Produto de Euler e que apresenta a primeira ligação intrínseca entre a função Zeta e os números primos.

3.4.2 A Função Cosseno

Começaremos definindo as raízes da função Zeta na linha crítica.

Definição 3.1 (Raízes da Função Zeta, γ_n) Seja $s = \frac{1}{2} + i\gamma_n,\ n = 1, 2, 3, ...$ um ponto na linha crítica. Dizemos que $\gamma_n > 0$ é uma raiz da função Zeta na linha crítica se $\zeta(s) = 0$.

***Observação* 3.1** As raízes da função Zeta, na linha crítica, são as mesmas da parte superior, $\frac{1}{2} + i\gamma_n$ e da parte inferior $\frac{1}{2} - i\gamma_n$.

Em maio de 2011, o professor estadunidense John Brian Conrey, proferiu uma palestra sobre a hipótese de Riemann no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), na cidade do Rio de Janeiro [10] e apresentou uma função definida como a soma finita de cossenos, onde um dos fatores do argumento da função cosseno são raízes da função Zeta de Riemann, γ_n, isto é,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n_0}\cos(\gamma_n \ln x)$$

Essa função apresenta em seu gráfico uma forte ligação entre a função Zeta e os números primos.

Note que o somatório não é infinito, pois esse somatório não convergiria. Porém, ao fazer a soma com um número finito de termos, destacam-se os números primos (2, 3, 5, 7, ...) e suas potências (4, 8, 9, 16, ...) na visualização do gráfico gerado (Figura 2).

As raízes da função Zeta, menores que 50 são:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= 14,134725141734693790457251990257\,26...\\
\gamma_2 &= 21,022039638771554992628479593896\,90...\\
\gamma_3 &= 25,010857580145688763213790992562\,82...\\
\gamma_4 &= 30,424876125859513210311897530584\,09...\\
\gamma_5 &= 32,935061587739189690662368964074\,90...\\
\gamma_6 &= 37,586178158825671257217763480705\,33...\\
\gamma_7 &= 40,918719012147495187398126914633\,25...\\
\gamma_8 &= 43,327073280914999519496122165406\,80...\\
\gamma_9 &= 48,005150881167159727942472749427\,51...
\end{aligned} \tag{13}$$

Tomando cada valor arredondado para duas casas decimais podemos montar a função:

$$f(x) = \cos(14,13 \cdot \ln x) + \cos(21,02 \cdot \ln x) + \cos(25,01 \cdot \ln x) + \cos(30,42 \cdot \ln x)$$

$$+\cos(32,93 \cdot \ln x) + \cos(37,58 \cdot \ln x) + \cos(40,91 \cdot \ln x) + \cos(43,32 \cdot \ln x) + \cos(48,00 \cdot \ln x)$$

Podemos então visualizar o gráfico gerado através do programa Geogebra na Figura 2.

Nesse gráfico, gerado através de um somatório de poucos termos e com uma precisão de poucas casas decimais, devido à capacidade computacional do recurso utilizado, já é possível perceber que, nas palavras do próprio professor Conrey [5]:

"If you look at $x =$ a prime number you will see that the graph tends to be near a low point. The same is true for x near a power of a prime number $(x = 4, 8, 9, 16)$ but there the extremes are less accentuated. It doesn't make sense to extend this to an infinite sum because the sum doesn't converge anywhere. But if you truncate the sum after a finite number of n and look at the graph there seems to be a strong hint of a connection between the γ_n and the primes".

("Se você olhar para x igual a um número primo você vai ver que o gráfico tende a estar perto de um ponto mínimo. O mesmo é verdadeiro para x perto de uma potência de um número primo $(x = 4, 8, 9, 16)$, mas aí os extremos serão menos acentuados. Não faz sentido estender essa soma ao infinito porque a soma não converge em qualquer valor. Mas se cortar a soma após um número finito n e olhar para o gráfico, parece existir uma sugestão forte de uma conexão entre γ_n e os primos".)

3.4.3 A Função de Riemann

Primeiro começaremos definindo a função de Möbius, μ , como sendo uma função discreta dada pela formulação abaixo.
Seja

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$$

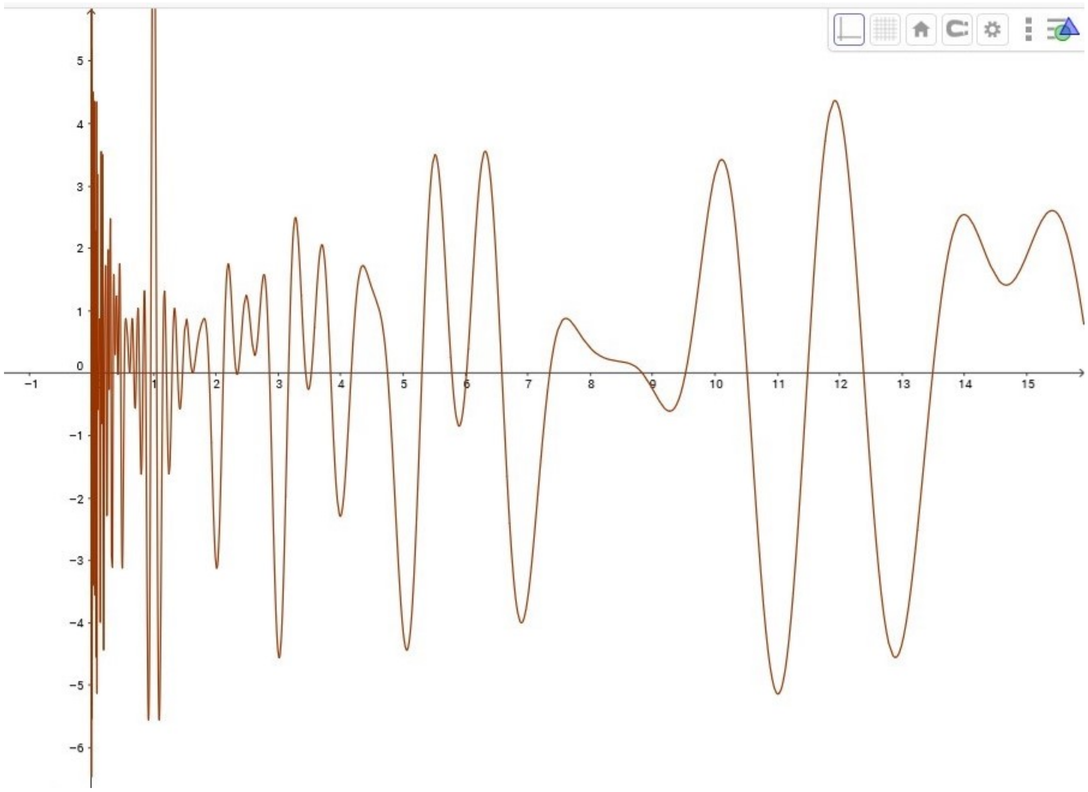

Figura 2: Gráfico da função $f(x) = \sum_{n=1}^{9} \cos(\gamma_n \ln x)$.

onde, cada p_i é um número primo da fatoração única de n e cada α_i , o respectivo expoente desse primo, corresponde ao número de vezes que esse primo surge ao se fatorar em primos o número n. Importante ressaltar que $\alpha_i \neq 0$ sempre.

$$\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$$

$$n \longmapsto \mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \text{algum } \alpha_i > 1 \\ -1, & \text{se} \quad \alpha_i = 1 \text{ e se } k \text{ for impar} \\ 1, & \text{se} \quad \alpha_i = 1 \text{ e se } k \text{ for par} \end{cases}$$

Definição 3.2 (Função de Riemann) A função de Riemann, denotada por $\mathbf{R}(x)$, é definida por

$$\boldsymbol{R}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(\sqrt[n]{x}), \quad \forall x \geq 2 \tag{14}$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(\sqrt[n]{x}) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}(\sqrt[5]{x}) + \frac{1}{6}\mathrm{Li}(\sqrt[6]{x}) + \cdots$$

Riemann, também, conjecturou a igualdade $\pi(x) = \boldsymbol{R}(x)$, porém não estava certo. Veja o teorema a continuação.

Teorema 3.1 (TNP) *Seja* $\mathbf{R}(x)$ *a função de Riemann. Então,* $\pi(x) \sim \mathbf{R}(x)$.

Testes numéricos apontam que através desse TNP tem-se obtido as melhores aproximações para a cardinalidade do conjunto dos números primos, $\pi(x)$.

Cabe ressaltar a relação direta entre a função de Möbius e Zeta de Riemann [20], na região do domínio em que $\Re(s) > 1$.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right) = 1 \tag{15}$$

4 Contando os Zeros de Zeta

Em 1859 Riemann conjecturou que todos os zeros não-triviais estariam na linha crítica, deixando um grande problema em aberto. A partir de ai, a comunidade científica, principalmente, de teoria dos números está interessada nos zeros não-triviais da função Zeta. Já se demonstrou que existem infinitos zeros na linha crítica, porém, ninguém sabe se todos os zeros da função Zeta estariam na linha crítica, isto é, poderia existir um zero não-trivial que saia da linha crítica. Computacionalmente, já se obtiveram mais de um trilhão de zeros na linha crítica, porém um trilhão não são todos, mas, isso sugere para muitos pesquisadores da área que a hipótese de Riemann seja verdadeira, tanto assim, que há muitos resultados, em teoria dos números, admitindo-se a hipótese de Riemann como verdadeira.

4.1 O Teorema em Aberto deixado por Riemann

O trabalho de Riemann se concentrou justamente na Região III do domínio da função Zeta que ele denominou *"Faixa crítica"*. No esforço de determinar todas as raízes de sua função Zeta, Riemann identificou que é nessa faixa do plano complexo que estão todas as raízes não-triviais.

Por outro lado, Riemann também determinou que $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$, [3].

A famosa *"hipótese de Riemann"* se apresenta justamente nesse ponto. Riemann afirmou que as raízes sobre o que ele denominou *"Linha crítica"*, $L_c = \{s \in D_\zeta : \Re(s) = \frac{1}{2}\}$ são os mesmos do que existem na faixa crítica.

Teorema 4.1 (Hipótese de Riemann, HR) *Todas as raízes não triviais da função Zeta estão sobre a linha crítica.*

Seja a função de Zeta, restringida à Região III:

$$\begin{aligned}\zeta : \Omega_3 &\longrightarrow \mathbb{C}\\ s &\longmapsto \zeta(s)\end{aligned}$$

onde $\Omega_3 = \{s \in D_\zeta : 0 < \Re(s) < 1\}$. A **HR** expressa,

$$\forall s \in \Omega_3, \;\; \zeta(s) = 0 \implies \Re(s) = \frac{1}{2}$$

Teorema 4.2 (Equação Funcional para ζ) *Para todo $s \in \mathbb{C}$,*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \tag{16}$$

Demonstração: Como em (11), a função Zeta de Riemann é dada pela expressão descrita abaixo que tem como domínio o conjunto $D_\zeta = \mathbb{C} - \{1\}$.

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left[\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(\frac{x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}}}{x}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right]$$

onde, $\vartheta(x)$ é a função Theta de Jacobi e $\Gamma(s)$ é a função Gama.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(\frac{x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}}}{x}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx$$

Substituindo s por $1-s$

$$\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \frac{1}{(1-s)(1-s-1)} + \int_1^\infty \left(\frac{x^{\frac{1-1+s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}}{x}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx$$

$$\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \frac{1}{(1-s)(-s)} + \int_1^\infty \left(\frac{x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}}{x}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx$$

$$\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(\frac{x^{\frac{1-s}{2}} + x^{\frac{s}{2}}}{x}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx$$

$$\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

□

Definição 4.1 (Função Csi) A função Csi é definida por

$$\xi(s) := \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{17}$$

***Observação* 4.1**

(a) Na faixa crítica, os zeros da função Zeta coincidem com os zeros da função Csi.

(b) $\xi(s) = \xi(1-s)$.

5 Teorema Principal

O objetivo deste trabalho é demonstrar o teorema que se refere à obter assintoticamente a quantidade de zeros não-triviais numa sub-região retangular da faixa crítica, esse teorema é o Teorema Principal deste trabalho.

Definição 5.1 (Quantidade de zeros da função Zeta em um retângulo) Considere o seguinte retângulo

$$\{(\sigma + it) \in \mathbb{C} :\ 0 < \sigma < 1;\ 0 \leq t < T\}$$

Define-se a quantidade de zeros de $\zeta(s)$ dentro do retângulo por

$$N(T) = \#\{(\sigma + it) \in \mathbb{C} :\ 0 < \sigma < 1;\ 0 \leq t < T;\ \zeta(\sigma + it) = 0\} \tag{18}$$

O seguinte teorema, conjeturado por Gauss, é nosso Teorema Principal que trata sobre a quantidade de zeros da função Zeta na faixa crítica limitada por $T > 0$. Na sua segunda demonstração, em 1905, Hans Carl Friedrich von Mangoldt (1854-1925) conseguiu um prova total desse teorema.

Teorema 5.1 *A quantidade de zeros da função Zeta, $N(T)$, obedece a seguinte fórmula*

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T) \tag{19}$$

Demonstração: Para a demonstração desse teorema utilizaremos a região interna ao retângulo, dado na Figura 3, sobre o plano dos complexos.

Chamaremos de R o retângulo de vértices: -1, 2, $2+iT$ e $-1+iT$. R tem como eixo vertical a linha crítica e nos servirá de contorno.

Sobre esse contorno não existem raízes, com a improvável exceção de $\frac{1}{2} + iT$, e no interior dessa região não há nenhum polo. Então, de acordo como Princípio do Argumento, temos:

$$N(T) = \frac{1}{2\pi}\ \Delta_R\ arg(\xi(s))$$

Vamos dividir o contorno R em partes:

- R_1: O segmento de reta entre -1 e 2
- R_2: Os segmentos entre 2 e $(2+iT)$ e entre $(2+iT)$ e $(\frac{1}{2}+iT)$

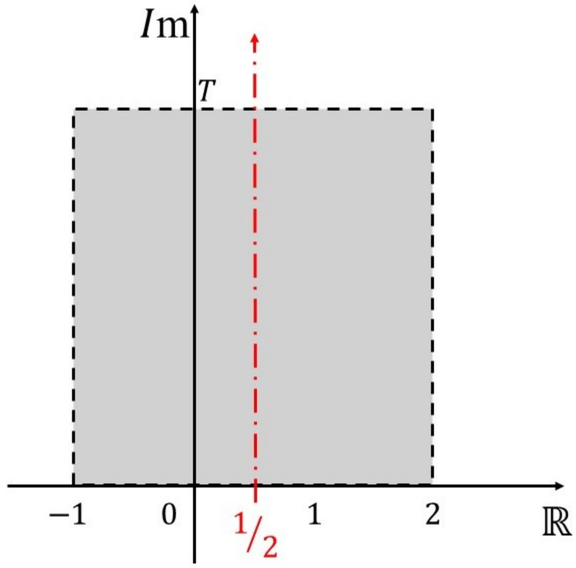

Figura 3: Gráfico da região retangular no Plano Complexo

- R_3: Os segmentos entre $(\frac{1}{2} + iT)$ e $(-1 + iT)$ e entre $(-1 + iT)$ e -1

Assim teremos:

$$\Delta_R \; arg(\xi(s)) = \Delta_{R_1} \; arg(\xi(s)) + \Delta_{R_2} \; arg(\xi(s)) + \Delta_{R_3} \; arg(\xi(s))$$

$$\Delta_R \; arg(\xi(s)) = arg(\xi(s_0)) - arg(\xi(s_F))$$

onde s_0 é o ponto inicial do caminho e s_F é o ponto final.

É fácil ver que ao longo de R_1 não há mudança de argumento pois, $\xi(2) = \xi(1-2) = \xi(-1)$, logo.

$$\Delta_{R_1} \; arg(\xi(s)) = arg(\xi(2)) - arg(\xi(-1)) = 0$$

Também é fácil verificar que ao longo de R_2 e de R_3 acontece uma mudança equivalente

$$\Delta_{R_2} \; arg(\xi(s)) = arg\left(\xi\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right) - arg(\xi(2))$$

como $\xi(s) = \xi(1-s)$

$$\Delta_{R_2} \; arg(\xi(s)) = arg\left(\xi\left(\frac{1}{2} - iT\right)\right) - arg(\xi(-1))$$

como por [3] $\xi(s) = \overline{\xi(\overline{s})}$

$$\Delta_{R_2} \; arg(\xi(s)) = arg\overline{\left(\xi\left(\frac{1}{2} + iT\right)\right)} - arg\overline{(\xi(-1))}$$

$$\Delta_{R_2}\ arg(\xi(s)) = arg(\xi(-1)) - arg\left(\xi\left(\frac{1}{2}+iT\right)\right) = \Delta_{R_3}\ arg(\xi(s))$$

Assim

$$\Delta_{R}\ arg(\xi(s)) = 0 + \Delta_{R_2}\ arg(\xi(s)) + \Delta_{R_2}\ arg(\xi(s)) = 2\Delta_{R_2}\ arg(\xi(s))$$

$$N(T) = \frac{1}{2\pi}\ \Delta_{R}\ arg(\xi(s)) = \frac{1}{2\pi}\ 2\Delta_{R_2}\ arg(\xi(s)) = \frac{1}{\pi}\ \Delta_{R_2}\ arg(\xi(s))$$

Levando em conta que $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, como visto em [3], na definição de $\xi(s)$ teremos:

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

$$\xi(s) = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s)$$

Como R_2 se inicia em 2 e termina em $\frac{1}{2}+iT$, para determinar sua mudança de argumento, calculamos o argumento no ponto final e subtraímos o argumento no ponto inicial. Podemos ainda calcular separadamente o argumento de cada fator de $\xi(s)$ para depois soma-los.

1º:

$$\Delta_{R_2}\ arg(s-1) = arg\left(\frac{1}{2}+iT-1\right) - arg(2-1)$$

$$\Delta_{R_2}\ arg(s-1) = arg\left(-\frac{1}{2}+iT\right) - 0$$

$$\Delta_{R_2}\ arg(s-1) = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{2T}$$

Designaremos $\arctan\frac{1}{2T}$ como um erro de ordem de grandeza vinculado a T^{-1}.

$$\Delta_{R_2}\ arg(s-1) = \frac{\pi}{2} + O\left(T^{-1}\right) \tag{20}$$

2º:

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\right) = arg\left(\pi^{-\frac{\frac{1}{2}+iT}{2}}\right) - arg\left(\pi^{-\frac{2}{2}}\right)$$

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\right) = arg\left(\pi^{-\frac{1+2iT}{4}}\right) - arg\left(\pi^{-1}\right)$$

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\right) = arg\left(e^{-\frac{1+2iT}{4}\ln\pi}\right) - 0$$

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\pi^{-\frac{s}{2}}\right) = -\frac{T}{2}\ln\pi \tag{21}$$

3º:

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) = arg\left(\Gamma\left(\frac{\frac{1}{2}+iT}{2}+1\right)\right) - arg\left(\Gamma\left(\frac{2}{2}+1\right)\right)$$

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) = arg\left(\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right)\right) - arg\left(\Gamma(2)\right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)! \implies \Gamma(2) = 1! = 1$$

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) = arg\left(\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right)\right) - 0$$

Aqui utilizaremos a fórmula de James Stirling (1692-1770), vista em [3], que nos dá uma aproximação para $\ln\Gamma(s)$.

$$\ln\Gamma(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right)\ \ln s - s + \frac{1}{2}\ln\sqrt{2\pi} + O\left(|s|^{-1}\right)$$

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) = arg\left(\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right)\right) = Im\left(\ln\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right)\right)$$

$$= Im\left[\left(\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)\ \ln\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right) - \left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\sqrt{2\pi} + O\left(\left|\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right|^{-1}\right)\right]$$

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) = Im\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{iT}{2}\right)\ \ln\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right) - \frac{iT}{2}\right] \tag{22}$$

$$\ln\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right) \longrightarrow e^{x+iy} = \frac{5}{4}+\frac{iT}{2}$$

$$e^{x} = \left|\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right| = \sqrt{\frac{25+4T^2}{16}} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\frac{\sqrt{\frac{25}{4}+T^2}}{2}$$

$$\lim_{T\to\infty} x = \lim_{T\to\infty}\left(\ln\sqrt{\frac{25}{4}+T^2} - \ln 2\right) = \ln\sqrt{T^2} - \ln 2 = \ln\frac{T}{2}$$

$$y = \arcsin\left(\frac{T}{2} \div \sqrt{\frac{25+4T^2}{16}}\right) = \arcsin\left(\frac{2T}{\sqrt{25+4T^2}}\right)$$

$$\lim_{T\to\infty} y = \lim_{T\to\infty}\arcsin\left(\frac{2T}{\sqrt{25+4T^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{2T}{\sqrt{4T^2}}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} + O(T^{-1})$$

$$\lim_{T\to\infty}\ln\left(\frac{5}{4}+\frac{iT}{2}\right) = \ln\frac{T}{2} + i\left(\frac{\pi}{2}+O(T^{-1})\right)$$

Substituindo em (22)

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) = Im\left[\left(\frac{3}{4}+\frac{iT}{2}\right)\ \left(\ln\frac{T}{2}+i\left(\frac{\pi}{2}+O(T^{-1})\right)-\frac{iT}{2}\right)\right]$$

$$\Delta_{R_2}\ arg\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\right) = \frac{3\pi}{8}+\frac{T}{2}\ln\frac{T}{2}-\frac{T}{2}+O(T^{-1}) \tag{23}$$

4º:

$$\Delta_{R_2}\ arg(\zeta(s)) = arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)\right)-arg(\zeta(2))$$

$$\Delta_{R_2}\ arg(\zeta(s)) = arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)\right)-arg\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$\frac{1}{\pi}\ \Delta_{R_2}\ arg(\zeta(s)) = \frac{1}{\pi}\ arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)\right)$$

Entretanto, conforme pode ser visto em [7]

$$\frac{1}{\pi}\ \Delta_{R_2}\ arg(\zeta(s)) = \frac{1}{\pi}\ arg\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+iT\right)\right) \ll \ln T$$

$$\frac{1}{\pi}\ \Delta_{R_2}\ arg(\zeta(s)) = O(\ln T) \tag{24}$$

Voltando com os resultados (20), (21), (23) e (24) à fórmula inicial e como entre os complexos, o argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores.

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\ \Delta_{R_2}\ arg\left((s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s)\right)$$

$$N(T) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+O\left(T^{-1}\right)-\frac{T}{2}\ln\pi+\frac{3\pi}{8}+\frac{T}{2}\ln\frac{T}{2}-\frac{T}{2}+O(T^{-1})\right)+O(\ln T)$$

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+\left(\frac{7}{8}+\frac{2}{\pi}O\left(T^{-1}\right)\right)+O(\ln T)$$

À medida que T se torna grande o suficiente, a parcela

$$\left(\frac{7}{8}+\frac{2}{\pi}O\left(T^{-1}\right)\right) < 1$$

se torna desprezível e pode ser absorvida pela parcela $O(\ln T)$. Assim, como queríamos demonstrar

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\ln T)$$

□

5.1 Aplicação de $N(T)$

Consideraremos dois exemplos para o cálculo do número de raízes da função Zeta em uma região retangular.

(i) $T = 50$. Considere o seguinte retângulo:

$$R_{50} = \{(\sigma + it) \in \mathbb{C} : \; 0 < \sigma < 1; \; 0 \leq t < 50\}$$

A quantidades de zeros da função Zeta de Riemann, no retângulo R_{50}, é dada pela fórmula (19):

$$N(50) = M(50) + O(\ln 50)$$

onde, $M(50) = \frac{50}{2\pi} \ln \frac{50}{2\pi} - \frac{50}{2\pi} = 8,5478$. Usando (4), temos que para algum $k > 0$

$$M(50) - k \ln 50 \leq N(50) \leq M(50) + k \ln 50$$

ou, equivalentemente,

$$8,5478 - 3,9120k \leq N(50) \leq 8,5478 + 3,9120k \tag{25}$$

Calculando (25) para alguns valores de k, temos

$$\begin{aligned} k = 1 : &\quad 4,6358 \leq N(50) \leq 12,4598 \\ k = 0,5 : &\quad 6,5918 \leq N(50) \leq 10,5038 \\ k = 0,25 : &\quad 7,5698 \leq N(50) \leq 9,5258 \\ k = 0,125 : &\quad 8,0588 \leq N(50) \leq 9,0368 \end{aligned}$$

Assim, para $k = 0,125$ temos que $N(50) = 9$, que coincidem com o número de raízes da função Zeta, em (13).

(ii) $T = 10^5$. Considere o seguinte retângulo:

$$R_{10^5} = \{(\sigma + it) \in \mathbb{C} : \; 0 < \sigma < 1; \; 0 \leq t < 10^5\}$$

A quantidades de zeros da função Zeta de Riemann, no retângulo R_{10^5}, é dada pela fórmula

$$138.067,6791 - 11,5129k \leq N(10^5) \leq 138.067,6791 + 11,5129k \tag{26}$$

Calculando (26) para alguns valores de k, temos

$$\begin{aligned} k = 1 : &\quad 138.056.1662 \leq N(10^5) \leq 138.079,1921 \\ k = 0,5 : &\quad 138.061,9227 \leq N(10^5) \leq 138.073,4356 \\ k = 0,1 : &\quad 138.066,5278 \leq N(10^5) \leq 138.068,8304 \\ k = 0,03 : &\quad 138.067,3337 \leq N(10^5) \leq 138.068,0245 \end{aligned}$$

Note que para $k = 0,03$ o valor de $N(10^5) = 138.068$, que defere de uma raiz em relação ao resultado exato de 138.069 raízes, obtido com o software Mathematica, na internet, *Wolfram MathWorld*. [4]

[4] http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeros.html, visualizado em 18/04/2016.

Considerações Finais

A exiguidade do espaço possível para esse trabalho não permite aqui registrar todos os frutos da pesquisa realizada para a apresentação desse texto.

A extensão dos dados históricos sobre as descobertas a respeito dos números primos, os diversos matemáticos que se dedicaram e seus resultados que possibilitaram avançar na resolução da Hipótese de Riemann, os detalhes mais minuciosos da teoria dos números e dos conceitos utilizados nas demonstrações, não puderam ser totalmente registrados, mas permanecem acessíveis através da bibliografia apresentada ao final.

O Teorema Principal desse trabalho não é sozinho um esclarecimento sobre a hipótese da qual ele procede, mas certamente é parte do caminho para seu entendimento e sua resolução e aqui foi apresentado e demonstrado com todo o rigor necessário ao seu entendimento. Após 157 anos a Hipótese de Riemann permanece imbatível, mas espero que esse trabalho possa cumprir o papel de apresentar e dar uma primeira aproximação a qualquer curioso matemático que queira compreender a hipótese tema.

Agradecimentos

Um trabalho como esse sempre demanda uma dedicação maior que aquela que pretendemos ou acreditamos necessária. Tendo em vista que não só a mim, mas a muitos outros foi necessário abrir mão de algum conforto, venho agora registrar meu mais sincero agradecimento por sua colaboração.

Primeiramente ao meu orientador, professor Doutor Jorge Andrés Julca Avila, que me encorajou a buscar o conhecimento e me trouxe de volta à realidade quando me desapeguei do objetivo. Aos meus colegas de curso pelos dois anos de companheirismo e incentivo mútuo nos estudos, especialmente Bruno e Gustavo, companheiros de carona que se tornaram verdadeiros amigos. Aos professores e funcionários da UFSJ que se dedicaram nessa minha passagem pela instituição e também aos membros da SBM que propuseram e possibilitaram a realização do PROFMAT.

Ao final, agradeço àqueles que mais contribuíram, minha família, Viviane, Raphael e Eric, que abdicaram de muitos momentos com seu esposo ou pai e permitiram que eu pudesse devotar tantas horas que subtraí do convívio com eles. Por último, a Deus, que iluminando e protegendo meu caminho, também me agraciou com a capacidade de trilha-lo.

Referências

[1] AGUILERA-NAVARRO, Valdir C.; AGUILERA-NAVARRO, Maria C. K.; FERREIRA, Ricardo C.; TERAMON, Neuza. *A função Zeta de Riemann*. Revista Ciências Exatas e Naturais. Guarapuava. UNICENTRO. V. 1. P. 23-47. 1999.

[2] BORWEIN, Jhonathan M.; BORWEIN, Peter B. *Pi and the AGM*. Halifax. Wiley Interscience. 1987. 414 P. (Series of Monographs and Advanced Texts)

[3] BORWEIN, Peter; CHOI, Stephen; ROONEY, Brendan; e WEIRATHMUELLER, Andrea; *The Riemann Hypothesis*. Springer-Verlag New York, 2006.

[4] CHURCHILL, R. V. e BROWN, J. W. *Complex Variables and Applications*. Eighth Ed., McGraw-Hill Companies, Inc., New York, 2009.

[5] CONREY, Brian. [e-mail] 17 fev. 2016. Bristol, UK. [para] MENEZES, Stênio Vidal. Belo Horizonte, BR. 1f. *Riemann Hypothesis help*

[6] CONREY, Brian. *The Riemann Hypothesis*. Disponível em http://www.ams.org/notices/200303/fea-conrey-web.pdf. Acesso em 03 mar 2016.

[7] DAVENPORT, H.; Analytic Number Theory. third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 74, Springer-Verlag, New York, 2000, Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery. Resenha de: STRÖMBERGSSON, Andreas; Analytic Number Theory: Lecture Notes Based on Davenport's Book. Disponível em: http://www2.math.uu.se/ astrombe/analtalt08/www_notes.pdf. Acesso em 03 mar 2016.

[8] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Campinas. UNICAMP. 2004. P. 844.

[9] FLORENTINO, Carlos A. A. *Introdução à teoria das funções complexas*. Disponível em http://analisecomplexa.wdfiles.com/local–files/referencias/Livro-TFC.pdf. Acesso em 03 mar 2016.

[10] IMPA; *Primes and Zeros: A million dollar mystery*; Disponível em: http://strato.impa.br/videos/palestras/riemannhypothesis_19052011_conrey.flv. Acesso em 03 mar 2016.

[11] KAWANO, Alexandre; NUNES, Luís Flavio Soares; *Funções analíticas e tópicos correlatos em um curso de engenharia: Um assunto esquecido*. XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. 2012, 03-06 set. Belém, 2012. http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2012/artigos/104290.pdf. Acesso em 03 mar 2016.

[12] KNOPP, K. *Analytic Continuation and Complete Definition of Analytic Functions*, Ch. 8 in Theory of Functions Parts I and II, Two Volumes Bound as One, Part I. New York: Dover, pp. 83 - 111, 1996.

[13] LIMA, Elon Lages. *Análise Real*. Rio de Janeiro. IMPA. 2004. V. 2. P. 202. (Coleção Matemática Universitária)

[14] LIMA, Elon Lages. *Análise no espaço Rn*. Rio de Janeiro. IMPA. 2004. P. 148. (Coleção Matemática Universitária)

[15] MAGALHÃES, Luiz T, *Análise Complexa de Funções de Uma Variável e Aplicações.* Disponível em: http://www.math.ist.utl.pt/ lmagal/ACCap5.pdf. Acesso em 03 mar 2016. Capítulo 5: Funções Analíticas Complexas. Páginas 65-80.

[16] MARTINEZ, Fabio B.; MOREIRA, Carlos G.; SALDANHA, Nicolau; TENGAN, Eduardo. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Rio de Janeiro. IMPA. 2015. P. 496. (Coleção Projeto Euclides)

[17] MOREIRA, César A. e AVILA, Jorge A. J. *A Hipótese de Riemann: uma Perspectiva Generosa*. Dissertação de Mestrado, SBM/PROFMAT/UFSJ, 2015.

[18] MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, Paulo C. P. *Matemática Discreta*. Rio de Janeiro. IMPA. 2014. P. 192. (Coleção PROFMAT)

[19] OLIVEIRA, Willian Diego. *Zeros da função Zeta de Riemann e o Teorema dos Números Primos*. 23 ago. 2013. 145f. Dissertação. UNESP. São José do Rio Preto. 23 ago. 2013.

[20] SANTOS, José Carlos. *A Hipotese de Riemann ? 150 anos*. Disponível em http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/PDF/artigos/Riemann_150.pdf. Acesso em 03 mar 2016.

[21] SAUVÉ, Jacques; *Five and seven-digit palindromic primes*. Crux Mathematicorum. Carleton-Ottawa, Canada. Vol. 6. N. 9.Pág. 266-268. Nov. 1980. https://cms.math.ca/crux/backfile/Crux_v6n09_Nov.pdf. Acesso em 03 mar 2016.

[22] SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo. McGraw-Hill. 1987. V. 1. P. 829.

[23] SIMMONS, George F. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo. McGraw-Hill. 1987. V. 2. P. 807.

[24] SOARES, Marcio G. *Cálculo em uma variável complexa*. 2ª edição. Rio de Janeiro. IMPA. 2001. P. 213. (Coleção Matemática Universitária)

[25] SPENTHOF, Roberto Luiz; SOUSA, Josiney Alves de. *Primos: da aleatoriedade ao padrão*. Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. V. 1. N. 1. 2013. http://pmo.sbm.org.br/v001/n001/sbm-pmo-v001-n001-spenthof-e-de-souza.pdf. Acesso em 03 mar 2016.

[26] VOLOCH, José Felipe (1987). *A distribuição dos números primos*. Matemática Universitária. Rio de Janeiro. N 6. Pág. 71-82. Dez. 1987.