



CAMILO MISURA

**UM OLHAR SOBRE OS MODELOS MATEMÁTICOS DA MÚSICA**

**Santo André, 2016**





**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

**CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO**

**CAMILO MISURA**

**UM OLHAR SOBRE OS MODELOS MATEMÁTICOS DA MÚSICA**

**Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de  
Matemática, Computação e Cognição para  
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELO ALUNO CAMILO MISURA,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. RODNEY CARLOS BASSANEZI.

**SANTO ANDRÉ, 2016**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**  
**Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática**  
**em Rede Nacional**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017  
profmat@ufabc.edu.br

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Camilo Misura, realizada em 18 de novembro de 2015:

---

Prof.(a) Dr.(a) **Rodney Carlos Bassanezi** (UFABC) – Presidente

---

Prof.(a) Dr.(a) **Geraldo Pompeu Junior** (UFSCAR) – Membro Titular

---

Prof.(a) Dr.(a) **Adilson José Vieira Brandão** (UFSCAR) – Membro Titular

---

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael de Mattos Grisi** (UFABC) – Membro Suplente

---

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael Ribeiro Dias Vilela de Oliveira** (UFABC) – Membro Suplente

**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.**

Santo André, 01 de março de 2016.

Assinatura do autor: \_\_\_\_\_

*Camilo Mizura*

Assinatura do orientador: \_\_\_\_\_

*[Assinatura]*



---

Dedicado a Cibelle e Bruna, que junto comigo  
abdicaram a muitos sábados ensolarados para  
eu completar essa etapa.





---

## AGRADECIMENTOS

---

Ao professor Rodney que foi paciente, mesmo com esse orientando tolo. Ao meu pai (meu modelo de caráter) que logo no começo desta empreitada teve que nos deixar, assim como a Dona Léa (nossa intercessora). Meus padrinhos e amigos, que apoiaram a Cibelle e a Bruna enquanto eu tinha que estudar. Aos professores do PROFMAT e da Modelagem Matemática em Ensino e Aprendizagem.

À Cibelle por ser minha parceira em tudo, e à Bruna por ter a compreensão que seu pai estava fora quase todos os dias da semana e só chegava tarde, mesmo tendo hoje apenas 5 anos.

A Deus, a Rocha onde edifiquei minha morada.

Muito obrigado.



---

*Deus é o Geômetra Onipotente para quem o mundo é um imenso problema matemático.*

Leibniz



---

## RESUMO

---

**Palavras-chave:** Modelos Matemáticos, Música, Teoria de Fourier

Nesta dissertação são abordadas as relações e modelos matemáticos existentes na música. Enunciando as noções de acústica e psicofísica para explicar o som. São utilizadas as Funções Periódicas e Teoria de Fourier para construir as relações de harmônicos. A partir de conhecimentos físicos sobre mecânica, faz-se a construção de modelos matemáticos para explicar o comportamento dos instrumentos de cordas, sopro e membranas (percussão), utilizando equações diferenciais. Estuda-se as relações entre os comprimentos de corda, as notas musicais e as escalas musicais, mostrando três escalas historicamente relevantes (Pitagórica, Justa e Temperada). Conhecendo-as, é possível perceber as relações modulares que elas possuem. É feita a construção algébrica que justifica a aritmética modular para classificar a escala cromática (escala de 12 semitons) e apresentadas as transformações geométricas no plano, além de como elas são usadas em composições. Ao término é sugerida uma atividade didática com o intuito de enriquecer a prática escolar na educação básica, usando a música no ensino de Funções Trigonométricas.



---

## ABSTRACT

---

**Keywords:** Mathematical Models, Music, Fourier Theory

This Master Thesis studies the mathematical relations and models in music. Setting out the acoustics and psycho-physical notions in order to explain sound. Using periodic functions and Fourier theory to build relationships of Harmonics. From physical knowledge about mechanics, mathematical models are built to explain the behavior of string instruments, wind and membranes (percussion) using differential equations. It studies the relationships between the lengths of rope, musical notes and musical scales showing three scales historically relevant (Pythagorean, Just and Equally tempered). Knowing them, it is possible to understand the modular relationships they display. The algebraic construction that justifies the modular arithmetic is made to classify the chromatic scale (scale of 12 semitones) and the geometric transformations on plane are shown and its uses on composition. At the end, it is suggested a didactic activity in order to enrich school teaching practice in basic education, using music and sine waves.





---

## LISTA DE TABELAS

---

Tabela 1	HINO DE SÃO JOÃO BATISTA . . . . .	4
Tabela 2	Proporções Musicais Pitagóricas . . . . .	5
Tabela 3	Notas, frequências e comprimento em relação à Dó . . . . .	6
Tabela 4	Consonâncias da Escala Justa. . . . .	10
Tabela 5	Proporções e Notas na Escala Justa Diatônica de Dó . . . . .	11
Tabela 6	Proporções e Notas na Escala Justa Cromática de Dó . . . . .	11
Tabela 7	Escala Temperada Diatônica de Dó . . . . .	13
Tabela 8	Razões de Frequência dos Intervalos Consonantes das Três Escalas	13
Tabela 9	Valores para as notas da Escala Cromática . . . . .	15
Tabela 10	Valores para as notas da Escala Cromática em módulo 12 . . . . .	16
Tabela 11	Oitavas e Base 2 . . . . .	23
Tabela 12	Faixa de Frequência Auditiva de Diferentes Espécies . . . . .	48
Tabela 13	Relações entre frequências e Proporções Musicais . . . . .	67
Tabela 14	Tabela de Frequências das Notas Musicais para a Escala Temperada de Dó <sub>3</sub> . . . . .	84



---

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 1	Ciclo de Quintas. . . . .	7
Figura 2	Razões na Escala Pitagórica. . . . .	7
Figura 3	Ciclo Pitagórico de Quintas. . . . .	8
Figura 4	Espiral de Quintas. . . . .	9
Figura 5	Razões na Escala Justa. . . . .	10
Figura 6	Pauta de 5 linhas . . . . .	25
Figura 7	Pauta dupla de 5 linhas . . . . .	25
Figura 8	Pauta de 5 linhas contendo múltiplas “entradas” (claves) . . . . .	26
Figura 9	Clave de sol . . . . .	26
Figura 10	Claves de Fá, Dó na Terceira Linha, Dó na Quarta Linha e Clave de Percussão. . . . .	26
Figura 11	Posição das Notas da Escala Diatônica segundo a Clave de Sol. . . . .	27
Figura 12	Posição da Notas da Escala Diatônica segundo as Clave de Sol e Fá. . . . .	27
Figura 13	Posição da Notas da Escala Diatônica segundo as Clave de Sol, Fá, Dó na Terceira Linha e Dó na Quarta Linha. . . . .	27
Figura 14	Representação de Sustenido e Bemol na Pauta. . . . .	28
Figura 15	Representação de tempo de duração das Notas na Pauta. . . . .	28
Figura 16	Representação de tempo de duração das Pausas na Pauta. . . . .	28
Figura 17	Reflexão em torno do eixo $e$ . . . . .	29
Figura 18	Rotação ao redor do ponto $F$ . . . . .	30
Figura 19	Translação pelo vetor $\vec{u}$ . . . . .	31
Figura 20	Glissoreflexão pelo vetor $\vec{u}$ . . . . .	32
Figura 21	Homotetia positiva e negativa em relação ao ponto $E$ . . . . .	32
Figura 22	Representação de uma partitura musical em um plano $xOy$ [8]. . . . .	33
Figura 23	Trecho Musical original (a) e representação da translação horizontal (b) e vertical (c) [8]. . . . .	36
Figura 24	Trecho Musical original (a) e representação da reflexão horizontal (b) e vertical (c) [8]. . . . .	37
Figura 25	Cânone nº2 da “Arte da Fuga” - Translação horizontal [8] . . . . .	38

Lista de Figuras

Figura 26	Variação nº18 das “Variações Goldberg” - Translações horizontal e vertical [8] . . . . .	39
Figura 27	Variação nº15 das “Variações Goldberg” - Reflexão e Translação horizontais [8] . . . . .	40
Figura 28	Cânone a duas vozes da “Oferenda Musical” - Reflexão vertical [8]	41
Figura 29	Representação gráfica de uma onda conforme interpretação científica . . . . .	43
Figura 30	$\text{sen}x$ (em preto) e $3\text{sen}x$ (em vermelho) . . . . .	44
Figura 31	$\text{sen}x$ (em preto) , $\text{sen}\frac{x}{2}$ (em azul) e $\text{sen}2x$ (em vermelho) . . . .	45
Figura 32	$\text{sen}x$ (em preto) e $\text{sen}(x + 1)$ (em vermelho) . . . . .	46
Figura 33	$\text{sen}x$ (em verde) e $\cos(x - \frac{\pi}{2})$ (em verde) . . . . .	46
Figura 34	$\text{sen}x$ (em preto) e $1 + \text{sen}x$ (em vermelho) . . . . .	47
Figura 35	(a) vista esquemática do ouvido (Flaganagan, 1972, figura 4)(fora de escala); (b) a cóclea desenrolada (bem simplificada); em ROEDERER, 2002 [18] . . . . .	49
Figura 36	Seção transversal do órgão de Corti. Em ROEDERER, 2002 [18]	50
Figura 37	$2\text{sen}x + 2\text{sen}x = 4\text{sen}x$ . $2\text{sen}x$ (em verde), $2\text{sen}x$ (em preto) e $4\text{sen}x$ (em azul) . . . . .	51
Figura 38	$2\text{sen}x + (-3)\text{sen}x = (-1)\text{sen}x$ . $2\text{sen}x$ (em preto), $(-3)\text{sen}x$ (em vermelho e ) $(-1)\text{sen}x$ (em azul). . . . .	52
Figura 39	$\text{sen}x$ (em preto), $\text{sen}(x + 1)$ (em vermelho) e $\text{sen}x + \text{sen}(x - 1)$ (em azul). . . . .	52
Figura 40	$\text{sen}x + \text{sen}(-x) = 0$ . $\text{Sen}(x)$ (em preto), $\text{sen}(-x)$ (em vermelho) e $\text{sen}x + \text{sen}(-x)$ (em azul) . . . . .	53
Figura 41	$\text{sen}x$ (em preto), $\text{sen}2x$ (em vermelho) e $\text{sen}x + \text{sen}2x$ (em azul)	53
Figura 42	$\text{sen}x$ (em preto), $\text{sen}(2x + \pi)$ (em vermelho) e $\text{sen}x + \text{sen}(2x + \pi)$ (em azul) . . . . .	53
Figura 43	Largura da Banda Crítica $\Delta f_{CB}$ e o limite de discriminação da Frequência central. Largura da Banda Crítica $\Delta f_{CB}$ (segundo Zwicker, Flottopr e Stevens, 1957) e o limite de discriminação da Frequência central de um estímulo de dois sons (escalas lineares). A diferença de frequência correspondente a três intervalos musicais é mostrada para comparação. Em Roederer (2002) [18] . . . . .	54
Figura 44	Corda vibrante fixa pelas extremidades fracionada em $1/2$ . . . .	57
Figura 45	Corda vibrante fixa pelas extremidades fracionada em $1/3$ . . . .	57

Figura 46	Deslocamento em uma Corda . . . . .	70
Figura 47	Comportamento do deslocamento e pressão do ar em um tubo com 1, 2 e 3 buracos, formando nodos. . . . .	76



---

# SUMÁRIO

---

INTRODUÇÃO	1
1 ESCALAS MUSICAIS	3
1.1 Escala Pitagórica . . . . .	4
1.2 A Escala Justa . . . . .	9
1.3 A Escala temperada . . . . .	11
2 MÚSICA E SEUS ELEMENTOS ARITMÉTICOS, ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS	15
2.1 Padrões Matemáticos da Escala Cromática . . . . .	15
2.1.1 Elementos de Álgebra Abstrata . . . . .	19
2.1.2 Elementos de Aritmética e Algebra em Música . . . . .	22
2.1.3 A Oitava e a Base 2 . . . . .	23
2.2 Elementos Geométricos em Música . . . . .	25
2.2.1 Notação e Representação Gráfica Tradicional da Música . . . . .	25
2.2.2 Transformações Geométricas no Plano . . . . .	28
2.2.3 Transformações Geométrica presentes na Música . . . . .	33
3 VIBRAÇÕES, SONS PUROS E A TEORIA DE FOURIER	43
3.1 A senoide e as ondas . . . . .	43
3.2 Sons puros e o ouvido . . . . .	47
3.3 Sobreposição de sons simples . . . . .	51
3.4 A Teoria de Fourier . . . . .	54
3.4.1 Coeficientes Complexos . . . . .	65
3.4.2 Harmônicos . . . . .	66
4 MODELOS DE INSTRUMENTOS MUSICAIS	69
4.1 O Modelo da Corda Vibrante . . . . .	69
4.2 O Modelo do Tubo de Ar . . . . .	74
4.3 O modelo da membrana elástica . . . . .	76
5 APLICAÇÕES DIDÁTICAS	79

Sumário

5.1 Proposta de Atividade: O Som e os Senos . . . . .	84
Referências Bibliográficas	87



---

## INTRODUÇÃO

---

Quando procura-se bibliografias sobre Matemática na música, percebemos que há poucos livros disponíveis em português sobre esse tema, mas uma rápida pesquisa por materiais de Física ou mesmo de Neurociência nos mostra a presença massiva de matemática em trabalhos nas áreas que explicam a música, respectivamente, a acústica na Física e a psicofísica (área que estuda as relações entre as sensações subjetivas e os estímulos físicos, e procura estabelecer relações quantitativas entre ambos) da audição na Neurociência.

Querendo ajudar aos que gostam tanto de matemática como de música esse trabalho foi estruturado. Para atingir esse objetivo, as obras de Benson [4] e Roederer [18] formaram a espinha dorsal deste trabalho.

No primeiro capítulo é feito um pequeno passeio histórico ao trabalho de Pitágoras. A sua construção da escala musical é a base para a nossa música. Com a evolução da matemática e dos músicos, vemos como forma-se a Escala Justa e por fim a Escala Temperada. Nesse passeio, são mostradas as construções pelas razões e pelos logaritmos.

Seguindo nossa viagem começamos a explorar no segundo capítulo as direferentes relações matemáticas na música.

A partir da observação de padrões, conseguimos mostrar as relações aritméticas da escala para, em seguida, fazer a construção de grupo segundo a álgebra para então mostrar que a escala musical se comporta como um Subgrupo Modular dos Inteiros, e como as operações de soma e multiplicação estão definidas na escala musical.

Seguindo no mesmo capítulo estudaremos os elementos geométricos na música, que envolvem principalmente o uso da partitura e o modo pelo qual as técnicas de composição seguem as transformações geométricas no plano.

No terceiro e quarto capítulos veremos com mais ênfase a influência de Benson [4] e Roederer [18].

No terceiro é apresentado o tratamento do som como uma onda mecânica descrita através das funções trigonométricas seno e cosseno, um pincelada do funcionamento

## INTRODUÇÃO

físico do ouvido (psicofísica) e da sobreposição de ondas. Com essas informações é apresentado o trabalho marco no estudo das ondas, a Teoria de Fourier.

No quarto, nos apropriamos da obra de Benson [4] para mostrar como podemos construir o modelo físico de alguns instrumentos musicais.

Por fim, no quinto capítulo, além de compreender melhor a música, é sugerida uma atividade didática como estratégia motivadora no ensino da Matemática.

v

---

## ESCALAS MUSICAIS

---

Historicamente a música sempre esteve presente na sociedade. As primeiras referências matemáticas atribuídas à música fazem alusões à Pitágoras.

“ ‘Um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batia numa bigorna com cinco martelos. Espantado pela agradável harmonia (concordiam) que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som e da harmonia (modulationis) estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso.” Assim descreve Guido d’Arezzo (992-1050?), no seu pequeno mas influente tratado de música *Micrologus*, a lenda que atribui a Pitágoras (sec. VI AC) a descoberta fundamental da dependência dos intervalos musicais dos quocientes dos primeiros números inteiros, i.e., parafraseando o romano Boécio (sec. VI), “a grande, espantosa e muito súbtíl relação (concordiam) que existe entre a música e as proporções dos números (numerum proportione)’

Em termos dos comprimentos de uma corda esticada, em particular do monocórdio, aquelas proporções simples traduzem-se no uníssono, dado pela razão 1 : 1, na oitava (diapason) por 1 : 2, na quinta (diapente) por 2 : 3 e na quarta (diatessaron) por 3 : 4. Estas razões podem ser obtidas a partir daqueles quatro números inteiros, correspondendo, respectivamente, a uma corda de comprimento igual a 12 unidades (uníssono), reduzida a metade 6 (oitava), a 8 unidades (quinta) ou a 9 (quarta).” (Rodrigues, 1999) [17]

A importância que os gregos davam às relações numéricas era tal que elas as aplicavam inclusive em outras áreas, como a música na harmonia celeste.

Observando as proporções entre 6, 8, 9, 12 (ou a oitava, a quinta, a quarta e o uníssono) eles construíram a primeira escala musical matemática. O instrumento usado para essa construção era o monocórdio. Ele era composto de uma corda esticada, fixa nas extremidades. Havia uma haste móvel que era usada para dividir a corda segundo as relações anteriores para gerar sons diferentes e harmoniosos. Essa secção da corda a forçava a vibrar em diferentes frequências.

A frequência está relacionada a altura do som, qualidade que hoje atribuímos às notas musicais. As notas foram padronizadas ao longo dos anos com o objetivo de podermos registrar e reproduzir as composições. Segundo Julliani (2003) [14]:

“O primeiro algoritmo que aparece baseava-se no alfabeto. As sete primeiras letras representavam os sete primeiros sons da escala.”

A partir de um hino a São João Batista, o monge Guido de Arezzo nomeou essas notas (tabela 1):

Letra	Nome	Hino
C	Ut (dó)	<b>U</b> t queant laxis
D	Ré	<b>R</b> Esonare fibris
E	Mi	<b>M</b> IRA gestorum
F	Fá	<b>F</b> Amuli tuorum
G	Sol	<b>S</b> OLve polluti
A	Lá	<b>L</b> Abii reatum
B	Si	<b>S</b> ancte Ioannes.

Tabela 1: HINO DE SÃO JOÃO BATISTA

### 1.1 ESCALA PITAGÓRICA

Ao analisarmos os pesos dos martelos de Pitágoras (6, 8, 9, 12) podemos perceber as seguintes relações:

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Essa proporção é chamada de quinta na música.

Por outro lado, temos também:

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Essa proporção é chamada de quarta em música. A partir dessas duas proporções foi elaborada a escala.

Seja  $c$  o comprimento de uma corda necessários para que sua frequência seja um dó médio (C). Temos 2:

Nome Musical	Proporção	Comprimento de Corda	Nota
Tônica	1:1	$c$	Dó
Oitava	2:1	$\frac{c}{2}$	Dó (dobro da frequência)
Quinta	3:2	$\frac{2}{3}c$	Sol
Quarta	4:3	$\frac{3}{4}c$	Fá

Tabela 2: Proporções Musicais Pitagóricas

Consideremos agora a seguinte notação: (Pereira [15])

Seja a 1ªdó,  $C_1$ (Dó<sub>1</sub>), cuja unidade de comprimento é  $c$ .

Uma oitava de  $C_1$  será  $C_2$ , com comprimento  $\frac{c}{2}$ .

**Definição 1.** A  $m$ -ésima quinta de Dó pertencerá à  $n$ -ésima oitava, e é obtida pela equação

$$Q_m = \left(\frac{2}{3}\right)^m C_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^m c$$

**Definição 2.** A  $n$ -ésima oitava é tal que:

$$c\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < Q_m \leq c\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

para  $n \in \mathbb{N}$

Partiremos agora não da quinta, mas da primeira quarta:

$$\text{Quarta de } C_1 = c \cdot \frac{3}{4} = \frac{3c}{4} = F_1$$

$$\text{Quinta de } F_1 = \frac{3c}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{c}{2} = C_2 \text{ (que é a oitava de } C_1)$$

$$\text{Quinta de } C_1 = c \cdot \frac{2}{3} = \frac{2c}{3} = G_1$$

A partir desses passos, são obtidas as demais notas:

$$\text{Quinta de } G_1 = \frac{2c}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 c = \frac{4c}{9} = D_2$$

Como o Ré obtido está na oitava acima, o multiplicaremos por 2 para que seja trazido uma oitava para baixo.

$$D_2 \cdot 2 = \frac{4c}{9} \cdot 2 = \frac{8c}{9} = D_1$$

Essa passo era o que faltava para completar o algoritmo.

$$\text{Quinta de } D_1 = \frac{8c}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16c}{27} = A_1$$

$$\text{Quinta de } A_1 = \frac{16c}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32c}{81} = E_1$$

$$E_2 \cdot 2 = \frac{32c}{81} \cdot 2 = \frac{64c}{81} = E_1$$

$$\text{Quinta de } E_1 = \frac{64c}{81} \cdot \frac{2}{3} = \frac{128c}{243} = B_1$$

Esse procedimento é chamado de ciclo das quintas. Observe como ficaram dispostas as notas na figura 1.

Nota	Comprimento	Frequência	Nome
Dó	1:1	1:1	Tônica
Dó	1:2	2:1	Oitava
Sol	2:3	3:2	Quinta
Fá	4:3	4:3	Quarta
Lá	16:27	27:16	Sexta
Mi	64:81	81:64	Terça
Ré	8:9	9:8	Segunda
Si	128:243	243:128	Sétima

Tabela 3: Notas, frequências e comprimento em relação à Dó

A frequência da onda é inversamente proporcional ao comprimento da corda.

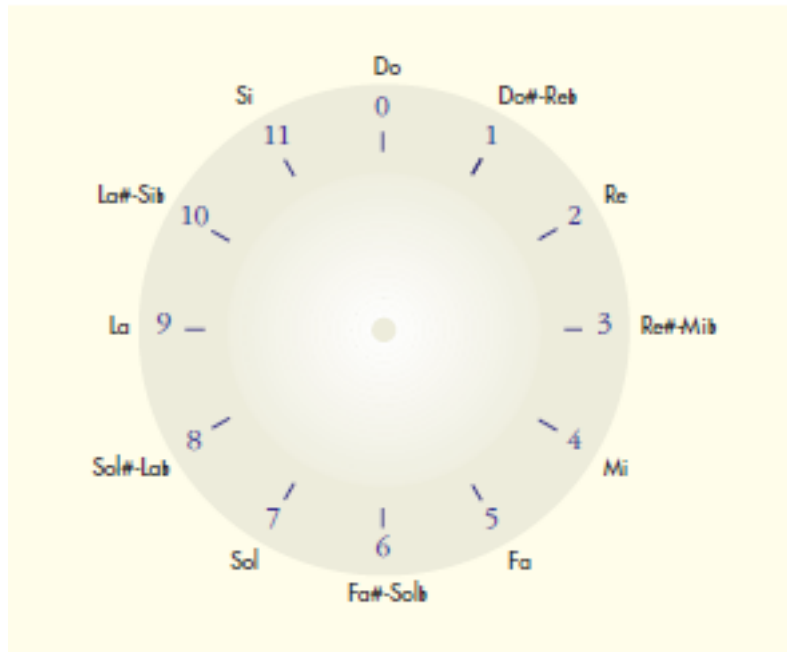


Figura 1: Ciclo de Quintas.

Em Rodrigues (1999) [17]

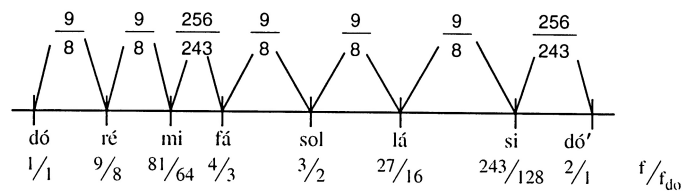


Figura 2: Razões na Escala Pitagórica.

Em Roederer (2002) [18]

Observemos a disposição das notas e a subtração da cada fração na figura 2:

A diferença de 1 é chamada de tom, e a de 1/2 é chamada semitom.

Escala musical baseada na sequência 1, 1, 1/2, 1, 1, 1, 1/2 (5 tons, 2 semitons) são chamadas diatônicas. A construção da Escala Pitagórica por quintas força essa configuração.

Na música ocidental moderna a escala utilizada é a Escala Cromática, que é equivalente à Escala Diatônica, mas onde cada tom é dividido em dois semitons. Com essa

redistribuição ficamos com uma escala composta por 12 semitons, que na Escala Pitagórica equivale a

$$\frac{256}{243} = \frac{2^8}{3^5}$$

Essa notação carrega um pequeno problema, pois se um tom é  $\frac{9}{8}$ , dois semitons são  $\frac{2^8}{3^5} \cdot \frac{2^8}{3^5} = \frac{2^{16}}{3^{10}}$ . Se comparamos os dois há uma pequena diferença:

$$\frac{9}{8} = 1,125 \quad \frac{2^{16}}{3^{10}} \approx 1,1098\dots$$

Partindo de Dó e fazendo o ciclo de quintas, ou partindo de Dó e descendo quartas, criamos o ciclo das quintas Pitagóricas, figura 3:

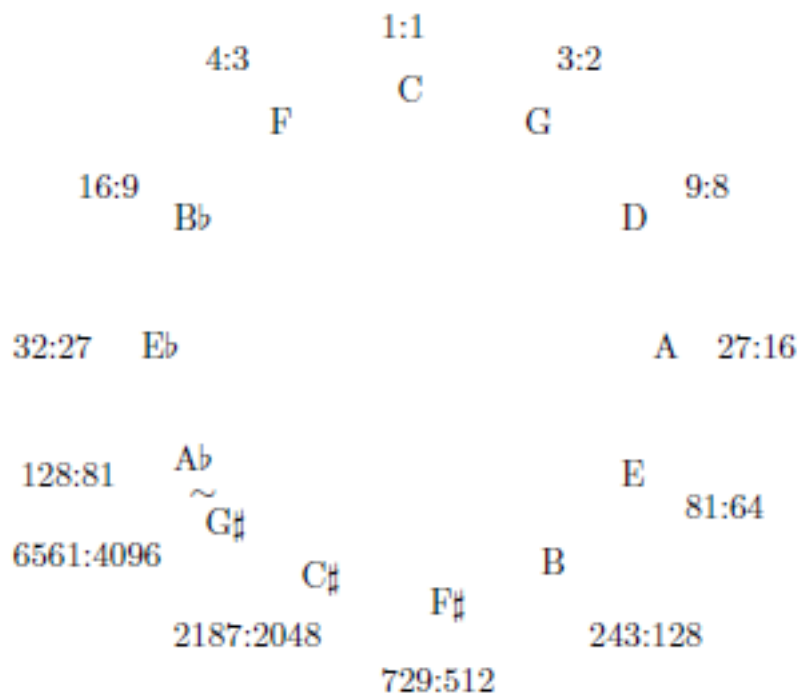


Figura 3: Ciclo Pitagórico de Quintas.

Observe a diferença entre a A $\flat$  e G $\sharp$ , a chamada coma Pitagórica. Em Benson(2011) [4]

Na música ocidental moderna, # (sustenido) e  $\flat$  (bemol) coincidem. Na Escala Pitagórica:



$$G\# \quad 6561 : 4096 \approx 1,6018$$

$$Ab \quad 128 : 81 \approx 1,58$$

Essa diferença passa despercebida a ouvidos destreinados, e vale

$$\frac{6561/4096}{128/81} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

Por conta da diferença existente, Benson (2011) [4] chama o ciclo de quintas de espiral de quintas, e o representa conforme a figura 4.

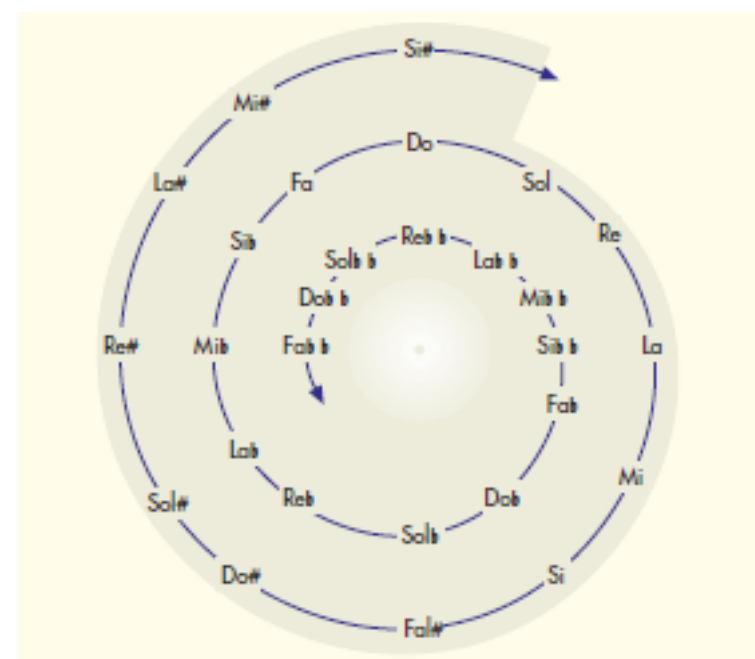


Figura 4: Espiral de Quintas.

Em Rodrigues (1999) [17]

## 1.2 A ESCALA JUSTA

A Escala Pitagórica não foi a única desenvolvida baseada em proporções. A Escala Justa é bastante parecida com a Pitagórica, pois inicia-se a partir da quinta e da quarta. A Escala Justa busca mitigar a dissonância buscando a proporção mais harmônica ou consonante, conforme a tabela 4 e a figura 5.

	Razão de Frequência ( $n/m$ )	Intervalo
Consonâncias “Perfeitas”	1/1	Uníssonos
	2/1	Oitava
	3/2	Quinta
	4/3	Quarta
Consonâncias “Imperfeitas”	5/3	Sexta Maior
	5/4	Terça Maior
	6/5	Terça Menor
	8/5	Sexta Menor

Tabela 4: Consonâncias da Escala Justa.  
Em Roederer (2002) [18]

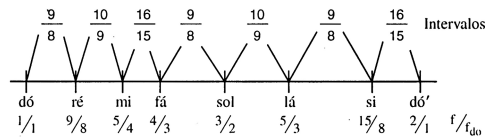


Figura 5: Razões na Escala Justa.  
Em Roederer (2002) [18]

desta forma temos para Escala Diatônica a tabela 5:

E para a Escala Cromática temos a tabela 6:

Nesse caso, temos dois intervalos que valem um tom (9:8 e 10:9), e um semitom 16:15, além da diferença entre G# e Ab. Essas pequenas diferenças impossibilitam que um peça composta em determinado tom, ou para determinado instrumento seja reproduzida em outro instrumento ou tom, pois o acúmulo de comas causa dissonância.

O método utilizado para resolver esse problema veio no século XVII.

Nota	Proporção
Dó	1:1
Ré	9:8
Mi	5:4
Fá	4:3
Sol	3:2
Lá	5:3
Si	15:8
Dó	2:1

Tabela 5: Proporções e Notas na Escala Justa Diatônica de Dó

Nota	Proporção
Dó #	25:24
Si b	9:5
Mi b	6:5
Fá #	45:32
Sol #	25:16
Lá b	8:5

Tabela 6: Proporções e Notas na Escala Justa Cromática de Dó

## 1.3 A ESCALA TEMPERADA

Segundo Pereira (2013) [15]:

O espectro de frequências audíveis é claramente um domínio contínuo, um intervalo. Uma escala, contudo, é apenas uma amostra discreta desse espectro, isto é, um conjunto de pontos escolhidos dentro do intervalo de frequências. Muitos povos ao longo da história da humanidade construíram suas escalas musicais baseadas em certos parâmetros preestabelecidos. Não era uma escolha aleatória.

Até a Idade Média, o modelo matemático de escala criado por Pitágoras era o mais aceito pela comunidade musical no Ocidente, todavia havia outros, e outros estavam sendo desenvolvidos para tentar corrigir as “falhas” do modelo grego. Talvez o próprio Pitágoras também tenha percebido que o intervalo entre duas notas da escala, quer dizer, entre a frequência sonora

das notas, não era sempre o mesmo. Os intervalos entre um DÓ e um RÉ, ou entre um RÉ e um MI, não eram os mesmos que os intervalos entre MI e FA ou entre SI e DÓ [...]

Essa pequena diferença entre alguns intervalos foi objeto de estudo por parte de músicos do ocidente por séculos, até que se entendeu que, na verdade, não havia como ajustar esse modelo de escala, era necessário pensar em outro modelo. [...]

O Renascimento trouxe consigo novas ideias. Houve um grande avanço científico e tecnológico e também nas artes, em geral. Na música, em particular, havia a necessidade de se transpor melodias para outras tonalidades, o que na época não era possível, pois a Escala Pitagórica não favorecia tal procedimento. Com isso, uma peça composta para determinada tonalidade não poderia ser executada em outra, pois as relações entre as notas (intervalos) variavam de acordo com o tom a ser escolhido. Portanto, os intervalos entre as notas pareceriam soar “desafinados”. A solução encontrada para corrigir esse problema foi o temperamento da escala, isto é, a divisão equânime dos intervalos para que eles pudessem estar a uma mesma distância entre si.

Bach usou esse modelo de afinação e compôs “O Cravo Bem Temperado”(Das Wohltemperierte Klavier).

A ideia matemática por trás do temperamento da escala é: dois intervalos adjacentes quaisquer possuem uma razão constante.

O método utilizado foi dividir uma oitava em 12 “intervalos” tais que

$$\frac{X_n}{X_{n-1}} = \frac{X_{n+1}}{X_n},$$

ou o intervalo  $i$  que forma a oitava é dado por

$$i^{12} = 2$$

ou seja, um semitom é

$$i = \sqrt[12]{2} \approx 1,0595 .$$

Para facilitar a afinação dos instrumentos, ao longo do tempo foi introduzida uma subdivisão de cem partes para cada intervalo, chamada cents. Uma vez que um semitom é  $i^{12} = 2$ , cem cents são um semitom:

$$c^{100} = i \Rightarrow c = i^{100}$$

Notas	Potência
C	$2^{0/12}$
C# / D $\flat$	$2^{1/12}$
D	$2^{2/12}$
D# / E $\flat$	$2^{3/12}$
E	$2^{4/12}$
F	$2^{5/12}$
F# / G $\flat$	$2^{6/12}$
G	$2^{7/12}$
G# / A $\flat$	$2^{8/12}$
A	$2^{9/12}$
A# / B $\flat$	$2^{10/12}$
B	$2^{11/12}$
C	$2^{12/12}$

Tabela 7: Escala Temperada Diatônica de Dó

Temos a escala (tabela 7):

A escala temperada resolve o problema do padrão da afinação e é o modelo adotado atualmente. Há pequenas diferenças quando comparamos as razões de consonância do intervalo temperado e das demais escalas (tabela 8), gerando uma diferença mínima entre a razão ideal da nota e a nota temperada. Apesar disso, a diferença é tão pequena que não chega a ser notada.

Intervalo	Escala Justa		Escala Pitagórica		Escala Temperada	
	Razão	Cents	Razão	Cents	Razão	Cents
Oitava	2000	1200	2000	1200	2000	1200
Quinta	1500	702	1500	702	1498	700
Quarta	1333	498	1333	498	1335	500
Terça Maior	1250	386	1265	408	1260	400
Terça Menor	1200	316	1184	294	1189	300
Sexta Maior	1667	884	1687	906	1682	900
Sexta Menor	1600	814	1580	792	1587	800

Tabela 8: Razões de Frequência dos Intervalos Consonantes das Três Escalas



---

## MÚSICA E SEUS ELEMENTOS ARITMÉTICOS, ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS

---

### 2.1 PADRÕES MATEMÁTICOS DA ESCALA CROMÁTICA

A Escala Cromática é a escala padrão usada na música ocidental moderna. Ao longo dos tempos ela foi aprimorada até se obter o modelo atual que inclui o temperamento logarítmico. Ela possui 12 semitons e obedece a um certo padrão: ao término de sua sequência completa, ela reinicia com a diferença de uma oitava mas, formalmente, com a mesma nota. Nesse caso podemos atribuir a cada nota um número (tabela 9):

C	1	C	13	C	25	C	37	C	49
C# ou D $\flat$	2	C# ou D $\flat$	14	C# ou D $\flat$	26	C# ou D $\flat$	38	C# ou D $\flat$	50
D	3	D	15	D	27	D	39	D	51
D# ou E $\flat$	4	D# ou E $\flat$	16	D# ou E $\flat$	28	D# ou E $\flat$	40	D# ou E $\flat$	52
E	5	E	17	E	29	E	41	E	53
F	6	F	18	F	30	F	42	F	54
F# ou G $\flat$	7	F# ou G $\flat$	19	F# ou G $\flat$	31	F# ou G $\flat$	43	F# ou G $\flat$	55
G	8	G	20	G	32	G	44	G	56
G# ou A $\flat$	9	G# ou A $\flat$	21	G# ou A $\flat$	33	G# ou A $\flat$	45	G# ou A $\flat$	57
A	10	A	22	A	34	A	46	A	58
A# ou B $\flat$	11	A# ou B $\flat$	23	A# ou B $\flat$	35	A# ou B $\flat$	47	A# ou B $\flat$	59
B	12	B	24	B	36	B	48	B	60

Tabela 9: Valores para as notas da Escala Cromática

Percebemos um comportamento repetitivo na tabela. Após Si vem Dó, antes de todos os Dós estão sempre Sis, não importa qual Si ou Dó escolhamos. O mesmo vale para as demais notas. Isso sugere um comportamento cíclico na distribuição das notas ao longo da Escala Cromática. Então é possível utilizar determinar qual nota vem após  $k$  semitons baseado na aritmética dos restos.

Essa relação é chamada relação de equivalência, e usamos a notação:

$$k \equiv l \pmod{m}^1$$

para  $k, l, m \in \mathbb{Z}_+, m \neq 0$ , e  $0 < l < m$

No nosso caso  $m = 12$  então atribuíríamos às notas os valores da tabela(10):

C	0
C# ou D $\flat$	1
D	2
D# ou E $\flat$	3
E	4
F	5
F# ou G $\flat$	6
G	7
G# ou A $\flat$	8
A	9
A# ou B $\flat$	10
B	11

Tabela 10: Valores para as notas da Escala Cromática em módulo 12

Se temos um Lá e desejamos subir 20 semitons

$$20 \equiv 8 \pmod{12}$$

Ou seja, é equivalente a subir 8 semitons e chegar em um Fá, apenas diferindo de oitavas.

Em posse desse conhecimento, fazemos a seguinte observação:

- de Dó para Sol é uma quinta, que são 7 semitons;
- de Dó para Fá é uma quarta, que são 5 semitons.

<sup>1</sup> lê-se  $k$  é congruo a  $l$  módulo  $m$ , e significa que  $m$  divide  $(k - l)$ , ou em notação matemática,  $m|k - l$



Através das quintas e das quartas é que se determinou a Escala Cromática com todos os seus 12 semitons. Veja o comportamento delas segundo a aritmética dos módulos, começando pelas quintas:

$$\begin{array}{l} C \text{ quinta} \rightarrow G \\ 0 \quad +7 \quad = \quad 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} G \text{ quinta} \rightarrow D \\ 7 \quad +7 \quad = \quad 14 \equiv 2 \text{mod}12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} D \text{ quinta} \rightarrow A \\ 2 \quad +7 \quad = \quad 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \text{ quinta} \rightarrow E \\ 9 \quad +7 \quad = \quad 16 \equiv 4 \text{mod}12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} E \text{ quinta} \rightarrow B \\ 4 \quad +7 \quad = \quad 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} B \text{ quinta} \rightarrow F\# \\ 11 \quad +7 \quad = \quad 18 \equiv 6 \text{mod}12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} F\# \text{ quinta} \rightarrow C\# \\ 6 \quad +7 \quad = \quad 13 \equiv 1 \text{mod}12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} C\# \text{ quinta} \rightarrow G\# \\ 1 \quad +7 \quad = \quad 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} G\# \text{ quinta} \rightarrow D\# \\ 8 \quad +7 \quad = \quad 15 \equiv 3 \text{mod}12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} D\# \text{ quinta} \rightarrow A\# \\ 3 \quad +7 \quad = \quad 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A\# \text{ quinta} \rightarrow F \\ 10 \quad +7 \quad = \quad 17 \equiv 5 \text{mod}12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} F \text{ quinta} \rightarrow C \\ 5 \quad +7 \quad = \quad 12 \equiv 0 \text{mod}12 \end{array}$$

Agora para as quartas:

$$\begin{array}{l} C \text{ quarta} \rightarrow F \\ 0 \quad +5 \quad = \quad 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} F \text{ quarta} \rightarrow B\flat \\ 5 \quad +5 \quad = \quad 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} B\flat \text{ quarta} \rightarrow E\flat \\ 10 \quad +5 \quad = \quad 15 \equiv 3 \text{mod}12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} E\flat \text{ quarta} \rightarrow A\flat \\ 3 \quad +5 \quad = \quad 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} G\# \text{ quarta} \rightarrow G\flat \\ 8 \quad +5 \quad = \quad 13 \equiv 1 \text{mod}12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} G\flat \text{ quarta} \rightarrow F\# \\ 1 \quad +5 \quad = \quad 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} F\# \text{ quarta} \rightarrow B \\ 6 \quad +5 \quad = \quad 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} B \text{ quarta} \rightarrow E \\ 11 \quad +5 \quad = \quad 16 \equiv 4 \text{mod}12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} E \text{ quarta} \rightarrow A \\ 4 \quad +5 \quad = \quad 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} G\# \text{ quarta} \rightarrow D \\ 9 \quad +5 \quad = \quad 14 \equiv 2 \text{mod}12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} D \text{ quarta} \rightarrow G \\ 2 \quad +5 \quad = \quad 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} G \text{ quarta} \rightarrow C \\ 7 \quad +5 \quad = \quad 12 \equiv 0 \text{mod}12 \end{array}$$

Colocadas dessas formas essas informações parecem apenas fatos interessantes e pontuais. Tomemos alguns pontos mais formais sobre aritmética e álgebra abstrata.

### 2.1.1 Elementos de Álgebra Abstrata

Nesse capítulo faremos uma revisão dos conceitos essenciais para compreender o comportamento matemático existente nas escalas musicais. Usaremos algumas ideias de Hefez (2006) [13], Evaristo (1999) [11].

**Definição 3.** Seja  $*$  uma operação binária no conjunto  $X$ . O elemento  $e \in X$  diz-se elemento neutro para esta operação se e só se

$$x * e = e * x = x,$$

$\forall x \in X$ .

**Proposição 2.1.** *Unicidade do Elemento Neutro: Toda a operação binária tem no máximo um elemento neutro.*

*Demonstração.* Suponha-se que  $e$  e  $\tilde{e}$  são ambos elementos neutros para a operação  $*$ . Temos então:

$$e * \tilde{e} = \tilde{e} \text{ (porque } e \text{ é elemento neutro),}$$

$$e * \tilde{e} = e \text{ (porque } \tilde{e} \text{ é elemento neutro).}$$

Concluimos portanto que  $e = \tilde{e}$ . □

Quando a operação  $*$  tem identidade  $e$ , é possível introduzir a noção de elementos inversos. A definição é a seguinte:

**Definição 4.** O elemento  $x \in X$  diz-se invertível se e só se existe  $y \in X$  tal que:

$$x * y = y * x = e.$$

Neste caso,  $y$  diz-se inverso de  $x$ .

**Proposição 2.2.** *Inverso: Seja  $*$  uma operação associativa em  $X$ . Se  $x \in X$  tem inverso à direita  $y$ , e inverso à esquerda  $z$ , então  $y = z$  e  $x$  é invertível.*

*Demonstração.* Supomos que  $y, z \in A$  são tais que  $x * y = z * x = e$ . Temos então

$$\begin{aligned} x * y = e &\Rightarrow z * (x * y) = z && \text{porque } z * e = z \\ &\Rightarrow (z * x) * y = z && \text{porque a operação é associativa} \\ &\Rightarrow e * y = z && \text{porque } z * x = e \\ &\Rightarrow y = z && \text{porque } e * y = y \end{aligned}$$

□

**Definição 5.** A estrutura algébrica  $(X, *)$  diz-se um monóide se satisfaz as seguintes propriedades:

- i) A operação  $*$  tem identidade em  $X$ ;
- ii) A operação é associativa, i.e.,  $(x * y) * z = x * (y * z)$ , para  $\forall x, y, z \in X$ .

**Definição 6.** O monóide  $(G, *)$  diz-se um grupo se e só se todos os elementos de  $G$  são invertíveis. O grupo diz-se abeliano se a sua operação é comutativa.

**Proposição 2.3.** Se  $(G, *)$  é um grupo (com elemento neutro  $e$ ), temos:

- i) Se  $g, g'$  e  $h \in G$ , e  $g * h = g' * h$  ou  $h * g = h * g'$ , então  $g = g'$  (leis do corte);
- ii) Em particular, se  $g * g = g$  então  $g = e$ ;
- iii) A equação  $g * x = h$  (respectivamente  $x * g = h$ ), tem como solução única  $x = g^{-1} * h$  (respectivamente  $x = h * g^{-1}$ ), onde  $g^{-1}$  é o inverso de  $g$  em relação a  $*$ .

*Demonstração.* i)

$$\begin{aligned} g * h = g' * h &\Rightarrow (g * h) * h^{-1} = (g' * h) * h^{-1} && \text{porque } h \text{ é invertível} \\ &\Rightarrow g * (h * h^{-1}) = g' * (h * h^{-1}) && \text{por associatividade} \\ &\Rightarrow g * e = g' * e && \text{porque } h * h^{-1} = e \\ &\Rightarrow g = g' && \text{porque } e \text{ é identidade} \end{aligned}$$

A demonstração para  $h * g = h * g'$  segue análoga. Provando assim (i).

ii)

$$\begin{aligned} g * g = g &\Rightarrow g * g = g * e && \text{porque } g * e = g \\ &\Rightarrow g = e \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} g * x = h &\Rightarrow g^{-1} * g * x = g^{-1} * h && \text{aplicando } *g^{-1} \text{ em ambos os lados} \\ &\Rightarrow e * x = g^{-1} * h && \text{porque } g^{-1} * g = e \\ &\Rightarrow x = g^{-1} * h && \text{porque } e * x = x \end{aligned}$$

A demonstração para  $x * g = h$  segue análoga. Provando assim (iii).

□

**Definição 7.** Um subconjunto não-vazio  $H$  de um grupo  $(G, *)$  é chamado de subgrupo de  $G$  se, e só se,  $H$  é um grupo com a operação de  $G$ .

**Proposição 2.4.** Um subconjunto não-vazio  $H$  de um grupo  $(G, *)$  é um subgrupo se, e só se:

- i)  $e_G \in H$ ;
- ii) se  $a, b \in H$  então  $a * b \in H$ ;
- iii) se  $a \in H$ , então  $a^{-1} \in H$

*Demonstração.* Verifiquemos inicialmente que a operação  $*$  está em  $H$  pela definição de subgrupo e que a operação sendo associativa em  $G$  é associativa em qualquer subconjunto e, em particular, é associativa em  $H$ .

- i) da definição de grupo,  $H$  possui elemento neutro  $\tilde{e}$ . Da definição de subgrupo,  $H \subset G$ , logo,  $\tilde{e} \in G$ . Como o elemento neutro é único,  $\tilde{e} = e_G$
- ii) Como  $G$  é fechado em relação a  $*$ , da definição de subgrupo  $H$  é fechado em relação a  $*$ , logo  $a * b \in H$ ;
- iii) pela definição 6, para ser um grupo todos os elementos de  $H$  se todos seus elementos são invertíveis. Como  $G$  é fechado em relação a  $*$ ,  $H$  é fechado em relação a  $*$  e  $a^{-1} \in H$

□

Em particular, para nossa análise futura,  $\mathbb{R}$  forma um grupo em relação à soma  $(\mathbb{R}, +)$  e em relação à multiplicação  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ . Como  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ , em particular  $\mathbb{Z}$  é um subgrupo de  $(\mathbb{R}, +)$  e de  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ .

**Definição 8.** Congruência módulo  $H$ : Sejam  $(G, *)$  um grupo e  $H$  um subgrupo de  $G$ . Dados  $a, b \in H$  dizemos que  $a$  é congruente a  $b$  módulo  $H$  se e só se,  $a * b^{-1} \in H$ . Nesse caso, escrevemos  $a \equiv b \pmod{H}$ . Caso contrário, dizemos que  $a$  não é congruente a  $b \pmod{H}$  e escrevemos  $a \not\equiv b \pmod{H}$ . Chamamos esta relação binária em  $G$  de congruência módulo  $H$ .

Mais uma vez olharemos para os grupos  $(\mathbb{Z}, +)$  e  $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ , que levam a fazer sentido a relação de equivalência (ou congruência), antes citada em  $\mathbb{Z}^+$ , mas agora também para  $\mathbb{Z}^-$

**Definição 9.** Grupo Cíclico: Um grupo  $(G, \cdot)$  é chamado cíclico se e só se existe  $a \in G$ , tal que  $G = \langle a \rangle = \{a^n; n \in \mathbb{Z}\}$ . Nesse caso, dizemos que  $a$  é um gerador de  $G$ .

**Definição 10.** Grupo modular em  $\mathbb{Z}_m$ : Um grupo em  $\mathbb{Z}_m$  é um grupo contido em  $\mathbb{Z}_+$  com  $\{m \in \mathbb{Z}_+^*/\mathbb{Z}_m = 0, 1, \dots, m-1\}$ . Por construção  $\mathbb{Z}_m$  é um grupo cíclico.

**Proposição 2.5.** Sejam  $a, b, m, n \in \mathbb{Z}_+$  com  $m, n > 1$ .

Se  $a \equiv b \pmod{m}$  e  $n|m$ , então  $a \equiv b \pmod{n}$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponha  $b > a$ .

Se  $a \equiv b \pmod{m}$ , então  $m|(b-a)$ . Como  $n|m$  segue que  $n|(b-a)$  □

**Proposição 2.6.** Geradores de  $\mathbb{Z}_m$ : Os geradores  $a$  de  $\mathbb{Z}_m$  são tais que  $\text{mdc}(m, a) = 1$

*Demonstração.* Como  $\mathbb{Z}_m \subset \mathbb{Z}_+$ , pela definição 9, os geradores de  $\mathbb{Z}_m$  são da forma  $\{a^n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ . Logo  $a^{n_1} \equiv 0 \pmod{m}$ , Logo  $a^{n_2} \equiv 1 \pmod{m}$ ,  $\dots$ ,  $a^{n_r} \equiv (m-1) \pmod{m}$ .

Suponha  $\text{mdc}(m, a) = k$ , com  $a = k \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_q^{\alpha_q}$ , todo elemento gerado é múltiplo de  $k$ , e por consequência todo elemento de  $\mathbb{Z}_m$  será  $a^n \equiv 0 \pmod{k}$ .

Pela proposição 2.5, todo elemento de  $\mathbb{Z}_m$  é tal que:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{k}$$

Para todo  $b < k$ . Logo,  $b = 0$ , pois para cada  $a^{n_i}$  todo elemento de  $\mathbb{Z}_m$  é múltiplo de  $k$ , o que implica que  $k = 1$

□

### 2.1.2 Elementos de Aritmética e Álgebra em Música

Agora temos elementos suficientes para olhar para a Escala Cromática (ou mesmo uma escala cuja oitava está dividida em  $n$  partes).

**Definição 11.** A Escala Cromática é um subgrupo do grupo modular  $\mathbb{Z}_m$  para a operação de soma, que representaremos por  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ .

Essa definição nos explica porque as quintas e as quartas são responsáveis pela construção dela:

$$\text{mdc}(12, 5) = 1$$

$$\text{mdc}(12, 7) = 1$$

Quartas e quintas, são geradores para  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$

Analogamente, 1 e 11 (segunda menor e sétima) completam o grupo dos geradores de  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$

Na música moderna, o semiton é  $\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$ , em outras palavras, cada unidade de  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$  pode ser escrita como  $\frac{1}{12} \ln 2$ . Usando o logaritmo, a variação de frequências continua fazendo sentido para a soma em  $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ , e o elemento que une essas duas ideias é numerador da fração  $\frac{k}{12}$ , tal que  $k \equiv b \pmod{12}$ .

Para o grupo  $(\mathbb{Z}_{12}, \cdot)$  é possível transpor a multiplicação, visto que um elemento do grupo, multiplicado por 3, nos leva a:

$$3 \frac{k}{12} \ln 2 = \left( \frac{k}{12} \ln 2 \right)^3 .$$

### 2.1.3 A Oitava e a Base 2

O principal elemento comum das Escalas Pitagórica, Justa e Temperada é a oitava. Não ao acaso, mas relacionada à consonância existente entre a oitava e a tônica ser muito maior que com os demais harmônicos. Conforme mostrado anteriormente (cap. 1.4.2 e tabela 13), a relação de uma frequência sonora  $f_1$  com sua oitava está na proporção 2 : 1, ou seja, a oitava possui uma frequência que é o dobro de  $f_1$ . A própria construção da escala temperada já utiliza o 2 como base para a sua razão.

Frequências	Nome Musical
$f_1$	Tônica
$2f_1$	1ª Oitava
$4f_1$	2ª Oitava
$8f_1$	3ª Oitava

Tabela 11: Oitavas e Base 2

As potências de 2 (4, 8, 16, ...) essencialmente são interações de oitavas.

Como vimos anteriormente, a Escala Cromática (12 semitons) e a oitava foram os padrões escolhidos, mas é possível fazer escalas com outros inteiros como base ou com mais de 12 semitons (chamaremos qualquer um desses casos de escalas  $n$ -cromáticas). Entretanto o que verificamos é que se essa relação não continua expressa em função das oitavas, chegamos em um intervalo irracional.

Por exemplo, expressar uma escala baseada no 3 e obter um oitava:

$$3^x \cdot f_1 = 2f_1$$

$$\Rightarrow 3^x = 2$$

Que somente faz sentido para um  $x$  irracional.

E mais, qualquer intervalo temperado que não seja uma oitava, é irracional. Veja o teorema que Wright (2009, [21]) cita sobre escalas e oitavas:

**Teorema 2.7.** *Irracionalidade do Intervalo Iguamente Temperado:*

*Seja  $I$  um intervalo entre duas notas na escala  $n$ -cromática. Se  $I$  não é uma interação de oitavas,  $I$  é um intervalo irracional.*

*Demonstração.* Suponha que  $I$  tem razão  $x \in \mathbb{Q}^+$ . O intervalo modular dado por  $I$  está em  $\mathbb{Z}$  tem ordem finita, i.e.,  $n$  interações de  $I$  implica em  $k$  oitavas, para algum inteiro positivo  $n$  e algum inteiro positivo  $k$ , ou seja:

$$x^n = 2^k$$

Sabemos que  $x$  possui fatoração única  $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ . onde  $r \geq 0$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_r$  são primos distintos e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \neq 0$ . o que nos leva a:

$$x^n = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r})^n = 2^k$$

Como  $2^k$  é de base 2, o único primo possível na fatoração de  $x^n$  é  $p_1 = 2$ .

Logo,  $x^n = 2^{\alpha_1 n}$  é um interação de oitavas.

□



## 2.2 ELEMENTOS GEOMÉTRICOS EM MÚSICA

2.2.1 *Notação e Representação Gráfica Tradicional da Música*

Em música (principalmente em música erudita) é muito comum o uso da pauta de cinco linhas (ou pentagrama) para transcrição das obras. Ela pode ser simples (figura 6) ou mesmo conter múltiplas combinações (figuras 7 e 8).

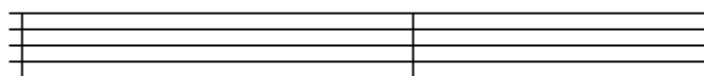


Figura 6: Pauta de 5 linhas

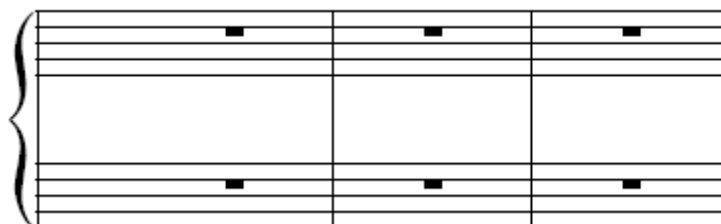


Figura 7: Pauta dupla de 5 linhas



Figura 8: Pauta de 5 linhas contendo múltiplas “entradas” (claves)

Nesse sistema, no início de cada linha é incluída uma clave (chave), que denota a nota de referência. Desta forma podemos determinar a altura de uma nota em Escala Diatônica ou em Escala Cromática. A clave mais conhecida é a clave de sol (figura 9), entretanto há outras (figura 10).



Figura 9: Clave de sol

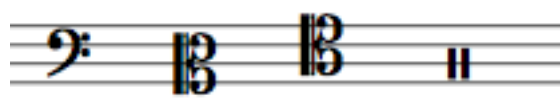


Figura 10: Claves de Fá, Dó na Terceira Linha, Dó na Quarta Linha e Clave de Percussão.  
A posição do símbolo em relação às linhas também influencia a altura da referência



Figura 11: Posição das Notas da Escala Diatônica segundo a Clave de Sol.

Para a clave de sol, as notas ficam com a seguinte disposição na Escala Diatônica (figura 11 )

Essa referência pode ser estendida para a pauta dupla (figura 12 ) ou para múltiplas pautas (figura 13 ).



Figura 12: Posição da Notas da Escala Diatônica segundo as Clave de Sol e Fá.

Clave de Sol

Do Re Mi Fá Sol Lá Si Do Ré Mi Fá Sol Sol(3)

Clave de Fá (4ª linha)

Mi Fá Sol Lá Si Do Ré Mi Fá Sol Lá Si Fá(2)

Clave de Do (4ª linha)

Si Do Ré Mi Fá Sol Lá Si Do Ré Mi Fá Do(3)

Clave de Do (3ª linha)

Ré Mi Fá Sol Lá Si Do Ré Mi Fá Sol Lá Do(3)

Figura 13: Posição da Notas da Escala Diatônica segundo as Clave de Sol, Fá, Dó na Terceira Linha e Dó na Quarta Linha.

No caso da Escala Cromática, são usados os símbolos referentes ao sustenido e ao bemol antes de cada ponto na pauta para indicar o aumento ou decréscimo de meio semitom, ou o bequadro (símbolo  $\natural$ , anula um sustenido ou bemol em uma escala cujo acidente faz parte) (figura 14)



Figura 14: Representação de Sustenido e Bemol na Pauta.

Os símbolos usados para marcar cada nota representam a duração que cada nota deve ter quando tocada (figura 15), ou o tamanho da pausa que o músico deve fazer (figura 16).



Figura 15: Representação de tempo de duração das Notas na Pauta.



Figura 16: Representação de tempo de duração das Pausas na Pauta.

Há ainda diversos símbolos e elementos dentro da teoria musical que ditam compasso, ritmo, intensidade com que o acorde é tocado.

### 2.2.2 Transformações Geométricas no Plano

**Definição 12.** Transformação geométrica é uma aplicação bijetiva entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de modo que, a partir de uma

figura geométrica original se forma outra geometricamente igual ou semelhante à primeira

**Definição 13.** Isometria é uma transformação geométrica que preserva distância entre pontos e amplitude dos ângulos, i. e., a figura inicial e o seu transformado são congruentes.

**Definição 14.** No plano, uma reflexão de eixo  $r$  é uma transformação geométrica que a cada ponto  $C$  faz corresponder um ponto  $C'$ , tal que:

- $\overline{CC'}$  é perpendicular ao eixo;
- as distâncias de  $C$  e de  $C'$  ao eixo são iguais.

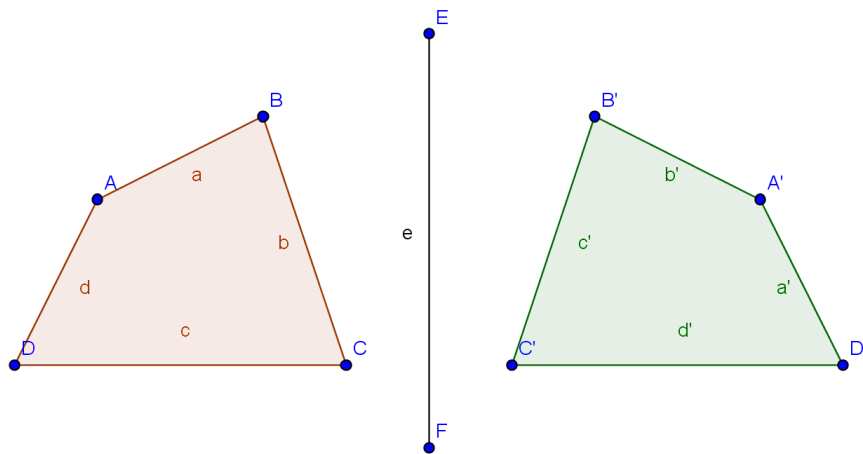


Figura 17: Reflexão em torno do eixo  $e$

A reflexão tem as seguintes propriedades:

- Uma figura e a sua imagem por reflexão sobre um eixo de reflexão são congruentes;
- Se dobrarmos a folha pelo eixo de reflexão  $r$ , a figura original e a sua imagem sobrepõem-se ponto por ponto;
- A reflexão muda o sentido dos ângulos, mas mantém a sua amplitude.

**Definição 15.** Rotação de centro  $D$  e amplitude  $\alpha$  é uma transformação geométrica que a cada ponto  $B$  faz corresponder um ponto  $B'$  tal que:

- $\overline{DB} = \overline{DB'}$ ;
- $\angle BDB' = \alpha$ .

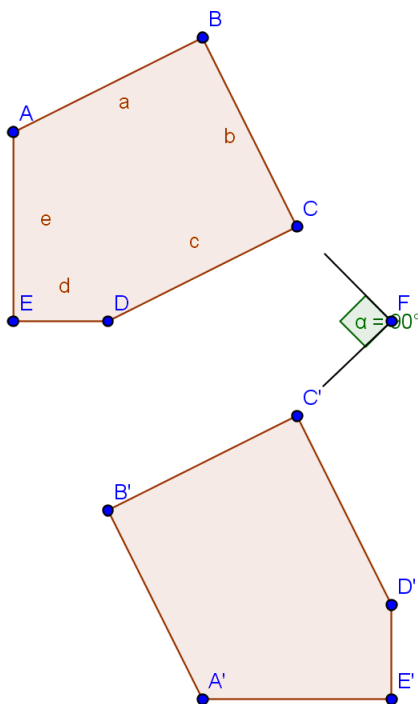


Figura 18: Rotação ao redor do ponto  $F$

A rotação é considerada positiva quando se move no sentido anti-horário e negativa quando se move no sentido horário.

**Definição 16.** A translação associada ao vetor  $\vec{u}$  pode ser representada por  $T_{\vec{u}}$  e faz corresponder a cada ponto  $P$  um ponto  $P'$  tal que:

$$\vec{u} = \overline{PP'}$$

- As figuras são geometricamente iguais;
- As translações conservam a direção e o comprimento de segmentos de reta, e as amplitudes dos ângulos.

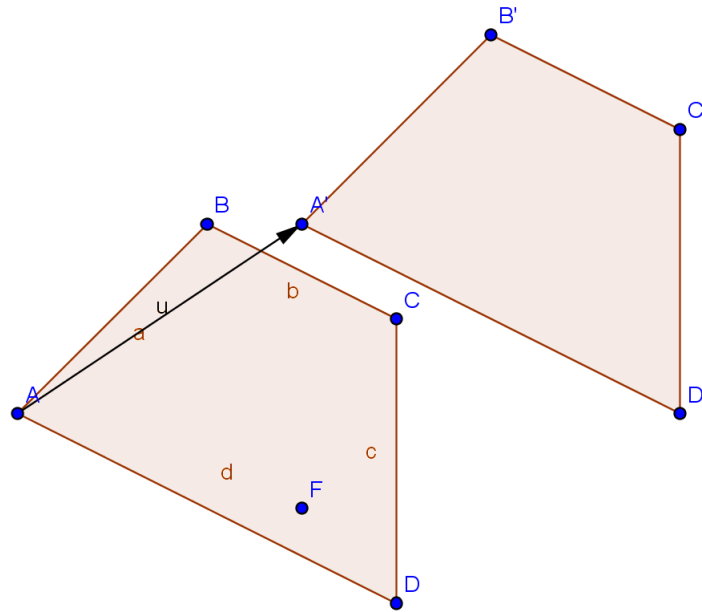


Figura 19: Translação pelo vetor  $\vec{u}$

**Definição 17.** Uma translação refletida (ou reflexão transladada ou glissoreflexão) é uma isometria que resulta de uma reflexão seguida de uma translação paralela ao eixo de reflexão.

Essas transformações são todas isométricas. Há outras transformações que não são isométricas, como o homotetia.

**Definição 18.** Uma homotetia é definida pelo seu centro  $O$  e por uma razão  $k$ . É a aplicação afim que a cada ponto  $P$  faz corresponder o ponto  $P'$  tal que

$$\vec{OP'} = k \times \vec{OP} .$$

- O ponto  $O$  é o centro da Homotetia.
- O número real  $k$  é a razão da homotetia:
  - Se  $|k| > 1$ , a imagem é maior que o objeto e a homotetia é uma ampliação.

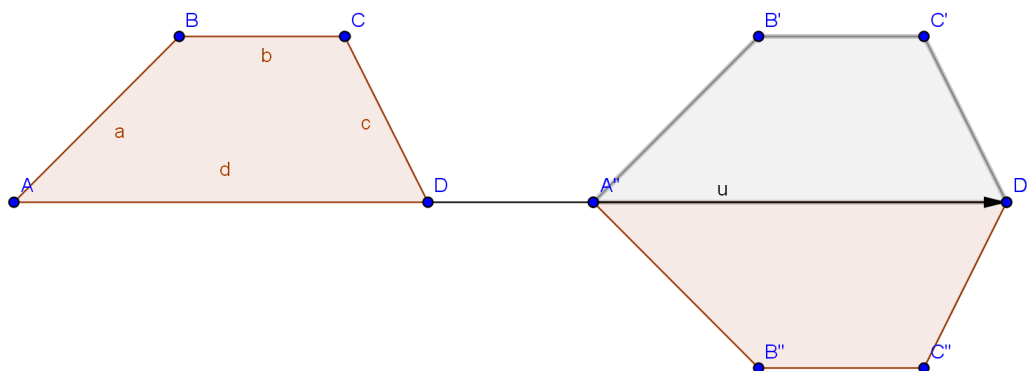


Figura 20: Glissoreflexão pelo vetor  $\vec{u}$

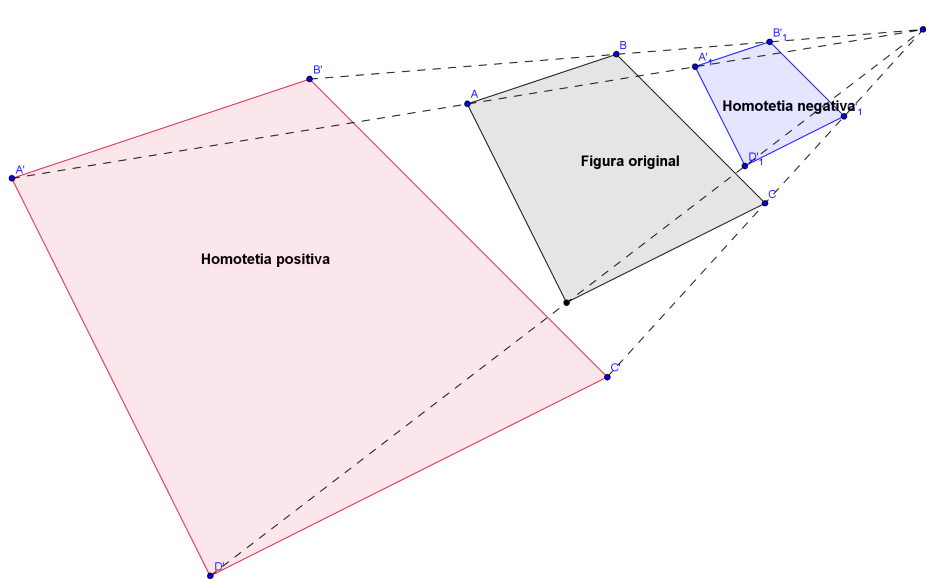


Figura 21: Homotetia positiva e negativa em relação ao ponto E

– Se  $|k| < 1$ , a imagem é menor que o objeto e a homotetia é uma redução.

A homotetia conserva direção, paralelismo, amplitude e o sentido dos ângulos orientados.



### 2.2.3 Transformações Geométrica presentes na Música

O uso de padrões na composição musical é prática muito comum por diversos compositores, e inclusive a aplicação de repetições de determinados trechos ocorre com frequência também. Vemos isso com bastante facilidade analisando as partituras musicais. Neste texto usaremos a metodologia sugerida por de Marins, Pompeu e Bassanezi, 2015 [8], para identificar as transformações geométricas presentes na música.

No intuito de estabelecer um método de representação de uma determinada melodia numa codificação coerente para uma análise matemática, faremos uso de um plano com um sistema de coordenadas cartesianas  $xOy$ , uma representação bastante trivial do ponto de vista científico. Cada nota da escala musical utilizada nas composições tem propriedades que a identificam. Duas dessas propriedades são “frequência de oscilação do som”, chamada de altura, e “período temporal em que esse som é executado”, ou seja, sua duração. Podemos, então, traduzir uma partitura musical através de uma função discreta  $f(t)$  que relaciona a cada nota um valor inteiro, por exemplo: dó = 0, dó# = 1, ré = 2, ré# = 3 etc, conforme demonstra a figura 22.

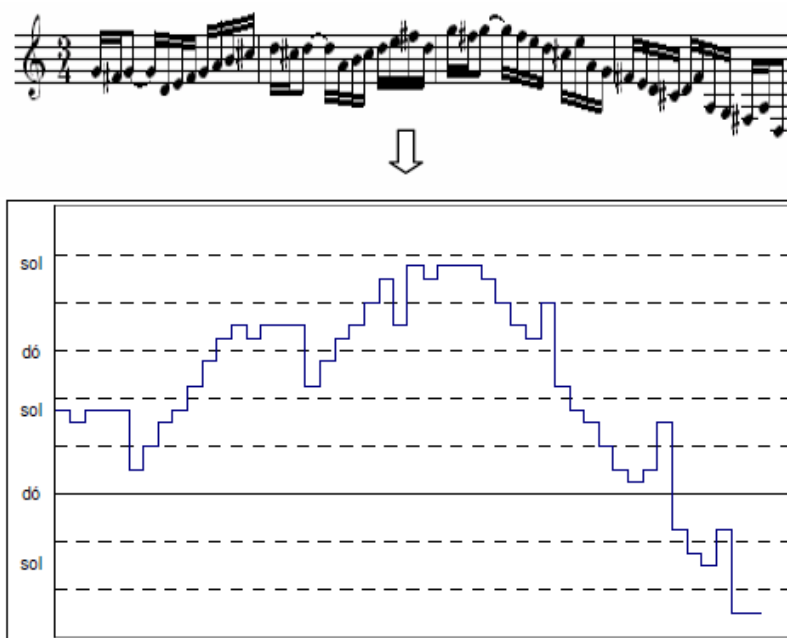


Figura 22: Representação de uma partitura musical em um plano  $xOy$  [8].

No gráfico anterior, o eixo  $y$  apresenta a informação relacionada à altura do som, isto é, tomando-se como referencial a nota dó central (frequência de 261 Hz) quanto mais aguda - em relação ao dó central - for essa nota mais sua representação estará deslocada superiormente e, da mesma forma quanto mais grave for uma dada nota em relação ao dó central, mais sua representação estará deslocada inferiormente. A duração da nota, que indica o tempo no qual ela deve continuar sendo executada é associada ao comprimento de cada segmento horizontal, na convenção gráfica adotada. (de Marins, Pompeu e Bassanezi, 2015 [8])

Usando esse artifício os autores [8] mostraram como as transformações geométricas estão presente na música utilizando-se para isso de exemplos de fugas e cânones encontrados em composições de Bach (figuras 23 e 24).

Johann Sebastian Bach foi um dos maiores compositores do período Barroco.

A palavra “barroco” é provavelmente de origem portuguesa, significando pérola ou jóia de formato irregular. De início, era usada para designar o estilo da arquitetura e da arte do século XVII, caracterizado pelo emprego excessivo de ornamentos. Mais tarde, o termo passou a ser empregado pelos músicos para indicar o período da história da música que vai do aparecimento da ópera e do oratório até a morte de J. S. Bach. (Bennet, 1988 [3]).

No início do período barroco, os cânones eram as composições mais comuns e distinguiam-se muito pouco do cantochão uníssono da Idade Média. Eles baseavam-se numa simples defasagem da melodia inicial em cada voz ou instrumento executante. Assim, sob a análise gráfica proposta, tais melodias seriam apenas translações horizontais (no eixo  $x$ ). O fator dessa translação, isto é, o início da melodia da segunda voz coincidindo com um momento adequado da primeira voz deve ser tal que a execução simultânea das melodias cause uma sensação agradável ao ouvinte. A determinação dos valores possíveis de tal coeficiente não será aqui apresentada, já que demandaria um aprofundamento na teoria de harmonia, que não é o foco do presente estudo. Posteriormente, os cânones, principalmente nas obras de Bach, são aprimorados e já não ocorre uma simples defasagem da melodia, mas também uma translação vertical (no eixo  $y$ ), pois a segunda voz executa uma melodia tendo um início defasado em relação à primeira e

com todas as notas mais agudas ou mais graves que as da primeira voz. O cálculo desse fator de deslocamento também exigiria um estudo mais aperfeiçoado de harmonia e não será aqui apresentado. Nos trechos apresentados a seguir é possível visualizar um caso de translação horizontal simples, no cânone nº2 da “Arte da Fuga” (figura 25).

Também é possível observar uma translação oblíqua (vertical e horizontal) na fig. 26, em que é representada a variação nº18 das “Variações Goldberg”.

Devido ao desenvolvimento técnico e cultural da época e às experiências realizadas por Bach, surge a forma de composição conhecida por fuga, caracterizada por um tema que é apresentado e depois modificado de diversas maneiras. Uma dessas maneiras é o contraponto por inversão que pode ser observado, em nossa representação matemática como uma reflexão horizontal composta com uma translação horizontal. O trecho analisado é da 15ª variação das “Variações Goldberg” 27.

Também pode ser percebida em algumas composições uma reflexão vertical quando a melodia complementar executa a melodia principal invertida em relação a uma reta paralela ao eixo  $y$ . Essa transformação garante a sensação musical de repetição do motivo inicial, porém executado com a inversão do tempo (do fim para o começo). (de Marins, Pompeu e Bassanezi, 2015 [8])

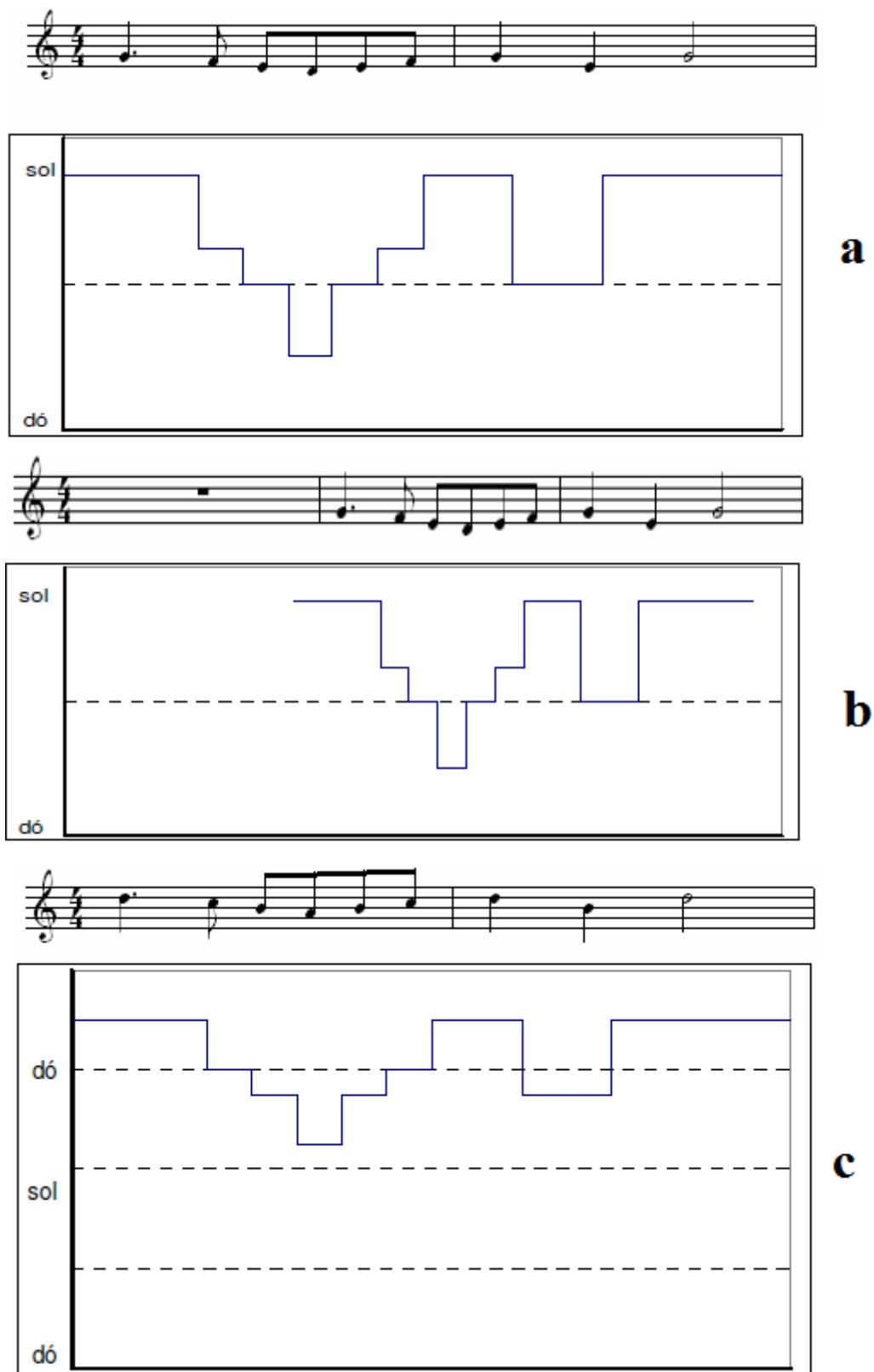


Figura 23: Trecho Musical original (a) e representação da translação horizontal (b) e vertical (c) [8].

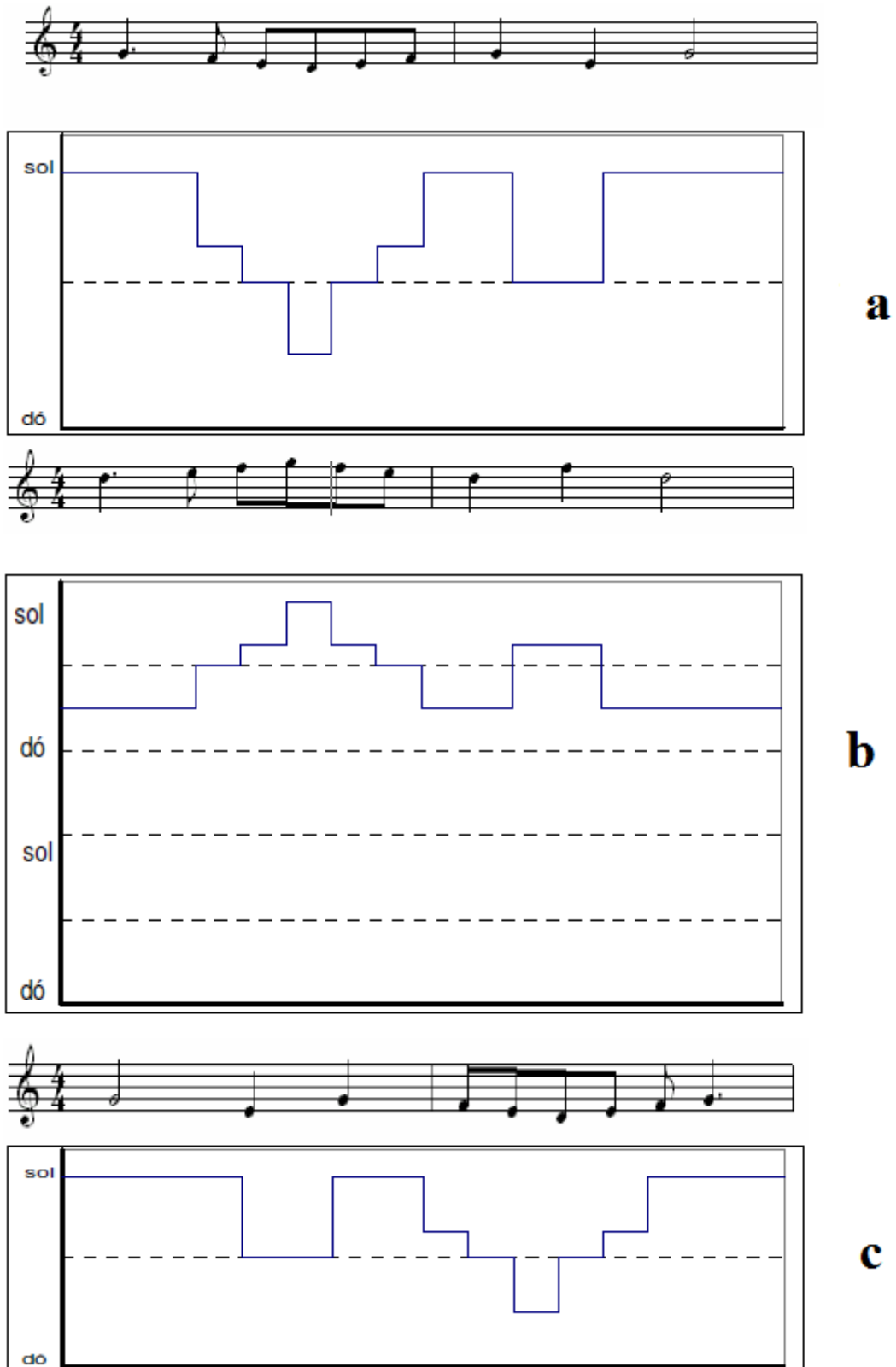


Figura 24: Trecho Musical original (a) e representação da reflexão horizontal (b) e vertical (c) [8].

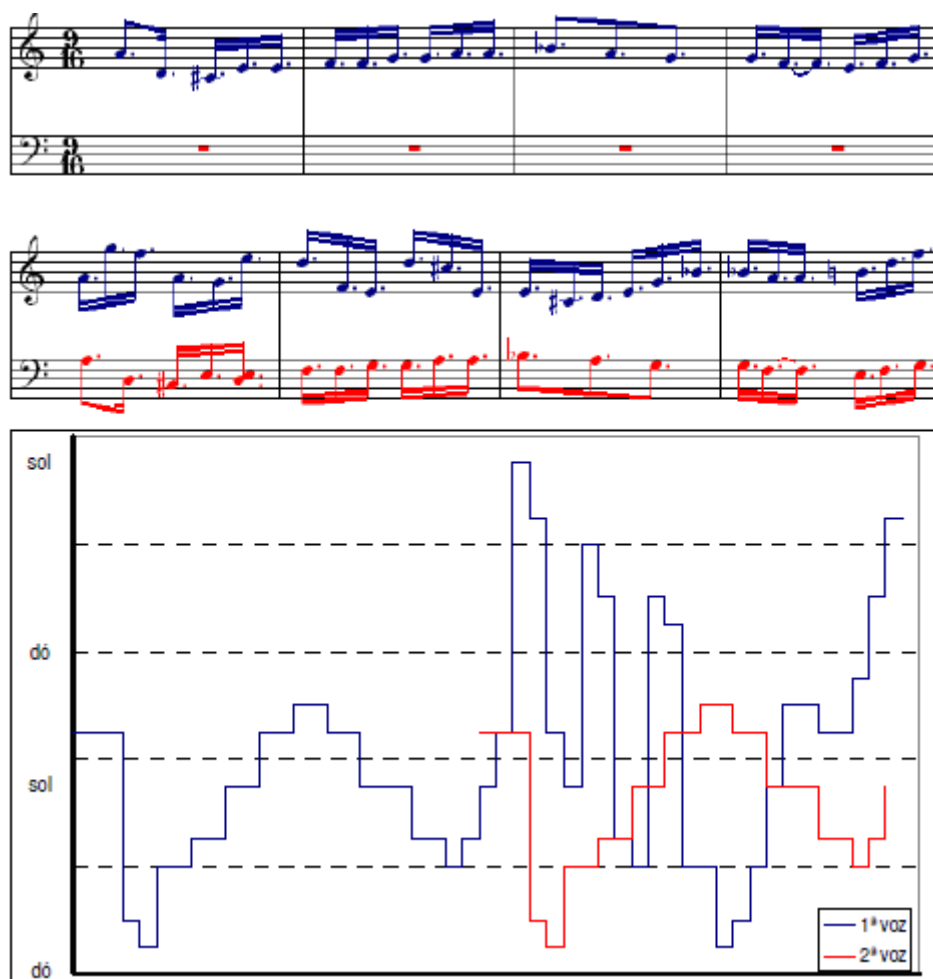


Figura 25: Cânone nº2 da “Arte da Fuga” - Translação horizontal [8]

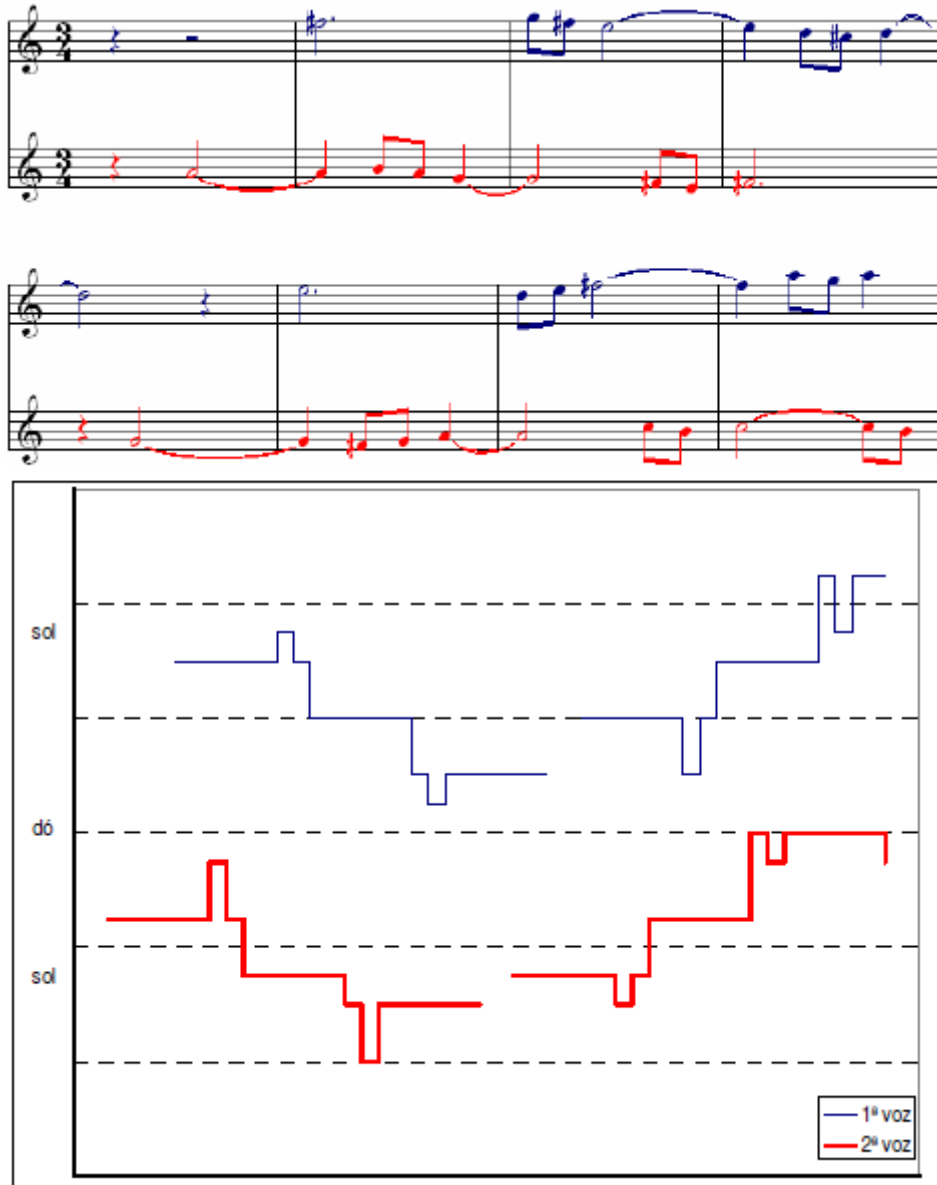


Figura 26: Variação nº18 das “Variações Goldberg” - Translações horizontal e vertical [8]

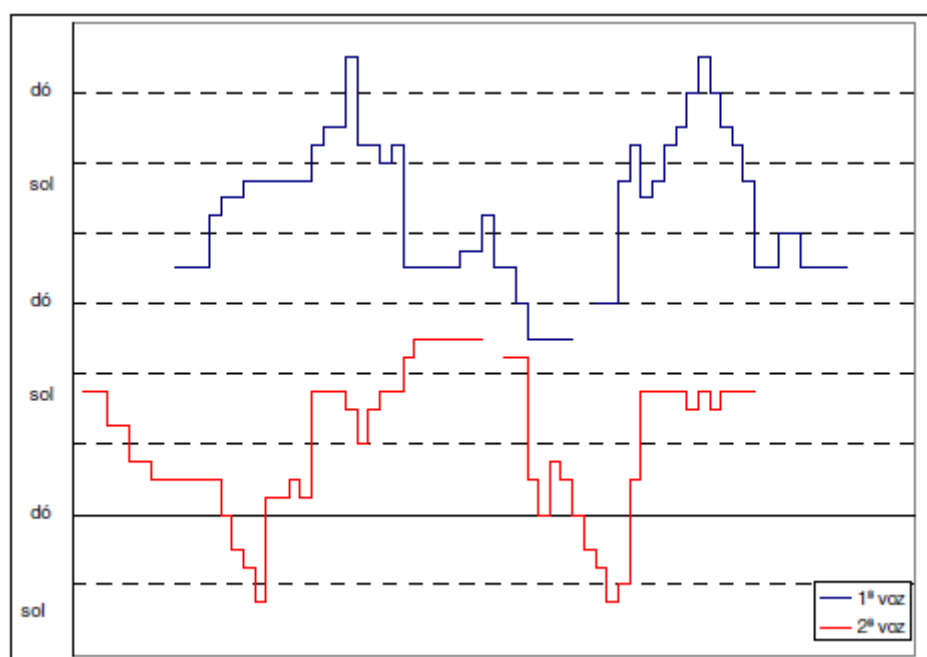
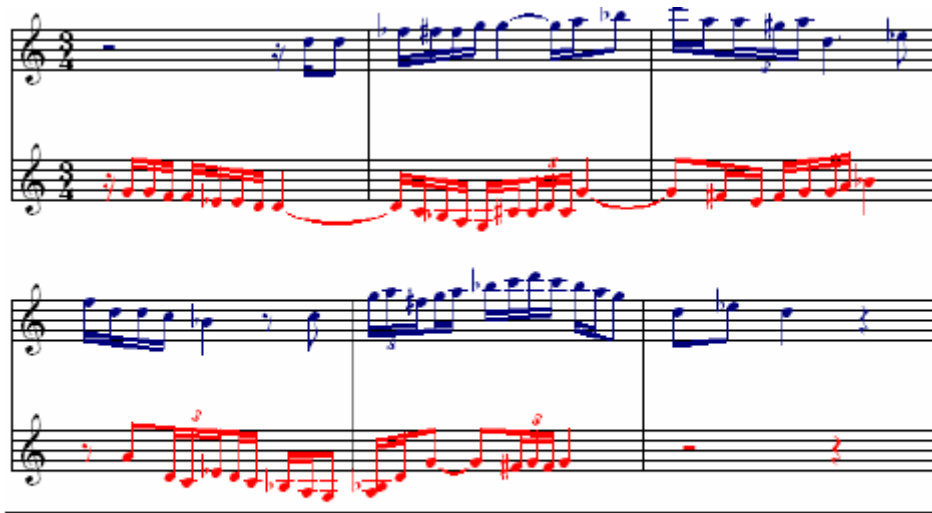


Figura 27: Variação nº15 das “Variações Goldberg” - Reflexão e Translação horizontais [8]



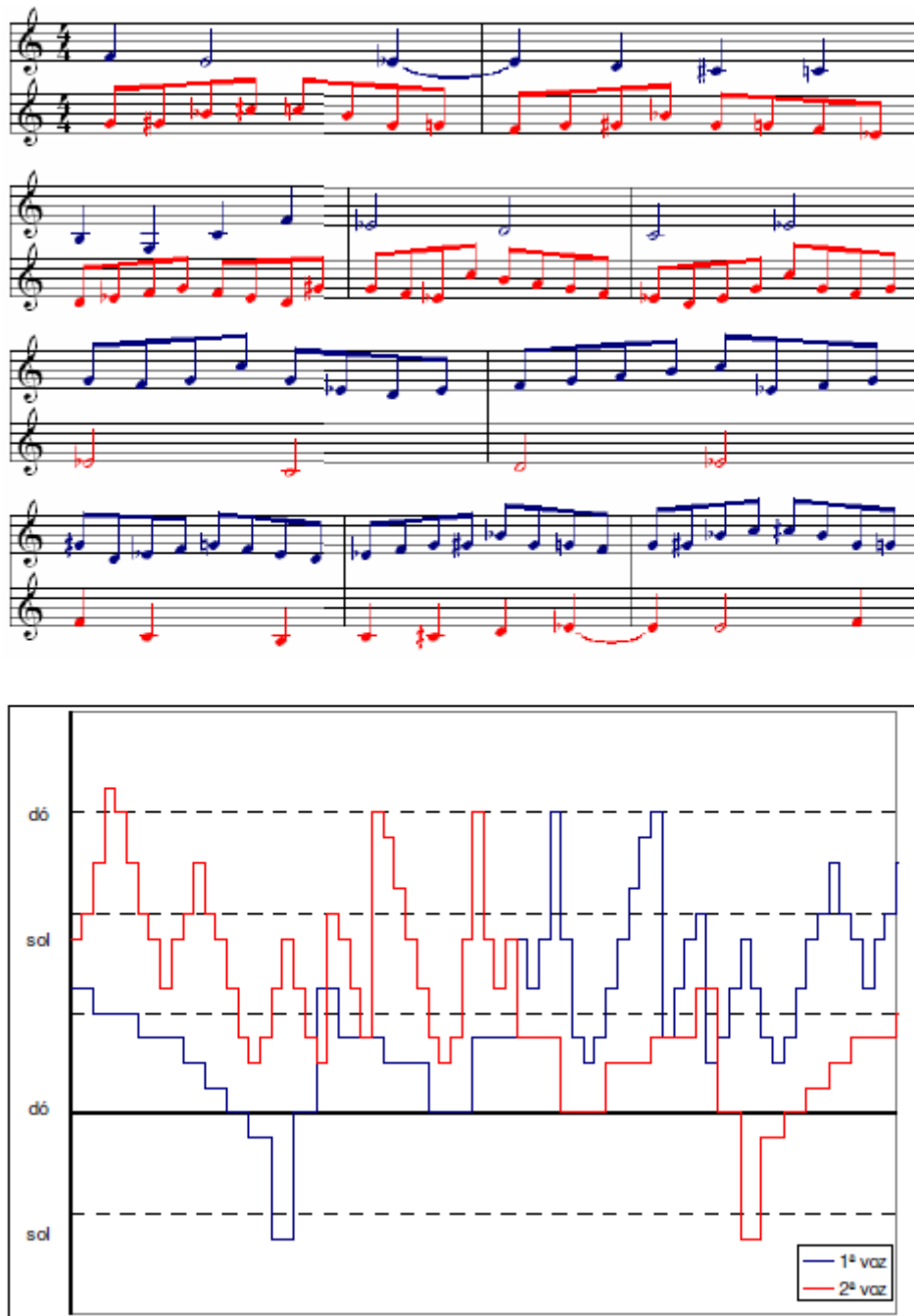


Figura 28: Cãnone a duas vozes da “Oferenda Musical” - Reflexão vertical [8]



---

## VIBRAÇÕES, SONS PUROS E A TEORIA DE FOURIER

---

### 3.1 A SENOIDE E AS ONDAS

A ciência descreve o som como uma onda mecânica (figura 29) que se propaga normalmente pelo ar. Entretanto, o meio de propagação também pode ser um líquido ou um sólido (como a madeira ou metal, materiais de construção de instrumentos musicais, ou o *nylon*, material de uma corda).

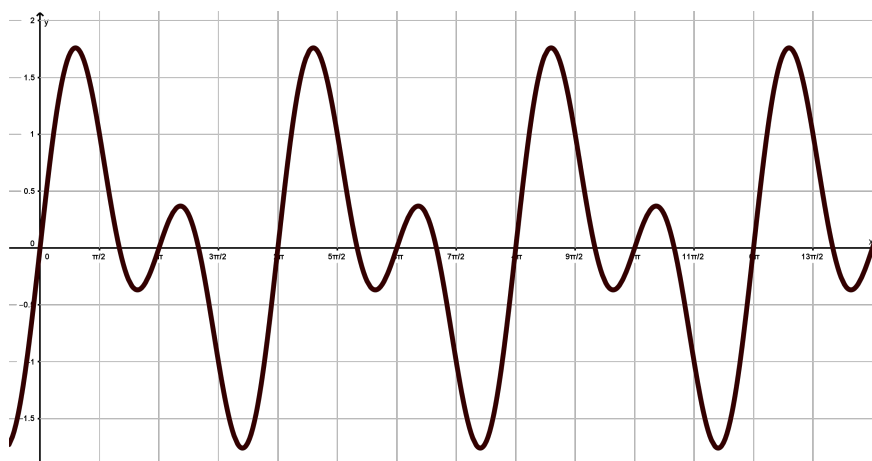


Figura 29: Representação gráfica de uma onda conforme interpretação científica

Os matemáticos e físicos costumam representar uma onda por uma função trigonométrica. As funções trigonométricas são classificadas como funções periódicas, i.e., funções  $f(x)$  onde dado certo valor  $k$ , temos  $f(x) = f(x + k) = f(x + 2k) = \dots = f(x + nk)$ . Nesses casos  $k$  é chamado de período da onda.

Dentre as funções trigonométricas, destacamos as funções *seno* e *co seno*, pois são as mais adequadas para descrever uma onda.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \text{sen}(x) \quad (3.1)$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \text{cos}(x) \quad (3.2)$$

Dados  $a, b, c$  e  $d \in \mathbb{R}$ , com  $a, b \neq 0$  temos:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-a, a], \quad f(x) = a \left( \text{sen}(bx + c) \right) + d \quad (3.3)$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-a, a], \quad f(x) = a \left( \text{sen}(bx + c) \right) + d \quad (3.4)$$

O gráfico do *seno* é chamado senoide e do *co seno*, cossenoide. Ambas as funções possuem gráficos semelhantes, onde  $a, b, c$  e  $d$  representam as seguintes características:

**AMPLITUDE:** como as imagens de ambas funções estão restritas ao intervalo  $[-1, 1]$ , quando as multiplicamos por uma constante  $a$ , suas imagens passam a ficar restritas ao intervalo  $[-a, a]$  (figura 30);

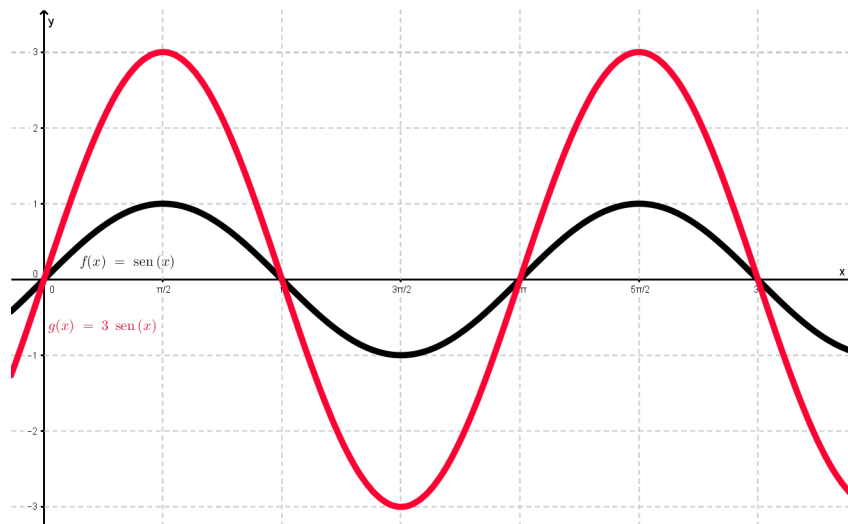


Figura 30:  $\text{sen}x$  (em preto) e  $3\text{sen}x$  (em vermelho)

PERÍODO: por sua origem no círculo trigonométrico, é natural esperar que  $\pi$  esteja de alguma forma relacionado a essas funções. O período de repetição delas é  $2\pi$ , i. e.

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi) = \dots = \text{sen}(x + n2\pi)$$

E

$$\text{cos}(x) = \text{cos}(x + 2\pi) = \dots = \text{cos}(x + n2\pi).$$

A partir disto, multiplicar o domínio da função por uma constante  $b$  provocará uma variação *inversamente proporcional* em seu período, i.e, se a onda possui período  $x$ , ao multiplicar por uma constante  $b$ , ( $b \neq 0$ ) veremos na imagem gráfica da função no espaço do período  $x$ , agora “cabem”  $b$  períodos. Se olharmos a figura 31, veremos que ao multiplicar o domínio por dois, há dois períodos em comparação à onda original, o que nos mostra que ele ficou mais curto; dividindo o domínio por dois, somente fica metade em relação ao original, ou seja, ele ficou mais comprido:

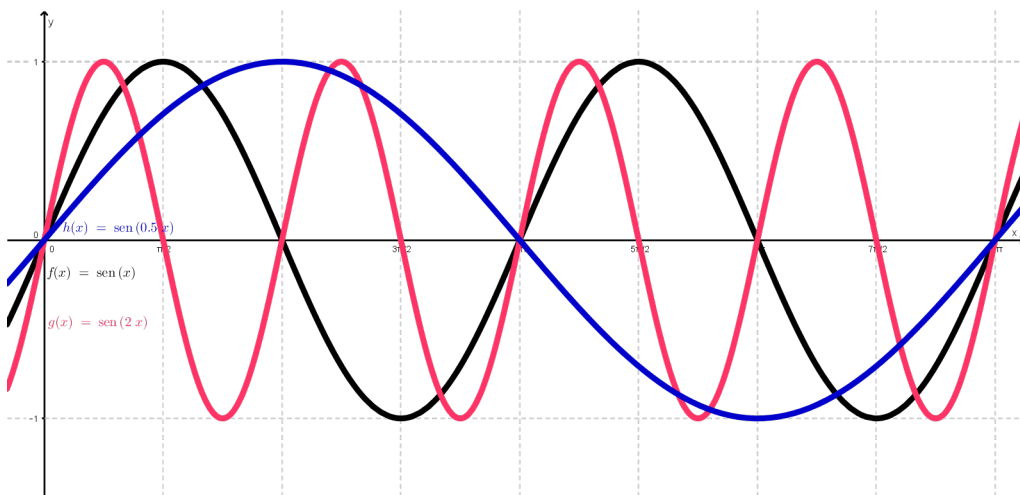


Figura 31:  $\text{sen}x$  (em preto) ,  $\text{sen}\frac{x}{2}$  (em azul) e  $\text{sen}2x$  (em vermelho)

DESLOCAMENTO HORIZONTAL (FASE): Não é necessário que o *seno* inicie em  $(0, 0)$  e o *coseno* inicie em  $(0, 1)$ . Um deslocamento de  $c$  no domínio da função nos permite determinar deslocar o ponto de início do gráfico (figura 32).

Por conta disso, podemos nos apropriar do fato que:

$$\text{sen}(x) = \text{cos}\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.5)$$

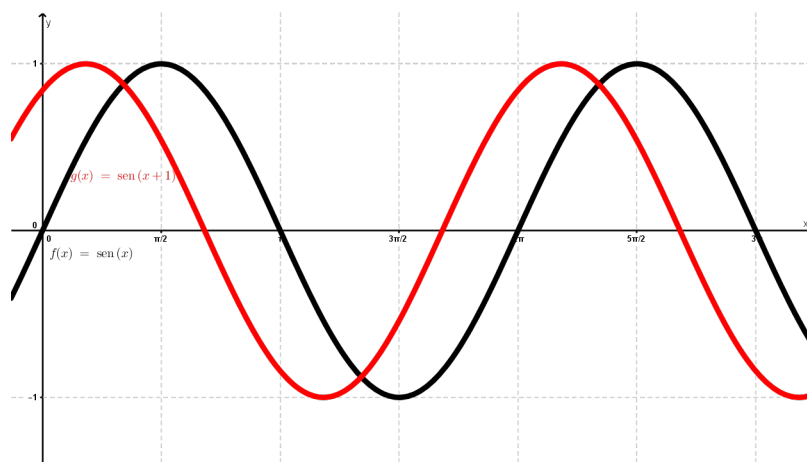


Figura 32:  $\text{sen } x$  (em preto) e  $\text{sen}(x + 1)$  (em vermelho)

Essa igualdade nos mostra basta um deslocamento na fase de uma das funções para que seus gráficos sejam coincidentes (figura 33):

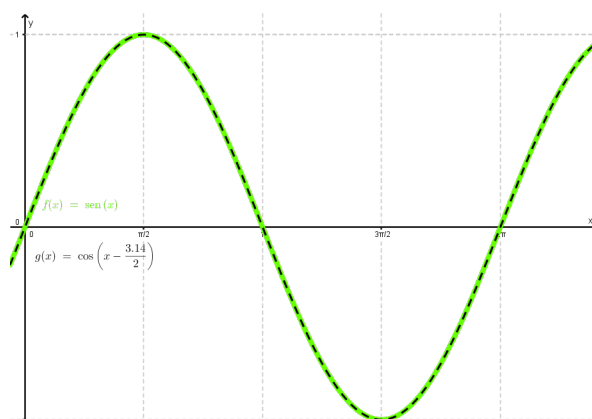


Figura 33:  $\text{sen } x$  (em verde) e  $\cos(x - \frac{\pi}{2})$  (em verde)

**DESLOCAMENTO VERTICAL:** As funções *seno* e *co seno* são restritas ao intervalo  $[-1, 1]$ , i.e., nas suas formas simples ( $f(x) = \text{sen } x$  e  $f(x) = \text{cos } x$ ) o maior valor que a função atinge é 1, e o menor valor é  $-1$ , ficando restrita a atingir valores entre esses dois. Entretanto, podemos deslocar essa função em relação ao eixo vertical somando uma constante  $d$ . Isso fará com que a curva “suba” ou “desça”, e a imagem ficará restrita à  $[-a + d, a + d]$  (figura 34).

Agora, podemos adequar qualquer onda periódica simples por uma função *seno*.

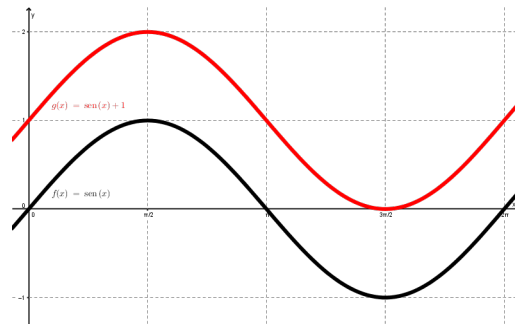


Figura 34:  $\text{sen}x$  (em preto) e  $1 + \text{sen}x$  (em vermelho)

### 3.2 SONS PUROS E O OUVIDO

Quando falamos em ouvir ou perceber sons, devemos lembrar que há diversos “tipos” de ondas. Nossos órgãos sensitivos possuem a capacidade de perceber diferentes frequências de ondas. Enquanto os olhos percebem certo espectro da chamada luz visível, nossos ouvidos já não percebem. Há certas frequências que nem mesmo são audíveis ou visíveis, mas que eventualmente percebemos.

O som possui algumas qualidades que o caracterizam:

- **ALTURA:** A altura de um som está relacionada à frequência da onda que o descreve. Para nossos ouvidos, uma onda com maior altura possuirá maior frequência e soar mais aguda.

A definição científica de frequência diz que ela é a periodicidade com que certo evento acontece. Podemos definir a frequência  $f$  de uma onda de período  $\tau$  como:

$$f = \frac{1}{\tau} \quad (3.6)$$

A unidade de medida de frequência é o *Hertz* (Hz).

- **INTENSIDADE:** A intensidade de um som está relacionada com a amplitude da onda que o descreve. Uma onda com maior amplitude terá maior intensidade, e assim perceberemos um maior volume (medido em *decibéis*, dB).
- **DURAÇÃO:** A duração de um som é o tempo que nossos ouvidos o percebem.

- **TIMBRE:** O timbre de um som é uma qualidade ou característica própria do som, que nos faz distinguir vozes de pessoas diferentes, ou o som de instrumentos diferentes, ainda que estejam tocando a mesma nota. <sup>1</sup>

Nossa capacidade de ouvir um som está ligada à forma que o ouvido se adequou ao longo dos anos à mecânica do som. Entretanto há limitações do espectro audível, não só da nossa espécie, mas de outras como é possível verificar na tabela 12.

Espécies	Faixas de Frequências (Hz)
Tartaruga	20 - 1000
Peixe-dourado	100 - 2000
Sapo	100 - 3000
Pombo	200 - 10000
Pardal	250 - 12000
Humano	20 - 20000
Chimpanzé	100 - 20000
Coelho	300 - 45000
Cão	50 - 46000
Gato	30 - 50000
Porquinho-da-Índia	150 - 50000
Rato	1000 - 60000
Camundongo	1000 - 100000
Morcego	3000-120000
Golfinho-Roaz	1000 - 130000

Tabela 12: Faixa de Frenquência Auditiva de Diferentes Espécies  
(Por R., FAY, em Benson, 2007 [4])

Segundo Roederer (2002) [18]:

Quando um som causa um movimento harmônico simples do tímpano com características constantes (frequência, amplitude, fase), ouvimos o que é chamado de som puro. Um som puro soa desinteressante, e a música não é feita simplesmente de sons puros.

<sup>1</sup> Apesar de estarmos falando de sons puros, o timbre está intimamente ligado à sobreposição de ondas, principalmente dos harmônicos. Essa sobreposição de ondas de diferentes frequências determina o timbre do som.



Entretanto, podemos compreender como o ouvido percebe os sons a partir do seu comportamento para sons simples. A estrutura ouvido externo (orelha, concha, canal) são responsáveis pela captação do som, que fazem o tímpano vibrar, e por consequência, fazem o trio de ossos martelo, bigorna e estribo vibrarem também. Ossos que tem por função transmitir as vibrações para o ouvido interno, pela cóclea.

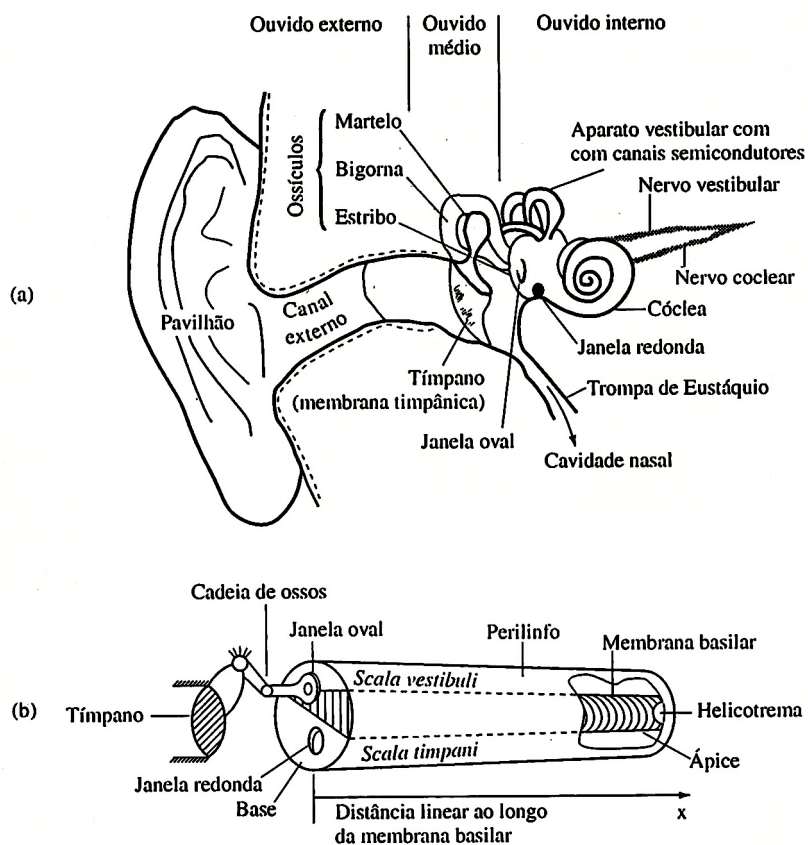


Figura 35: (a) vista esquemática do ouvido (Flaganagan, 1972, figura 4)(fora de escala); (b) a cóclea desenrolada (bem simplificada); em ROEDERER, 2002 [18]

A cóclea, do tamanho de uma bola de gude, é um túnel em espiral, como uma casca de caracol, através do osso temporal humano. Essa cavidade, vista na Figura 35 b numa versão estendida e altamente simplificada, está dividida em dois canais, *scala vestibuli* e *scala tympani*, preenchidos com um líquido incompressível, o *perilinfo* (um líquido filtrado diretamente do fluido cérebro-espinhal). Ambos os canais se comportam como um único sistema hidrodinâmico por estarem conectados numa das extremidades, o ápice, por meio de um pequeno orifício no duto que os separa. Esse orifí-

cio se chama *helicotrema*. A seção inferior está isolada por uma membrana elástica na “janela redonda”(Figura 35 b). A partição que separa ambas as *scalae* é , ela própria, um ducto altamente estruturado, de seção transversal triangular também chamado *scala media* (Figura 36), preenchido com outro fluido, o *endolinfa*. As suas fronteiras são a *membrana basilar*, que comporta o próprio órgão sensorial (órgão de Corti), a membrana Reissner, que serve para separar o perilinfo de endolinfa, e a parede lateral rígida da cóclea.

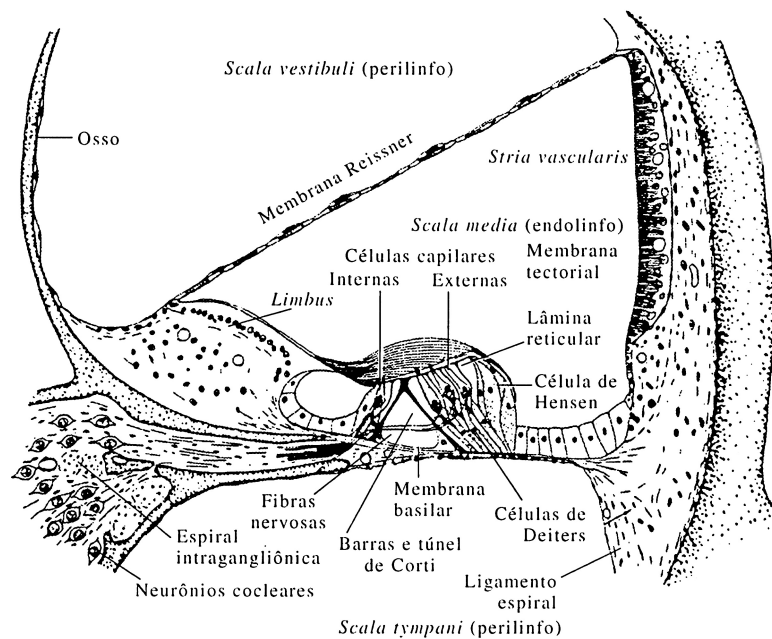


Figura 36: Seção transversal do órgão de Corti. Em ROEDERER, 2002 [18]

A elasticidade da membrana basilar determina as propriedades hidrodinâmicas básicas da cóclea. Num ser humano adulto, a membrana tem cerca de 34 mm de comprimento desde a base (a extremidade da entrada) até o ápice; por causa da sua variação gradual de largura e espessura, há um decréscimo de 10000 vezes na rigidez, desde a base até o ápice, o que dá à membrana basilar a sua função fundamental de análise de frequências. As vibrações transmitidas pela cadeia de ossos à janela oval são convertidas em oscilações pelo perilinfo na *scala vestibuli*. As diferenças de pressão resultantes, através da divisão coclear, entre as duas *scalae* flexibilizam a membrana basilar para cima e para baixo, colocando-a em movimento

com uma bandeira tremulante; à medida que essa onda se propaga para o ápice, a sua amplitude chega ao máximo num certo ponto que dependerá da frequência de entrada e será amortecida rapidamente na direção do ápice. Cerca de 16000 unidades receptoras, chamadas *células capilares*, dispostas em uma fileira “interna” e três dispostas em fileiras “externas” ao longo da membrana basilar, captam os movimentos desta última e passam os sinais às células nervosas, ou neurônios, que estão em contato com elas. (ROEDERER, 2002, [18])

### 3.3 SOBREPOSIÇÃO DE SONS SIMPLES

Ao compormos duas ondas senoidais podemos ter diferentes resultados.

#### FREQUÊNCIAS, FASES E AMPLITUDES IGUAIS

$$a \operatorname{sen} x + a \operatorname{sen} x = 2a \operatorname{sen} x$$

Que gera uma duplicação da amplitude (figura 37).

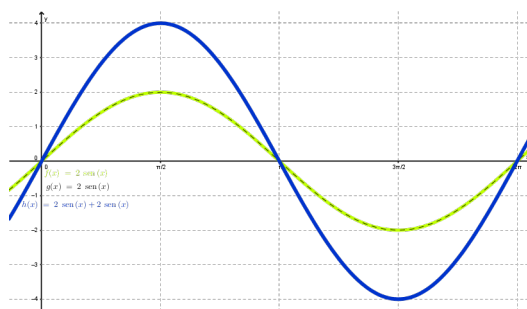


Figura 37:  $2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen} x$ .  $2\operatorname{sen} x$  (em verde),  $2\operatorname{sen} x$  (em preto) e  $4\operatorname{sen} x$  (em azul)

#### FREQUÊNCIAS E FASES IGUAIS, AMPLITUDES DIFERENTES

$$a \operatorname{sen} x + b \operatorname{sen} x = (a + b) \operatorname{sen} x$$

Que gera uma soma de amplitudes (figura 38).

#### FREQUÊNCIAS E AMPLITUDES IGUAIS, FASES DIFERENTES

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + \phi) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{(x) + (x + \phi)}{2}\right) \cos\left(\frac{(x) - (x + \phi)}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2x + \phi}{2}\right) \cos\left(\frac{2x + \phi}{2}\right)$$

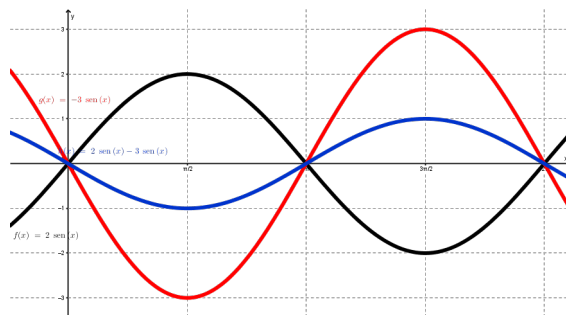


Figura 38:  $2\text{sen}x + (-3)\text{sen}x = (-1)\text{sen}x$  .  $2\text{sen}x$  (em preto),  $(-3)\text{sen}x$  (em vermelho e )  $(-1)\text{sen}x$  (em azul).

Como os picos e vales (pontos máximo e mínimos locais em um gráfico ) não coincidem mais, o máximo e o mínimo da função resultante é menor que a soma das amplitudes. Além disso, há um deslocamento na fase da onda resultante (figura 39).

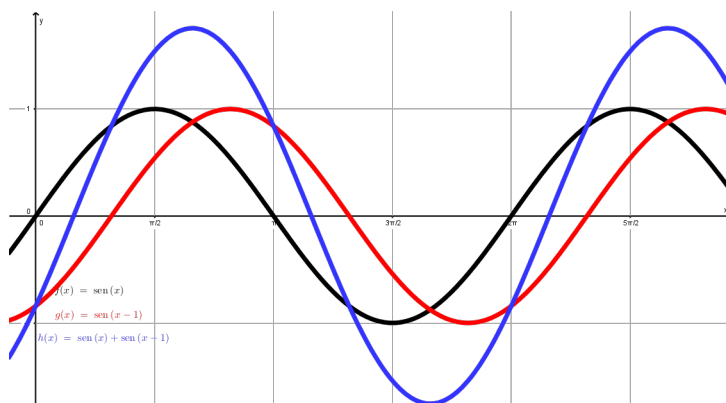


Figura 39:  $\text{sen}x$  (em preto),  $\text{sen}(x + 1)$  (em vermelho) e  $\text{sen}x + \text{sen}(x - 1)$  (em azul).

Para o caso fases opostas temos:

$$\text{sen}x + \text{sen}(-x) = 2 \text{sen}\left(\frac{(x) + (-x)}{2}\right) \cos\left(\frac{(x) - (-x)}{2}\right) = 2 \text{sen}\left(\frac{0}{2}\right) \cos\left(\frac{2x}{2}\right) = 0$$

Que anula a função (figura 40).

AMPLITUDES IGUAIS E PERÍODOS DIFERENTES Formalmente, temos:

$$\text{sen}x + \text{sen}y = 2 \text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

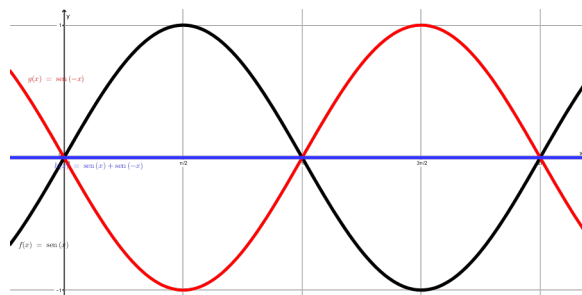


Figura 40:  $\text{sen}x + \text{sen}(-x) = 0$ .  $\text{Sen}(x)$  (em preto),  $\text{sen}(-x)$  (em vermelho) e  $\text{sen}x + \text{sen}(-x)$  (em azul)

Graficamente, são provocadas diferentes distorções na onda. Os casos abaixo são ( $y = kx$ ) (figura 41), e caso ( $y = kx + \phi$ ) (figura 42).

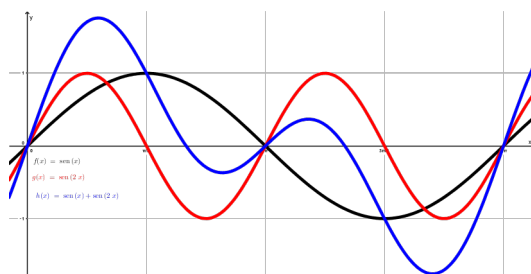


Figura 41:  $\text{sen}x$  (em preto),  $\text{sen}2x$  (em vermelho) e  $\text{sen}x + \text{sen}2x$  (em azul)

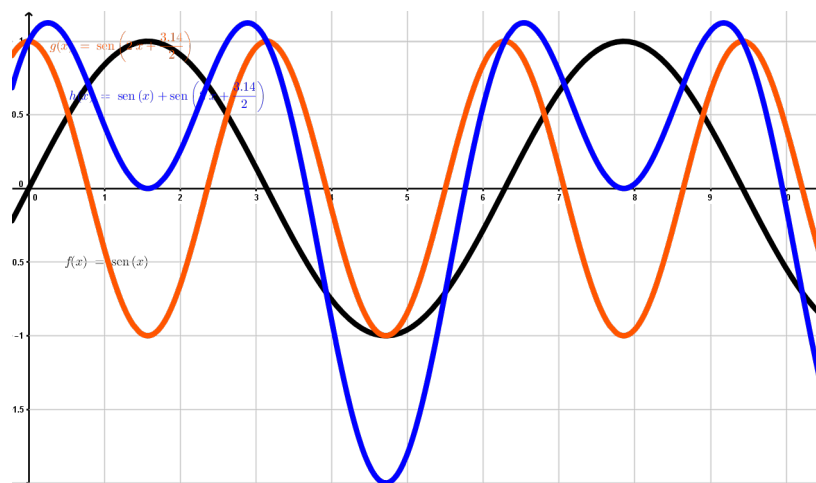


Figura 42:  $\text{sen}x$  (em preto),  $\text{sen}(2x + \pi)$  (em vermelho) e  $\text{sen}x + \text{sen}(2x + \pi)$  (em azul)

Verificamos que tanto a diferença de fases, mas principalmente a diferença de frequências pode gerar grandes distorções na onda resultante (a sobreposição de sons comporta-se como um sistema linear).

Especificamente para a audição, a percepção das ondas originais a partir da resultante pode ser bem difícil. Roederer (2002) [18] mostra diferentes estudos sobre a audição de ondas sobrepostas duas a duas, e percebe-se que especialmente para pequenas diferenças pode ser muito difícil de se perceber. Esse fenômeno auditivo é chamado de banda crítica e é parte do mecanismo psicofísico de diferenciação desses sons. A figura 43 mostra os limites da banda crítica.

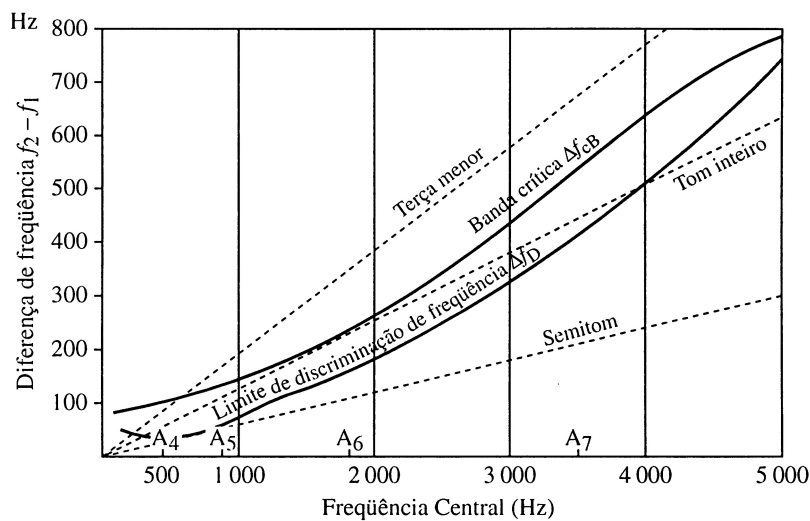


Figura 43: Largura da Banda Crítica  $\Delta f_{CB}$  e o limite de discriminação da Frequência central. Largura da Banda Crítica  $\Delta f_{CB}$  (segundo Zwicker, Flottopr e Stevens, 1957) e o limite de discriminação da Frequência central de um estímulo de dois sons (escalas lineares). A diferença de frequência correspondente a três intervalos musicais é mostrada para comparação. Em Roederer (2002) [18]

### 3.4 A TEORIA DE FOURIER

Assumindo agora que senos e cossenos representam as mesmas ondas, apenas com diferenças de fases, voltemos a analisar o comportamento da um corda vibrante e à análise do movimento harmônico.

No século XVII um tema muito estudado foi o comportamento das ondas e das funções que as descreviam.

Joseph Fourier trouxe uma teoria que mostra como elas poderiam ser representadas através de harmônicos (senos e cossenos) ou séries complexas.

Considere uma partícula de massa  $m$ , submetida a uma força  $F$  em direção a posição de equilíbrio  $y = 0$ , cuja magnitude é proporcional à distância  $y$  da posição de equilíbrio.

$$F = -k \cdot y$$

Nesse caso,  $k$  é chamado constante de força do Movimento Harmônico Simples.

Pela Lei de Movimento de Newton:

$$F = m \cdot a$$

Com

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Combinando essas equações temos a equações diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{ky}{m} = 0 \quad (3.7)$$

Façamos  $y(t) = e^{\lambda t}$ , para um certo  $\lambda$  constante. Substituindo teremos:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{\lambda t}) + \frac{ke^{\lambda t}}{m} = 0$$

Substituindo  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{\lambda t}) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{ke^{\lambda t}}{m} = 0$$

$$\left(\frac{k}{m} + \lambda^2\right) e^{\lambda t} = 0$$

Como  $e^{\lambda t} \neq 0, \forall \lambda$  finito, temos que a equação é zero quando:

$$\frac{k}{m} + \lambda^2 = 0$$

Fatorando para  $\lambda$ , encontramos as raízes complexas:

$$\lambda = \frac{i\sqrt{k}}{m} \text{ ou } \lambda = -\frac{i\sqrt{k}}{m}$$

A raiz  $\lambda = -\frac{i\sqrt{k}}{m}$  nos fornece a solução:

$$y_1(t) = c_1 e^{-\frac{i\sqrt{k}}{m}t}$$

sendo  $c_1$  uma constante arbitrária.

A raiz  $\lambda = \frac{i\sqrt{k}}{m}$  nos fornece a solução:

$$y_2(t) = c_2 e^{\frac{i\sqrt{k}}{m}t}$$

sendo  $c_2$  uma constante arbitrária.

A solução geral é dada pela soma das soluções acima:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = c_1 e^{-\frac{i\sqrt{k}}{m}t} + c_2 e^{\frac{i\sqrt{k}}{m}t}$$

Aplicando a identidade de Euler  $e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}\cos(\beta) + ie^{\alpha}\sen(\beta)$  :

$$y(t) = c_1 \left( \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - i \sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right) + c_2 \left( \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i \sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right)$$

Reagrupando os termos,

$$y(t) = (c_1 + c_2)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i(-c_1 + c_2)\sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Chamando  $c_1 + c_2 = A$  e  $i(-c_1 + c_2) = B$ , temos a solução:

$$y = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad (3.8)$$

que equivale a:

$$y = c \sen\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \quad (3.9)$$

Onde  $c = \sqrt{A^2 + B^2}$  e  $\tan \phi = \frac{B}{A}$ .



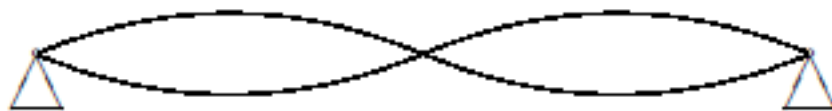


Figura 44: Corda vibrante fixa pelas extremidades fracionada em  $1/2$ .

Em Benson (2011) [4]

Suponhamos agora que a corda não tem um peso fixo, mas que a massa inicialmente presa na partícula agora fica distribuída uniformemente na corda fixa pelas extremidades.

Benson (2008) [4] diz que essa corda vibra com frequência  $f = 2\sqrt{k/n} t$ , como visto na equação 3.8. Cada vez que ela é fracionada (i.e. pressionada de modo a vibrar com  $1/n$  de seu comprimento, com  $n \in \mathbb{N}$ ) sua frequência de vibração será:

$$\begin{aligned}
 y &= A \cos(2\sqrt{k/m} t) + B \operatorname{sen}(2\sqrt{k/m} t) \\
 y &= A \cos(3\sqrt{k/m} t) + B \operatorname{sen}(3\sqrt{k/m} t) \\
 &\vdots \\
 y &= A \cos(n\sqrt{k/m} t) + B \operatorname{sen}(n\sqrt{k/m} t)
 \end{aligned}$$



Figura 45: Corda vibrante fixa pelas extremidades fracionada em  $1/3$ .

Em Benson (2011) [4]

Ou seja, é possível que uma corda vibre com mais de uma frequência, e a equação geral do movimento de uma corda vibrante é:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos(n\sqrt{k/m} t) + B_n \sin(n\sqrt{k/m} t) \right), \quad (3.10)$$

**Definição 19.** Dada uma onda de período  $T$ , com frequência  $F = 1/T$ , a velocidade angular dessa onda será:

$$\omega = 2\pi F$$

**Proposição 3.1.** Dadas duas funções periódicas  $f_1$  e  $f_2$  de mesmo período  $T$ , e constantes reais  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , a função  $h(x)$  definida por:

$$h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

é periódica de período  $T$ .

*Demonstração.* Diretamente temos:

$$h(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \alpha_1 f_1(x + T) + \alpha_2 f_2(x + T) = h(x + T) = h(x)$$

□

Sabemos que *seno* e *coseno* são definidos a partir do círculo trigonométrico, cujo comprimento é  $2\pi$ , e que seu período também é  $2\pi$ . Pela proposição 3.1 podemos concluir que  $a \sin(nx) + b \cos(nx)$  tem período  $\frac{2\pi}{n}$ .

**Proposição 3.2.** Sejam  $f_1, f_2 \dots f_n$  funções periódicas de mesmo período  $T$ , e constantes reais  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ . A função  $H(x)$  definida por:

$$H(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x)$$

é periódica de período  $T$ .

*Demonstração.* Demonstremos por indução sobre  $n$ .

Chamemos:

$$h_1(x) = \alpha_1 f_1(x)$$

$$h_2(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

$$h_3(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x)$$

⋮

$$H(x) = h_n(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_n f_n(x)$$

Para  $n = 2$  nossa condição inicial é dada pela proposição 3.1. Por hipótese indutiva temos:

$$h_{n-1}(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-1}(x)$$

Temos então:

$$h_{n-1}(x) + \alpha_n f_n(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_{n-1} f_{n-1}(x) + \alpha_n f_n(x) = h_n(x) = H(x)$$

□

Já conseguimos provas que há ondas periódicas que podem ser descritas como somas de outras funções periódicas.

A seguir são apresentadas as relações de ortogonalidade (Santos [19]). Elas são ferramentas que nos auxiliarão no cálculo dos coeficientes da Série de Fourier:

**Proposição 3.3.** *Relações de Ortogonalidade*

a)

$$\int_0^T \left( \cos\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n2\pi x}{n}\right) \right) dx = 0 \quad (3.11)$$

b)

$$\int_0^T \left( \cos\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{n2\pi x}{n}\right) \right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{T}{2}, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (3.12)$$

c)

$$\int_0^T \left( \text{sen}\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n2\pi x}{n}\right) \right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{T}{2}, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (3.13)$$

*Demonstração.* a)

$$\int_0^T \left( \cos\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) \text{sen}\left(\frac{n2\pi x}{n}\right) \right) dx =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \left( \text{sen}\left(\frac{m2\pi x}{T} - \frac{n2\pi x}{T}\right) + \text{sen}\left(\frac{m2\pi x}{T} - \frac{n2\pi x}{T}\right) dx \right) = \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \left( \text{sen}\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) - \text{sen}\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) dx \right) = \\ & \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m+n)\pi} \cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) \right]_0^T - \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m-n)\pi} \cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) \right]_0^T = \\ & \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m+n)\pi} \cos(2(m+n)\pi) - \frac{T}{2(m+n)\pi} \cos(0) \right] \dots \\ & \dots - \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m-n)\pi} \cos(2(m-n)\pi) - \frac{T}{2(m-n)\pi} \cos(0) \right] = \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} m+n &= k_1, & m-n &= k_2 \\ m \neq n, & & m, n &\in \mathbb{Z}_+^* \Rightarrow k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^* \end{aligned}$$

E:

$$\cos 2k\pi = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m+n)\pi} - \frac{T}{2(m+n)\pi} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m-n)\pi} - \frac{T}{2(m-n)\pi} \right] = \\ & \frac{1}{2} [0] - \frac{1}{2} [0] = 0 \end{aligned}$$

b) Caso  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \cos\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) \right) dx = \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \left( \cos\left(\frac{m2\pi x}{T} + \frac{n2\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{m2\pi x}{T} - \frac{n2\pi x}{T}\right) dx \right) = \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \left( \cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) dx \right) = \\ & \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m+n)\pi} \text{sen}\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m-n)\pi} \text{sen}\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) \right]_0^T = \\ & \frac{T}{4(m+n)\pi} \left[ \text{sen}\left(2(m+n)\pi\right) - \text{sen } 0 \right] + \frac{T}{4(m-n)\pi} \left[ \text{sen}\left(2(m-n)\pi\right) - \text{sen } 0 \right] \end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned} m+n &= k_1, & m-n &= k_2 \\ m \neq n, & & m, n &\in \mathbb{Z}_+^* \Rightarrow k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^* \end{aligned}$$

E:

$$\text{sen } k\pi = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{T}{4(m+n)\pi} \left[ \text{sen}\left(2(m+n)\pi\right) - \text{sen } 0 \right] + \frac{T}{4(m-n)\pi} \left[ \text{sen}\left(2(m-n)\pi\right) - \text{sen } 0 \right] = 0$$

Caso  $m = n$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \left( \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{n2\pi x}{n}\right) \right) dx &= \\
 \int_0^T \left( \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) \right)^2 dx &= \\
 \frac{1}{2} \int_0^T \left( 1 + \cos\left(\frac{4n\pi x}{T}\right) \right) dx &= \\
 \frac{1}{2} \left[ x + \frac{T}{4\pi n} \operatorname{sen}\left(4\pi n x\right) \right]_0^T &= \\
 \frac{1}{2} \left[ T + \frac{T}{4\pi n} \operatorname{sen}\left(4\pi n\right) - 0 - \frac{T}{4\pi n} \operatorname{sen}\left(0\right) \right] &= \\
 \frac{1}{2} [T] &= \frac{T}{2}
 \end{aligned}$$

c) Caso  $m \neq n$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \left( \operatorname{sen}\left(\frac{m2\pi x}{T}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi x}{n}\right) \right) dx &= \\
 \frac{1}{2} \int_0^T \left( \cos\left(\frac{m2\pi x}{T} - \frac{n2\pi x}{T}\right) - \cos\left(\frac{m2\pi x}{T} + \frac{n2\pi x}{T}\right) \right) dx &= \\
 \frac{1}{2} \int_0^T \left( \cos\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) - \cos\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) \right) dx &= \\
 \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m-n)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2(m-n)\pi x}{T}\right) \right]_0^T + \frac{1}{2} \left[ \frac{T}{2(m+n)\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2(m+n)\pi x}{T}\right) \right]_0^T &= \\
 - \frac{T}{4(m-n)\pi} \left[ \operatorname{sen}\left(2(m-n)\pi\right) - \operatorname{sen} 0 \right] + \frac{T}{4(m+n)\pi} \left[ \operatorname{sen}\left(2(m+n)\pi\right) - \operatorname{sen} 0 \right] &=
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 m+n &= k_1, & m-n &= k_2 \\
 m \neq n, & & m, n \in \mathbb{Z}_+^* &\Rightarrow k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^*
 \end{aligned}$$

E:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} k\pi &= 0, \forall k \in \mathbb{Z} \\
 - \frac{T}{4(m-n)\pi} \left[ \operatorname{sen}\left(2(m-n)\pi\right) - \operatorname{sen} 0 \right] + \frac{T}{4(m+n)\pi} \left[ \operatorname{sen}\left(2(m+n)\pi\right) - \operatorname{sen} 0 \right] &= 0
 \end{aligned}$$

Caso  $m = n$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \left( \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi x}{n}\right) \right) dx &= \\
 \int_0^T \left( \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) \right)^2 dx &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \frac{\left(\text{sen}\left(\frac{n2\pi x}{T}\right)\right)^2 + \left(\text{sen}\left(\frac{n2\pi x}{T}\right)\right)^2}{2} dx = \\
 & \frac{1}{2} \int_0^T \left( \left(\text{sen}\left(\frac{n2\pi x}{T}\right)\right)^2 + \cos\left(\frac{n2\pi x}{T}\right) - \cos\left(\frac{n2\pi x}{n}\right) + \left(\text{sen}\left(\frac{n2\pi x}{T}\right)\right)^2 \right) dx = \\
 & \frac{1}{2} \int_0^T \left[ 1 - \cos\left(2\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)\right) \right] dx = \\
 & \frac{1}{2} \left| x + \frac{T}{4\pi n} \text{sen}\left(4\pi n x\right) \right|_0^T = \\
 & \frac{1}{2} \left| T + \frac{T}{4\pi n} \text{sen}\left(4\pi n\right) - 0 - \frac{T}{4\pi n} \text{sen}\left(0\right) \right| = \\
 & \frac{1}{2} |T| = \frac{T}{2}
 \end{aligned}$$

□

A Teoria de Fourier diz que podemos descrever uma onda através de uma série trigonométrica da forma:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi n\theta}{T}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi n\theta}{T}\right) \right] \quad (3.14)$$

Onde  $a_0$ ,  $a_n$ , e  $b_n$ , são constantes.

Como o período do seno e do cosseno é  $2\pi$ , usaremos a forma:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(n\theta) + b_n \text{sen}(n\theta) \right) \quad (3.15)$$

Vamos agora definir como determinar esses coeficientes.

O primeiro fator relevante é que todas essas séries são uniformemente convergentes. Deste forma temos:

$a_0$ :

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(n\theta) + b_n \text{sen}(n\theta) \right)$$

Integremos no intervalo  $[0, 2\pi]$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(n\theta) + b_n \text{sen}(n\theta) \right) \right] d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} a_n \cos(n\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} b_n \text{sen}(n\theta) d\theta \right)
 \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{a_0}{2} x \right|_0^{2\pi} = \pi a_0$$

Que nos leva a:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad (3.16)$$

$a_m$ :

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sen(n\theta))$$

Multipliquemos ambos os lados por  $\cos(m\theta)$ :

$$\cos(m\theta)f(\theta) = \cos(m\theta) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sen(n\theta)) \right) =$$

E integremos no intervalo  $[0, 2\pi]$ :

$$\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta + b_n \int_0^{2\pi} \sen(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \right) = \pi a_m$$

Pelas equações 3.11, 3.12 e 3.13.

Para  $m > 0$ :

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) f(\theta) d\theta \quad (3.17)$$

$b_m$ :

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sen(n\theta))$$

Multipliquemos ambos os lados por  $\sen(m\theta)$ :

$$\sen(m\theta)f(\theta) = \sen(m\theta) \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sen(n\theta)) \right) =$$

E integremos no intervalo  $[0, 2\pi]$ :

$$\frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \text{sen}(m\theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta + b_n \int_0^{2\pi} \text{sen}(n\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta \right) = \pi b_m$$

Pelas equações 3.11, 3.12 e 3.13.

Para  $m > 0$ :

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(m\theta) f(\theta) d\theta \quad (3.18)$$

**Definição 20.** Função Seccionalmente Contínua:  $f$  é seccionalmente contínua em um intervalo  $[a, b]$  se ela é contínua em um número finito de subintervalos, exceto em um número finito de pontos  $(P_1, P_2, \dots, P_n)$  onde a função deve ter limites laterais à esquerda e à direita, sendo que a diferença entre esses limites em cada  $P_j$  deve sempre ser finita.

**Definição 21.** Função Seccionalmente Diferenciável:  $f$  é seccionalmente diferenciável em um intervalo  $[a, b]$  se  $f$  e sua derivada  $f'$  são seccionalmente contínuas em  $[a, b]$ .

Com essa bagagem agora vamos nos aprofundar nas ideias de Fourier.

**Teorema 3.4.** Teorema de Fourier: Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma Função Seccionalmente Diferenciável e periódica da período  $T$ . A representação de  $f$  dada pela equação 3.15 converge em cada  $x$  para  $\frac{1}{2}[f(x - 0) + f(x + 0)]$ , isto é:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(n\theta) + b_n \text{sen}(n\theta) \right) = \frac{1}{2}[f(x - 0) + f(x + 0)]$$

**Proposição 3.5.** Séries de Fourier para Funções Pares: A série de Fourier para a função  $f$ , par, periódica, é dada por:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(n\theta) \right)$$

*Demonstração.* Seja  $f$  par e, por simplicidade,  $T = 2L$ , onde  $L$  é meio período. Pelas equações 3.16, 3.17 e 3.18 temos:



$$a_0 = \frac{T}{2} \int_0^T f(x) dx = \frac{T}{4} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\theta x) dx = \frac{4}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\theta x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen}(n\theta x) dx = \frac{2}{T} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}(n\theta x) dx = 0$$

□

**Proposição 3.6.** *Séries de Fourier para Funções Ímpares: A série de Fourier para a função  $f$ , ímpar, periódica, é dada por:*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \operatorname{sen}(n\theta))$$

*Demonstração.* Seja  $f$  ímpar e, por simplicidade,  $T = 2L$ , onde  $L$  é meio período. Pelas equações 3.16, 3.17 e 3.18 temos:

$$a_0 = \frac{T}{2} \int_0^T f(x) dx = \int_{-L}^L f(x) dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n\theta x) dx = \frac{2}{T} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\theta x) dx = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \operatorname{sen}(n\theta x) dx = \frac{4}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(n\theta x) dx$$

□

### 3.4.1 Coeficientes Complexos

Sabendo que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta, \text{ onde } \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \quad (3.19)$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta, \text{ onde } \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \quad (3.20)$$

Podemos reescrever:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n e^{in\theta}) \quad (3.21)$$

Onde:

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}$$

E para  $m > 0$ ,

$$\alpha_m = \frac{a_m}{2} + \frac{b_m}{2i}$$

$$\alpha_{-m} = \frac{a_m}{2} - \frac{b_m}{2i}$$

As equações 3.11, 3.12 e 3.13 , para  $T = 2\pi$  ficam:

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{in\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ 2\pi, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (3.22)$$

As equações 3.16, 3.17 e 3.18, para  $T = 2\pi$  ficam:

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} f(\theta) d\theta \quad (3.23)$$

### 3.4.2 Harmônicos

Conforme Santos (2004) [19]:

Neste contexto denominamos as funções  $e^{in\omega x}$  de harmônicos, ou seja, os constituintes fundamentais de uma onda qualquer. Dizemos que  $e^{i\omega x}$  é o primeiro harmônico (ou harmônico fundamental, pois possui a mesma frequência de  $f$ ); e  $e^{i2\omega x}$  é o segundo harmônico (sua frequência é o dobro da frequência de  $f$ ); e  $e^{i3\omega x}$  é o terceiro harmônico (sua frequência é o triplo da frequência de  $f$ ); e assim por diante. A equação 3.21, chamada equação de síntese, nos diz que  $f$  pode ser sintetizada pela soma de infinitos harmônicos cujas frequências são múltiplos inteiros de sua frequência fundamental. Nesta soma, a contribuição de harmônico é ponderada pelo

respectivo coeficiente  $\alpha_n$ , dado pela 3.23, chamada equação de análise. . . . , o coeficiente  $\alpha_n$  nos informa a amplitude e o ângulo de fase de cada um dos harmônicos constituintes de  $f$ .

Essa descrição é a chave para explicar o comportamento do som enquanto música, acordes e como funciona um instrumento musical.

Segundo Roederer, a sobreposição de sons com frequências que diferem por um pequeno valor provocam no ouvido uma sensação de "batimento" do som. Isto está diretamente relacionado à banda crítica.

Quando a diferença de frequências é suficientemente grande, podem ocorrer basicamente duas sensações: consonância ou dissonância. Por exemplo, um som com frequência  $f_1$  e segundo som com frequência  $f_2 = 2f_1$ . Musicalmente essa relação é chamada oitava, e justamente a oitava que melhor soa junto com uma frequência inicial qualquer, que chamaremos de fundamental.

A primeira pista sobre as relações musicais entre frequências está na equação da Teoria de Fourier:

$$y = A \cos(n \sqrt{k/m} t) + B \sin(n \sqrt{k/m} t), \quad (3.24)$$

Que dá o componente de frequência  $mf_1$ , chamado m-ésimo harmônico superior de  $f_1$ . O harmônico é um múltiplo inteiro de  $f_1$ .

O nível de consonância entre um som e seus harmônicos ocorre seguindo um certo padrão. As escolhas entre as proporções estão na tabela 13:

Frequências	Nome Musical	Proporção
$f_1$	Tônica	1:1
$f_1 - 2f_1$	Oitava	2:1
$2f_1 - 3f_1$	Quinta	3:2
$3f_1 - 4f_1$	Quarta	4:3
$4f_1 - 5f_1$	Terça Maior	5:4
$5f_1 - 6f_1$	Terça Menor	6:5

Tabela 13: Relações entre frequências e Proporções Musicais

Quando a relação não segue esses padrões, ocorrem distorções no período e, conseqüentemente, na percepção do som. Esse fenômeno é então chamado de dissonância.



# 4

---

## MODELOS DE INSTRUMENTOS MUSICAIS

---

Uma vez que olhamos para a teoria de Fourier e estabelecemos o som como uma soma de senos e cossenos, observaremos a construção de alguns modelos de vibração sonora nos instrumentos musicais, e perceberemos que nos diferentes casos, sempre teremos uma variação da Equação da Onda ajustada caso a caso para explicar os sistemas físicos que os representam. Para esse fim, nesse capítulo foi feito um recorte de Benson [4], com algumas injeções de outros autores.

### 4.1 O MODELO DA CORDA VIBRANTE

Instrumentos de corda cobrem uma grande leva de instrumentos musicais, entre eles os pianos, violões, violão-celos, violinos, harpas. O conceito geral é que há uma ou mais cordas presas pelas extremidades, havendo sobre elas uma tensão. Essas cordas ressoam o ar (no caso da harpa) ou uma caixa acústica (como o violão). A corda é posta em movimento via um mecanismo que pode ser um arco (violinos e celos), um “martelo” (piano) ou mesmo os dedos (violão e harpa).

Como citado anteriormente, consideremos uma corda presa pelas extremidades, de modo que o deslocamento  $y$  na corda seja função do tempo  $t$  e da posição na corda  $x$ .

$$y = y(x, t)$$

Na vibração há ondas transversais e longitudinais. Por simplicidade vamos desconsiderar as ondas longitudinais.

Sejam:

$T$ : tensão na corda (medido em Newton,  $N = kg \cdot m/s^2$ )

$\rho$ : densidade linear da corda (kg / m)

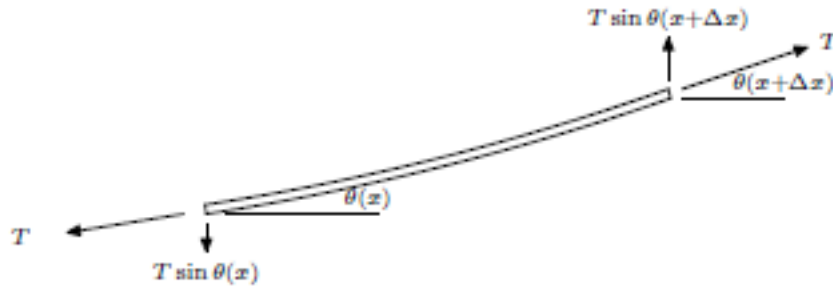


Figura 46: Deslocamento em uma Corda

Temos:

$$\tan\theta(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Em um trecho da corda (figura 46), de  $x$  a  $x + \Delta x$ , a componente vertical à esquerda será  $-T\sin\theta(x)$ , e à direita será  $T\sin\theta(x + \Delta x)$ . Para um  $\theta(x)$  suficientemente pequeno,

$$\sin\theta(x) \approx \tan\theta(x)$$

Temos então:

$$T\tan\theta(x + \Delta x) - T\tan\theta(x) =$$

$$T\left(\frac{\partial y(x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial y(x)}{\partial x}\right) =$$

$$T\Delta x \frac{\left(\frac{\partial y(x + \Delta x)}{\partial x} - \frac{\partial y(x)}{\partial x}\right)}{\Delta x} \approx$$

$$\approx T\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

A massa do seguimento da corda é aproximadamente  $\approx \rho \Delta x$ . Pela 2ª Lei de Newton temos:

$$F = m \cdot a, \text{ com } a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Logo:

$$T \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx (\rho \Delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

E enquanto  $\theta(x)$  for pequeno, a equação da onda será:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

Onde:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

No sistema das cordas vibrantes

“a velocidade da onda é diretamente proporcional à tensão na corda e inversamente proporcional à densidade linear da corda. (Juliani, 2003) [14]”

Para essa equação o método de D'Alembert de fatorar é útil (Figueiredo 2000 [10]):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \approx 0$$

E chamando:

$$u = x + ct$$

$$v = x - ct$$

Substituindo teremos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} =$$

$$= c \frac{\partial y}{\partial u} - c \frac{\partial y}{\partial v}$$

Diferenciando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial t} = \\ c \left( c \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - c \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \right) - c \left( c \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - c \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) &= \\ c^2 \left( c \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) & \end{aligned} \quad (4.3)$$

E de maneira análoga:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

O que leva a equação 4.2 em:

$$c^2 \left( c \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) = c^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right)$$

Ou:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$$

Integrando:

$$\int \int \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$$

Que dá como solução geral:

$$y = f(u) + g(v)$$

Ao retornar o problema, revertendo as variáveis substituídas, temos:

$$y = f(x + ct) + g(x - ct)$$



Essa equação representa duas ondas viajando pela corda com direções opostas a partir do ponto onde a corda foi tensionada.

As condições de contorno são  $x = 0$  ou  $x = l$ ,  $y = l$  (independente de  $t$ ). Substituindo  $x = 0$  temos:

$$0 = f(ct) + g(-ct), \quad \forall t$$

Logo:

$$g(\lambda) = -f(-\lambda), \quad \forall \lambda$$

Então:

$$y = f(x + ct) - f(ct - x)$$

O sentido físico da expressão é que a onda viaja para a esquerda, no fim da corda ela reflete e volta para a direita. Isso chama-se “princípio de reflexão”.

A outra condição de contorno nos dá  $x = l$  e  $y = 0$ .

$$f(l + ct) = f(l - ct)$$

Então para todo  $t$ :

$$f(\lambda) = f(\lambda + 2l), \quad \forall \lambda$$

Oportunamente, esses dados provam o Teorema de D'Alembert listado a seguir:

**Teorema 4.1.** *Teorema de D'Alambert:[Solução Geral da Equação da Onda] A solução geral da equação da onda:*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

É dada por:

$$y = f(x + ct) + g(x - ct)$$

*Soluções que satisfazem as condições de contorno:*

$$y = 0 \text{ PARA } x = 0;$$

$$y = 0 \text{ PARA } x = l;$$

Para todos os valores de  $t$  são da forma:

$$y = f(x + ct) - f(-x + ct)$$

Onde:

$$f(\lambda) = f(\lambda + 2l), \forall \lambda$$

Como ela é uma função periódica (de período  $T = 2l$ ), é possível reescrevê-la por uma expansão da série de Fourier. Para a fundamental, a equação assume a forma:

$$f(x) = C \cos\left(\frac{\pi x}{l} + \phi\right) \quad (4.5)$$

E seu  $n$ -ésimo harmônico é da forma:

$$f(x) = C \cos\left(\frac{n\pi(x + ct)}{l} + \phi\right) - C \cos\left(\frac{n\pi(-x + ct)}{l} + \phi\right) \quad (4.6)$$

Desde que as funções obedecem as condições de contorno necessárias, pela teoria de Fourier podemos usar a identidade  $\text{sen } u + \text{sen } v = 2 \text{sen} \frac{1}{2}(u + v) \cos \frac{1}{2}(u - v)$  e reescrever a equação 4.6 como:

$$f(x) = 2C \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l} + \phi\right) \quad (4.7)$$

Onde a frequência do  $n$ -ésimo harmônico será:

$$v = \left(\frac{n}{2l}\right) \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

## 4.2 O MODELO DO TUBO DE AR

Vejamos agora o comportamento de outros instrumentos: os instrumentos de sopro. Esses instrumentos provocam a vibração do ar através da vibração de uma coluna de ar dentro de seus corpos tubulares, cônicos ou mesmo com outros formatos. Essa classe de instrumentos inclui as flautas, trombones, trompetes, tubas, clarinetas, oboés e outros mais.

Tomemos como variáveis a pressão acústica e o deslocamento do ar, e suponhamos que inicialmente o ar encontra-se em repouso. Seja:

$\xi(x, t)$ : o deslocamento da coluna de ar na posição  $x$  do tubo no momento  $t$ .

$p(x, t)$ : a pressão acústica. Nesse caso temos  $\rho$  a pressão do ar em repouso,  $P(x, t)$  a pressão absoluta.  $p(x, t)$  é dado por:

$$p(x, t) = P(x, t) - \rho$$

Nessa situação, a lei de Hooke traz:

$$p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Com  $B$  sendo o Módulo Elástico do ar. Pela lei de Newton:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Combinando as equações:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (4.8)$$

E:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (4.9)$$

Onde:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

As condições de contorno são:

$\xi(x, t) = 0$ , se o tubo está fechado no fim,  $\forall t$ .

$p(x, t) = 0$ , se o tubo está aberto,  $\forall t$ .

Para um tubo aberto em ambos os lados, como a flauta, o comportamento da pressão acústica é o mesmo da corda vibrante, ou seja, obedece o teorema de D'Alembert 4.1. O comportamento geral da onda sonora aparece representado na figura 47.

No caso dos instrumentos cujo fim é fechado, como o oboé, o deslocamento é forçado para zero, o que faz com que os harmônicos múltiplos de inteiros ímpares sejam predominantes.

Os tubos cônicos se comportam como tubos abertos.

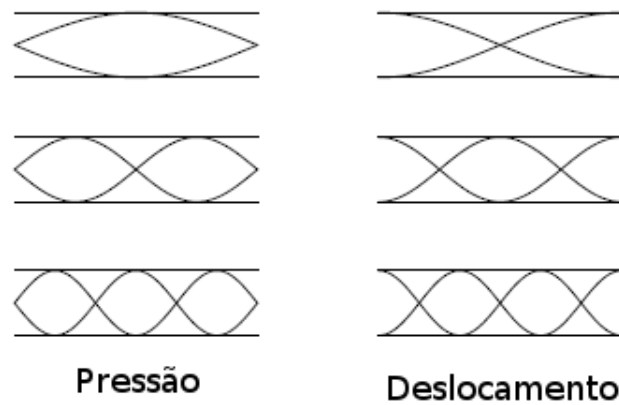


Figura 47: Comportamento do deslocamento e pressão do ar em um tubo com 1, 2 e 3 buracos, formando nodos.

Observe a diferença de fases. Em Benson (2007) [4]

#### 4.3 O MODELO DA MEMBRANA ELÁSTICA

Tomemos como exemplo o tambor. Ele não possui um corda ou coluna que possam ser tratados como unidimensionais. Ele é recoberto por uma pele, uma superfície bidimensional.

Para esse caso temos a densidade  $\rho(Kg/m^2)$ , suponhamos que o contorno possui tensão  $T$  uniforme. Essas condições iniciais nos levam a interpretar que toda a superfície da pele está sob tensão uniforme. Seja então um retângulo de dimensões  $\Delta x$  e  $\Delta y$  sobre a superfície, e  $z$  o deslocamento perpendicular na superfície. A tensão nas laterais (direita e esquerda) é  $T\Delta y$ . Pela argumentação anterior (eq. 4.1):

$$(T\Delta y) \left( \Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

Já na horizontal:

$$(T\Delta x) \left( \Delta y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

A força ascendente na superfície é:

$$(T\Delta x\Delta y) \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

A massa dos elementos na superfície é aproximadamente  $\rho \Delta x \Delta y$ . Pela lei de Newton:

$$(T \Delta x \Delta y) \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \approx (\rho \Delta x \Delta y) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$$\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Chamando  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

A solução geral dessa equação é uma combinação linear de  $J_n\left(\frac{\omega r}{c}\right)$  e  $Y_n\left(\frac{\omega r}{c}\right)$  (Juliani, 2003) [14], e como  $r \rightarrow 0 \Rightarrow Y_n \rightarrow -\infty$  temos:

$$z = A J_n\left(\frac{\omega r}{c}\right) \text{sen}(\omega t + \phi) \text{sen}(n\theta + \psi)$$

são as soluções da equação da onda. As condições de contorno são:  $z = 0$ ,  $r = a$ ,  $\forall t, \omega$ . Segue que

$$J_n\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0.$$

Os zeros desses tipos são um conjunto discreto, infinito, e pertencem às funções de Bessel.

Essa é mais uma variação da Equação da Onda, mas a abordagem necessária à demonstração foge ao escopo matemático desse trabalho.



---

## APLICAÇÕES DIDÁTICAS

---

Formar o professor da educação básica, enriquecer sua prática didática pela aplicação da Matemática, sendo ensinada objetivando despertar um maior interesse dos alunos e mais profundo conhecimento matemático. Esse é o grande objetivo da proposta do PROFMAT.

Segundo os PCN's (Pâmetros curriculares nacionais) [16]:

- A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar.
- A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente.
- A atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.
- No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.

- A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.
- A seleção e organização de conteúdos não deve ter como critério único a lógica interna da Matemática. Deve-se levar em conta sua relevância social e a contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno. Trata-se de um processo permanente de construção.
- O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.
- Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática.
- A avaliação é parte do processo de ensino e aprendizagem. Ela incide sobre uma grande variedade de aspectos relativos ao desempenho dos alunos, como aquisição de conceitos, domínio de procedimentos e desenvolvimento de atitudes. Mas também devem ser avaliados aspectos como seleção e dimensionamento dos conteúdos, práticas pedagógicas, condições em que se processa o trabalho escolar e as próprias formas de avaliação.

Essas são hoje as diretrizes de ensino de Matemática.

Nota-se claramente uma tendência de ensinar mais uma matemática aplicável, contextualizada, mas que na prática acaba muito distante da compreensão dos alunos.



O ponto chave dessa dinâmica é transformar o aluno em protagonista do processo de aprendizagem:

As características de nossa tradição escolar diferem muito do que seria necessário para a nova escola. De um lado, essa tradição compartimenta disciplinas em ementas estanques, em atividades padronizadas, não referidas a contextos reais. De outro lado, ela impõe ao conjunto dos alunos uma atitude de passividade, tanto em função dos métodos adotados quanto da configuração física dos espaços e das condições de aprendizado. Estas, em parte, refletem a pouca participação do estudante, ou mesmo do professor, na definição das atividades formativas. As perspectivas profissional, social ou pessoal dos alunos não fazem parte das preocupações escolares; os problemas e desafios da comunidade, da cidade, do país ou do mundo recebem apenas atenção marginal no ensino médio, que também por isso precisaria ser reformulado (PCN+ Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias [7])

Esse fato pode ser associado com desenvolvimento da pesquisa em matemática ao longo do tempo, pois

Na verdade, a produção matemática tem ocorrido de modo supostamente desvinculado de um contexto sócio-culturalpolítico e com pouca preocupação em tornar-se utilitária ou mais bem definida em suas metas - o que, de certo modo, diferencia a Matemática de outras Ciências. De fato, tal produção apresenta-se como fruto exclusivo da mente humana, resultando numa linguagem que almeja essencialmente elegância e rigor. Bassanezi (1999) [1].

Entretanto, D'Ambrósio (1996) [9] diz que

A matemática vem passando por uma grande transformação. Isso é absolutamente natural. Os meios de observação, de coleção de dados e de processamento desses dados, que são essenciais na matemática, mudaram profundamente. Não que se tenha relaxado o rigor, mas, sem dúvida, o rigor científico hoje é de outra natureza.

A linha de ação sugerida é então a de fazer os alunos criarem seus modelos matemáticos do mundo para atingir a “posse” dessa poderosa ferramenta que é a Matemática.

Seguindo a linha de Biembengut, (2007) [6] sugerimos que cada atividade leve em conta que

“Na modelação o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo sua recriação em sala, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em questão, além de obedecer ao currículo inicialmente proposto.”

Recomendamos bastante cuidado com a aplicação da modelagem para não ser apenas mais uma aula qualquer, e pelo contrário, mantendo a proposta sugerida por Biembengut (2008) [5],

O professor deve começar apresentando o tema aos alunos e, a partir dele, reconstruir o modelo matemático que quer trabalhar. Como método de ensino, o professor pode usar a modelagem da seguinte maneira: expor o assunto, delimitar o problema, desenvolver o conteúdo, apresentar exemplos, resolver e interpretar o problema. Dessa forma, ele pode usar um outro modelo matemático para outro conteúdo, ou o mesmo modelo para outro conteúdo

Modelar matematicamente um problema para fins de ensino é muito mais que apresentar uma fórmula que traz ou aproxima os resultados desejados. Consiste então na criação de um situação onde o aluno é posto contra um problema e precisa mobilizar um conjunto de competências para compreender o fenômeno o qual se deseja modelar, quais variáveis são relevantes, qual o nível de interferência que outras variáveis ou situações afetarão o problema inicial, qual a real finalidade do modelo (por consequência qual o nível de refinamento necessário ao modelo), a interpretação dos resultados em relação ao problema proposto, entre outros.

Conforme Bassanezi (2012) [2]:

Um problema real não pode ser representado de maneira exata em toda sua complexidade por uma equação matemática ou um sistema de equações. Um modelo deve ser considerado apenas como um retrato ou simulação de um fenômeno e sua validação depende muito da escolha das variáveis e das hipóteses formuladas. é muito frequente em se tratando de modelar um fenômeno ou um experimento, obtermos equações para descrever as “variações” das quantidades (variáveis de estado) presentes e consideradas essenciais. Desta forma, as leis que regem tal fenômeno são traduzidas por equações de variações.

E ainda:

1. Argumento formativo – enfatiza as aplicações matemáticas, a performance da Modelagem Matemática e a resolução de problemas como processos para desenvolver capacidade em geral e atitudes dos estudantes, tornando-os explorativos, criativos e habilidosos na resolução de problemas.
2. Argumento de competência crítica – focaliza a preparação dos estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.
3. Argumento de utilidade – enfatiza que a instrução matemática pode preparar o estudante para utilizar a matemática como ferramenta para resolver problemas em diferentes situações e áreas.
4. Argumento intrínseco – insiste em que a inclusão de Modelagem, resolução de problemas e aplicações fornece ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas as suas facetas.
5. Argumento de aprendizagem – garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados e valorizar a própria matemática.
6. Argumento de alternativa epistemológica – A modelagem também se encaixa no Programa Etnomatemática, indicado por D’Ambrósio (1990) “que propõe um enfoque epistemológico alternativo associado a uma historiografia mais ampla. Parte da realidade e chega de maneira natural e através de um enfoque cognitivo, com forte fundamentação cultural, à ação pedagógica” atuando, dessa forma, como uma metodologia alternativa mais adequada às diversas realidades socio-culturais.

E como motivador, deixamos a seguinte frase:

Quanto mais se modela a natureza, mais se conclui que ela é perfeita. (Rodney Carlos Bassanezi)

Com essas justificativas e orientações, nos encaminhamos a uma proposta de atividade para trabalho na educação básica.

5.1 PROPOSTA DE ATIVIDADE: O SOM E OS SENOS

Nesta seção sugerimos uma atividade didática para ampliar o portfólio do professor.

Para desenvolver essa atividade foi utilizado o software *Mathematica*.

Com projeção da tela, primeiramente apresenta-se o modelo da onda sonora:

$$y(t) = \text{sen}(\theta)$$

Projeta-se a onda, e então explica-se o significado de  $\theta$ .

Em seguida, apresenta-se o modelo coloca-se a onda:

$$y(t) = a \text{sen}(b \theta + \phi)$$

E mostra-se quais as distorções que  $a$ ,  $b$  e  $\phi$  provocam no *seno*.

Com a função *play* do *Mathematica* é possível reproduzir o som gerado pela onda, usando o comando *Play (Sin (f\*2\*pi\*t))*, e retirando da tabela 14 as diferentes frequências das notas musicais.

Nota	Nome	Frequência (Hz)
C	Dó	262
C#	Dó Sustenido	277
D	Ré	294
D#	Ré sustenido	311
E	Mi	330
F	Fá	349
F#	Fá sustenido	370
G	Sol	392
G#	Sol sustenido	415
A	Lá	440
A#	Lá sustenido	466
B	Sí	494

Tabela 14: Tabela de Frequências da Notas Musicas para a Escala Temperada de Dó<sub>3</sub>.

Adaptado de Goto (2009) [12]

Pode-se fazer experimentos:

- Dobrando a frequência (oitava da nota);
- Multiplicando a frequência por  $3/2$  (quinta);
- Multiplicando a frequência por  $4/3$  (quarta);
- Somando diferentes notas (compondo acordes);
- Ouvindo e comparando a diferença do som produzido por um *seno* e do som produzido por um *coseno*.

Busca-se que o aluno identifique:

- Quando a frequência aumenta, o som torna-se mais agudo;
- Quando a frequência aumenta, a curva fica mais comprimida dentro do gráfico, isto é, pode ver mais vezes uma volta completa do seno;
- $\text{sen } x$  e  $\text{cos}(x - \frac{\pi}{2})$ ;
- Quanto maior a amplitude maior é o volume do som.



---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] BASSANEZI, RODNEY CARLOS. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo, SP: Editora Contexto, 2002.
- [2] BASSANEZI, RODNEY CARLOS. *Equações diferenciais ordinárias: Um curso introdutório*. Santo André, SP: Coleção BC&T UFABC Textos Didáticos, 2012.
- [3] BENNETT, ROY. *Uma breve história da música*. Rio de Janeiro, RJ: Jorge Zahar, 1986.
- [4] BENSON, DAVID J. *Music: a mathematical offering*. Cambridge, GBR : Cambridge University Press, 2011.
- [5] BIEMBENGUT, MARIA SALETT; DOROW, KELLI CRISTINA. *Mapeamento das pesquisas sobre modelagem matemática no ensino brasileiro: análise das dissertações e teses desenvolvidas no Brasil*. Revista Dynamis, v. 14, n. 1, p. 54 - 61, 2008.
- [6] BIEMBENGUT, MARIA SALETT; HEIN, NELSON. *Sobre a modelagem matemática do saber e seus limites*. Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007, p. 33 - 47.
- [7] BRASIL. *Matemática e suas Tecnologias PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília - DF, 2002.
- [8] CARVALHO, HENRIQUE MARINS DE; BASSANEZI, RODNEY CARLOS; JUNIOR, GERALDO POMPEU. *Un modelo matemático aplicado al estudio de dos formas artísticas de representación*. Modelling in Science Education and Learning v. 8, n. 1, p. 5-21, 2015.
- [9] D'AMBROSIO, UBIRATAN. *Educação Matemática: da teoria à prática*.
- [10] FIGUEIREDO, DJAIRO GUEDES DE. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000.
- [11] EVARISTO, JAIME. *Introdução à álgebra abstrata*. Maceió - AL: UFAL, 1999.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [12] GOTO, MARIO. *Física e música em consonância*. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, p. 2307, 2009.
- [13] HEFEZ, ABRAMO. *Elementos de aritmética*. Rio de Janeiro, RJ : SBM, 2011. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [14] JULIANI, JULIANA PIMENTEL. *Matemática e música*. 2003. 85 fls. Trabalho de Graduação - Licenciatura em matemática. UFSCAR, São Carlos- SP.
- [15] PEREIRA, MARCOS DO CARMO. *Matemática e Música: De Pitágoras aos dias de hoje*. 2013. Dissertação de Mestrado - PROFMAT.UNIRIO - Rio de Janeiro - RJ.
- [16] PRADO, IGA; FARHA, VZAR; LARANJEIRA, MI. *Parâmetros Curriculares Nacionais Matemática*, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL / MEC, 1997, p. 142.
- [17] RODRIGUES, JOSÉ FRANCISCO. *A matemática e a música*. Lisboa: PT 200 (1999).
- [18] ROEDERER, JUAN G.. *Introdução à Física e Psicofísica da Música*. São Paulo, SP: EdUSP, 2002.
- [19] SANTOS, FABIANO J.. *Introdução às séries de Fourier*. Belo Horizonte - MG: PUC Minas, 2004.
- [20] SIQUEIRA, THIAGO MARQUES; MORAIS, MARCUS VINICIUS GIRÃO DE. *Elementos Finitos-Vibrações em Cordas*. III ENCONTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 2011.
- [21] WRIGHT, DAVID. *Mathematics and music*. American Mathematical Soc., vol. 28, 2009.