



Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado

Jairo Fernandes

Equações de Diferenças e Aplicações

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT da Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Guéron

Santo André – SP
2016

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Fernandes, Jairo
Equações de Diferenças e Aplicações / Jairo Fernandes. — 2016.

135 fls.

Orientador: Eduardo Guéron

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Mestrado
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,
Santo André, 2016.

1. Equações de Diferenças. 2. Ponto Fixo. 3. Estabilidade. 4.
Mapas. I. Guéron, Eduardo. II. Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2016. III. Título.

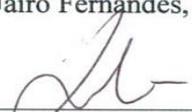


MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional

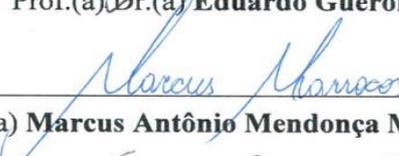
Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

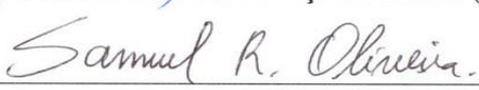
Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Jairo Fernandes, realizada em 3 de fevereiro de 2016:



Prof.(a) Dr.(a) **Eduardo Guéron** (UFABC) – Presidente



Prof.(a) Dr.(a) **Marcus Antônio Mendonça Marrocos** (UFABC) – Membro Titular



Prof.(a) Dr.(a) **Samuel Rocha de Oliveira** (UNICAMP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Sinue Dayan Barbero Lodovici** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Leonardo Paulo Maia** (USP) – Membro Suplente

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, 04 de MARÇO de 2016.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

AGRADECIMENTOS

A Deus que me concedeu força, perseverança, sabedoria e iluminação para a conclusão deste curso.

À minha esposa pelo apoio diário, orações, amor, carinho e dedicação que sempre me incentivou nos momentos de dificuldades.

Ao meu orientador, pelo aceite da orientação, paciência, competência e excelente orientação.

Aos professores da pós-graduação: João Carlos da Motta Ferreira, Maurício Firmino Silva Lima, Daniel Miranda Machado, Valdecir Marvulle, Rafael de Mattos Grisi, Sinuê Dayan Barbero Lodovici e Eduardo Guéron pela competência e dedicação na ministração das aulas.

A todos os colegas do curso em especial ao Thiago e aos do grupo de estudos: Erik, Fernando e Kleber pelo compartilhamento de saberes e ajuda mútua durante o curso.

A todos os meus familiares, em especial ao Daniel, que direta ou indiretamente contribuíram para realização deste trabalho.

Aos professores membros da banca avaliadora.

À SBM e a UFABC pela realização do programa.

A CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

Apresentamos neste trabalho um estudo sobre as equações de diferenças autônomas lineares e não lineares que descreve um sistema dinâmico discreto. Para o caso linear, o objetivo foi encontrar uma solução analítica da evolução temporal do sistema e a partir desta solução estudamos a estabilidade do sistema. No caso do não linear, na impossibilidade de determinar uma solução analítica, o que procuramos foi uma compreensão sobre a evolução qualitativa do sistema, ou seja, fizemos um estudo qualitativo de uma família de mapas logísticos discretos, onde a partir da variação de um parâmetro verificamos alguns comportamentos como: pontos fixos, órbitas periódicas, bifurcação e caos. Em ambos os casos, estudamos alguns modelos simples relacionados à Economia, Demografia ou Ecologia como exemplos de aplicações dos aspectos teóricos estudados.

Palavras-chave: equações de diferenças, ponto fixo, estabilidade e mapas.

ABSTRACT

Here we present a study of the equations of linear and nonlinear autonomous differences that describes a dynamic discrete system. For the linear case, the objective was to find an analytical solution of the time evolution of the system and from this solution we study the system stability. In the case of nonlinear, it is impossible to determine an analytical solution, what we seek is an understanding of the qualitative evolution of the system, ie, did a qualitative study of a family of discrete logistic maps, where from the change in a parameter we found some behaviors such as fixed points, periodic orbits, bifurcation and chaos. In both cases, we study some simple models related to Economics, Demography and Ecology as examples of applications of the theoretical aspects studied.

Keywords: difference equations, fixed point, stability and maps.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1 TEORIA BÁSICA DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES AUTÔNOMAS	12
1.1 Equação de Diferença	13
1.2 Equação de Diferença Linear Autônoma de Primeira Ordem.....	13
1.3 Solução Geral da Equação de Diferença Linear de Primeira Ordem	14
1.4 Exemplos de Aplicações das Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem	15
1.5 Equação de Diferença Linear Autônoma de Ordem Superior	19
1.6 Solução Geral da Equação de Diferença Linear de Ordem Superior.....	19
1.7 Sistemas de Equações de Diferenças Lineares Autônomas.....	25
1.8 Solução Geral de Sistemas de Equações de Diferenças Lineares	28
1.9 Representação de Equações de Ordem Superior sob a forma de Sistemas.....	33
1.10 Exemplos e Aplicações das Equações de Diferenças de Ordem Superior e de Sistemas de Equações de Diferenças Lineares.....	35
1.11 Teoria da Estabilidade das Equações de Diferenças Autônomas.....	47
1.12 Estabilidade de Pontos Fixos ou de Equilíbrio.....	50
1.13 Diagrama Cobweb ou Diagrama Teia de Aranha	51
1.14 Estabilidade da Equação de Diferença Linear de Primeira Ordem	52
1.15 Estabilidade da Equação de Diferença de Ordem Superior e de Sistemas de Equações de Diferenças Lineares.....	64
1.16 Análise das Soluções e Plano de Fases	69
1.17 Estabilidade nos Modelos Lineares de Crescimento Populacional e Presa-Predador.....	83
2 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES AUTÔNOMAS	91
2.1 Equação de Diferença não Linear Autônoma de Primeira Ordem ou Mapa Unidimensional.....	91
2.2 Pontos Periódicos e Ciclos.....	92
2.3 Conjectura de Collatz e as Órbitas Finalmente Periódicas	94

2.4	Análise de Estabilidade de Pontos Fixos de Equações não Lineares	95
2.5	A Equação Logística ou Mapa Logístico	97
2.6	Estabilidade dos Pontos Fixos da Equação Logística	100
2.7	Comportamento Assintótico do Mapa Logístico.....	101
2.7.1	Espaço de Estados (ou Espaço de Fases) e Atrator	101
2.7.2	Bifurcação.....	104
2.7.3	Caos	107
2.7.3.1	<i>Aperiodicidade</i>	108
2.7.3.2	<i>Sensibilidade às Condições Iniciais</i>	110
2.7.4	Janelas Periódicas	112
2.8	Modelo Competição entre Duas Espécies de Pássaros num mesmo Habitat	114
2.9	Modelo Presa-Predador (Lotka-Volterra).....	118
3	CONCLUSÃO	125
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	127
	APÊNDICE	130

INTRODUÇÃO

A investigação de fenômenos em diversas áreas, como: Economia (no caso do modelo da oferta e procura), Ecologia (no caso da evolução de duas populações isoladas que atuam de forma competitiva entre si), Física (na dinâmica de partículas e corpos rígidos), Demografia (no caso de movimento de populações, ou grupos de pessoas, de uma região para outra), o estudo de sistemas de controle, neurologia, eletricidade entre outras, são realizadas por meio de modelos matemáticos descritos por sistemas dinâmicos. [7], [15] e [34].

Sistema dinâmico é “um conjunto de estados possíveis juntamente com uma regra que determina o estado presente em termos de estados passados” (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996, p.1). Estes estados representam informações que caracterizam o sistema num dado instante de tempo.

A importância dos estudos teóricos de sistema dinâmico é prever o futuro ou explicar o passado de modo científico. Para fazer isso, é necessário conhecer como as coisas são e compreender as regras que governam as mudanças que ocorrerão, isto é, se a evolução temporal de um sistema é medida de forma contínua, tem-se um sistema dinâmico contínuo, cuja evolução é governada por uma ou mais equações diferenciais, caso a evolução temporal seja medida em tempo discreto, tem-se um sistema dinâmico discreto onde a evolução deste sistema é governada por uma ou mais equações de diferenças. (MONTEIRO, 2006).

Neste trabalho o foco está centrado nos estudos das equações de diferenças autônomas lineares e não lineares e suas aplicações. Entretanto, as equações de diferenças aparecem também na modelagem aproximada de um sistema contínuo no tempo por meio de um sistema discretizado no tempo equivalente, conforme [22] e [35]. Sendo assim, este trabalho está organizado do seguinte modo.

No primeiro capítulo, iniciamos o estudo com a caracterização geral de uma equação de diferenças, determinamos a solução geral das equações e de sistemas de equações de diferenças lineares autônomas usando teorias relativas à álgebra linear, resolvemos alguns exemplos dessas equações e de sistemas de equações que modela alguma aplicação em Economia, Demografia e Ecologia. Na sequência, estudamos a estabilidade das equações e dos sistemas de equações de diferenças lineares autônomas a partir de uma solução geral e graficamente usando o diagrama Cobweb e o plano de fases, finalizamos com a análise de estabilidade dos modelos de crescimento populacional e presa-predador.

No segundo capítulo, tratamos das equações de diferenças não lineares autônomas. A importância desse estudo dá-se pelo fato de que “a natureza é essencialmente não linear. Assim, sua descrição a partir de modelos lineares fica sempre restrita a uma pequena região, não permitindo a correta compreensão de diversos aspectos a ela associada. Ao se falar em natureza, pode se imaginar sistemas mecânicos, elétricos, biomédicos, econômicos, sociais. Dentre tantos outros.” (SAVI, 2006, p.18).

Dessa forma, apresentamos alguns conceitos básicos relacionados à dinâmica das equações não lineares, também denominadas de mapas. Geralmente, não é possível determinarmos uma solução geral para estas equações, pelo fato destas não satisfazerem o princípio da superposição, válido no caso linear. Assim, para determinarmos o comportamento dinâmico do sistema não linear, fizemos a linearização desse sistema nas vizinhanças do ponto fixo, obtendo então a evolução qualitativa do sistema. Para isso, estudamos uma família de mapas logísticos discretos e mostramos que dependendo do valor do parâmetro r as órbitas convergem ou divergem dos valores fixos, oscilam entre esses valores dando origem aos períodos ou não oscilam entre esses valores tornando-as aperiódicas quando evoluem para o caos.

A respeito de órbitas periódicas destacamos dois importantes resultados. O primeiro é o teorema de Li e Yorke, publicado em 1975, num famoso artigo intitulado “Período Três implica Caos”, vide [16]. Neste teorema foi provado que se um modelo discreto unidimensional tiver pontos periódicos de período três, então ele terá pontos de todos os períodos possíveis e conseqüentemente o caos. O segundo é o teorema proposto por Sarkovskii, publicado em 1964, numa revista de pouca divulgação, onde provou que, se um modelo discreto unidimensional tiver órbita de período m , então existirão órbitas com todos os períodos n , tais que m precede n no ordenamento proposto pelo mesmo. (VIANA, 2011).

Por fim, estudamos dois modelos de sistemas dinâmicos discretos não lineares, competição entre duas espécies num mesmo habitat e o modelo presa-predador discreto, onde a partir desses modelos bastante simples observamos equilíbrio ecológico, crescimento ilimitado, extinção, sensibilidade às condições iniciais e flutuações irregulares dessas populações, ou seja, caos.

CAPÍTULO 1

1 TEORIA BÁSICA DAS EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES AUTÔNOMAS

A teoria apresentada neste capítulo baseia-se principalmente nas referências [7], [18], [22] e [29].

Um sistema é de tempo discreto se o tempo n é um número inteiro. Normalmente toma-se $n \in \mathbb{Z}_0^+$. A evolução temporal deste sistema é governada por uma ou mais equações de diferenças, que é um tipo de equação que relaciona o valor de uma variável $x_n \in \mathbb{R}$ no instante n a valores de x_n em outros instantes, tais como, $n + 1, n + 3, n - 2$. (MONTEIRO, 2006).

1.1 Equação de Diferença

Definição 1.1.1 (Representação). Uma equação de diferença é uma relação funcional da forma

$$x_{n+k} = f(n, x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_{n+1}, x_n), \quad (1.1)$$

onde $f: \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Definição 1.1.2 (Ordem). A ordem de (1.1) é definida pela diferença entre o maior e o menor índice temporal i de x_i que aparecem na equação.

Exemplos:

$$x_{n+1} = 3x_n, \text{ é de ordem } 1$$

$$x_{n+3} + 7x_{n+2} - 2x_{n+1} = 0, \text{ é de ordem } 2$$

$$x_{n+7} - 3x_{n+2} = 6, \text{ é de ordem } 5$$

Definição 1.1.3 (Lineares e Não Lineares). A equação (1.1) é dita linear se f é linear nas variáveis x_{n+k}, \dots, x_n . Em geral uma equação de diferença de ordem k é linear se está escrita na forma

$$f_0(n)x_{n+k} + f_1(n)x_{n+k-1} + \dots + f_{k-1}(n)x_{n+1} + f_k(n)x_n = g(n), \quad (1.2)$$

onde $f_i(n)$, $0 \leq i \leq k$ e $g(n)$ são funções reais com $f_0(n) \neq 0$ e $f_k(n) \neq 0$, $x_n \in \mathbb{R}$ e

$$n \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Uma equação que não satisfaz às condições acima é denominada não linear.

Exemplos:

$$x_{n+1} = 3x_n + 5, \text{ é linear}$$

$$x_{n+2} = 5x_n - 2n^3, \text{ é linear}$$

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n), \text{ é não linear}$$

$$x_{n+1} = r \ln\left(\frac{k}{x_n}\right), \text{ é não linear}$$

Definição 1.1.4 (Homogênea e Não Homogênea). Se $g(n) = 0$ em (1.2), então a equação é dita homogênea, caso contrário, a equação é não homogênea ou completa.

Exemplos:

$$x_{n+1} - 3x_n = 0, \text{ homogênea}$$

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 5, \text{ não homogênea}$$

$$x_{n+3} + 5x_n = 3n, \text{ não homogênea}$$

Definição 1.1.5 (Autônoma e Não Autônoma). Se f não depende diretamente de n na equação (1.1), então a equação é dita autônoma ou invariante no tempo, neste caso os coeficientes são constantes e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Caso contrário, a equação é não autônoma ou variante no tempo.

Exemplos:

$$x_{n+1} = 5x_{n+2}, \text{ é autônoma}$$

$$x_{n+1} = x_n + 2n, \text{ é não autônoma}$$

$$x_{n+1} = 7nx_n, \text{ é não autônoma}$$

$$x_{n+1} = 5^n x_{n+1} - x_n, \text{ não autônoma}$$

Neste trabalho em particular trataremos das equações e dos sistemas de equações de diferenças lineares e não lineares autônomas.

1.2 Equação de Diferença Linear Autônoma de Primeira Ordem

Uma equação de diferença linear **E.D.L.** autônoma de 1ª ordem é a equação que depende de uma geração anterior. Sua forma geral é dada por

$$x_{n+1} = ax_n + b, \quad (1.3)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes com $a \neq 0$ e $x_n \in \mathbb{R}$.

1.3 Solução Geral da Equação de Diferença Linear de Primeira Ordem

A solução de uma E.D.L. de 1ª ordem é facilmente obtida por iteração.

Consideramos a E.D.L. homogênea $x_{n+1} = ax_n$ (1.4), com condição inicial x_0 . Por iteração, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 \\ x_2 &= ax_1 = a^2x_0 \\ x_3 &= ax_2 = a^3x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= a^n x_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

que é a solução geral de (1.4).

Por indução, demonstramos a validade de (1.5) de acordo com [7]. Como x_0 é válido, por ser condição inicial, supomos que (1.5) é verdadeira para $n = k$ (hipótese indutiva), ou seja,

$$x_k = a^k x_0 .$$

Verifiquemos então, para $n = k + 1$.

É fácil ver que da relação de recorrência e da hipótese indutiva, obtemos:

$$x_{k+1} = ax_k = a \cdot a^k x_0 = a^{k+1} x_0,$$

ou seja,

$$x_{k+1} = a^{k+1} x_0 ,$$

o que prova a validade para $\forall n \in \mathbb{N}$, portanto (1.5) é solução de (1.4). ■

Consideramos agora, a E.D.L. não homogênea

$$x_{n+1} = ax_n + b, b \neq 0, \quad (1.6)$$

com condição inicial x_0 . Por iteração, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= ax_0 + b \\ x_2 &= ax_1 + b = a^2x_0 + ab \\ x_3 &= ax_2 + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_n = a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b.$$

Usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, obtemos:

$$x_n = a^n x_0 + b \left(\frac{a^n - 1}{a - 1} \right) \text{ para } a \neq 1, \quad (1.7)$$

que é a solução geral de (1.6).

Por indução, demonstramos a validade de (1.7) de acordo com [7]. Como x_0 é válido, por ser a condição inicial, supomos que (1.7) é verdadeira para $n = k$ (hipótese indutiva), ou seja,

$$x_k = a^k x_0 + b \left(\frac{a^k - 1}{a - 1} \right).$$

Verificamos então, para $n = k + 1$.

É fácil ver que da relação de recorrência e da hipótese indutiva, obtemos:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= ax_k + b \\ &= a \left(a^k x_0 + b \left[\frac{a^k - 1}{a - 1} \right] \right) + b \\ &= a^{k+1} x_0 + \frac{ba^{k+1} - ab}{a - 1} + b \\ &= a^{k+1} x_0 + \frac{ba^{k+1} - ab + b(a - 1)}{a - 1} \\ &= a^{k+1} x_0 + \frac{ba^{k+1} - b}{a - 1} \\ &= a^{k+1} x_0 + b \left[\frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \right]. \end{aligned}$$

O que prova a validade para $\forall n \in \mathbb{N}$, portanto (1.7) é solução de (1.6). ■

Se $a = 1$, a solução é dada por:

$$x_n = x_0 + nb. \quad (1.8)$$

1.4 Exemplos de Aplicações das Equações de Diferenças Lineares de Primeira Ordem

Os exemplos a seguir envolvem as equações de diferenças lineares de primeira ordem, cujas soluções são facilmente obtidas por iteração, ou seja, composição de função. Deste modo podem ser facilmente trabalhados no Ensino Médio. Além disso, podem ser explorados

outros conceitos matemáticos nesses exemplos como: progressão geométrica, função exponencial, taxas de crescimento e decrescimento entre outros.

Exemplo 1.4.1 (Datação pelo Carbono-14). Willard Frank Libby foi um pesquisador e professor de química que descobriu o método de datação conhecido por radiocarbono (carbono-14), recebendo por isto o Prêmio Nobel de Química de 1960. As pesquisas de Libby revelaram que a proporção de carbono-14 nas plantas e animais é a mesma que a da atmosfera desde que a planta ou o animal esteja vivo. A partir que a planta ou o animal morre a quantidade de carbono-14 existente nos seus tecidos começa a decrescer gradativamente segundo uma razão r , de tal modo que essa quantidade dividirá pela metade a cada 5700 anos aproximadamente, é o que se chama de meia vida do carbono. Este método permite determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira de forma bastante precisa. [8]

- a) Determine a razão r do decrescimento do carbono-14.
 b) Se a quantidade de carbono-14 observada num osso de um animal é 60% da quantidade inicial de carbono-14, determine a idade desse osso.

Solução.

Seja C_n a quantidade de carbono-14 que o osso de um animal contém no ano n . A quantidade de carbono-14 no ano $n + 1$ é igual a quantidade de carbono-14 no ano n menos a quantidade decrescida no ano n , ou seja,

$$C_{n+1} = C_n - rC_n = (1 - r)C_n.$$

Note que o modelo matemático descrito se refere a uma E.D.L. homogênea.

De (1.5) vem que a solução desta equação é

$$C_n = (1 - r)^n C_0,$$

onde C_0 é a quantidade de carbono-14 que o animal possuía no exato momento que morre.

- a) De acordo com o enunciado, para $n = 5700$ a quantidade de carbono-14 se reduz à metade da quantidade inicial, ou seja,

$$\frac{1}{2} C_0 = (1 - r)^{5700} C_0,$$

logo,

$$r = 1 - \sqrt[5700]{0,5}.$$

b) Usando o fato de que $r = 1 - \sqrt[5700]{0,5}$ e de que foram observados 60% da quantidade inicial de carbono-14, pretende-se determinar o número de anos que o osso possui. Esta situação traduz-se em

$$0,6C_0 = (1 - r)^n C_0,$$

ou seja,

$$\ln(0,6) = n \ln(0,5^{\frac{1}{5700}}),$$

isto é,

$$n = \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,5)} 5700,$$

o que resulta em $n = 4201$ anos. ■

Exemplo 1.4.2. (Juros). Suponha-se que seja feito um depósito de valor V no fim de cada período fixo numa aplicação financeira. Sabendo que a taxa de juros por cada período é r e que no período 0 houve um depósito de valor V_0 qual o valor acumulado ao fim de n períodos?

Solução.

Seja V_n o valor acumulado ao fim de n períodos. O valor acumulado no fim do período $n + 1$ é igual ao valor acumulado no período n com os juros ganho neste período mais o depósito efetuado. Esta situação traduz-se em

$$V_{n+1} = V_n + rV_n + V,$$

ou seja,

$$V_{n+1} = (1 + r)V_n + V.$$

Note que o modelo matemático descrito se refere a uma E.D.L. não homogênea.

De (1.7) vem que a solução desta equação é

$$V_n = (1 + r)^n V_0 + V \frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1},$$

isto é,

$$V_n = (1 + r)^n V_0 + V \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

Por exemplo, supondo R\$ 300,00 o valor inicial de depósito, R\$ 100,00 o valor depositado ao fim de cada período a uma taxa fixa de juros de 5% por período, ao fim de 30 períodos teremos:

$$V_n = 300 \times 1,05^n + 100 \frac{1,05^n - 1}{0,05}$$

$$= 2300 \times 1,05^n + 2000 .$$

Assim, ao fim de 30 períodos o valor acumulado é de R\$11.940,50 aproximadamente. ■

Exemplo 1.4.3 (Amortização-Sistema Price). O sistema price de amortização é o processo de quitação de um capital (empréstimo ou financiamento) por meio de uma sequência de pagamentos periódicos constantes a qual denominaremos de prestações. Tais prestações são formadas por duas parcelas: as quotas de amortizações, que corresponde à devolução do capital ainda devido e os juros sujeito a uma taxa r por período de pagamento correspondentes aos saldos do capital ainda não amortizados. [32]

- Determine o saldo devedor depois de transcorrido n meses do empréstimo.
- Determine o valor da prestação.

Solução.

a) Seja D_n o saldo da dívida após o n -ésimo pagamento da prestação P . O Saldo da dívida após o $(n + 1)$ -ésimo pagamento é igual ao saldo da dívida após o n -ésimo pagamento mais o respectivo juros ocorridos durante o período $n + 1$, menos o pagamento efetuado no período.

Esta situação traduz-se em

$$D_{n+1} = D_n + rD_n - P = (1 + r)D_n - P.$$

De (1.7) vem que a solução desta equação é

$$D_n = (1 + r)^n D_0 - \left[\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} \right] \cdot P,$$

ou seja,

$$D_n = (1 + r)^n D_0 - [(1 + r)^n - 1] \cdot \frac{P}{r},$$

onde D_0 é o saldo da dívida inicial.

b) Como a dívida será quitada num tempo n quando $D_n = 0$, então a prestação a ser paga deve ser igual a:

$$0 = (1 + r)^n \cdot D_0 - [(1 + r)^n - 1] \cdot \frac{P}{r},$$

ou seja,

$$P \cdot [(1 + r)^n - 1] = (1 + r)^n \cdot D_0 \cdot r,$$

isto é,

$$P = \frac{(1 + r)^n \cdot D_0 \cdot r}{(1 + r)^n - 1} = \frac{D_0 \cdot r}{1 - \frac{1}{(1 + r)^n}},$$

logo,

$$P = \frac{D_0 \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}}.$$

Por exemplo, supondo um empréstimo habitacional de R\$ 250.000,00 a uma taxa fixa de juros de 2% ao mês, por um período de quitação correspondente a 20 anos, tem-se que o valor da prestação mensal é de

$$P = \frac{250000 \times 0,02}{1 - (1 + 0,02)^{-240}},$$

ou seja, a prestação é de R\$ 5043,52. ■

1.5 Equação de Diferença Linear Autônoma de Ordem Superior

Uma E.D.L. autônoma homogênea de ordem k é uma equação que depende de k gerações anteriores. A forma geral dessa equação é dada por

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n = 0, \quad (1.9)$$

onde $n \in \mathbb{Z}_0^+$, $x_n \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$ são constantes com $a_k \neq 0$.

A equação (1.9) pode ter várias soluções particulares, conforme veremos no decorrer do capítulo. A representação de cada uma dessas soluções, usa-se a notação $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots$, onde o primeiro índice identifica uma diferente solução e o segundo índice representa a variável discreta independente, que em muitas situações se interpreta como sendo tempo. Assim, representa-se o conjunto $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}$ como sendo um conjunto de k soluções particulares da equação (1.9).

1.6 Solução Geral da Equação de Diferença Linear de Ordem Superior

Segundo (LUENBERGER, 1979), a equação homogênea desempenha um papel central na especificação de soluções para a equação não homogênea. Há duas observações que indicam a importância das equações homogêneas para a teoria das equações lineares. A primeira é que a diferença entre duas soluções da equação não homogênea deve satisfazer a equação homogênea. A segunda diz que se uma solução da equação homogênea é adicionada a uma solução particular da equação não homogênea, o resultado também é solução da equa-

ção não homogênea. Estas duas observações serão justificadas no decorrer do capítulo por meio de teoremas na obtenção da solução geral da equação não homogênea.

Os teoremas e definições a seguir são necessários para a obtenção do conjunto fundamental de soluções e conseqüentemente a solução geral de (1.9).

Teorema 1.6.1 (Existência e Unicidade das Soluções). Seja uma equação de diferença da forma $x_{n+k} + f(n, x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_{n+1}, x_n) = 0$ (1.10), onde f é uma função real arbitrária, definida sobre uma seqüência finita ou infinita de valores inteiros consecutivos de n ($n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$). A equação possui solução única correspondente a cada especificação arbitrária de k condições iniciais $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+k-1}$.

Demonstração.

Suponhamos que os valores $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+k-1}$ estão especificados. Então a equação de diferença linear (1.10), com $n = n_0$, pode ser resolvida de forma única para x_{n_0+k} por simples evolução da função f . Uma vez que x_{n_0+k} é conhecido, a equação de diferença (1.10) com $n = n_0 + 1$ pode ser resolvida para x_{n_0+k+1} e assim, para todos os valores consecutivos de n . Portanto, a equação possui solução única para cada condição inicial especificada. ■

Definição 1.6.2 As soluções $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$ são linearmente independentes se é impossível encontrar uma relação da forma $c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} + \dots + c_k x_{k,n} = 0$, exceto pela configuração $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$. Caso seja possível encontrar a relação acima com as constantes c_1, c_2, \dots, c_k , não todas iguais a zero tal que a relação seja satisfeita, então $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$ são linearmente dependentes.

Exemplo 1.6.3 Considere a relação $3x_{1,n} - 2x_{2,n} + x_{3,n} = 0$, as soluções $x_{1,n} = 1, x_{2,n} = 2^n$ e $x_{3,n} = 2^{n+1} - 3$ para $n \in \mathbb{Z}_0^+$, são linearmente dependentes, pois ao substituí-las na relação acima satisfaz a igualdade. Agora, sejam as soluções $x_{1,n} = 1, x_{2,n} = 2^n$ e $x_{3,n} = 3^n$ é fácil ver que estas são linearmente independentes, pois ao substituí-las na relação acima, somente satisfaz a igualdade se todos os coeficientes forem iguais a zero. ■

Teorema 1.6.4 (Princípio da superposição). Se $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$ são todas soluções linearmente independentes da equação de diferença linear homogênea (1.9), então qualquer combinação linear destas k soluções

$$x_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} + \cdots + c_k x_{k,n},$$

onde c_1, c_2, \dots, c_k são constantes arbitrárias, é também uma solução de (1.9).

Demonstração.

Substituindo $x_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} + \cdots + c_k x_{k,n}$ em (1.9), obtemos:

$$(c_1 x_{1,n+k} + c_2 x_{2,n+k} + \cdots + c_k x_{k,n+k}) + a_1 (c_1 x_{1,n+k-1} + c_2 x_{2,n+k-1} + \cdots + c_k x_{k,n+k-1}) + \cdots + a_k (c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} + \cdots + c_k x_{k,n}) = 0.$$

Desenvolvendo e reagrupando, obtemos:

$$\begin{aligned} & c_1 x_{1,n+k} + c_2 x_{2,n+k} + \cdots + c_k x_{k,n+k} + a_1 c_1 x_{1,n+k-1} + a_1 c_2 x_{2,n+k-1} + \cdots + a_1 c_k x_{k,n+k-1} + \cdots + \\ & a_k c_1 x_{1,n} + a_k c_2 x_{2,n} + \cdots + a_k c_k x_{k,n} = \\ & (c_1 x_{1,n+k} + a_1 c_1 x_{1,n+k-1} + \cdots + a_k c_1 x_{1,n}) + (c_2 x_{2,n+k} + a_1 c_2 x_{2,n+k-1} + \cdots + a_k c_2 x_{2,n}) + \cdots + \\ & (c_k x_{k,n+k} + a_1 c_k x_{k,n+k-1} + \cdots + a_k c_k x_{k,n}) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, qualquer combinação linear destas k soluções $(c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} + \cdots + c_k x_{k,n})$ é solução de (1.9). ■

Definição 1.6.5 Um conjunto fundamental de soluções $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}$ da equação de diferença linear homogênea (1.9) é qualquer conjunto de k soluções de (1.9) linearmente independentes.

Teorema 1.6.6 (Conjunto fundamental de soluções). Se x_n é qualquer solução da equação de diferença linear homogênea (1.9), então x_n pode ser expressa em termos de um conjunto fundamental destas k soluções na forma,

$$x_n = c_1 x_{1,n} + c_2 x_{2,n} + \cdots + c_k x_{k,n},$$

para as constantes c_1, c_2, \dots, c_k que podem ser obtidas pelas condições iniciais.

Demonstração.

Seja y_1, y_2, \dots, y_k as k condições iniciais. Pelo **Teorema 1.6.1** (Existência e Unicidade das Soluções) para cada $y_i, i = 1, \dots, k$ existe uma única solução $x_{i,n}$ da E.D.L. (1.9) com $x_{n_0} = y_i$, para um $n_0 \geq 0$ fixo. Assim, $x_{i,n}, i = 1, \dots, k$ são k soluções da E.D.L. (1.9). Segue pelo **Teorema 1.6.4**, que estas soluções são linearmente independentes. Portanto, tem-se o conjunto fundamental de soluções. ■

Observe que pelo **Teorema 1.6.1**, conclui-se que quando são dadas k condições iniciais, a equação (1.9) tem solução única (solução particular). Se não for dada nenhuma condição, a solução da equação de diferença de ordem k dependerá de k constantes arbitrárias (so-

lução geral). Esta observação nos leva à definição de uma solução geral da equação de diferença linear.

Considerando que trataremos em particular as equações de diferenças lineares autônomas, as definições e teoremas a seguir serão importantes para determinarmos a solução geral dessas equações.

Definição 1.6.7 Se a equação de diferença linear possui os coeficientes constantes, então existe uma sequência geométrica que é uma solução de (1.9), isto é, existe uma solução da forma $x_n = \lambda^n$, onde λ é um número complexo.

Teorema 1.6.8 Uma condição necessária e suficiente para que a sequência geométrica $x_n = \lambda^n$ seja solução de (1.9), é que a constante λ satisfaça a equação característica (1.11).

Demonstração.

(\Rightarrow) Supomos que λ^n seja solução de (1.9), pela substituição de λ^n em (1.9) obtemos:

$$\lambda^{n+k} + a_1\lambda^{n+k-1} + a_2\lambda^{n+k-2} + \dots + a_{k-1}\lambda^{n+1} + a_k\lambda^n = 0.$$

Multiplicando esta equação por λ^{-n} encontramos

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \quad (1.11)$$

O polinômio acima é um polinômio de grau k , de coeficientes reais, chamado de polinômio característico ou equação característica de (1.9) e pelo Teorema Fundamental da Álgebra, tal polinômio pode ser fatorado em k termos de primeiro grau, de modo que o polinômio tenha k raízes no campo complexo, vide [10].

(\Leftarrow) Reciprocamente supomos que $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0$. Multiplicando esta equação por λ^n , obtemos:

$$\lambda^{n+k} + a_1\lambda^{n+k-1} + a_2\lambda^{n+k-2} + \dots + a_{k-1}\lambda^{n+1} + a_k\lambda^n = 0.$$

Se $x_n = \lambda^n$, encontramos que

$$x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \dots + a_{k-1}x_{n+1} + a_kx_n = 0,$$

o que comprova o teorema. ■

Teorema 1.6.9 Se as raízes características $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são todas distintas, então o conjunto $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (1.9).

Demonstração vide [7].

Teorema 1.6.10 Se λ for uma raiz com multiplicidade $k > 1$, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda$, o conjunto $\{\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \dots, n^{k-1}\lambda^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (1.9).

Demonstração vide [7].

A seguir, definiremos a solução geral da E.D.L. homogênea (1.9) nos diferentes casos que dependem se as raízes são: reais e distintas, complexas ou multiplicidade $k > 1$.

Definição 1.6.11 (Raízes Distintas). Se as raízes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são distintas, segue pelo **Teorema 1.6.9** que o conjunto de soluções $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$ é o conjunto fundamental destas k soluções de (1.9). Então pelo **Teorema 1.6.6**, a solução geral de (1.9) pode ser escrita na forma

$$x_n = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n, c_i \in \mathbb{R},$$

onde os c_i 's são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais impostas.

Definição 1.6.12 (Raízes Complexas). Se as raízes λ são complexas, elas ocorrem em pares conjugados, ou seja, $\lambda = a + bi$ e $\bar{\lambda} = a - bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, já que os coeficientes a_1, a_2, \dots, a_k de (1.9) são reais. Assim, os pares de raízes de (1.9) são complexas e distintas do tipo $\lambda_1 = a_1 \pm b_1 i$, $\lambda_2 = a_2 \pm b_2 i$, ..., $\lambda_k = a_k \pm b_k i$. Segue pelo **Teorema 1.6.9** que o conjunto de soluções $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$ é o conjunto fundamental destas k soluções de (1.9). Então pelo **Teorema 1.6.6**, a solução geral de (1.9) pode ser escrita na forma

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n, c_i \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

onde os c_i 's são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais impostas.

Pondo-as λ_i 's na forma trigonométrica, teremos:

$$\lambda_i = \rho[\cos\theta + isen\theta] \text{ e } \bar{\lambda}_i = \rho[\cos\theta - isen\theta],$$

onde

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \theta = \text{arctg}\left(\frac{b}{a}\right).$$

Aplicando a fórmula de Moivre, obtemos:

$$\lambda_i^n = \rho^n[\cos n\theta + isen n\theta] \text{ e } \bar{\lambda}_i^n = \rho^n[\cos n\theta - isen n\theta].$$

Assim, substituindo os λ_i^n 's e $\bar{\lambda}_i^n$'s em (1.12), acrescentando novas constantes e fazendo os cálculos necessários, obtemos:

$$x_n = \rho_1^n [B_1 \cos n\theta_1 + B_2 \text{sen } n\theta_1] + \rho_2^n [B_3 \cos n\theta_2 + B_4 \text{sen } n\theta_2] + \dots + \rho_k^n [B_{(2k-1)} \cos n\theta_k + B_{2k} \text{sen } n\theta_k],$$

onde os B_i' s $\in \mathbb{R}$ são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais impostas.

Definição 1.6.13 (Raízes de Multiplicidade $k > 1$). Se λ for uma raiz com multiplicidade $k > 1$, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda$, segue pelo **Teorema 1.6.10** que o conjunto $\{\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, \dots, n^{k-1}\lambda^n\}$ é o conjunto fundamental destas k soluções de (1.9). Então pelo **Teorema 1.6.6**, a solução geral de (1.9) pode ser escrita na forma

$$x_n = c_1\lambda^n + c_2n\lambda^n + c_3n^2\lambda^n + \dots + c_kn^{k-1}\lambda^n, c_i \in \mathbb{R},$$

ou ainda,

$$x_n = \sum_{i=1}^k c_i\lambda^n(1 + n + n^2 + \dots + n^{k-1}), c_i \in \mathbb{R},$$

onde os c_i 's são constantes a serem determinadas a partir das condições iniciais impostas.

Agora, definiremos a solução geral da E.D.L. autônoma não homogênea.

A forma geral dessa equação é dada por

$$x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + a_2x_{n+k-2} + \dots + a_{k-1}x_{n+1} + a_kx_n = b, \quad (1.13)$$

onde $n \in \mathbb{Z}_0^+$, $x_n \in \mathbb{R}$, a_i e $b \in \mathbb{R}$ são constantes com a_k e $b \neq 0$.

Os teoremas a seguir são necessários para a obtenção da solução geral.

Teorema 1.6.14 Se $x_{1,n}$ e $x_{2,n}$ são soluções de (1.13), então $x_n = x_{1,n} - x_{2,n}$ é uma solução da equação correspondente

$$x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + a_2x_{n+k-2} + \dots + a_{k-1}x_{n+1} + a_kx_n = 0. \quad (1.14)$$

Demonstração.

Por hipótese temos:

$$x_{1,n+k} + a_1x_{1,n+k-1} + \dots + a_{k-1}x_{1,n+1} + a_kx_{1,n} = b$$

$$x_{2,n+k} + a_1x_{2,n+k-1} + \dots + a_{k-1}x_{2,n+1} + a_kx_{2,n} = b$$

Subtraindo essas duas relações, obtemos:

$$(x_{1,n+k} - x_{2,n+k}) + a_1(x_{1,n+k-1} - x_{2,n+k-1}) + \dots + a_{k-1}(x_{1,n+1} - x_{2,n+1}) + a_k(x_{1,n} - x_{2,n}) = 0,$$

ou seja, $x_{1,n} - x_{2,n}$ é uma solução de (1.14). ■

De acordo com (ELAYDI, 2005), geralmente a solução geral da equação homogênea (1.14) é considerada como a solução complementar da equação não homogênea (1.13) e vai

ser indicada por $x_{c,n}$. Uma solução da equação não homogênea (1.13) é chamada de solução particular e será denotada por $x_{p,n}$. O próximo resultado nos dá um algoritmo para gerar todas as soluções da equação não homogênea (1.13).

Teorema 1.6.15 Qualquer solução x_n de (1.13) pode ser escrita como

$$x_n = \sum_{i=1}^k c_i x_{i,n} + x_{p,n},$$

onde $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (1.14).

Demonstração.

Observa-se que de acordo com o **Teorema 1.6.14**, $x_n - x_{p,n}$ é uma solução da equação homogênea (1.14). Assim, $x_n - x_{p,n} = \sum_{i=1}^k c_i x_{i,n}$, para algumas constantes c_i .

Portanto, o teorema anterior leva à definição das soluções gerais da equação não homogênea (1.13) como $x_n = x_{c,n} + x_{p,n}$. ■

1.7 Sistemas de Equações de Diferenças Lineares Autônomas

Até agora nos preocupamos com equações de diferenças lineares, ou seja, equações com apenas uma variável independente e uma variável dependente. No entanto, existem muitas situações-problema nos campos da Economia, Ecologia, Física, Demografia e outros que envolvem mais de uma variável dependente. Em decorrência da natureza destas situações-problema, sistemas de equações de diferenças lineares **S.E.D.L.** surgem espontaneamente na sua modelagem.

Segundo (LUENBERGER, 1979, p.90), “a base para esta abordagem é a noção de um sistema de equações de primeira ordem, em tempo discreto.” Além disso, o sistema de primeira ordem tem importância especial, pois qualquer equação ou sistema de equações de ordem k podem ser facilmente convertidos em equivalente sistema de equações de primeira ordem.

Um sistema com k equações de diferenças lineares autônomas de primeira ordem é representado na forma

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} + \cdots + a_{1k}x_{k,n} + b_1 \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} + \cdots + a_{2k}x_{k,n} + b_2 \\ \vdots \\ x_{k,n+1} = a_{k1}x_{1,n} + a_{k2}x_{2,n} + \cdots + a_{kk}x_{k,n} + b_k \end{cases}, \quad (1.15)$$

Escrevendo este sistema usando a notação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \\ \vdots \\ x_{k,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_0^+,$$

ou ainda,

$$x_{n+1} = Ax_n + B, \quad (1.16)$$

onde $n \in \mathbb{Z}_0^+$, os vetores $x_n \in \mathbb{R}^k$, $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de dimensão $k \times k$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, k$ e $B \in \mathbb{R}^k$ é um vetor constante.

Se $B = 0$ o sistema é homogêneo cuja representação é da forma

$$x_{n+1} = Ax_n. \quad (1.17)$$

Conforme observamos, a escrita matricial enfatiza a semelhança entre sistemas de equações e uma única equação.

Dizemos que um vetor x_n é solução para a equação (1.16) se suas componentes satisfazem o sistema de equações (1.15).

De acordo com (BOYCE e DIPRIMA, 2006), a teoria geral para sistemas de k equações lineares de primeira ordem é bastante semelhante à teoria para uma única equação linear de ordem k e que os principais conceitos sobre a estrutura desses sistemas estão enunciados nos **Teoremas 1.7.1** e **1.7.2**. Estes são bastante semelhantes aos teoremas correspondentes **1.6.4** e **1.6.6** da seção anterior.

Teorema 1.7.1 (Princípio da superposição). Se os vetores $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$ são soluções linearmente independentes do sistema (1.17), então qualquer combinação linear destas k soluções

$$x_n = c_1x_{1,n} + c_2x_{2,n} + \cdots + c_kx_{k,n},$$

também é solução, onde c_1, c_2, \dots, c_k são constantes arbitrárias.

Demonstração vide [7].

Teorema 1.7.2 (Conjunto Fundamental). Existe um conjunto fundamental de soluções do sistema (1.17) de dimensão k .

Demonstração.

Seja v_1, v_2, \dots, v_k os k vetores unitários de \mathbb{R}^k . Pelo **Teorema 1.6.1** (Existência e Unicidade das Soluções), para cada v_i , $i = 1, \dots, k$ existe uma única solução $x_{i,n}$ do sistema (1.17) com $x_{n_0} = v_i$, para $n_0 \geq 0$ fixo. Assim, $x_{i,n}$, $i = 1, \dots, k$ são k vetores soluções do sistema (1.17). Segue pelo **Teorema 1.7.1**, que estas soluções são linearmente independentes. Portanto, tem-se o conjunto fundamental de soluções de dimensão k . ■

Para aprofundamento da teoria sobre S.E.D.L. consulte as referências [4], [7] e [17].

Além desses teoremas vistos acima, ao trabalharmos com S.E.D.L. necessitaremos rever alguns conceitos básicos sobre a álgebra linear necessário para a definição da solução geral. Para efeito de ilustração ao representarmos o S.E.D.L. por uma matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ precisaremos saber calcular A^n , se tal matriz é diagonalizável, o problema se resume em calcular potências de uma matriz diagonal, que é exatamente trivial, já que basta elevar a essa potência cada elemento da diagonal. Mas e quando a matriz não é diagonalizável? Será necessário realizar uma grande quantidade de operações

$$A^n = \overbrace{AAA \dots A}^{n-1 \text{ operações}},$$

tornando-se extremamente trabalhoso.

Diante desta situação, primeiramente será necessário revisarmos alguns conceitos sobre autovalores e autovetores de uma matriz, condição para sua existência e como determiná-los. Introduziremos o conceito de diagonalização de matriz, algumas condições para que a matriz seja diagonalizável e por fim, como calcular as potências de uma matriz diagonalizável.

Assim, os teoremas e definições da álgebra linear necessário para este estudo encontram-se no decorrer do capítulo ou no apêndice, onde fizemos uma breve revisão sobre a teoria relativa à álgebra linear.

Definição 1.7.3 (Autovetores e Autovalores). Se $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, então um vetor não nulo \mathbf{v} em \mathbb{R}^k é chamado um autovetor de A se $A\mathbf{v}$ é um múltiplo escalar de \mathbf{v} , ou seja,

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

para algum escalar λ . O escalar λ é chamado um autovalor de A se existe solução não trivial \mathbf{v} para $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, este \mathbf{v} é um autovetor associado a λ .

Observe que pode escrever $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ como $A\mathbf{v} = (\lambda I)\mathbf{v}$, ou ainda $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ (1.18), onde I é uma matriz identidade $k \times k$.

Se $(A - \lambda I)$ for inversível (ou seja, se seu determinante for diferente de zero), o sistema (1.18) terá exatamente uma solução, com $\mathbf{v} = 0$, solução trivial.

Como queremos $\mathbf{v} \neq 0$, estamos procurando o valor de λ para os quais

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

o que resulta em um polinômio

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \quad (1.19)$$

A equação (1.19) é chamada de polinômio característico ou equação característica de A , cujas raízes λ são chamadas de autovalores de A .

Para encontrar os autovetores, basta substituir o valor do autovalor no sistema (1.18) e encontrar o autovetor. O autovalor será, então, associado ao autovetor encontrado.

1.8 Solução Geral de Sistemas de Equações de Diferenças Lineares

De acordo com [29] consideramos o S.E.D.L. homogêneo

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad (1.20)$$

onde $n \in \mathbb{Z}_0^+$, os vetores $x_n \in \mathbb{R}^k$, $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de dimensão $k \times k$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, k$.

Dado uma condição inicial o vetor constante $x_0 \in \mathbb{R}^k$, por iteração obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 \\ x_2 &= Ax_1 = A^2x_0 \\ x_3 &= Ax_2 = A^3x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= A^n x_0, \end{aligned} \quad (1.21)$$

que é a solução geral de (1.20).

Por indução, demonstramos a validade de (1.21) de acordo com [7]. Como x_0 é válido, por ser condição inicial, supomos que (1.21) é verdadeira para $n = k$ (hipótese indutiva), ou seja,

$$x_k = A^k x_0.$$

Verifiquemos então, para $n = k + 1$.

É fácil ver que da relação de recorrência e da hipótese indutiva, obtemos:

$$x_{k+1} = Ax_k = A \cdot A^k x_0 = A^{k+1} x_0,$$

ou seja,

$$x_{k+1} = A^{k+1} x_0,$$

o que prova a validade para $\forall n \in \mathbb{N}$, portanto (1.21) é solução de (1.20). ■

Consideramos agora, o S.E.D.L. não homogêneo

$$x_{n+1} = Ax_n + B, \quad B \neq 0, \quad (1.22)$$

onde $n \in \mathbb{Z}_0^+$, os vetores $x_n \in \mathbb{R}^k$, $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de dimensão $k \times k$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, k$ e $B \in \mathbb{R}^k$ é um vetor constante.

Dado uma condição inicial o vetor constante $x_0 \in \mathbb{R}^k$. Por iteração, obtemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 + B \\ x_2 &= Ax_1 + B = A^2 x_0 + AB \\ x_3 &= Ax_2 + B = A^3 x_0 + A^2 B + AB + B \\ &\vdots \\ x_n &= A^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^i B. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Os teoremas a seguir mostram a validade desta fórmula de acordo com [7].

Teorema 1.8.1 Qualquer solução x_n de (1.22) pode ser escrita na forma $x_n = A^n x_0 + x_{p,n}$, para uma escolha apropriada do vetor constante x_0 e uma solução particular $x_{p,n}$.

Demonstração.

Seja x_n uma solução de (1.22) e $x_{p,n}$ uma solução particular de (1.22).

Se $y_n = x_n - x_{p,n}$, então

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - x_{p,n+1} \\ &= Ax_n - Ax_{p,n} \\ &= A(x_n - x_{p,n}) \\ &= Ay_n \end{aligned}$$

Assim, y_n é uma solução do sistema homogêneo (1.20).

Logo,

$$y_n = A^n y_0,$$

isto é,

$$x_n - x_{p,n} = A^n x_0,$$

portanto,

$$x_n = A^n x_0 + x_{p,n},$$

concluindo a prova do teorema. ■

Teorema 1.8.2 A solução particular do sistema (1.22) pode ser escrita na forma

$$x_{p,n} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \quad \text{com } x_{p,0} = 0.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} x_{p,n+1} &= \sum_{i=0}^n A^i B \\ &= A^0 B + A^1 B \dots + A^{n-1} B + A^n B \\ &= A^0 B + \sum_{i=1}^n A^i B \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A^{i+1} B + B \\ &= A \left[\sum_{i=0}^{n-1} A^i B \right] + B \\ &= A[x_{p,n}] + B. \end{aligned}$$

Logo, $x_{p,n}$ é solução de (1.22) com $x_{p,0} = 0$. Portanto, a solução geral de (1.22) pode ser escrita na forma

$$x_n = A^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \quad \text{com } x_{p,0} = 0. \quad \blacksquare$$

A seguir, definiremos a solução geral dos S.E.D.L. nos diferentes casos que dependem se os autovalores são: reais e distintos, complexos ou multiplicidade $k > 1$.

Definição 1.8.3 (Autovalores Reais Distintos). Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ possui k autovalores reais e distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, sejam v_1, v_2, \dots, v_k os k autovetores associados respectivamente aos autovalores, então pelo **Teorema A.1**, estes autovetores são linearmente independentes e pelo **Teorema A.2** a matriz A é diagonalizável. Assim, a matriz A pode ser escrita como

$$A = PDP^{-1},$$

onde

$$P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k] \text{ e } D = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_k].$$

Pelo **Teorema A.4**, temos

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Assim, a solução geral de (1.20) pode ser escrita como:

$$x_n = A^n x_0 = PD^nP^{-1}x_0.$$

Podemos ainda explicitar a fórmula x_n , ou seja,

$$x_n = (PD^nP^{-1})x_0 = PD^n(P^{-1}x_0).$$

Denotando a coluna $P^{-1}x_0$ que apareceu aqui como segue

$$C = P^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}.$$

Pela multiplicação matricial temos:

$$\begin{aligned} x_n &= PD^n(P^{-1}x_0) \\ &= [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_k] \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \\ &= [\lambda_1^n v_1 + \lambda_2^n v_2 + \dots + \lambda_k^n v_k] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \\ &= c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2 + \dots + c_k \lambda_k^n v_k. \end{aligned}$$

Em particular, os coeficientes c_i para o valor inicial x_0 são tais que

$$x_0 = c_1 \lambda_1^0 v_1 + c_2 \lambda_2^0 v_2 + \dots + c_k \lambda_k^0 v_k = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k,$$

ou, equivalente, $PC = x_0$, ou seja, $C = P^{-1}x_0$. ■

Definição 1.8.4 (Autovalores Complexos). Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ possui k autovalores complexos e distintos, então existem k autovetores linearmente independentes o que implica uma matriz A diagonalizável. Sendo a matriz A real, os autovalores complexos surgem em pares de autovalores conjugados, isto é, $\lambda = a + bi$ e $\bar{\lambda} = a - bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, formam um par de autovalores conjugados. Pela **Proposição A.6**, se $v = v_R + iv_I$ é um autovetor de A associado ao autovalor complexo $\lambda = a + bi$, ou seja, $Av = \lambda v$, então $\bar{v} = v_R - iv_I$ também é um autovetor de A , mas associado a $\bar{\lambda} = a - bi$. Assim, a solução complexa associada ao par (λ, v) é dada por

$$x_n = A^n x_0.$$

Pelo **Teorema A.2** temos

$$A = PDP^{-1} \text{ e}$$

pela **Proposição A.6**

$$P = [v_1 \quad \bar{v}_1 \quad \cdots \quad v_k \quad \bar{v}_k] \text{ e } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{\lambda}_k \end{bmatrix}.$$

Segue pelo **Teorema A.4** que

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

Assim, a solução geral de (1.20) pode ser escrita como:

$$x_n = A^n x_0 = PD^nP^{-1}x_0. \quad \blacksquare$$

Definição 1.8.5 (Autovalores de Multiplicidade $K > 1$). Se λ for um autovalor da matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ com multiplicidade $k > 1$, ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda$, estes autovalores repetidos podem em alguns casos gerar menos do que k autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor. Isto significa que uma combinação linear deles não pode representar todo o espaço de solução, o que implica não encontrarmos uma matriz P que diagonaliza a matriz A . Então, pela **Definição A9**, podemos determinar autovetores generalizados w_1, w_2, \dots, w_{k-1} associados ao autovalor λ , os quais são linearmente independentes pelo **Teorema A.10** tal que uma combinação entre os autovetores $v, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$ gere uma base para o \mathbb{R}^k . Com isso é possível determinarmos a matriz P que diagonaliza a matriz A , sendo a matriz diagonal de A uma matriz J na forma de Jordan conforme mostra o **Teorema A11**. Assim, a matriz A pode ser escrita como

$$A = PJP^{-1},$$

sendo

$$P = [v \quad w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_{k-1}] \text{ e } J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & J_k \end{bmatrix},$$

onde cada bloco J_i tem uma mesma entrada λ_i em toda diagonal, e uns acima dela, sendo todas as outras entradas iguais a zero, isto é,

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Segue que pelo **Teorema A.4** que

$$A^n = PJ^nP^{-1}.$$

Assim, a solução geral de (1.20) pode ser escrita como:

$$x_n = A^n x_0 = PJ^nP^{-1}x_0. \quad \blacksquare$$

1.9 Representação de Equações de Ordem Superior sob a forma de Sistemas

Segundo (LAY, 1999), uma abordagem moderna do estudo de uma equação de diferença linear de ordem k é substituir a equação por um sistema equivalente de equações de diferenças lineares de primeira ordem, escrito como $x_{n+1} = Ax_n + B$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, onde os vetores x_n pertencem ao \mathbb{R}^k , $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ e $B \in \mathbb{R}^k$ são vetores constantes.

A definição a seguir justifica a escrita de uma E.D.L. na forma matricial.

Definição 1.9.1 Uma equação de diferenças linear de ordem k ,

$$x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + a_2x_{n+k-2} + \dots + a_{k-1}x_{n+1} + a_kx_n = b$$

pode ser transformada num sistema linear de primeira ordem com k equações de primeira ordem e k variáveis, em seguida escrita na forma matricial.

De acordo com [7] e [18] para construir uma representação do sistema adequado, define-se k variáveis de estado como k valores sucessivos de x_n . Usa-se a notação $z_{1,n}, z_{2,n}, \dots$, onde o primeiro índice identifica uma diferente variável de estado e o segundo índice representa a variável discreta independente para escrever as equações auxiliares de redução de ordem.

Em particular, façamos:

$$\begin{aligned} z_{1,n} &= x_n \\ z_{2,n} &= x_{n+1} = z_{1,n+1} \\ z_{3,n} &= x_{n+2} = z_{2,n+1} \\ &\vdots \\ z_{k-1,n} &= x_{n+k-2} = z_{k-2,n+1} \end{aligned}$$

$$z_{k,n} = x_{n+k-1} = z_{k-1,n+1}.$$

Com estas definições, segue-se imediatamente que:

$$\begin{aligned} z_{1,n+1} &= z_{2,n} \\ z_{2,n+1} &= z_{3,n} \\ &\vdots \\ z_{k-2,n+1} &= z_{k-1,n} \\ z_{k-1,n+1} &= z_{k,n}. \end{aligned}$$

O valor de $z_{k,n+1}$, pode ser encontrada a partir da equação original fazendo

$$z_{k,n+1} = -a_k z_{1,n} - a_{k-1} z_{2,n} - \dots - a_2 z_{k-1,n} - a_1 z_{k,n} + b.$$

Definindo o vetor de estado z_n , que tem componentes $z_{1,n}, z_{2,n}, \dots, z_{k,n}$ acima, produz o sistema linear

$$\begin{cases} z_{1,n+1} = 0z_{1,n} + z_{2,n} \\ z_{2,n+1} = 0z_{1,n} + 0z_{2,n} + z_{3,n} \\ z_{3,n+1} = 0z_{1,n} + 0z_{2,n} + 0z_{3,n} + z_{4,n} \\ \vdots \\ z_{k,n+1} = -a_k z_{1,n} - a_{k-1} z_{2,n} - \dots - a_2 z_{k-1,n} - a_1 z_{k,n} + b \end{cases},$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$z_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} z_n + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} b,$$

isto é,

$$z_{n+1} = Az_n + B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, z_n = \begin{bmatrix} z_{1,n} \\ z_{2,n} \\ z_{3,n} \\ \vdots \\ z_{k,n} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b \end{bmatrix} \text{ e } z_0 = \begin{bmatrix} z_{1,0} \\ z_{2,0} \\ z_{3,0} \\ \vdots \\ z_{k,0} \end{bmatrix},$$

para $n \in \mathbb{Z}_0^+$, onde os vetores $z_n \in \mathbb{R}^k$, $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de dimensão $k \times k$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, k$, $B \in \mathbb{R}^k$ é um vetor constante e $z_0 \in \mathbb{R}^k$ é um vetor constante que representam as condições iniciais impostas.

Se $b = 0$ na equação inicial, então temos um sistema homogêneo

$$z_{n+1} = Az_n.$$

Neste trabalho o método de resoluções das E.D.L. de ordem superior, será feita com base na teoria de S.E.D.L.

1.10 Exemplos e Aplicações das Equações de Diferenças de Ordem Superior e de Sistemas de Equações de Diferenças Lineares

Exemplo 1.10.1 (Fibonacci). Leonardo de Pisa foi um matemático italiano que ficou conhecido como Fibonacci por ser filho de Bonacci. Em 1202, escreveu um livro denominado Liber Abacci, nele contém uma grande quantidade de assuntos relacionados com a Aritmética e Álgebra da época e realizou um papel importante no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes.

Um dos problemas encontrados neste livro é o da sequência de Fibonacci: 1,1,2, 3,5,8,... . Esta sequência foi utilizada para descrever o crescimento de uma população de coelhos. Os números descrevem o número de casais em uma população de coelhos depois de n meses se for suposto que:

- no primeiro mês nasce apenas um casal;
- casais amadurecem sexualmente (e reproduzem-se) apenas após o segundo mês de vida;
- não há problemas genéticos no cruzamento consanguíneo;
- todos os meses, cada casal fértil dá à luz um novo casal;
- os coelhos nunca morrem. [9]

a) Escreva um modelo matemático que descreve a sequência de Fibonacci.

b) O modelo matemático encontrado em (a), permite encontrar um a um os termos seguintes. E se quisermos um termo qualquer, como por exemplo, x_{50} ? Observe que seria uma tarefa extremamente trabalhosa. Para isso, determine a solução geral que permita encontrar qualquer termo da sequência sem precisar calcular os termos antecedentes.

Solução.

a) Usando o fato de que o casal de coelhos recém-nascido torna-se fértil após dois meses de vida, dividiremos os casais de coelhos em três classes: os recém-nascidos, adultos após um mês de vida e adultos férteis após dois meses de vida.

Denotando o número de casais de coelhos após cada mês n por x_n , temos que o número de casais após o mês x_{n+2} será igual à soma do número de casais adultos após o mês x_{n+1} ,

com o número de casais recém-nascidos no mês anterior x_n , gerados pelos casais que tornaram-se férteis após o mês $n + 2$. Esta situação traduz-se em

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n \geq 0 \text{ com } x_0 = x_1 = 1.$$

b) O modelo matemático encontrado em (a) é uma equação de diferença linear de segunda ordem.

Pela **Definição 1.9.1**, podemos usar as equações auxiliares $x_{n+1} = y_n$ e $y_{n+1} = x_{n+2}$, para escrever o sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}'$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$x_{n+1} = Ax_n,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela **Definição 1.7.3** (Autovetores e Autovalores), os autovalores de A são dados por

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

onde os autovalores são $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Como A possui dois autovalores distintos, pelo **Corolário A.3**, A é diagonalizável. Os autovetores v_1, v_2 associados aos autovalores λ_1, λ_2 respectivamente são dados por

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} v = 0.$$

Assim, $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

A matriz P que diagonaliza A é dada por

$$P = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ cuja inversa é } P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

sendo D a matriz diagonal de A ,

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

Pelo **Teorema A.2** (Diagonalização), podemos escrever:

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Segue pelo **Teorema A.4** (Potência de matriz), que

$$A^n = P D^n P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

A solução geral é dada por

$$x_n = A^n x_0,$$

isto é,

$$x_n = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução da equação inicial é a primeira componente de x_n :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right].$$

Portanto, para encontrarmos o valor do termo x_{50} , façamos:

$$x_{50} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{51} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{51} \right] = 20.365.011.070.$$

Uma observação importante é que o número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro, que é frequentemente representado por ϕ , logo $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi} = -\phi^{-1}$.

Assim podemos reescrever x_n da seguinte forma:

$$x_n = \frac{\phi^{n+1} - [-\phi^{-1}]^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n+1} + \phi^{-(n+1)}}{\sqrt{5}}.$$

Outro fato interessante é que à medida que n cresce o quociente

$$a_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \text{ com } n > 1,$$

converge para o valor numérico de ϕ , isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\emptyset^{n+1} + \emptyset^{-(n+1)}}{\sqrt{5}}}{\frac{\emptyset^n + \emptyset^{-n}}{\sqrt{5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\emptyset^{n+1} + \emptyset^{-(n+1)}}{\emptyset^n + \emptyset^{-n}} = \emptyset. \quad \blacksquare$$

Exemplo 1.10.2 Determinar a solução geral da equação de diferença $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$, com condições iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 9$.

Solução.

Usando as equações auxiliares $x_{n+1} = y_n$ e $y_{n+1} = x_{n+2}$, podemos escrever o sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -9x_n + 6y_n \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$x_{n+1} = Ax_n,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A , são dados por:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -9 & 6 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Logo, $\lambda = 3$ é o autovalor com multiplicidade 2.

O autovetor v associado ao autovalor $\lambda = 3$ é dado por:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -9 & 6 - \lambda \end{pmatrix} v = 0.$$

Assim, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Como o autovalor $\lambda = 3$ gerou apenas um autovetor e a matriz A tem dimensão 2, segue que não é possível escrever a matriz P que diagonaliza a matriz A . Então, pela **Definição A9** e pelo **Teorema A.10**, podemos determinar um autovetor generalizado linearmente independente. Assim, determinamos a matriz P que diagonaliza a matriz A , sendo a matriz diagonal de A uma matriz J na forma de Jordan.

Logo, o autovetor generalizado w para o autovetor $\lambda = 3$ é dado por:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 9 & 6 - \lambda \end{pmatrix} w = v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

onde $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A matriz P que diagonaliza A é dada por:

$$P = [v \quad w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ cuja inversa é } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo J a matriz diagonal de A ,

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A solução geral é dada por

$$x_n = A^n x_0,$$

isto é,

$$x_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução da equação inicial é dada pela primeira componente de x_n :

$$x_n = 3^n + 6n3^{n-1}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 1.10.3 Determinar a solução geral da equação de diferença $x_{n+2} = -2x_{n+1} - 2x_n$, com condições iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 4$.

Solução.

Usando as equações auxiliares $x_{n+1} = y_n$ e $y_{n+1} = x_{n+2}$, podemos escrever o sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -2x_n - 2y_n \end{cases},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$x_{n+1} = Ax_n,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A , são dados por:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = -1 + i$ e $\bar{\lambda}_1 = -1 - i$.

Como A possui dois autovalores distintos, pelo **Corolário A.3**, A é diagonalizável.

Os autovetores v_1, \bar{v}_1 associados aos autovalores $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$ respectivamente, são dados por

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -2 - \lambda \end{pmatrix} v = 0,$$

onde pela **Proposição A.6**, temos que os autovetores são

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + i \end{pmatrix} \text{ e } \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i \end{pmatrix}.$$

A matriz P que diagonaliza A é dada por

$$P = [v_1 \ \bar{v}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 + i & -1 - i \end{bmatrix}, \text{ cuja inversa é } P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix},$$

sendo D a matriz diagonal de A ,

$$D = \begin{bmatrix} -1 + i & 0 \\ 0 & -1 - i \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 + i & -1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 + i & 0 \\ 0 & -1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}.$$

A solução geral é dada por

$$x_n = A^n x_0,$$

isto é,

$$x_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 + i & -1 - i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1 + i)^n & 0 \\ 0 & (-1 - i)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

onde a solução da equação inicial é dada pela primeira componente de x_n :

$$x_n = \frac{(-1 + i)^n}{2} + \frac{(-1 - i)^n}{2} - \frac{5(-1 + i)^n i}{2} + \frac{5(-1 - i)^n i}{2} \quad (*)$$

Aplicando a fórmula de Moivre,

$$(a + bi)^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \text{ e } (a - bi)^n = \rho^n (\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta)$$

onde

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e } \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{b} \right),$$

para

$$(-1 + i)^n \text{ e } (-1 - i)^n \text{ de } (*), \text{ obtemos:}$$

$$\rho = \sqrt{2},$$

$$\theta = \arctg(-1) = \frac{3\pi}{4},$$

$$(-1 + i)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos n \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} n \frac{3\pi}{4} \right) \text{ e } (-1 - i)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos n \frac{3\pi}{4} - i \operatorname{sen} n \frac{3\pi}{4} \right).$$

Substituindo estes resultados em (*), obtemos:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\sqrt{2}^n}{2} \left(\cos n \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} n \frac{3\pi}{4} \right) + \frac{\sqrt{2}^n}{2} \left(\cos n \frac{3\pi}{4} - i \operatorname{sen} n \frac{3\pi}{4} \right) - \\ &\quad - 5 \frac{\sqrt{2}^n}{2} \left(\cos n \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} n \frac{3\pi}{4} \right) i + 5 \frac{\sqrt{2}^n}{2} \left(\cos n \frac{3\pi}{4} - i \operatorname{sen} n \frac{3\pi}{4} \right) i. \end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação inicial é

$$x_n = \sqrt{2}^n \left(\cos n \frac{3\pi}{4} + 5 \operatorname{sen} n \frac{3\pi}{4} \right). \quad \blacksquare$$

Exemplo 1.10.4 Determine a solução geral da equação de diferença não homogênea

$$x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n + 5, \text{ com condições iniciais } x_0 = -1, x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 1.$$

Solução.

Usando as equações auxiliares $x_{n+1} = y_n$, $y_{n+1} = x_{n+2} = z_n$ e $z_{n+1} = y_{n+2} = x_{n+3}$, podemos escrever o sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = -2x_n + y_n + 2z_n + 5 \end{cases},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$x_{n+1} = Ax_n + B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de A , são dados por:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.

Como A possui 3 autovalores distintos, **Corolário A.3**, A é diagonalizável.

Os autovetores v_1, v_2 e v_3 associados aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 respectivamente são dados por

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} v = 0.$$

Assim, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

A matriz P que diagonaliza A é dada por

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \text{ cuja inversa é } P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

sendo D a matriz diagonal de A ,

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pelo **Teorema A.4**, temos:

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{3} + 1 - \frac{2^n}{3} & -\frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} & \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{2} + \frac{2^n}{3} \\ -\frac{(-1)^n}{3} + 1 - 2\frac{2^n}{3} & \frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{2} + 2\frac{2^n}{3} \\ \frac{(-1)^n}{3} + 1 - 4\frac{2^n}{3} & -\frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} & \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{2} + 4\frac{2^n}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A solução geral é dada por

$$x_n = A^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^i B,$$

isto é,

$$x_n = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n}{3} + 1 - \frac{2^n}{3} & -\frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} & \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{2} + \frac{2^n}{3} \\ -\frac{(-1)^n}{3} + 1 - 2\frac{2^n}{3} & \frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{2} + 2\frac{2^n}{3} \\ \frac{(-1)^n}{3} + 1 - 4\frac{2^n}{3} & -\frac{(-1)^n}{2} + \frac{1}{2} & \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{2} + 4\frac{2^n}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} \frac{(-1)^i}{3} + 1 - \frac{2^i}{3} & -\frac{(-1)^i}{2} + \frac{1}{2} & \frac{(-1)^i}{6} - \frac{1}{2} + \frac{2^i}{3} \\ -\frac{(-1)^i}{3} + 1 - 2\frac{2^i}{3} & \frac{(-1)^i}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{(-1)^i}{6} - \frac{1}{2} + 2\frac{2^i}{3} \\ \frac{(-1)^i}{3} + 1 - 4\frac{2^i}{3} & -\frac{(-1)^i}{2} + \frac{1}{2} & \frac{(-1)^i}{6} - \frac{1}{2} + 4\frac{2^i}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} -7\frac{(-1)^n}{12} + 28\frac{2^n}{12} - 30\frac{n}{12} - \frac{33}{12} \\ 7\frac{(-1)^n}{12} + 56\frac{2^n}{12} - 30\frac{n}{12} - \frac{63}{12} \\ 3\frac{(-1)^n}{12} + 112\frac{2^n}{12} - 30\frac{n}{12} - \frac{103}{12} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação inicial é dada pela primeira componente de x_n :

$$x_n = -7\frac{(-1)^n}{12} + 28\frac{2^n}{12} - 30\frac{n}{12} - \frac{33}{12}. \quad \blacksquare$$

Observe que o método de resolução usado nos exemplos de equações de diferenças de ordem superior envolve alguns conceitos básicos de álgebra linear, conteúdo não abordado no Ensino Médio. Assim, como sugestões para o trabalho dessas equações no Ensino Médio, podem-se usar as definições **1.6.11**, **1.6.12** e **1.6.13**, juntamente com os resultados dos teoremas **1.6.14** e **1.6.15** para determinar as soluções dessas equações.

Para efeito de exemplificação, revisitaremos o **Exemplo 1.10.1** (Fibonacci), onde encontraremos a solução geral por meio das sugestões acima.

Exemplo 1.10.1 (Revisitado) Fibonacci. Na alternativa (b) deste exemplo pede-se que determine a solução geral da equação de diferenças $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ com condições iniciais $x_0 = x_1 = 1$.

Solução.

A equação característica de $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ é $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, cujas raízes são dadas por:

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Pela **Definição 1.6.11** a solução geral é dada por

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n.$$

Usando as condições iniciais $x_0 = x_1 = 1$, as constantes c_1 e c_2 podem ser obtidas resolvendo-se o sistema,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = 1 \end{cases}$$

Logo, $c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ e $c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.

Portanto, a solução geral é

$$x_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

isto é,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]. \quad \blacksquare$$

Observe que, caso seja uma equação de diferença linear não homogênea autônoma, o termo não homogêneo é uma constante, sendo assim, uma solução particular neste caso será do tipo $x_n = k_n$. Logo, para determinarmos o valor de k , basta substituir $x_n = k_n$ na equação e fazer os cálculos necessários, conforme [18].

Exemplo 1.10.5 (Crescimento Populacional). Uma população de pássaros foi descrita computando-se o perfil da população de fêmeas $x_n = \begin{bmatrix} a_n \\ j_n \end{bmatrix}$ da espécie, onde a_n e j_n representa o número de fêmeas adultas e jovens presentes n anos após os valores iniciais a_0 e j_0 serem observados. O modelo supõe que esses números estão relacionados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}j_n. \\ j_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

Isso significa que $\frac{1}{2}$ dos adultos e $\frac{1}{4}$ dos jovens vivos no ano n sobrevivem para o ano $n+1$ e que cada fêmea produz 2 jovens por ano em média. [24]

Supondo que os valores iniciais foram $a_0 = 100$ fêmeas adultas e $j_0 = 40$ fêmeas jovens, determine:

- A solução geral do sistema.
- A população de fêmeas adultas e de jovens após 10 anos.

Solução.

O sistema pode ser representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são,

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Os autovetores associados são $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Por conveniência, podemos utilizar múltiplos $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente.

A matriz diagonalizadora é $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, cuja inversa é $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Isso nos dá $A = PDP^{-1}$ e para cada $n \geq 0$, podemos calcular A^n explicitamente:

$$A^n = P D^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 + 2 \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 8 - 8 \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 2 + 4 \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ j_n \end{bmatrix} = x_n = A^n x_0 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 + 2 \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 8 - 8 \left(\frac{-1}{2}\right)^n & 2 + 4 \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 440 + 160 \left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ 880 - 640 \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$a_n = \frac{220}{3} + \frac{80}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \quad \text{e} \quad j_n = \frac{440}{3} - \frac{320}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

b) Para $n = 10$, temos:

$$a_{10} = \frac{220}{3} + \frac{80}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^{10} \approx 73 \quad \text{e} \quad j_{10} = \frac{440}{3} - \frac{320}{3} \left(\frac{-1}{2}\right)^{10} \approx 147. \quad \blacksquare$$

Um objeto de interesse para os demógrafos é o movimento de populações, ou grupos de pessoas, de uma região para outra. Vamos considerar aqui, um modelo simples para a variação da população de uma cidade e dos subúrbios vizinhos ao longo de certo período de anos.

[15]

Exemplo 1.10.6 (Demografia). Suponha que estudos demográficos mostrem que, a cada ano, cerca de 5% da população da cidade se mudam para os subúrbios vizinhos (e 95% permanecem na cidade), enquanto 3% da população dos subúrbios se mudam para a cidade (e 97%

permanecem nos subúrbios). Dado que a população inicial é de $C_0 = 600000$ habitantes na cidade e $S_0 = 400000$ nos subúrbios, determine: [15]

- Um sistema que represente esses dados.
- A solução geral do sistema.

Solução.

a) Considerando que C_n é a população da cidade no ano n e S_n é a população dos subúrbios no ano n , temos:

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= 0,95C_n + 0,03S_n \\ S_{n+1} &= 0,05C_n + 0,97S_n \end{aligned}$$

b) O sistema pode ser representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0,95 & 0,03 \\ 0,05 & 0,97 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são,

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 0,92.$$

Os autovetores associados respectivamente são $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

A matriz diagonalizadora é $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, cuja inversa é $P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ e

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,92 \end{bmatrix}.$$

Isso nos dá $A = PDP^{-1}$ e para cada $n \geq 0$, podemos calcular A^n explicitamente:

$$A^n = P D^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (0,92)^n \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 + 5(0,92)^n & 3 - (0,92)^n \\ 5 - 5(0,92)^n & 5 + 3(0,92)^n \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix} &= x_n = A^n x_0 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 + 5(0,92)^n & 3 - (0,92)^n \\ 5 - 5(0,92)^n & 5 + 3(0,92)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600000 \\ 400000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 375000 + 225000 \cdot (0,92)^n \\ 625000 - 225000 \cdot (0,92)^n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$C_n = 375000 + 225000 \cdot (0,92)^n \quad \text{e} \quad S_n = 625000 - 225000 \cdot (0,92)^n. \quad \blacksquare$$

1.11 Teoria da Estabilidade das Equações de Diferenças Autônomas

A partir de agora, nosso objetivo é estudar o comportamento assintótico, ou seja, a evolução temporal de um sistema dinâmico discreto descrito pela equação de diferença

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.23)$$

onde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Entende-se por evolução temporal de um sistema dinâmico o comportamento determinado pela k equações desse sistema à medida que o tempo n passa.

Assim, verificaremos se x_n para $n \rightarrow \infty$ converge, diverge, mantém-se invariante, isto é, $x_n = x_0$ ou oscila em relação a uma solução do sistema, ao qual denominaremos de ponto fixo ou ponto de equilíbrio desse sistema, que segundo (ELAYDI, 2005, p.9), “este ponto é o sujeito de estudo da teoria da estabilidade.”

Para uma melhor compreensão sobre o comportamento assintótico de um sistema dinâmico, apresentaremos a seguir os teoremas e as definições necessários.

Os teoremas e as definições comuns aos casos lineares e não lineares serão tratados nesta seção, já os específicos do caso não linear serão abordados no próximo capítulo.

A teoria apresentada nesta seção baseia-se principalmente nas referências [5], [7], [21], [29] e [35].

Definição 1.11.1 (Iteração). Chama-se a iterada de ordem k da função f no ponto x_0 à expressão

$$f^k(x_0) = \underbrace{f(f(\dots(f(x_0))))}_{k \text{ vezes}}, k \in \mathbb{Z}_0^+.$$

O valor de $f(x_0)$ é conhecido como a primeira iterada de f no ponto x_0 .

Isso é fácil de ver, pois considere o sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = f(x_n)$ com condição inicial x_0 .

A aplicação sucessiva da função f , ou seja, a composição de f para o valor x_0 , permite determinar a evolução temporal desse sistema cuja representação é dada pela sequência de estados,

$$\begin{aligned} x_0 & \\ x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$x_k = f^k(x_0)$$

Note-se que $f^0(x_0) = x_0$ e $x_{n+1} = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x_n)$.

Definição 1.11.2 (Órbita). Chama-se órbita (O) o conjunto de todas as iteradas da função (1.23) no ponto x_0 para $k \in \mathbb{Z}_0^+$, isto é

$$O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^k(x_0)\}.$$

Definição 1.11.3 (Ponto fixo ou de equilíbrio). Um ponto x^* no domínio de f é dito ponto de equilíbrio de (1.23) se for um ponto fixo de f , isto é, $f(x^*) = x^*$.

Em outras palavras, x^* é uma solução constante de (1.23), pois se $x_0 = x^*$ for o ponto inicial, então $x_1 = f(x^*) = x^*$, $x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^*$ e assim por diante, ou seja, não ocorrem variações do estágio n para o $n + 1$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

Exemplo 1.11.4 Seja a equação de diferença $x_{n+1} = x_n^3$, onde $f(x) = x^3$. Determine os pontos fixos.

Solução.

De acordo com a definição acima para se determinar os pontos fixos, resolve-se a equação

$$f(x^*) = x^*,$$

ou seja,

$$x^{*3} = x^*.$$

A solução dessa equação são os pontos fixos:

$$x^* = -1, x^* = 0 \text{ e } x^* = 1.$$

A definição (ponto fixo) diz que x^* é um ponto que iterado permanece invariante. Gráficamente, um ponto fixo é a abcissa do ponto onde o gráfico de f intersecta a reta $y = x$. Na figura (1.1) pode-se visualizar a representação gráfica dos pontos fixos da equação de diferenças $x_{n+1} = x_n^3$ quando se considera $f(x) = x^3$.

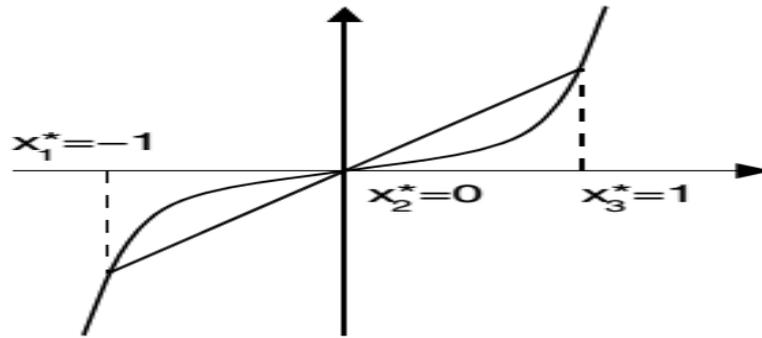


Figura 1.1: Pontos fixos de $f(x) = x^3$. [7]

Segundo (DEVANEY, 1992, p.36) “um dos critérios mais simples para garantir a existência de pontos fixos é uma consequência imediata do seguinte fato importante do cálculo:”

Teorema 1.11.5 (Valor Intermediário). Suponha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e que y_0 encontra-se entre $f(a)$ e $f(b)$. Então, existe um x_0 no intervalo $[a, b]$ com $f(x_0) = y_0$.

Demonstração vide [5].

Simplificando, este teorema diz-nos que uma função contínua assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$ no intervalo $[a, b]$. Uma consequência imediata é o próximo teorema conforme (DEVANEY, 1992, p.36).

Teorema 1.11.6 (Teorema do ponto fixo). Suponhamos que $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é contínua definida em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Então existe um ponto fixo para f em $[a, b]$, isto é, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Demonstração. Definamos, $H : [a, b] \rightarrow [a, b]$, por $H(x) = F(x) - x$. Observe que os zeros de H são os pontos fixos de F .

Como F é contínua, temos que H é contínua. Notemos que $F(a), F(b) \in [a, b]$, logo $F(a) \geq a$ e $F(b) \leq b$, segue que $F(a) - a = H(a) \geq 0$ e $F(b) - b = H(b) \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $H(x_0) = 0$, ou seja, $H(x_0) = F(x_0) - x_0 = 0$, logo, $F(x_0) = x_0$. Portanto, x_0 é um ponto fixo de F em $[a, b]$. ■

Exemplo 1.11.7 A função $f(x) = 1 - x^2$ definida no intervalo $I = [0,1]$ satisfaz as condições do teorema 1.11.6.

De fato, notamos que $f(I) = I$, então f tem um ponto fixo em I . Para encontrar o ponto fixo resolvemos a equação $f(x) = x$, ou seja, $1 - x^2 = x$, de onde obtemos $x_0 = (-1 + \sqrt{5})/2$.

Notemos que existe outra solução da equação no valor de $(-1 - \sqrt{5})/2$ que não pertence ao intervalo. [26]

1.12 Estabilidade de Pontos Fixos ou de Equilíbrio

Segundo (ELAYDI, 2005), um dos principais objetivos dos estudos de sistema dinâmico é a análise do comportamento de suas soluções com relação à sua evolução a partir de condições iniciais que estão próximas a seus pontos fixos. Este estudo constitui a teoria de estabilidade.

De acordo com o comportamento dessas soluções com relação ao ponto fixo x^* , este pode classificar-se em: assintoticamente estável (atrator) e instável (repulsor). A definição e os teoremas a seguir justificam estas classificações.

Definição 1.12.1 Seja x^* um ponto fixo de $f: J \rightarrow J$, com $J \subseteq \mathbb{R}$. Então, x^* é atrator se existe uma vizinhança de x^* em J tal que, para todo x_0 nessa vizinhança $f^n(x_0)$ com $n \geq 0$ aproxima de x^* . De modo análogo, um ponto fixo x^* é dito repulsor se para todo x_0 numa vizinhança de x^* , $f^n(x_0)$ se afasta de x^* .

Teorema 1.12.2 (Ponto Fixo Atrator). Se x^* é um ponto fixo atrator para f . Então existe um intervalo I que contém x^* em seu interior no qual a seguinte condição é satisfeita: se $x_0 \in I$, então $f^n(x_0) \in I$ para todo n e $f^n(x_0) \rightarrow x^*$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração vide [5].

Teorema 1.12.3 (Ponto Fixo Repulsor). Se x^* é um ponto fixo repulsor para f . Então existe um intervalo I que contém x^* em seu interior no qual a seguinte condição é satisfeita: se $x_0 \in I$ e $x_0 \neq x^*$, então existe um inteiro $n > 0$ tal que $f^n(x_0) \notin I$.

Demonstração vide [5].

De acordo com (LUEMBERGER, 1979), há um caso intermediário que não é coberto pelos teoremas de estabilidade anteriores. Assim, uma análise adicional é necessária para caracterizar o comportamento à longo prazo das soluções x_n . Neste caso, os termos da órbita $f^n(x_0)$ têm valor constante, podendo oscilar em ciclos. Portanto, a solução nem tende para o

infinito e nem para o ponto de equilíbrio. O sistema não é nem instável, nem assintoticamente estável. Esta situação intermediária especial é referida como a estabilidade marginal. É um importante caso especial, provenientes de várias aplicações.

Também segundo (VIANA, 2012), neste caso o autor classifica o ponto de equilíbrio como neutro ou marginalmente estável.

Para compreendermos melhor os teoremas acima, apresentaremos uma técnica gráfica para ajudar a entender e visualizar o comportamento das soluções de $x_{n+1} = f(x_n)$, onde f pode ser linear ou não, nas proximidades dos pontos de equilíbrio, que segundo (ELAYDI, 2005, p.13) “é um método gráfico importante para visualizar a estabilidade do ponto de equilíbrio conhecido como Diagrama Teia de Aranha ou Diagrama Cobweb”.

1.13 Diagrama Cobweb ou Diagrama Teia de Aranha

É um método gráfico em que se podem visualizar as sucessivas iteradas próximas ao ponto de equilíbrio. Para isso, consideramos no sistema cartesiano, os valores de x_n no eixo das abcissas e x_{n+1} no eixo das ordenadas e obtemos o gráfico ajustado $x_{n+1} = f(x_n)$, onde f pode ser linear ou não. Os pontos de equilíbrio são dados pela intersecção do gráfico de f com a bissetriz $x_{n+1} = x_n$. Dado um valor inicial x_0 traçamos um segmento vertical até encontrar o gráfico de f , obtendo a ordenada $f(x_0)$. Do ponto $(x_0, f(x_0))$, traçamos um segmento horizontal até intersectar a bissetriz $x_{n+1} = x_n$ encontrando no eixo das abcissas $x_1 = f(x_0)$ e daí novamente traçamos um segmento vertical até ao gráfico de f . Continuando este processo podemos determinar a órbita $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0)$.

Se x_0 for um ponto inicial na vizinhança de um ponto de equilíbrio x^* , a órbita de x_0 dá uma indicação clara da estabilidade de x^* , pois indica como evolui x_0 quando há um pequeno desvio de x^* .

Nas figuras (1.2) e (1.3) representamos os Diagramas Cobweb para estudar a estabilidade respectivamente dos pontos de equilíbrio x_1^* , x_2^* e x^* da equação logística

$$f(x_n) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n).$$

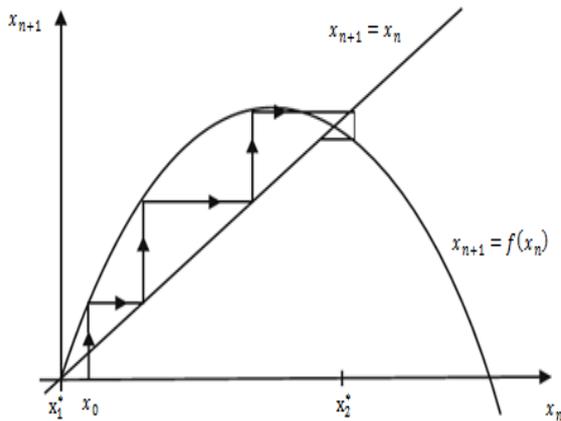


Figura 1.2: Diagrama Cobweb de
 $x_{n+1} = 2,5x_n(1 - x_n)$. [7]

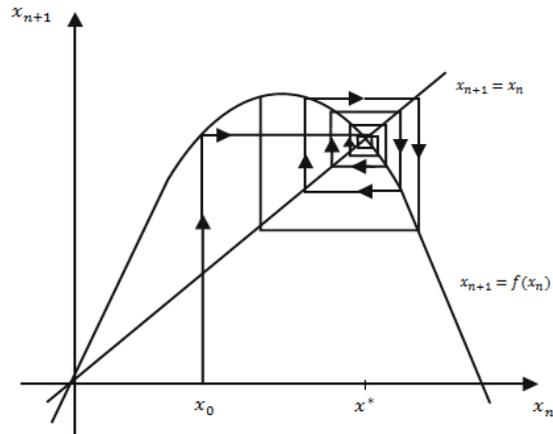


Figura 1.3: Diagrama Cobweb de
 $x_{n+1} = 3,43x_n(1 - x_n)$. [7]

Observando os diagramas acima, podemos classificar a estabilidade dos pontos de equilíbrio x_1^* , x_2^* e x^* de acordo com os **Teoremas 1.12.2** e **1.12.3**. Esta classificação se aplica a qualquer tipo de modelo discreto, seja ele linear ou não.

Assim, temos:

- x_1^* é instável (repulsor), pois para qualquer valor x_0 relativamente próximo de x_1^* , a órbita $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0)$, vai-se afastando progressivamente de x_1^* à medida que n cresce, figura (1.2).
- x_2^* é assintoticamente estável (atrator), pois para qualquer valor x_0 relativamente próximo de x_2^* , a órbita $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0)$, vai-se aproximando progressivamente para x_2^* à medida que n cresce, figura (1.2).
- x^* é marginalmente estável, ou seja, é estável, mas não assintoticamente estável, pois para qualquer valor x_0 relativamente próximo de x^* , a órbita $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0)$, mantém-se próxima dele, no caso da figura (1.3) em forma de oscilação em torno do ponto x^* à medida que n cresce.

1.14 Estabilidade da Equação de Diferença Linear de Primeira Ordem

Começamos analisando a E.D.L. homogênea autônoma de primeira ordem

$$x_{n+1} = ax_n, \quad a \neq 0, \quad (1.24)$$

que tem como solução geral $x_n = a^n x_0$, conforme o resultado em (1.5).

Primeiramente vamos encontrar o ponto fixo de (1.24) para em seguida estabelecer um critério de estabilidade para este ponto.

Temos dois casos a serem considerados:

1º Caso: Para $a = 1$.

Pela **Definição 1.11.3** devemos ter:

$$x_{n+1} = x_n.$$

Substituindo este resultado em (1.24), obtemos:

$$x_n = ax_n \Leftrightarrow x_n - x_n = 0.$$

Logo, teremos infinitos x^* pontos fixos.

2º Caso: Para $a \neq 1$.

Pela **Definição 1.11.3** devemos ter:

$$x_{n+1} = x_n.$$

Substituindo este resultado em (1.24), obtemos:

$$x_n = ax_n \Leftrightarrow x_n = 0.$$

Logo, teremos um único ponto fixo

$$x^* = 0. \tag{1.25}$$

Para obtermos um critério se o ponto de equilíbrio (1.25) é estável ou instável, tomamos a solução geral de (1.24),

$$x_n = a^n x_0.$$

• Se $|a| < 1$, x^* é assintoticamente estável (atrator), pois os valores de x_n convergem para o ponto de equilíbrio quando $n \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n x_0 = x^* = 0.$$

Para $0 < a < 1$ a convergência é monótona e para $-1 < a < 0$ os valores de x_n alternam de sinal o que leva a uma convergência oscilatória, conforme mostra a figura (1.4).

• Se $|a| > 1$, x^* é instável (repulsor), pois os valores de x_n divergem do ponto de equilíbrio quando $n \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n x_0 = \pm \infty.$$

Para $a > 1$, temos os seguintes resultados:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n x_0 = \begin{cases} +\infty, & x_0 > 0 \\ -\infty, & x_0 < 0 \end{cases}$$

Neste caso, a divergência é monótona, conforme mostra a figura (1.4).

Para $a < -1$, temos os seguintes resultados:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n x_0 = \begin{cases} +\infty, & n \text{ par}, x_0 > 0 \\ -\infty, & n \text{ par}, x_0 < 0 \\ -\infty, & n \text{ ímpar}, x_0 > 0 \\ +\infty, & n \text{ ímpar}, x_0 < 0 \end{cases}$$

Neste caso, os valores de x_n alternam de sinal o que leva a uma divergência oscilatória, conforme mostra a figura (1.4).

• Se $|a| = 1$, x^* é marginalmente estável, ou seja, é estável, mas não assintoticamente estável, pois as órbitas de valores próximos do ponto de equilíbrio se mantêm próximas dele.

Para $a = 1$, quando $n \rightarrow \infty$ os valores de x_n são constantes e iguais ao ponto de partida x_0 , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n x_0 = x_0.$$

Neste caso, conforme já visto, teremos infinitos pontos fixos, marginalmente estáveis, ver figura (1.4).

Para $a = -1$, quando $n \rightarrow \infty$ os valores de x_n alternam entre x_0 e $-x_0$, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n x_0 = \begin{cases} x_0, & n \text{ par} \\ -x_0, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Neste caso, a sucessão x_n forma um ciclo de período-2 em torno do ponto fixo (marginalmente estável), conforme mostra a figura (1.4).

Graficamente, temos:

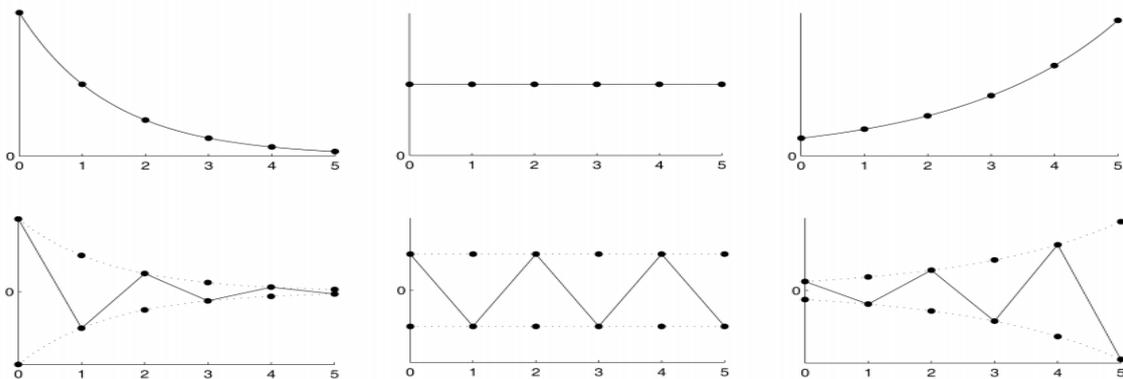


Figura 1.4: Representação gráfica da solução $a^n x_0$ para uma condição inicial $x_0 > 0$ e distintos valores de a . Linha superior: $0 < a < 1$, $a = 1$ e $a > 1$. Linha inferior: $-1 < a < 0$, $a = -1$ e $a < -1$. [36]

Consideramos agora, a equação de diferença linear autônoma não homogênea de primeira ordem,

$$x_{n+1} = ax_n + b, \text{ com } a, b \neq 0. \quad (1.26)$$

Pela **Definição 1.11.3**, fazendo $x_{n+1} = x_n$ obtemos o ponto fixo de (1.26), isto é,

$$x_n = ax_n + b \Leftrightarrow x_n = \frac{b}{1-a},$$

logo,

$$x^* = \frac{b}{1-a}. \quad (1.27)$$

De (1.7), temos que a solução geral de (1.26) é dada por

$$x_n = a^n x_0 + \frac{b}{1-a}(1 - a^n), \text{ para } a \neq 1,$$

podendo ser reescrita como

$$x_n = (x_0 - x^*)a^n + x^*, \quad (1.28)$$

o que nos permite analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio segundo os valores de a obtendo situações análogas ao caso homogêneo.

Para $a = 1$, a solução tem a forma $x_n = x_0 + bn$, de acordo com o resultado em (1.8).

Assim, temos dois casos a considerar:

- Se $b > 0$, tem-se $x_n > x_0$ e x_n é uma sucessão monótona crescente com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

- Se $b < 0$, tem-se $x_n < x_0$ e x_n é uma sucessão monótona decrescente com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Neste caso, não se tem ponto fixo, isso pode ser verificado facilmente.

Considere a E.D.L.

$$x_{n+1} = ax_n + b, \text{ com } a = 1 \text{ e } b \neq 0.$$

Pela **Definição 1.11.3**, temos:

$$x^* = x^* + b,$$

ou seja,

$$x^* - x^* = b.$$

Como $b \neq 0$, isso é impossível, portanto não há ponto fixo.

Podemos resumir nossa análise no seguinte critério de estabilidade para modelos lineares afins:

- $|a| < 1$: x^* é assintoticamente estável. Sendo que a convergência é monótona, se $0 < a < 1$; ou oscilatória, se $-1 < a < 0$.

- $|a| > 1$: x^* é instável. Sendo que a divergência é monótona, se $a > 1$; ou oscilatória se $a < -1$.
- $a = 1$
 - $b \neq 0$: não existe ponto fixo e a sucessão x_n tende ao infinito.
 - $b = 0$: existem infinitos pontos fixos (marginalmente estáveis), a sucessão x_n é constante e igual à condição inicial x_0 .
- $a = -1$: x^* é marginalmente estável e a sucessão x_n forma um ciclo de período-2 em torno do ponto fixo. ■

Exemplo 1.14.1 (Fenômeno de Teia de Aranha em Economia). Consideramos um modelo matemático que relaciona oferta e a demanda de um produto para o qual pretendemos encontrar um preço de equilíbrio tal que não haja excesso de oferta nem insatisfação da demanda. Seja V_n o número de unidades fornecidas (vendidas) pela empresa no período n , E_n o número de unidades pedidas (encomendadas) no período n e p_n o preço por unidade. Admitamos ainda que se tem um modelo de mercado simples, ou seja, as encomendas dependem linearmente do preço por unidade, que se traduz por:

$$E_n = -ap_n + b,$$

em que a e b são constantes reais positivas. A constante a na equação anterior, também conhecida como a curva de procura, representa a sensibilidade dos consumidores em relação ao preço. O sinal negativo aparece porque, em geral, os aumentos de preços implicam um decréscimo de encomendas.

Por outro lado, a capacidade do fornecedor depende do preço que praticou no período anterior. Vamos supor que essa dependência também é linear, ou seja,

$$V_{n+1} = cp_n + d,$$

em que c e d são constantes reais positivas. A constante c na equação anterior, também conhecida como a curva da oferta, representa a sensibilidade dos fornecedores em relação ao preço. Aqui, o coeficiente de p_n tem sinal positivo, pois quanto maior é o preço mais possibilidades tem a empresa de fornecer produtos no período seguinte.

Supomos que o mercado define preço final do produto tal que a demanda dos produtos seja igual a sua oferta, ou seja,

$$E_{n+1} = V_{n+1} \Leftrightarrow -ap_{n+1} + b = cp_n + d,$$

isto é,

$$p_{n+1} = \frac{-c}{a} p_n + \frac{b-d}{a}.$$

Fazendo as seguintes substituições:

$$A = \frac{-c}{a} \quad e \quad B = \frac{b-d}{a},$$

obtemos:

$$p_{n+1} = Ap_n + B, \tag{1.29}$$

que tem a forma de uma equação de diferenças linear de 1ª ordem com coeficientes A e B constantes.

Neste modelo, o ponto de equilíbrio (preço de equilíbrio) é $p^* = \frac{B}{1-A}$, conforme o resultado em (1.27). Este é o ponto de intersecção da curva da oferta e da curva da procura, ou seja, o ponto onde a quantidade ofertada é exatamente igual a quantidade procurada. Para preços acima do preço de equilíbrio haverá excesso de oferta, enquanto que para preços abaixo do preço de equilíbrio haverá excesso de procura.

A solução geral da equação (1.29), com condição inicial p_0 de acordo com o resultado em (1.7) é

$$p_n = A^n p_0 + B \left(\frac{A^n - 1}{A - 1} \right), \text{ para } A \neq 1. \tag{1.30}$$

Usando o fato de que o preço de equilíbrio é

$$p^* = \frac{B}{1-A}$$

e o resultado obtido em (1.28) podemos reescrever (1.30), como

$$p_n = \left(p_0 - \frac{B}{1-A} \right) A^n + \frac{B}{1-A}. \tag{1.31}$$

O termo $A = \frac{-c}{a}$ de (1.31) é a razão das constantes relacionadas com a oferta e com a procura. Esta razão determina o comportamento da sequência de preços.

Assim, temos três casos a considerar:

1. $-1 < A < 0$
2. $A = -1$
3. $A < -1$

Discutiremos os três casos graficamente usando o diagrama Cobweb. Em seguida, comprovamos os resultados analiticamente.

1º Caso: $-1 < A < 0$.

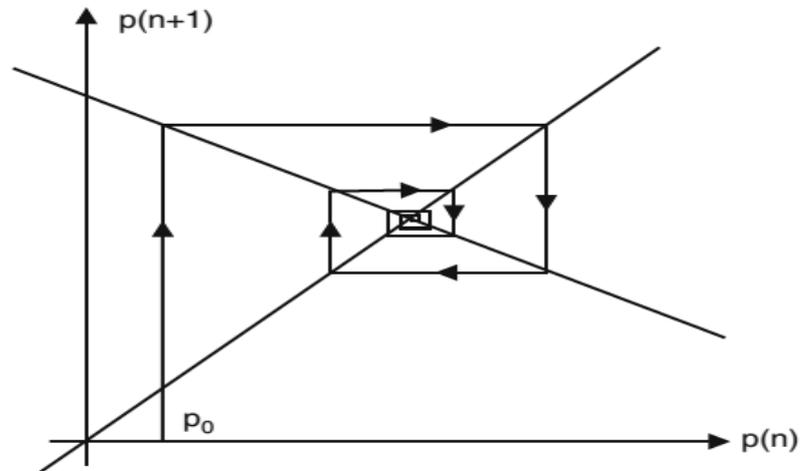


Figura 1.5: Preço de equilíbrio assintoticamente estável. [7]

De acordo com a figura (1.5), observamos que p^* é assintoticamente estável. Pois, a cada iteração, os preços oscilam em torno do ponto de equilíbrio p^* , mas convergindo para ele.

Calculando o limite de p_n quando $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p_0 - \frac{B}{1-A} \right) A^n + \frac{B}{1-A} = \frac{B}{1-A} = p^*,$$

ou seja, p_n converge para p^* à medida que n cresce. Logo, o preço de equilíbrio p^* é assintoticamente estável.

2º Caso: $A = -1$.

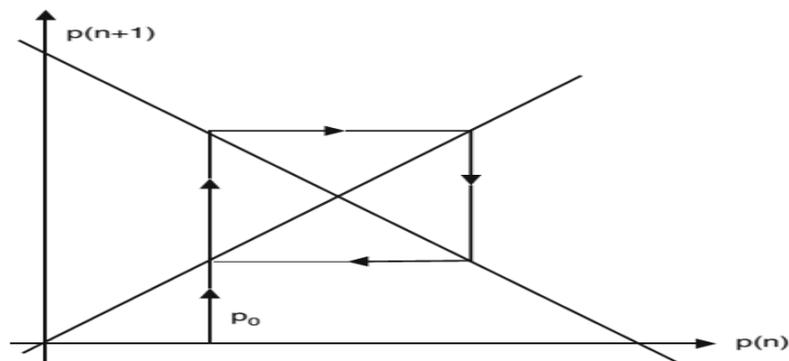


Figura 1.6: Preço de equilíbrio marginalmente estável. [7]

De acordo com a figura (1.6), observamos que p^* é marginalmente estável. Pois, a cada iteração, os preços oscilam em torno do ponto de equilíbrio p^* entre apenas dois valores, se para n_0 tem-se p_0 , então $p_1 = B - p_0$ e $p_2 = p_0$.

Calculando o limite de p_n quando $n \rightarrow \infty$, obtemos:

- Se n é par,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p_0 - \frac{B}{1-A} \right) A^n + \frac{B}{1-A} = p_0.$$

- Se n é ímpar,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p_0 - \frac{B}{1-A} \right) A^n + \frac{B}{1-A} = B - p_0,$$

ou seja, p_n oscila entre dois valores p_0 e $B - p_0$ à medida que n cresce. Logo, o preço de equilíbrio p^* é marginalmente estável.

3º Caso: $A < -1$.

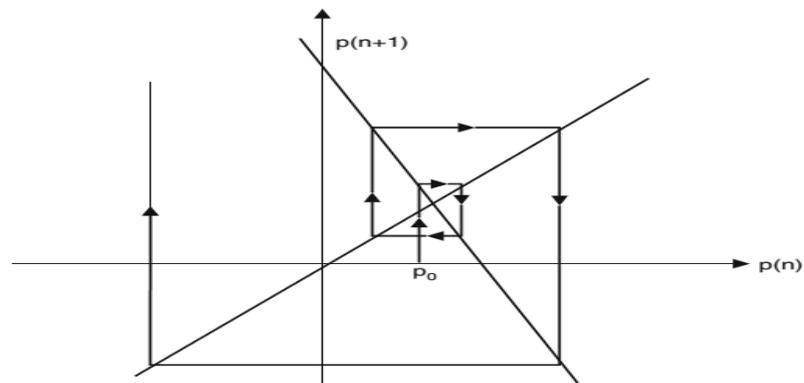


Figura 1.7: Preço de equilíbrio instável. [7]

De acordo com a figura (1.7), observamos que p^* é instável. Pois, a cada iteração, os preços oscilam em torno do ponto de equilíbrio p^* , mas divergindo progressivamente dele.

Calculando o limite de p_n quando $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p_0 - \frac{B}{1-A} \right) A^n + \frac{B}{1-A} = \infty,$$

ou seja, p_n diverge de p^* à medida que n cresce. Logo, preço de equilíbrio p^* é instável. [7]

■

Os exemplos a seguir ilustram a teoria estudada acima como iteração, órbita, ponto de equilíbrio e estabilidade da equação de diferença linear autônoma de primeira ordem

$$x_{n+1} = ax_n + b,$$

para diferentes valores de a e b . Se $b = 0$ temos o caso homogêneo, cujo único ponto fixo é igual a zero. Assim, estudaremos os casos em que $b \neq 0$.

Estes exemplos podem ser facilmente trabalhados no Ensino Médio, pois se tratam de uma função afim. Além disso, vários conceitos matemáticos podem ser explorados nestes exemplos como: sequências, função crescente e decrescente, ponto de intersecção entre duas retas, coeficiente angular, análise de gráficos e outros.

Exemplo 1.14.2 Estudar a estabilidade da equação de diferença $x_{n+1} = 0,5x_n + 2$, considerando a condição inicial $x_0 = 2$, construindo o diagrama Cobweb no Winplot.

Solução.

Primeiramente determinamos o ponto fixo de

$$x_{n+1} = 0,5x_n + 2.$$

Isto é,

$$x^* = 0,5x^* + 2,$$

obtemos:

$$x^* = 4, \text{ é o ponto fixo.}$$

Se considerarmos $x_0 = x^* = 4$ as sucessivas iteradas formarão a órbita $(4,4,4, \dots)$, ou seja, a partir deste valor a E.D.L. não sofre variação do estágio n para o estágio $(n + 1)$, então dizemos que $x^* = 4$ é um ponto de equilíbrio.

Agora, verificamos o comportamento de x_n para $n \rightarrow \infty$. Para isso, tomamos $x_0 = 2$ suficientemente próximo de $x^* = 4$ e iteramos a E.D.L. cinco vezes. Assim, temos:

$$x_0 = 2; x_1 = 3; x_2 = 3,5; x_3 = 3,75; x_4 = 3,875 \text{ e } x_5 = 3,9375.$$

Observamos que à medida que n cresce as iteradas aproximam-se cada vez mais do ponto fixo $x^* = 4$.

Pelo resultado de (1.27), o ponto fixo da equação de diferenças não homogênea, também pode ser obtido por:

$$x^* = \frac{b}{1-a}.$$

E do resultado (1.28), a solução geral pode ser escrita como:

$$x_n = (x_0 - x^*)a^n + x^*,$$

Assim, obtemos:

$$x_n = (2 - 4)0,5^n + 4,$$

ou seja,

$$x_n = -2 \cdot 0,5^n + 4.$$

É fácil ver que x_n para $n \rightarrow \infty$, converge para $x^* = 4$.

Podemos visualizar este comportamento através do diagrama Cobweb, figura (1.8).

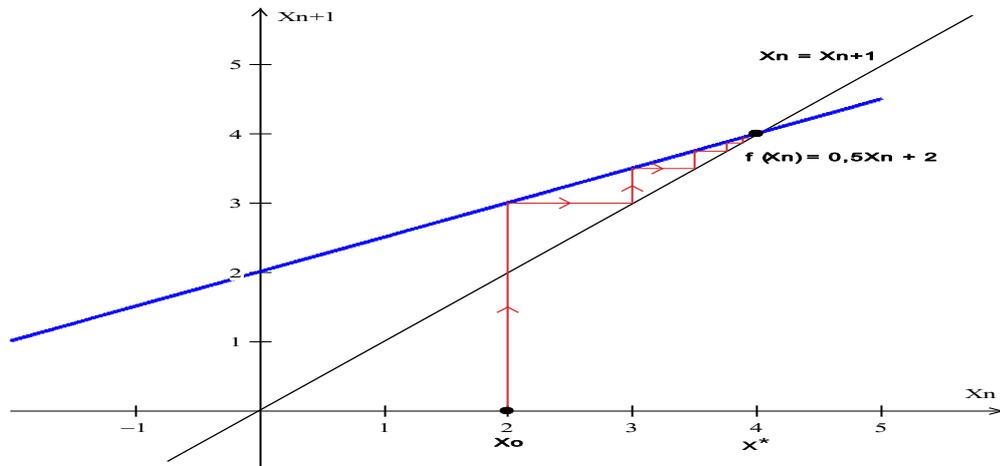


Figura 1.8: Diagrama Cobweb para $x_{n+1} = 0,5x_n + 2$, com $x_0 = 2$.

Portanto, o ponto fixo é assintoticamente estável (atrator). ■

Exemplo 1.14.3 Estudar a estabilidade da equação de diferença $x_{n+1} = 2x_n - 3$ considerando a condição inicial $x_0 = 2$, construindo o diagrama Cobweb no Winplot.

Solução.

Primeiramente determinamos o ponto fixo de

$$x_{n+1} = 2x_n - 3.$$

Isto é,

$$x^* = \frac{b}{1-a} = \frac{-3}{1-2} = 3.$$

Se considerarmos $x_0 = x^* = 3$ as sucessivas iteradas formarão a órbita $(3,3,3, \dots)$, ou seja, a partir deste valor a E.D.L. não sofre variação do estágio n para o estágio $(n+1)$, então dizemos que $x^* = 3$ é um ponto de equilíbrio.

Agora, verificamos o comportamento de x_n para $n \rightarrow \infty$. Para isso, tomamos $x_0 = 2$ suficientemente próximo de $x^* = 3$ e iteramos a E.D.L. quatro vezes. Assim, temos:

$$x_0 = 2; x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = -5 \text{ e } x_4 = -13.$$

Observamos que à medida que n cresce as iteradas divergem-se cada vez mais do ponto fixo $x^* = 3$.

Pelo resultado de (1.28), a solução geral pode ser escrita como:

$$x_n = (x_0 - x^*)a^n + x^*.$$

Assim, obtemos:

$$x_n = (2 - 3)2^n + 3,$$

ou seja,

$$x_n = -2^n + 3.$$

É fácil ver que x_n para $n \rightarrow \infty$, diverge de $x^* = 3$.

Podemos visualizar este comportamento através do diagrama Cobweb, figura (1.9).

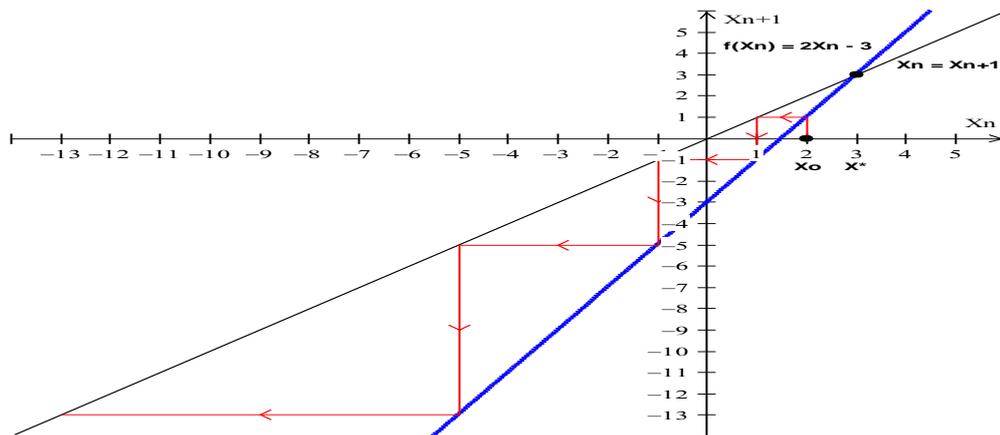


Figura 1.9: Diagrama Cobweb para $x_{n+1} = 2x_n - 3$, com $x_0 = 2$.

Portanto, o ponto fixo é instável (repulsor). ■

Exemplo 1.14.4 Estudar a estabilidade da equação de diferença $x_{n+1} = -x_n + 6$ considerando a condição inicial $x_0 = 3$, construindo o diagrama Cobweb no Winplot.

Solução.

Primeiramente determinamos o ponto fixo de

$$x_{n+1} = -1x_n + 6.$$

Isto é,

$$x^* = \frac{b}{1-a} = \frac{6}{1-(-1)} = 3$$

Se considerarmos $x_0 = x^* = 3$ as sucessivas iteradas formarão a órbita $(3,3,3, \dots)$, ou seja, a partir deste valor a E.D.L. não sofre variação do estágio n para o estágio $(n+1)$, então dizemos que $x^* = 3$ é um ponto de equilíbrio.

Agora, verificamos o comportamento de x_n para $n \rightarrow \infty$. Para isso, tomamos $x_0 = 4$ suficientemente próximo de $x^* = 3$ e iteramos a E.D.L. cinco vezes. Assim, temos:

$$x_0 = 4; x_1 = 2; x_2 = 4; x_3 = 2; x_4 = 4 \text{ e } x_5 = 2.$$

Observamos que à medida que n cresce as iteradas oscilam-se entre os valores 2 e 4 em torno do ponto fixo $x^* = 3$.

Pelo resultado de (1.28), a solução geral pode ser escrita como:

$$x_n = (x_0 - x^*)a^n + x^*,$$

Assim, obtemos:

$$x_n = (4 - 3)(-1)^n + 3,$$

ou seja,

$$x_n = (-1)^n + 3$$

É fácil ver que x_n para $n \rightarrow \infty$, oscila em torno de $x^* = 3$, cujos valores de oscilação são:

Se n é par $x_n = 4$ e se n é ímpar $x_n = 2$.

Podemos visualizar este comportamento através do diagrama Cobweb, figura (1.10).

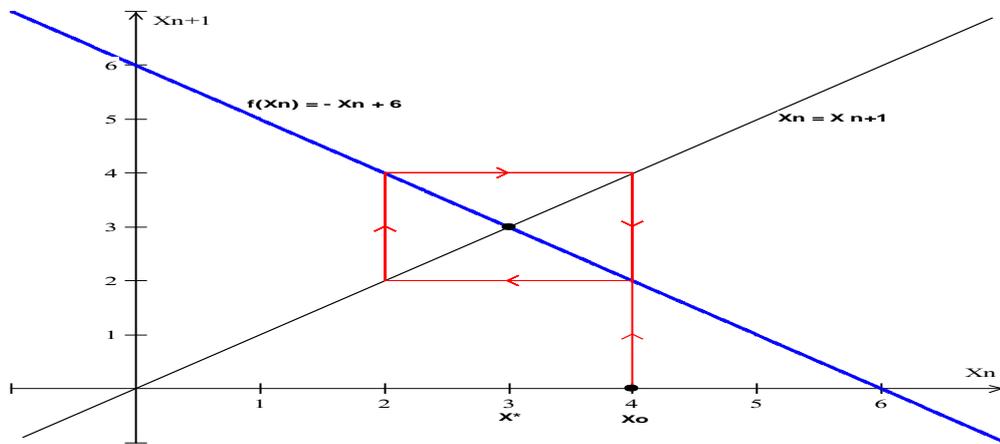


Figura 1.10: Diagrama Cobweb para $x_{n+1} = -x_n + 6$, com $x_0 = 4$.

Portanto, o ponto fixo é marginalmente estável. ■

Exemplo 1.14.5 Estudar a estabilidade da equação de diferenças $x_{n+1} = x_n + 2$ considerando a condição inicial $x_0 = 1$, construindo o diagrama Cobweb no Winplot.

Solução.

Como $a = 1$, a E.D.L.

$$x_{n+1} = x_n + 2,$$

não possui ponto fixo, ou seja,

$$x^* = x^* + 2,$$

onde

$$x^* - x^* = 2.$$

Logo, não há ponto fixo.

Então verificamos o comportamento de x_n para $n \rightarrow \infty$. Para isso, tomamos $x_0 = 1$ e iteramos a E.D.L. cinco vezes. Assim, temos:

$$x_0 = 1; x_1 = 3; x_2 = 5; x_3 = 7; x_4 = 9 \text{ e } x_5 = 11.$$

Observamos que partindo de uma condição inicial qualquer x_0 à medida que n cresce as iterações subsequentes tendem ao infinito.

Pelo resultado de (1.8), a solução geral é dada por:

$$x_n = x_0 + nb,$$

ou seja,

$$x_n = 1 + 2n.$$

É fácil ver que $x_n \rightarrow \infty$ à medida que n cresce.

Podemos visualizar este comportamento através do diagrama Cobweb, figura (1.11).

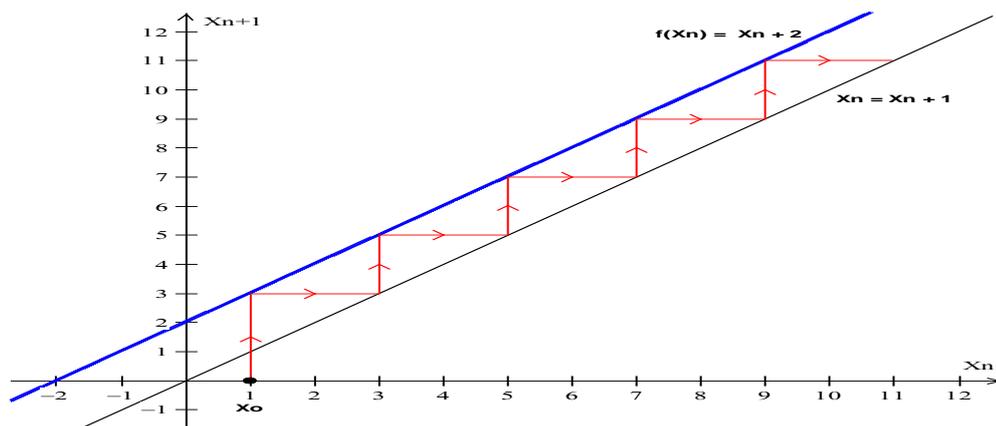


Figura 1.11: Diagrama Cobweb para $x_{n+1} = x_n + 2$, com $x_0 = 1$.

Portanto, neste caso como não há ponto fixo, graficamente não há ponto de intersecção entre a reta da equação de diferença e a bissetriz, elas são retas paralelas. ■

1.15 Estabilidade da Equação de Diferença de Ordem Superior e de Sistemas de Equações de Diferenças Lineares

O estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio das E.D.L. de ordem superior ou de S.E.D.L. far-se-á por análise dos autovalores de acordo com [7], [21] e [29].

Segundo (LAY, 1999, p. 309) “os autovalores e autovetores são a chave para compreensão do comportamento assintótico, ou da evolução, de um sistema dinâmico discreto

$x_{n+1} = Ax_n$. Os vetores x_n fornecem informação sobre o sistema em função do tempo denotado por n .”

Definição 1.15.1 (Autovalores Dominantes). Um autovalor λ de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ é um autovalor dominante de A se $|\lambda| > |\mu|$ para todos os autovalores $\mu \neq \lambda$, onde $|\lambda|$ denota o módulo do número λ .

Suponha que A tem um autovalor dominante. Escolhendo-se a ordem na qual as colunas v_i (autovetores) são postas na matriz P , podemos assumir que λ_1 é dominante dentre os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ de A . Neste caso, coloque λ_1^n como fator comum em evidência na expressão $x_n = c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2 + \dots + c_k \lambda_k^n v_k$ para x_n . Assim, resulta em

$$x_n = \lambda_1^n \left[c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n v_2 + \dots + c_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^n v_k \right],$$

para cada número $n \geq 0$. Como λ_1 é dominante, temos $|\lambda_i| < |\lambda_1|$ para cada $i \geq 2$, de modo que cada número $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n$ diminui o módulo conforme n aumenta. Assim, x_n é aproximadamente igual ao primeiro termo $c_1 \lambda_1^n v_1$ e escrevemos isso por $x_n \approx c_1 \lambda_1^n v_1$.

O limite do comportamento da solução geral é determinado pela solução

$$x_n = c_1 v_1 \lambda_1^n,$$

onde λ_1 é o autovalor dominante, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n \left[c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n v_2 + \dots + c_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^n v_k \right] = c_1 v_1 \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n.$$

Consideramos a equação de diferenças $x_{n+1} = Ax_n$, $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$. O estudo dos critérios de estabilidade se faz em três casos:

1º Caso: Autovalores reais e distintos

Se os autovalores são distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, pela **Definição 1.6.11** a solução geral é dada por

$$x_n = c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2 + \dots + c_k \lambda_k^n v_k,$$

ou seja,

$$x_n = \lambda_1^n \left[c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n v_2 + \dots + c_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^n v_k \right],$$

onde λ_1 é o autovalor dominante.

Dependendo do valor do autovalor dominante, surgem diferentes situações (análogas aos casos já vistos para as equações de ordem um):

- $|\lambda_1| < 1$, o sistema é assintoticamente estável (atrator), já que os valores de x_n tornam-se cada vez menores e tendem para o limite do ponto de equilíbrio, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1)^n x_0 = x^* = 0.$$

Para λ_1 negativo os valores de x_n alternam de sinal e dizemos que a convergência é oscilatória.

- $|\lambda_1| > 1$, o sistema é instável (repulsor), já que os valores de x_n crescem indefinidamente e distanciam do ponto de equilíbrio, ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1)^n x_0 = \infty.$$

Para λ_1 negativo os valores de x_n alternam de sinal e dizemos que a divergência é oscilatória.

- $|\lambda_1| = 1$, o sistema é marginalmente estável, ou seja, é estável, mas não assintoticamente estável, já que as órbitas de valores próximos do ponto de equilíbrio mantêm-se próximas dele.

Para $\lambda_1 = 1$ os valores de x_n são constantes e iguais ao ponto de partida x_0 e para $\lambda_1 = -1$ alternam entre x_0 e $-x_0$.

2º Caso: Autovalores complexos

Sendo os autovalores do tipo $\lambda_1 = a_1 \pm b_1 i$, $\lambda_2 = a_2 \pm b_2 i$, ..., $\lambda_k = a_k \pm b_k i$, pela **Definição 1.6.12** a solução geral é dada por:

$$x_n = \rho_1^n [B_1 \cos n\theta_1 + B_2 \sin n\theta_1] + \dots + \rho_k^n [B_{(2k-1)} \cos n\theta_k + B_{2k} \sin n\theta_k],$$

onde as soluções são oscilantes, uma vez que as funções seno e cosseno são oscilantes, mas oscilam de três maneiras diferentes dependendo do módulo dos autovalores,

$$\rho = |\lambda_i| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- $|\lambda_i| < 1$, as soluções oscilam convergindo para zero e o sistema é assintoticamente estável.
- $|\lambda_i| > 1$, as soluções oscilam explosivamente divergindo e o sistema é instável.
- $|\lambda_i| = 1$, as soluções oscilam com magnitude constante e o sistema é marginalmente estável.

Observe que o valor do módulo de λ_i está relacionado com sua localização no que diz respeito ao círculo de raio 1 (círculo unitário), figura (1.12). Assim, se $|\lambda_i| > 1$ dizemos que estão fora

do círculo unitário (* 1), se $|\lambda_i| = 1$ que estão sobre o círculo (* 2) e se $|\lambda_i| < 1$ que estão dentro do círculo (* 3).

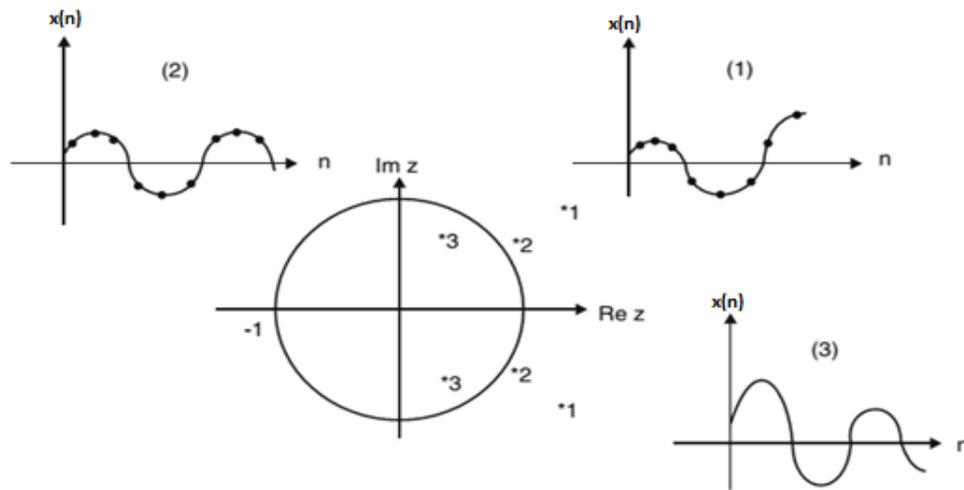


Figura 1.12: Autovetores complexos. [7]

3º Caso: Autovetores reais com multiplicidade $k > 1$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda$, com multiplicidade $k > 1$, pela **Definição 1.6.13** a solução geral é dada por:

$$x_n = c_1 \lambda^n v + c_2 n \lambda^n w_1 + c_3 n^2 \lambda^n w_2 + \dots + c_k n^{k-1} \lambda^n w_{k-1},$$

ou seja,

$$x_n = (c_1 v + c_2 n w_1 + c_3 n^2 w_2 + \dots + c_k n^{k-1} w_{k-1}) \lambda^n.$$

Assim,

- Para $|\lambda| < 1$, o sistema é assintoticamente estável, pois a solução converge a zero, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

- Para $|\lambda| \geq 1$, o sistema é instável, pois a solução diverge, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Os exemplos a seguir se referem à análise de estabilidade em S.E.D.L.

Exemplo 1.15.2 Encontre os pontos fixos e estude a estabilidade do sistema linear

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n \end{cases}.$$

Solução.

De acordo com a **Definição 1.11.3**, fazendo as substituições $x_{n+1} = x_n = x^*$ e

$y_{n+1} = y_n = y^*$ no sistema dado, obtemos:

$$\begin{aligned}x^* &= x^* + 3y^* \\y^* &= \frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}y^*\end{aligned}$$

Logo, os pontos fixos são $x^* = 0$ e $y^* = 0$.

A matriz do sistema é $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Os autovalores de A são dados por $\det(A - \lambda I) = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1 = 0.$$

Assim, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Pela **Definição 1.15.1**, segue que $\lambda_1 = 2$ é o autovalor dominante. Como $\lambda_1 = 2 > 1$, o sistema é instável, ou seja, as iteradas divergem dos pontos de equilíbrio à medida que n cresce.

■

Exemplo 1.15.3 Encontre os pontos fixos e estude a estabilidade do sistema linear

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2 \\ y_{n+1} = \frac{1}{4}y_n - x_n + 5 \end{cases}.$$

Solução.

Fazendo as substituições $x_{n+1} = x_n = x^*$ e $y_{n+1} = y_n = y^*$ no sistema dado obtemos:

$$\begin{cases} x^* = \frac{3}{4}x^* + 2 \\ y^* = \frac{1}{4}y^* - x^* + 5 \end{cases}.$$

Logo, os pontos fixos são $x^* = 8$ e $y^* = -4$.

A matriz do sistema é $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Os autovalores de A são dados por $\det(A - \lambda I) = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & 0 \\ -1 & \frac{1}{4} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + \frac{3}{16} = 0.$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = \frac{3}{4}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{4}$.

Como $\lambda_1 = \frac{3}{4} < 1$ é o autovalor dominante, segue que o sistema é assintoticamente estável, ou seja, as iteradas convergem para os pontos de equilíbrio à medida que n cresce. ■

Exemplo 1.15.4 Encontre os pontos fixos e estude a estabilidade do sistema linear

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}y_n + 1. \\ y_{n+1} = x_n - 1 \end{cases}$$

Solução.

Fazendo as substituições $x_{n+1} = x_n = x^*$ e $y_{n+1} = y_n = y^*$ no sistema dado obtemos:

$$\begin{cases} x^* = x^* - \frac{1}{2}y^* + 1. \\ y^* = x^* - 1 \end{cases}$$

Logo, os pontos fixos são $x^* = 3$ e $y^* = 2$.

A matriz do sistema é $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Os autovalores de A são dados por $\det(A - \lambda I) = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{2} = 0.$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$.

Como o módulo de qualquer um dos autovalores é $\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, segue que o sistema é assintoticamente estável, ou seja, as iteradas convergem para os pontos de equilíbrio à medida que n cresce. ■

1.16 Análise das Soluções e Plano de Fases

Quando a matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, podemos acrescentar aos cálculos algébricos uma descrição geométrica da evolução do sistema

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad (1.32)$$

no plano x e y , que permite obtermos uma compreensão global do comportamento das soluções do sistema. Podemos considerar a equação $x_{n+1} = Ax_n$ como uma descrição do que acontece com um ponto inicial x_0 do $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ à medida que iteramos. O plano x e y recebe o

nome de plano de fases e o conjunto representativo das órbitas obtidas pela evolução temporal do sistema dinâmico é chamado retrato de fases.

Relembrando que para qualquer sistema linear homogêneo o ponto de equilíbrio do sistema é o ponto x^* , tal que $Ax^* = x^*$ ou $(A - I)x^* = 0$. A condição $\det A \neq 0$ é equivalente a que a origem 0 , seja o único ponto onde A se anula. Observe que o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ corresponde à origem das coordenadas do plano de fases.

O nosso objetivo é estudar o aspecto gráfico de como as soluções particulares do sistema se comportam com relação ao ponto de equilíbrio $x^* = 0$, verificando se essas soluções, ao longo do tempo, convergem para o ponto de equilíbrio ou divergem dele e a partir desses resultados, caracterizar a solução do sistema bidimensional de acordo com o padrão geométrico descrito por suas órbitas.

A representação do plano de fases faz-se de acordo com os diferentes tipos de autovalores, baseado nas referências [7] e [35]. Assim, consideramos os três casos seguintes:

1º Caso: Autovalores reais e distintos

A solução geral de (1.32) é dada por

$$x_n = c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2 .$$

• Se $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| > 1$, as soluções divergem do ponto de equilíbrio à medida que n aumenta. Este ponto de equilíbrio é um repulsor, denominado de fonte ou nó instável.

As formas das órbitas dependem das condições iniciais. Assim, se as condições iniciais pertencem às direções determinadas pelos autovetores, as órbitas serão retilíneas, caso contrário, serão curvilíneas. (VIANA, 2012).

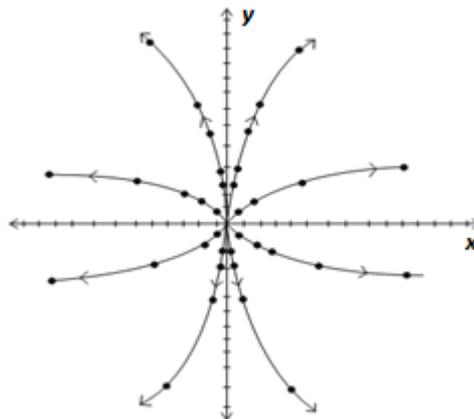


Figura 1.13: Nó instável. [7]

- Se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$, as soluções convergem para o ponto de equilíbrio à medida que n aumenta. Este ponto de equilíbrio é assintoticamente estável (atrator), denominado de nó estável. O plano de fases será semelhante o da figura (1.13) com as órbitas no sentido inverso.
- Se ($|\lambda_1| < 1$, e $|\lambda_2| > 1$ ou vice – versa) então existem algumas soluções que começam por se aproximar do ponto de equilíbrio, mas que acabam por se afastar. Neste caso, o ponto de equilíbrio é instável denominado de sela.

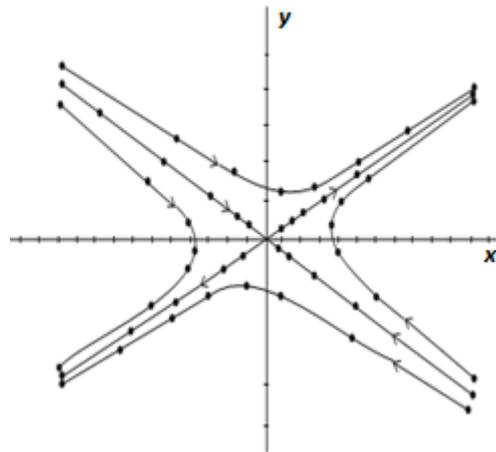


Figura 1.14: Sela (instável). [7]

- Se um dos autovalores for igual a 1, então as soluções degeneram em pontos que estão sobre retas paralelas e o ponto de equilíbrio é marginalmente estável. Estas retas são paralelas ao eixo das abcissas se $\lambda_2 = 1$ e ao eixo das ordenadas se $\lambda_1 = 1$.

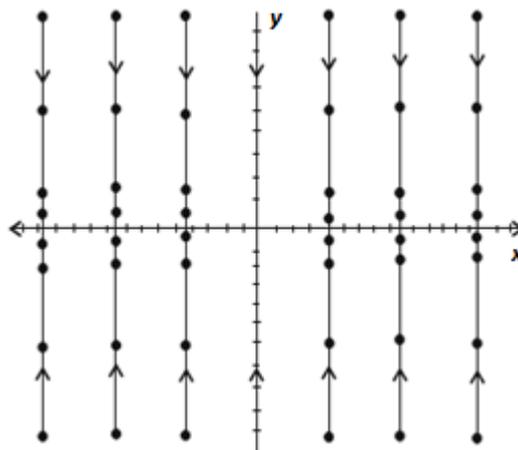


Figura 1.15: Para $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_2| < \lambda_1$ tem-se um nó degenerado. [7]

Segundo (VIANA, 2012), observamos neste caso que as iterações não convergem, a rigor, para o ponto fixo na origem, mas também não divergem. Deste modo, podemos dizer

que a origem é marginalmente estável, o que fisicamente equivaleria a um equilíbrio do tipo indiferente.

2º Caso: Autovalores reais e iguais

Se os autovalores são reais e iguais, então existem dois subcasos (a) e (b), que depende se o autovalor repetido tem dois autovetores linearmente independentes ou apenas um.

a) Dois autovetores linearmente independentes.

A solução geral de (1.32) é dada por

$$x_n = (c_1 v_1 + c_2 v_2) \lambda^n,$$

onde v_1 e v_2 são autovetores linearmente independentes.

- Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$, as soluções convergem ao ponto de equilíbrio à medida que n aumenta. Este ponto de equilíbrio é denominado de nó próprio estável.

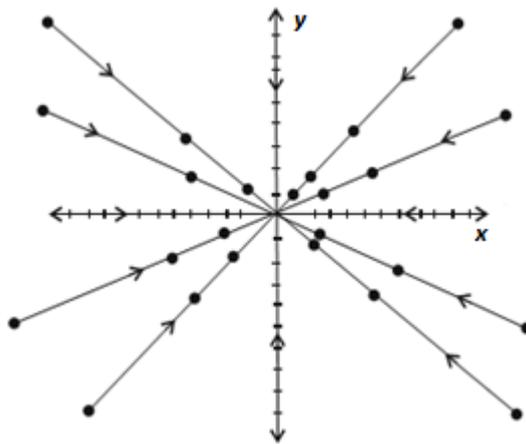


Figura 1.16: Nó próprio estável. [7]

- Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$, as soluções divergem do ponto de equilíbrio à medida que n aumenta. Este ponto de equilíbrio é denominado de nó próprio instável. O plano de fases será semelhante o da figura (1.16) com as órbitas no sentido inverso.

- Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, todas as soluções são degeneradas. Neste caso, as soluções são constantes, ou seja, iguais às próprias condições iniciais para quaisquer instantes de tempo:

$$x_n = x_0 \text{ e } y_n = y_0.$$

Logo, todos os pontos do plano são pontos de equilíbrio (não só a origem), marginalmente estáveis.

b) Um autovetor linearmente independente.

A solução geral de (1.32), é dada por

$$x_n = (c_1 v + c_2 n w) \lambda^n,$$

onde v é o autovetor e w é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido.

- Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$, as soluções convergem para o ponto de equilíbrio à medida que n aumenta. Este ponto de equilíbrio é denominado de nó impróprio estável.

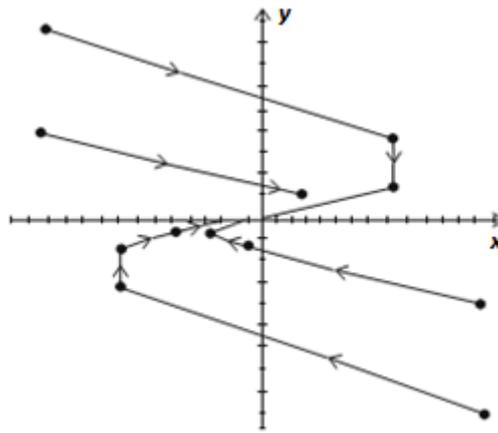


Figura 1.17: Nó impróprio estável. [7]

- Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$, as soluções divergem do ponto de equilíbrio à medida que n aumenta. Este ponto de equilíbrio é denominado de nó impróprio instável. O plano de fases será semelhante o da figura (1.17) com as órbitas no sentido inverso.

- Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, as soluções se degeneram em pontos que estão sobre retas paralelas ao eixo das abcissas, pois os valores de y não se alteram, seja qual for a condição inicial y_0 para quaisquer tempo. Os sentidos das órbitas serão diferentes, conforme estivermos acima ou abaixo do eixo horizontal.

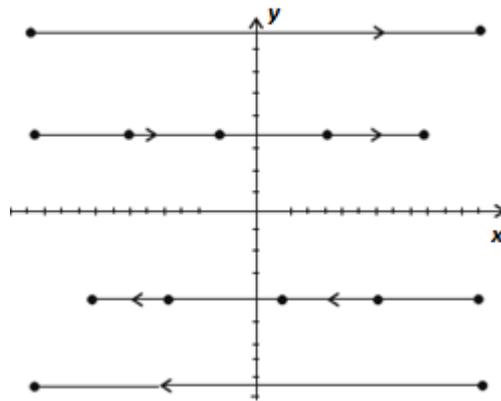


Figura 1.18: Pontos degenerados marginalmente estáveis. [7]

Todos os pontos no eixo x são pontos de equilíbrio, cuja estabilidade é marginalmente estável.

3º Caso: Autovalores complexos

A solução geral de (1.32) é dada por

$$x_n = \rho^n [B_1 \cos n\theta + B_2 \text{sen } n\theta],$$

onde $\rho = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ as soluções têm comportamento oscilatório, em forma de espiral, convergindo para a origem, à medida que n aumenta. A origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável (atrator), denominado por foco estável.

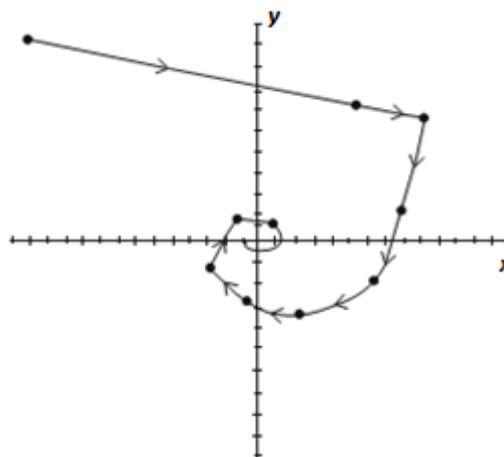


Figura 1.19: Foco estável. [7]

- Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$ as soluções têm comportamento oscilatório, em forma de espiral, divergindo da origem, à medida que n aumenta. A origem é um ponto de equilíbrio repulsor, denominado por foco instável.

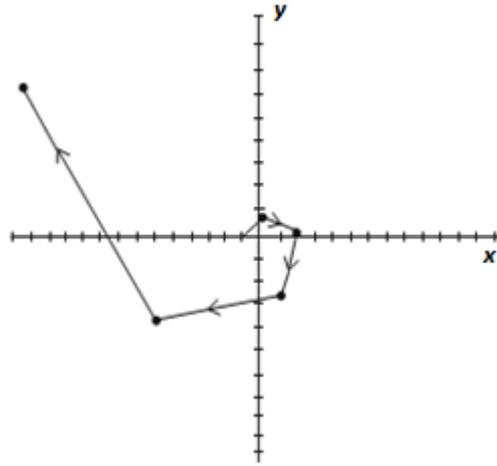


Figura 1.20: Foco instável. [7]

- Se $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, as soluções têm comportamento oscilatório, percorrendo uma órbita elíptica em torno e com centro na origem, não convergindo para a origem nem se afastando dela, isto é, elas orbitam continuamente em seu redor com amplitude constante. A origem é um ponto de equilíbrio marginalmente estável, isto é, estável, mas não assintoticamente estável denominado por centro.

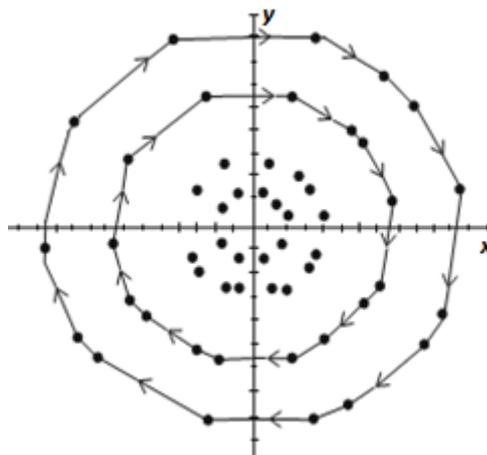


Figura 1.21: Centro. [7]

Os exemplos a seguir ilustra uma maneira de trabalhar no Ensino Médio as representações do plano de fases de sistemas dinâmicos discretos lineares. Vários conceitos matemáticos

podem ser explorados como: composição de função, produto de matrizes, sequência, análise gráfica entre outros.

De acordo com [15] e [30] dado o sistema dinâmico discreto $x_{n+1} = Ax_n$, iteramo-lo a partir de uma condição inicial x_0 numa planilha do Excel e em seguida plotamos o gráfico plano de fases.

Exemplo 1.16.1 Represente o plano de fases do sistema dinâmico $x_{n+1} = Ax_n$, quando

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,48 & 1,4 \end{bmatrix}.$$

Solução.

Representamos graficamente um ponto inicial, digamos $x_0 = (3, 2)$ e depois, novamente as imagens sucessivas desse ponto sob multiplicação sucessiva por A . Isto é, plotamos:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,48 & 1,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1,36 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,48 & 1,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1,36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,36 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2, \dots$$

A figura (1.22) representa a órbita gerada pela sequência das iteradas.

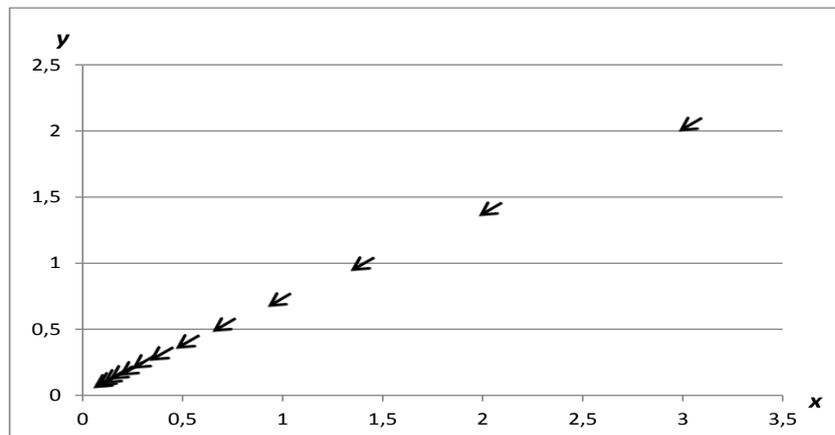


Figura 1.22: A origem como atrator.

Analisando o gráfico, observamos que a órbita converge aproximando-se da origem para cada escolha de ponto inicial x_0 , figura (1.22). Neste caso, a origem é chamada de atrator do sistema.

Analicamente temos que os autovetores associados respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = 0,8$ e $\lambda_2 = 0,6$ de A , são $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6 \end{bmatrix}$.

A solução geral é

$$x_n = c_1(0,8)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0,8 \end{bmatrix} + c_2(0,6)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0,6 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que x_n tende para 0, porque tanto $(0,8)^n$ quanto $(0,6)^n$ se aproxima de 0 quando $n \rightarrow \infty$, pois ambos os autovalores são em módulo menores que 1. Além disso, a direção de maior atração é dada pelo autovetor v_2 , pois está associado ao autovalor de menor valor absoluto. Portanto, o ponto de equilíbrio é um nó estável. ■

Exemplo 1.16.2 Represente o plano de fases do sistema dinâmico $x_{n+1} = Ax_n$, quando

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2,4 & 3,1 \end{bmatrix}.$$

Solução.

Representamos graficamente um ponto inicial, digamos $x_0 = (1, 8)$ e depois, novamente as imagens sucessivas desse ponto sob multiplicação sucessiva por A . Isto é, plotamos:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2,4 & 3,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 22,4 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2,4 & 3,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 22,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,4 \\ 50,24 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2, \dots$$

A figura (1.23) representa a órbita gerada pela sequência das iteradas.

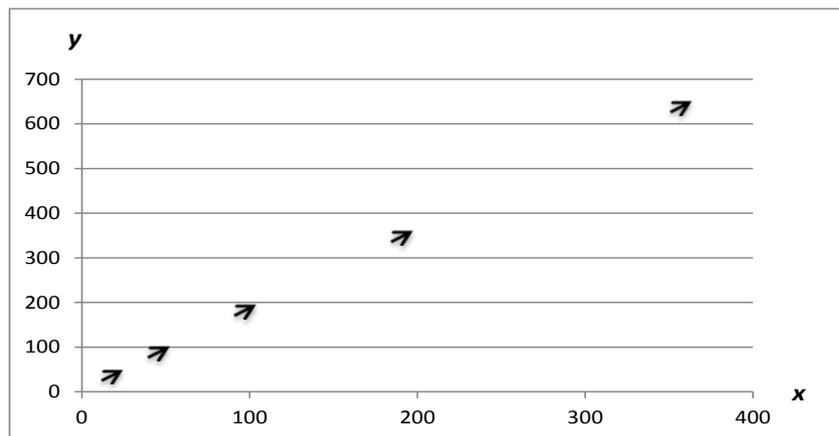


Figura 1.23: A origem como repulsor.

Analisando o gráfico, observamos que a órbita diverge afastando-se da origem para cada escolha de ponto inicial x_0 , figura (1.23). Neste caso, a origem é chamada de repulsor do sistema.

Analicamente temos que os autovetores associados respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = 1,6$ e $\lambda_2 = 1,5$ de A , são $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,6 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \end{bmatrix}$.

A solução geral é

$$x_n = c_1(1,6)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1,6 \end{bmatrix} + c_2(1,5)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que x_n diverge de 0, porque tanto $(1,6)^n$ quanto $(1,5)^n$ se afasta de 0 quando $n \rightarrow \infty$, pois ambos os autovalores são em módulo maiores que 1. Além disso, a direção de maior repulsão é dada pelo autovetor v_1 , pois está associado ao autovalor de maior valor absoluto. Portanto, o ponto de equilíbrio é um nó instável. ■

Exemplo 1.16.3 Represente o plano de fases do sistema dinâmico $x_{n+1} = Ax_n$, quando

$$A = \begin{bmatrix} 1,25 & -0,75 \\ -0,75 & 1,25 \end{bmatrix}. \quad [15]$$

Solução.

Representamos graficamente um ponto inicial, digamos $x_0 = (10, 9)$ e depois, novamente as imagens sucessivas desse ponto sob multiplicação sucessiva por A . Isto é, plotamos:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 = \begin{bmatrix} 1,25 & -0,75 \\ -0,75 & 1,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,75 \\ 3,75 \end{bmatrix} \\ x_2 &= Ax_1 = \begin{bmatrix} 1,25 & -0,75 \\ -0,75 & 1,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5,75 \\ 3,75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,4 \\ 0,4 \end{bmatrix} \\ x_3 &= Ax_2, \dots \end{aligned}$$

A figura (1.24) representa a órbita gerada pela sequência das iteradas.

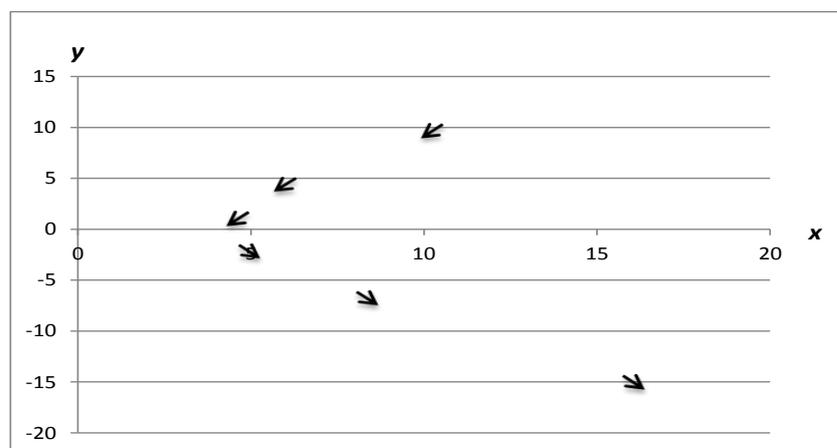


Figura 1.24: A origem como sela.

Analisando o gráfico, observamos que a órbita começa por se aproximar da origem, mas que acaba por se afastar para cada escolha de ponto inicial x_0 , figura (1.24). Neste caso, a origem é chamada de sela.

Analicamente temos que os autovetores associados respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0,5$ de A , são $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A solução geral é

$$x_n = c_1(2)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2(0,5)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que o primeiro termo da expressão x_n se torna cada vez maior quando $n \rightarrow \infty$, pois o autovalor em módulo é maior que 1 e conseqüentemente a direção de repulsão é dada pelo autovetor v_1 . Por outro lado, o segundo termo de x_n se torna cada vez menor quando $n \rightarrow \infty$, pois o autovalor em módulo é menor que 1, logo, a direção de atração é dada pelo autovetor v_2 .

Neste caso, o ponto de equilíbrio a origem, atrai soluções de algumas direções e repele-as de outras direções. Portanto, o ponto de equilíbrio é denominado de sela. ■

Exemplo 1.16.4 Represente o plano de fases do sistema dinâmico $x_{n+1} = Ax_n$, quando

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 \\ -1,0 & 1,0 \end{bmatrix}. \quad [29]$$

Solução.

Representamos graficamente um ponto inicial, digamos $x_0 = (10,5)$ e depois, novamente as imagens sucessivas desse ponto sob multiplicação sucessiva por A . Isto é, plotamos:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 \\ -1,0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 \\ -1,0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,5 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ -11,5 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2, \dots$$

A figura (1.25) representa a órbita gerada pela sequência das iteradas.

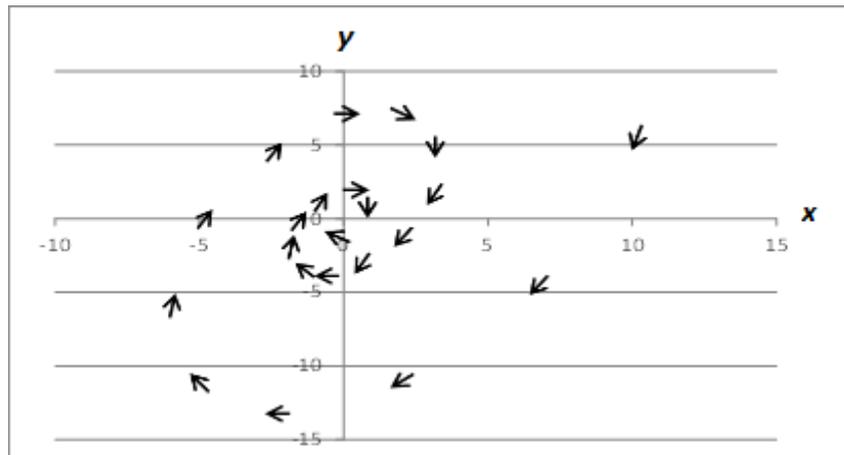


Figura 1.25: A origem como foco estável.

Analisando o gráfico, observamos que a órbita aproxima-se da origem em forma de espiral para cada escolha de ponto inicial x_0 , figura (1.25). Neste caso, a origem é chamada de foco estável.

Analicamente temos que os autovalores de A são,

$$\lambda_1 = 0,75 + 0,48734i \text{ e } \lambda_2 = 0,75 - 0,48734i .$$

O módulo desses autovalores é dado por $\rho = \sqrt{(0,75)^2 + (0,48734)^2} = 0,8944$.

A solução geral é

$$x_n = 0,8944^n [B_1 \cos n\theta + B_2 \text{sen } n\theta].$$

É fácil ver que x_n oscila tendendo para 0, porque $(0,8944)^n$ se aproxima de 0 quando $n \rightarrow \infty$, pois ambos os autovalores têm módulo menores que 1. Neste caso, a órbita converge para o ponto de equilíbrio em forma de espiral. Este ponto é um atrator denominado por foco estável. ■

Exemplo 1.16.5 Represente o plano de fases do sistema dinâmico $x_{n+1} = Ax_n$, quando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad [29]$$

Solução

Representamos graficamente um ponto inicial, digamos $x_0 = (1 ; 0,5)$ e depois, novamente as imagens sucessivas desse ponto sob multiplicação sucessiva por A . Isto é, plotamos:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -0,5 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2,5 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2, \dots$$

A figura (1.26) representa a órbita gerada pela sequência das iteradas.

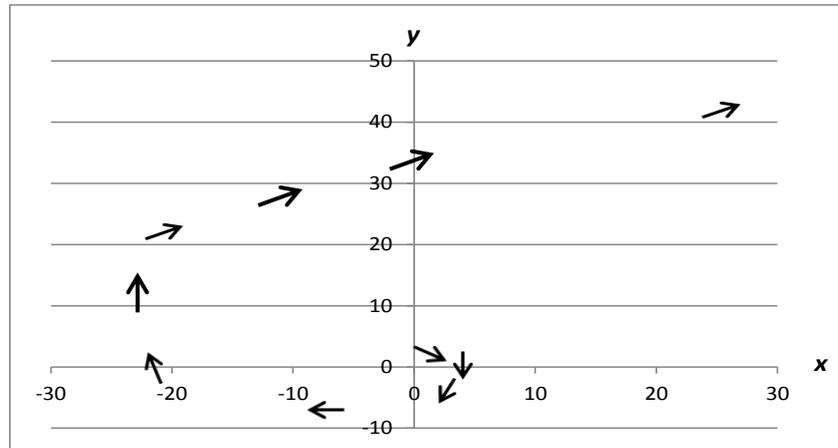


Figura 1.26: A origem como foco instável.

Analisando o gráfico, observamos que a órbita afasta-se da origem em forma de espiral para cada escolha de ponto inicial x_0 , figura (1.26). Neste caso, a origem é chamada de foco instável.

Analicamente temos que os autovalores de A são,

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i \text{ e } \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i.$$

O módulo desses autovalores é dado por

$$\rho = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

A solução geral é

$$x_n = 1,73^n [B_1 \cos n\theta + B_2 \text{sen } n\theta].$$

É fácil ver que x_n oscila divergindo de 0, porque $(1,73)^n$ se afasta de 0 quando $n \rightarrow \infty$, pois ambos os autovalores têm módulo maiores que 1. Neste caso, a órbita diverge do ponto de equilíbrio em forma de espiral. Este ponto é repulsor denominado por foco instável.

■

Exemplo 1.16.6 Represente o plano de fases do sistema dinâmico $x_{n+1} = Ax_n$, quando

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix}. \quad [15]$$

Solução.

Representamos graficamente um ponto inicial, digamos $x_0 = (2,0)$ e depois, novamente as imagens sucessivas desse ponto sob multiplicação sucessiva por A . Isto é, plotamos:

$$x_1 = Ax_0 = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,6 \\ 0,75 & 1,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4 \\ 2,4 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = Ax_2, \dots$$

A figura (1.27) representa a órbita gerada pela sequência das iteradas.

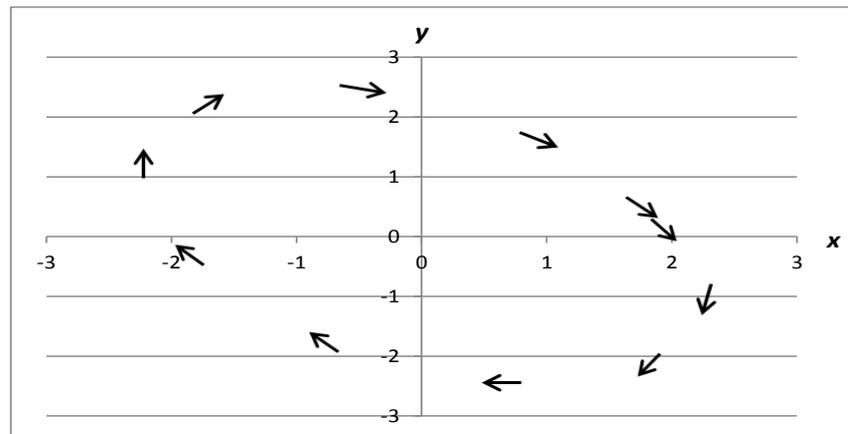


Figura 1.27: A origem como centro.

Analisando o gráfico, observamos que a órbita percorre uma trajetória elíptica em torno e com centro na origem para cada escolha de ponto inicial x_0 , figura (1.27). Neste caso, a origem é chamada de centro.

Analicamente temos que os autovalores de A são,

$$\lambda_1 = 0,8 + 0,6i \text{ e } \lambda_2 = 0,8 - 0,6i.$$

O módulo desses autovalores é dado por $\rho = \sqrt{(0,8)^2 + (0,6)^2} = 1$.

A solução geral é

$$x_n = 1^n [B_1 \cos n\theta + B_2 \text{sen } n\theta] = [B_1 \cos n\theta + B_2 \text{sen } n\theta].$$

É fácil ver que x_n oscila com amplitude constante, pois ambos os autovalores têm módulo iguais a 1. Neste caso, a órbita não converge para o ponto de equilíbrio nem se afasta dele, isto é, ela orbita continuamente em seu redor. Este ponto é marginalmente estável, isto é, estável, mas não assintoticamente estável denominado de centro. ■

1.17 Estabilidade nos Modelos Lineares de Crescimento Populacional e Presa-Predador

Os exemplos a seguir referem-se à análise de estabilidade dos modelos de crescimento populacional e de sistema presa-predador linear. O modelo de crescimento populacional é o mesmo estudado na seção 1.10.

Exemplo 1.17.1 (Crescimento populacional). Uma população de pássaros foi descrita computando-se o perfil da população de fêmeas $x_n = \begin{bmatrix} a_n \\ j_n \end{bmatrix}$ da espécie, onde a_n e j_n representa o número de fêmeas adultas e jovens presentes n anos após os valores iniciais a_0 e j_0 serem observados. O modelo supõe que esses números estão relacionados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}j_n, \\ j_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

Isso significa que $\frac{1}{2}$ dos adultos e $\frac{1}{4}$ dos jovens vivos no ano n sobrevivem para o ano $n + 1$ e que cada fêmea produz em média 2 jovens por ano.

Supondo que os valores iniciais observados foram $a_0 = 100$ fêmeas adultas e $j_0 = 40$ fêmeas jovens, estime o perfil populacional $x_n = \begin{bmatrix} a_n \\ j_n \end{bmatrix}$ para valores de n suficientemente grande verificando se essa população de fêmeas será extinta, estável, ou instável. [24]

Solução.

O sistema pode ser representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são,

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

A solução geral do sistema é dada por

$$x_n = c_1 1^n v_1 + c_2 \left(\frac{-1}{2}\right)^n v_2.$$

Supondo $c_1 \neq 0$, pela **Definição 1.15.1** de autovalor dominante, temos que $\lambda_1 = 1$ é dominante. Assim, uma estimativa para x_n é dada por

$$\begin{bmatrix} a_n \\ j_n \end{bmatrix} = x_n \approx c_1 1^n v_1. (*)$$

Como $\lambda_1 = 1$, a população se estabilizará.

Portanto, à longo prazo o sistema é marginalmente estável.

Podemos ainda calcular a quantidade de fêmeas dessa população em que se dará a estabilidade.

Os autovetores associados respectivamente aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ são

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por conveniência, podemos utilizar múltiplos $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente.

A matriz diagonalizadora é $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, cuja inversa é $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Pela **Definição 1.8.3**, os coeficientes c_1 e c_2 são dados por

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = P^{-1}x_0 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 3 \\ -80 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Fazendo as substituições necessárias em (*), obtemos:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ j_n \end{bmatrix} = x_n \approx c_1 \lambda_1^n v_1 = \frac{220}{3} \cdot 1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$a_n \approx \frac{220}{3} \text{ e } j_n \approx \frac{440}{3},$$

para n suficientemente grande.

Assim, obtemos o total da população de fêmeas $a_n + j_n \approx 220$. Observe que à longo prazo, a população de fêmeas se estabiliza com aproximadamente duas vezes mais jovens do que adultos. ■

Exemplo 1.17.2 Agora, consideramos o mesmo sistema dinâmico do exemplo anterior e vamos variar o parâmetro k , onde este representa a taxa de sobreviventes das fêmeas jovens.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + kj_n \\ j_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

Supondo as mesmas condições iniciais $a_0 = 100$ e $j_0 = 40$, estimamos o perfil populacional $x_n = \begin{bmatrix} a_n \\ j_n \end{bmatrix}$ para valores n suficientemente grande, verificando se essa população de fêmeas será extinta, estável, ou instável, para:

- $k = \frac{3}{4}$.
- $k = \frac{1}{8}$.

Solução.

a) Para $k = \frac{3}{4}$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}j_n. \\ j_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

A matriz que representa o sistema é

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são,

$$\lambda_1 = 1,5 \text{ e } \lambda_2 = -1.$$

A solução geral do sistema é dada por

$$x_n = c_1 1,5^n v_1 + c_2 (-1)^n v_2.$$

Supondo $c_1 \neq 0$, então $\lambda_1 = 1,5$ é dominante. Assim, uma estimativa para x_n é dada por

$$\begin{bmatrix} a_n \\ j_n \end{bmatrix} = x_n \approx c_1 1,5^n v_1.$$

Como $\lambda_1 = 1,5 > 1$, a população diverge, isto é, cresce ilimitadamente.

Portanto, à longo prazo o sistema é instável.

b) Para $k = \frac{1}{8}$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{8}j_n. \\ j_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

A matriz que representa o sistema é

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são,

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}[1 + \sqrt{5}] = 0,809 \text{ e } \lambda_2 = \frac{1}{4}[1 - \sqrt{5}] = -0,309.$$

A solução geral do sistema é dada por

$$x_n = c_1 0,809^n v_1 + c_2 (-0,309)^n v_2.$$

Supondo $c_1 \neq 0$, então $\lambda_1 = 0,809$ é dominante. Assim, uma estimativa para x_n é dada por

$$\begin{bmatrix} a_n \\ j_n \end{bmatrix} = x_n \approx c_1 0,809^n v_1.$$

Como $\lambda_1 = 0,809 < 1$, a população será extinta.

Portanto, à longo prazo o sistema é assintoticamente estável. ■

Nestes exemplos usamos um sistema dinâmico discreto linear para modelar uma população de fêmeas adultas e fêmeas jovens de uma espécie de pássaros, onde analisamos a sobrevivência desses pássaros. Reconhecidamente, o modelo é limitado em diversos aspectos, pois não inclui efeitos sazonais, interação com outras espécies, suas distribuições espaciais e outros fatores ambientais.

Por outro lado, mesmo sendo um modelo linear e simples, fizemos uma análise da estabilidade desse sistema, onde observamos que dependendo da taxa de sobrevivência das fêmeas jovens, a população pode ser levada a estabilidade (equilíbrio ecológico), a instabilidade (crescimento ilimitado, ou seja, superpopulação) ou a extinção dessa espécie de pássaros.

Exemplo 1.17.3 (Um sistema presa-predador). No interior das florestas de sequoias da Califórnia, um tipo de rato-do-mato chega a fornecer até 80% da dieta da coruja malhada, que é o principal predador do rato-do-mato.

Vamos denotar as populações de corujas e ratos-do-mato, no instante n por $x_n = \begin{bmatrix} C_n \\ R_n \end{bmatrix}$, onde n é medido em meses, C_n é o número de corujas na região estudada e R_n é o número de ratos (medidos em milhares). Suponha que

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= (0,5)C_n + (0,4)R_n \\ R_{n+1} &= -p \cdot C_n + (1,1)R_n \end{aligned} \quad '$$

onde p é um parâmetro positivo a ser especificado. O termo $(0,5)C_n$ da primeira equação diz que sem os ratos para poderem se alimentar apenas metade das corujas sobrevive a cada mês, enquanto o termo $(1,1)R_n$ da segunda equação diz que sem as corujas como predadoras a população de ratos cresce a uma taxa de 10% ao mês. Se os ratos abundam, o termo $(0,4)R_n$ fará com que a população das corujas cresça, enquanto o termo negativo $-p \cdot C_n$ mede o número de mortes de ratos devido à ação predadora das corujas. [15]

Determine a evolução desse sistema verificando se as populações de ratos e de corujas serão extintas, estáveis ou instáveis quando o parâmetro predatório p é igual a:

- a) 0,104
- b) 0,125
- c) 0,2

Solução.

- a) Quando $p = 0,104$ a matriz que representa o sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,104 & 1,1 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são,

$$\lambda_1 = 1,02 \text{ e } \lambda_2 = 0,58.$$

Os autovetores associados respectivamente aos autovalores são $v_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A solução geral é dada por

$$x_n = c_1(1,02)^n v_1 + c_2(0,58)^n v_2,$$

ou seja,

$$x_n = c_1(1,02)^n \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2(0,58)^n \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Supondo $c_1 \neq 0$, então $\lambda_1 = 1,02$ é dominante, uma estimativa para x_n é dada por:

$$\begin{bmatrix} C_n \\ R_n \end{bmatrix} = x_n \approx c_1 \lambda_1^n v_1 = c_1(1,02)^n \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix},$$

onde

$$C_n \approx c_1(1,02)^n \cdot 10 \text{ e } R_n \approx c_1(1,02)^n \cdot 13,$$

para n suficientemente grande.

Assim, as populações de corujas e ratos crescem com fator de cerca de 1,02 por mês, uma taxa mensal de 2% sendo que para cada 10 corujas existem 13 mil ratos.

Como $\lambda_1 = 1,02 > 1$, à longo prazo este sistema é instável, ou seja, as populações de ratos e de corujas crescem ilimitadamente.

Supondo que inicialmente houvesse 4 corujas e 5 mil ratos, façamos graficamente a estimativa da evolução populacional dessas espécies.

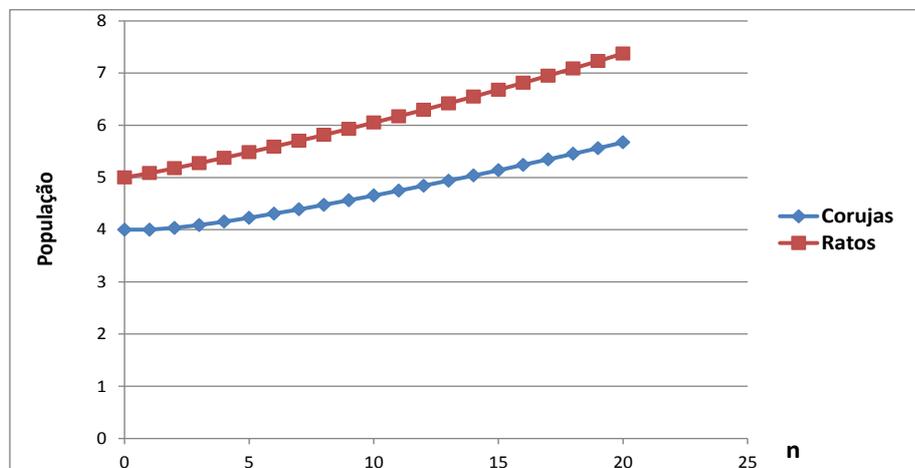


Figura 1.28: Evolução temporal do sistema.

b) Quando $p = 0,125$ a matriz que representa o sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,125 & 1,1 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são,

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 0,6.$$

Os autovetores associados respectivamente aos autovalores são

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução geral é dada por

$$x_n = c_1(1)^n v_1 + c_2(0,6)^n v_2,$$

ou seja,

$$x_n = c_1(1)^n \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2(0,6)^n \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Supondo $c_1 \neq 0$, então $\lambda_1 = 1$ é dominante, uma estimativa para x_n é dada por:

$$\begin{bmatrix} C_n \\ R_n \end{bmatrix} = x_n \approx c_1 \lambda_1^n v_1 = c_1(1)^n \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

onde

$$C_n \approx c_1 \cdot 4 \text{ e } R_n \approx c_1 \cdot 5,$$

para n suficientemente grande.

Assim, as populações de corujas e ratos se estabilizam numa razão de 4 corujas para 5 mil ratos.

Como $\lambda_1 = 1$, à longo prazo o sistema é marginalmente estável, ou seja, mantém-se o equilíbrio ecológico.

Supondo a mesma condição inicial 4 corujas e 5 mil ratos, façamos graficamente a estimativa da evolução populacional dessas espécies.

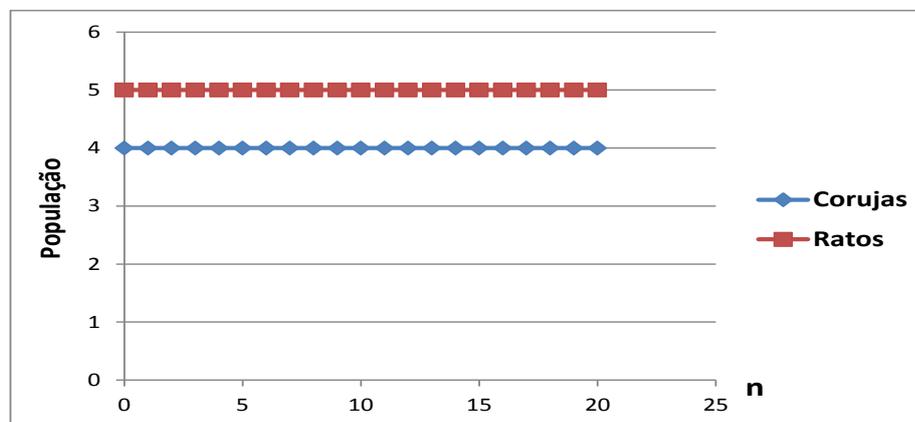


Figura 1.29: Evolução temporal do sistema.

c) Quando $p = 0,2$ a matriz que representa o sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ -0,2 & 1,1 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são,

$$\lambda_1 = 0,9 \text{ e } \lambda_2 = 0,7.$$

Os autovetores associados são $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente.

A solução geral é dada por

$$x_n = c_1(0,9)^n v_1 + c_2(0,7)^n v_2,$$

ou seja,

$$x_n = c_1(0,9)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2(0,7)^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Supondo $c_1 \neq 0$, então $\lambda_1 = 0,9$ é dominante, uma estimativa para x_n é dada por:

$$\begin{bmatrix} C_n \\ R_n \end{bmatrix} = x_n \approx c_1 \lambda_1^n v_1 = c_1(0,9)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde

$$C_n \approx c_1 \cdot (0,9)^n \text{ e } R_n \approx c_1 \cdot (0,9)^n,$$

para n suficientemente grande.

Assim, as populações de corujas e ratos decrescem a um fator de cerca de 0,1 por mês, uma taxa mensal de 10%, sendo que para cada coruja existem mil ratos.

Como $\lambda_1 = 0,9 < 1$, à longo prazo este sistema é assintoticamente estável, ou seja, ambas as populações serão extintas.

Supondo a mesma condição inicial 4 corujas e 5 mil ratos, façamos graficamente a estimativa da evolução populacional dessas espécies.

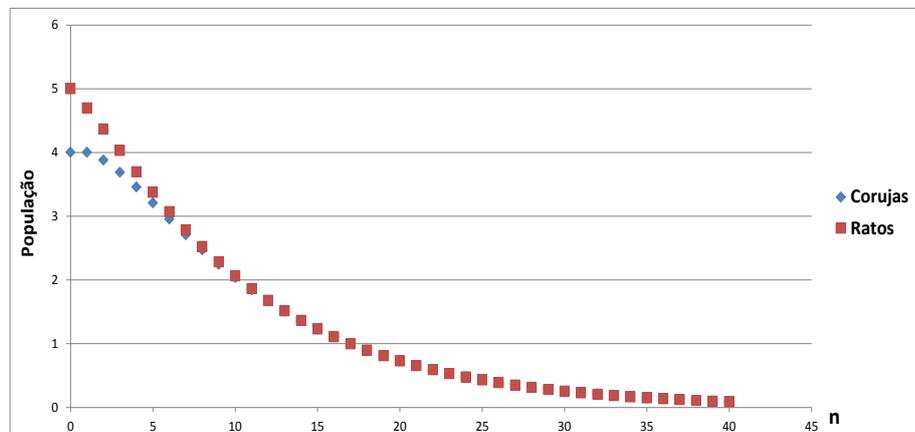


Figura 1.30: Evolução temporal do sistema.

Este exemplo usa um sistema dinâmico discreto linear para modelar a interação entre duas espécies, onde as corujas são predadoras e os ratos são presas.

O modelo é limitado em diversos aspectos, pois não inclui efeitos sazonais, interação com outras espécies além das corujas e ratos, suas distribuições espaciais e outros fatores ambientais, mas ele pode fornecer um ponto de partida para o estudo de modelos não lineares mais complicados usados pelos cientistas ambientais.

Por outro lado, mesmo sendo um exemplo linear e bastante simples, observamos que dependendo do parâmetro predatório p das corujas, ambas as populações podem ser levadas a estabilidades (equilíbrio ecológico), a instabilidades (crescimento ilimitado, superpopulações) ou a extinções dessas espécies.

Os exemplos de sistemas de crescimento populacional e presa-predador são modelos interessantes a serem trabalhados no Ensino Médio, pois vários conceitos matemáticos podem ser explorados nesses exemplos como: função composta, função exponencial, taxas de crescimento e decrescimento, elaboração e análise de gráficos mostrando a evolução desses sistemas e outros.

Além disso, também trabalhamos a importância de contribuirmos para preservação do ecossistema, onde este mantenha sempre um ciclo natural de sobrevivência, resultando num equilíbrio ecológico, pois de uma maneira direta ou indireta o ser humano interfere neste ambiente quebrando o ciclo ecológico, favorecendo um desequilíbrio do sistema e levando à extinção das espécies. ■

CAPÍTULO 2

2 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS NÃO LINEARES AUTÔNOMAS

Neste capítulo estudamos as equações de diferenças não lineares autônomas de primeira ordem, conhecidas também por mapas unidimensionais. Estas equações descrevem a evolução temporal de um sistema dinâmico discreto não linear.

A teoria apresentada neste capítulo baseia-se, principalmente nas referências: [5], [7] e [34].

2.1 Equação de Diferença não Linear Autônoma de Primeira Ordem ou Mapa Unidimensional

A equação de diferença não linear de primeira ordem é representada na forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.1)$$

onde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}_0^+$, sendo f não linear na variável x_n .

Uma equação de diferença não linear não tem uma solução exata numa forma fechada, pelo fato de não satisfazer o princípio da superposição válido no caso linear. Em geral, tal solução só pode ser obtida numericamente e sua utilidade é bastante limitada, já que é válida apenas para a situação particular calculada.

De acordo com (MONTEIRO, 2006, p.60), “às vezes, o que se deseja saber não é a forma exata da solução, mas sim, seu comportamento qualitativo.” Isto é, o estudo de propriedades gerais, como ponto de equilíbrio, estabilidade, tipos de convergência ou divergência, etc..

Neste trabalho o estudo de equações não lineares se faz qualitativamente. Para isso, estudamos uma família de equações que diferem entre si nos valores que determinados parâmetros e/ou das condições iniciais tomam. O sistema atravessa uma sucessão de estados dinâmicos à medida que os parâmetros mudam. [12] e [22].

Assim, para uma melhor compreensão do comportamento assintótico das equações não lineares, serão necessários além dos teoremas e definições já vistos no capítulo anterior os

que serão tratados no decorrer deste capítulo.

No capítulo anterior, vimos que uma solução x_n tal que $x_{n+1} = f(x_n) = x_n$ para qualquer n pertencente \mathbb{Z}_0^+ a qual denominamos por x^* , é um ponto fixo ou de equilíbrio de f quando $f(x^*) = x^*$.

De acordo com (ELAYDI, 2005), há um fenômeno que é exclusivo para equações de diferenças e não pode ocorrer em equações diferenciais. É possível, em equações de diferenças que uma solução pode não ser um ponto de equilíbrio, mas pode atingir um, após um número finito de iterações. Em outras palavras, um estado de não equilíbrio pode ir para um estado de equilíbrio em um tempo finito. Isto leva a seguinte definição.

Definição 2.1.1 (Ponto finalmente fixo). Seja x_0 um ponto no domínio de f . Se existirem um inteiro positivo r e um ponto de equilíbrio x^* de $x_{n+1} = f(x_n)$ tal que $f^r(x_0) = x^*$ e $f^{r-1}(x_0) \neq x^*$, então x_0 é um ponto finalmente fixo.

Exemplo 2.1.2 Seja a equação $x_{n+1} = Tx_n$, onde

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases},$$

As soluções de $T(x^*) = 2x^* = x^*$ e $T(x^*) = 2 - 2x^* = x^*$ são respectivamente, os pontos de equilíbrio: $x^* = 0$ e $x^* = \frac{2}{3}$.

Se $x_0 = \frac{1}{4}$, iterando $T(x)$, obtemos a seguinte órbita:

$$O(x_0) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, \dots \right\}.$$

Assim, $\frac{1}{4}$ é um ponto finalmente fixo. De um modo geral, sendo $x_0 = \frac{k}{2^n}$, com k e n inteiros positivos tal que $0 \leq \frac{k}{2^n} \leq 1$, tem-se que x é um ponto finalmente fixo. ■

2.2 Pontos Periódicos e Ciclos

De acordo com (ELAYDI, 2005), um dos conceitos importante no estudo de sistemas dinâmicos é a noção de periodicidade. No capítulo anterior, o **Exemplo 1.14.1** (Fenômeno de Teia de Aranha em Economia), cuja equação é $p_{n+1} = Ap_n + B$, onde $A = \frac{-c}{a}$, vimos que

quando o valor de c (sensibilidade dos fornecedores em relação ao preço) é igual a a (sensibilidade dos consumidores em relação ao preço), então os preços oscilam somente entre dois valores.

Definição 2.2.1 (Pontos periódicos e finalmente periódicos). Seja x_0 um ponto no domínio de f . Então:

i) x_0 é um ponto periódico de $x_{n+1} = f(x_n)$ de período k , se existe um inteiro positivo k tal que $f^k(x_0) = x_0$. Neste caso, o ponto é k – periódico se é ponto fixo de f^k , isto é, se é um ponto de equilíbrio da equação de diferenças

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

onde $g = f^k$.

A órbita periódica de x_0 , $O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\}$, é geralmente denominada de k – ciclo.

ii) x_0 é finalmente k – periódico se para algum inteiro positivo m , $f^m(x_0)$ é um ponto k – periódico, ou seja, x_0 é finalmente k – periódico se $f^{m+k}(x_0) = f^m(x_0)$.

Exemplo 2.2.2 Considere o sistema dinâmico discreto $f(x_n) = x_{n+1} = x_n^2 - 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e determine os pontos periódicos de período-2 de f .

Solução.

De acordo com a definição acima, os pontos fixos de f^2 são os valores de x para os quais $f^2(x) = x$. Então, resolvendo a equação

$$x = f(f(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$$

encontramos quatro pontos fixos de f^2 ,

$$x^*_1 = 0, x^*_2 = -1, x^*_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ e } x^*_4 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Observamos que f^2 tem quatro pontos fixos, sendo que dois destes são também de f . Assim, os dois pontos fixos de f^2 que não são pontos fixos de f formam um 2-ciclo. Neste caso, o 2-ciclo é $\{0, -1\}$, pois iterando f para os valores $x^*_1 = 0, x^*_2 = -1$, obtemos:

Para $x^*_1 = 0$, temos a órbita $x_0 = 0, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = -1, \dots$

Para $x^*_2 = -1$, temos a órbita $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 0, \dots$

isto é, $f^2(0) = 0$ e $f^2(-1) = -1$.

Portanto, f possui órbita de período 2.

Note que se x^* for um ponto fixo de f também será de f^k . De fato,

$$f^k(f(x^*)) = f^k(x^*) = f^{k-1}(f(x^*)) = f^{k-1}(x^*) = f^{k-2}(f(x^*)) = f^{k-2}(x^*) = x^* \dots = x^*.$$

Agora consideramos $x_0 = \sqrt{2}$, iterando f obtemos a órbita:

$$x_0 = \sqrt{2}, x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = -1, \dots$$

Assim, $\sqrt{2}$ é um ponto finalmente periódico de período 2, ou seja, f possui uma órbita finalmente periódica para $x_0 = \sqrt{2}$. ■

2.3 Conjectura de Collatz e as Órbitas Finalmente Periódicas

Um exemplo interessante com relação às órbitas finalmente periódicas, porém não relacionada ao ponto fixo é a conjectura de Collatz, também conhecida como problema $3x + 1$. De acordo com (LAGARIAS, 2012), esta conjectura é definida por:

$$T_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2}, & x_n \text{ par} \\ 3x_n + 1, & x_n \text{ ímpar} \end{cases},$$

onde $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$ e $x_n \in \mathbb{N}$.

Para todo $x_0 \in \mathbb{N}$ as iterações convergirão sempre para uma órbita finalmente periódica $\{1, 4, 2\}$ de período-3.

Tomamos por exemplos as condições iniciais $x_0 = 5$ e $x_0 = 28$.

Para $x_0 = 5$, temos os resultados:

$$\{5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots\}.$$

Para $x_0 = 28$, temos os resultados:

$$\{28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \dots\}.$$

Esta conjectura ainda não foi provada que valha para qualquer número.

Uma versão modificada da conjectura de Collatz de acordo com (LAGARIAS, 2012) é definida por:

$$T_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2}, & x_n \text{ par} \\ \frac{3x_n + 1}{2}, & x_n \text{ ímpar} \end{cases},$$

onde $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_0^+$ e $x_n \in \mathbb{N}$.

Para todo $x_0 \in \mathbb{N}$ as iterações convergirão sempre para uma órbita finalmente periódica $\{1, 2\}$ de período-2.

Tomamos por exemplos as condições iniciais $x_0 = 7$ e $x_0 = 50$.

Para $x_0 = 7$, temos os resultados:

$$\{7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \dots\}.$$

Para $x_0 = 50$, temos os resultados:

$$\{50, 25, 38, 19, 29, 44, 22, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \dots\}. \quad \blacksquare$$

2.4 Análise de Estabilidade de Pontos Fixos de Equações não Lineares

A análise da estabilidade de pontos fixos é fundamental “porque os sistemas do mundo real são constantemente sujeitos a pequenas perturbações”. (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996, p.9).

Os critérios de estabilidade de um ponto fixo para modelos lineares da forma $x_{n+1} = Ax_n + B$, foram fixados em função de “A” que é o coeficiente angular da reta, explícito na E.D.L. Observamos que neste caso não é necessário sabermos o valor do ponto fixo da E.D.L. para determinarmos a sua estabilidade.

Segundo Viana (2011) o critério que usamos anteriormente para a determinação da estabilidade do ponto fixo no caso linear depende da existência de uma solução geral, porém este critério não se aplica para modelos discretos não lineares. Para eles, um novo critério deve ser deduzido, baseado nas propriedades do mapa nas vizinhanças do ponto fixo. Isto é, encontrando um ponto fixo x^* tal que $f(x^*) = x^*$, em seguida investigamos o comportamento das iteradas na vizinhança de x^* verificando se as mesmas convergem ou divergem em relação ao ponto fixo x^* , ou seja, verificamos se x^* é estável ou instável. Entretanto, as definições de estabilidade são as mesmas estudadas anteriormente.

Um sistema não linear pode ser aproximado em torno de um ponto de equilíbrio, por um sistema linear. Tal procedimento é conhecido como linearização e somente pode levar em consideração o comportamento do sistema em uma vizinhança deste ponto. Nenhum outro comportamento não seja local, muito menos o comportamento global do sistema pode ser representado pelo modelo linearizado. (ZUBEN, 2010).

O procedimento de linearização apresentado neste trabalho é baseado na expansão da função não linear em uma série de Taylor na vizinhança do ponto fixo x^* , onde desprezaremos os termos dessa expansão contendo potências igual ou superior a dois, considerando que esses termos desprezados, sejam suficientemente pequenos para que a linearização seja válida.

Assim, de acordo com (ZUBEN, 2010), para obtermos um sistema linear para um não linear nas proximidades do ponto fixo x^* , consideramos o sistema não linear

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.2)$$

onde $f(x^*) = x^*$ e tomamos um desvio y_n tal que

$$x_n = x^* + y_n. \quad (2.3)$$

O sistema não linear nas proximidades do ponto fixo x^* é representado por:

$$x_{n+1} = f(x^* + y_n). \quad (2.4)$$

Pela expansão de (2.4) em uma série de Taylor, obtemos:

$$x_{n+1} \approx f(x^*) + f'(x^*)y_n + \frac{1}{2!}f''(x^*)y_n^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x^*)y_n^n,$$

onde as derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ são calculadas em $x_n = x^*$.

Se o desvio y_n é suficientemente pequeno, podemos desprezar os termos de ordem igual ou superior a y_n^2 , por serem muito menores que y_n . Assim, o sistema (2.2) linearizado é dado por:

$$x_{n+1} = x^* + f'(x^*)y_n. \quad (2.5)$$

Agora, verificamos se o desvio y_n é estável ou não, isto é, se o desvio tende a diminuir ou aumentar à medida que iteramos, para isso, representamos o desvio de (2.3) no estado seguinte, ou seja,

$$x_{n+1} = x^* + y_{n+1}. \quad (2.6)$$

Da igualdade de (2.6) e (2.5), obtemos:

$$x^* + y_{n+1} = x^* + f'(x^*)y_n,$$

ou seja,

$$y_{n+1} = f'(x^*)y_n.$$

Uma vez conhecido o valor de $f'(x^*)$, podemos determinar a estabilidade do desvio se é estável ou instável, deste modo determinamos a estabilidade do sistema não linear (2.2) por meio de um sistema linearizado (2.5). O teorema a seguir, mostra os resultados da estabilidade de (2.2), calculando a derivada da função f no ponto de equilíbrio.

Teorema 2.4.1 (Sistema Linearizado). Seja x^* um ponto de equilíbrio da equação (2.2), f continuamente diferenciável em x^* . Se:

1. $|f'(x^*)| < 1$, então x^* é assintoticamente estável (atrator).
2. $|f'(x^*)| > 1$, então x^* é instável (repulsor).

3. $f'(x^*) = 1$, (nada se pode afirmar), então:

a) x^* é instável se $f''(x^*) \neq 0$.

b) x^* é instável se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$.

c) x^* é assintoticamente estável se $f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$.

4. $f'(x^*) = -1$, (nada se pode afirmar), então:

a) x^* é assintoticamente estável se $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 < 0$. (Derivada de Schwarz de f).

b) x^* é instável se $-2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 > 0$

As demonstrações desse teorema vide [7].

Vimos como determinar a estabilidade de um ponto fixo, podemos também determinar a estabilidade de um ponto fixo k -periódico, isto é, verificar se uma órbita periódica é estável ou instável. Essa teoria pode se encontrada nas referências [7], [22] e [34].

2.5 A Equação Logística ou Mapa Logístico

O interesse por investigação de sistemas dinâmicos surgiu em função do estudo do comportamento de populações.

A proposta de utilização da matemática para descrever o crescimento de uma população humana começou com o economista inglês Thomas Robert Malthus, publicada em seu livro (Um Ensaio sobre o Princípio da População –1798), [19] e [23]. Seu modelo assume que o crescimento de uma população é proporcional ao tamanho da população em cada instante, representado pela equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = aP. \quad (2.7)$$

Desta forma, a população deveria crescer geometricamente sem nenhuma inibição para $a > 0$.

O modelo de Malthus em tempo discreto é dado por:

$$P_{t+1} = P_t(1 + a), \quad (2.8)$$

para $a = n - m$, onde n e m são respectivamente as taxas de natalidade e de mortalidade.

Assim, a é a taxa específica de crescimento da população P_t no tempo t . Podemos ainda escrever $1 + a = r$ e substituindo em (2.8), obtemos:

$$P_{t+1} = rP_t.$$

Considerando que a população inicial seja $P(0) = P_0$, então a solução analítica do modelo discreto de Malthus é dada na forma

$$P_t = r^t P_0.$$

Observamos que o modelo de Malthus no tempo contínuo (2.7) foi escrito para o tempo discreto (2.8), ou seja, o modelo (2.7) foi discretizado. Eles são equivalentes entre si quando calculados em tempos infinitesimalmente próximos. Ver detalhes desse resultado em (MONTEIRO, 2006, p.51).

O modelo de Malthus é limitado, pois não há fatores inibidores presentes na natureza. Diante desse fato, em 1938 o matemático belga Pierre François Verhulst, apresentou pela primeira vez a equação logística no seu trabalho “Pesquisa Matemática sobre a Lei do Crescimento da População”, [33] e [23], onde propõe uma correção ao modelo de crescimento populacional de Malthus que leva em consideração a quantidade máxima de indivíduos num ambiente, isto é, quando ela tende a se estabilizar. Para obter esta correção, a equação diferencial (2.7) foi ajustada por um fator multiplicativo $\left(1 - \frac{P}{k}\right)$, que constitui uma parcela de decréscimo da taxa de crescimento populacional, inibindo a explosão demográfica que ocorria no modelo anterior.

Este modelo, conhecido como equação logística, é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = aP \left(1 - \frac{P}{k}\right), \quad (2.9)$$

com $k > 0$, onde k é a capacidade suporte, isto é, a capacidade máxima de indivíduos que o ambiente suporta.

Em 1976, Robert M. May retomou o modelo populacional de Verhulst e apresentou-o numa versão discreta no seu trabalho “Modelo Simples de Matemática com Dinâmica muito Complicada” [20] e [23], sob a forma

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.10)$$

onde

$r = a + 1$ é a taxa específica de crescimento,

x_n é a capacidade suporte da população.

Uma maneira de mostrar o resultado (2.10) deduzido por May é do seguinte modo:

Considere o modelo contínuo

$$\frac{dP}{dt} = aP \left(1 - \frac{P}{k}\right), \quad (2.11)$$

O modelo discretizado de (2.11) de acordo com (MONTEIRO, 2006) é dado por:

$$P_{t+1} = P_t + aP_t \left(1 - \frac{P_t}{k}\right). \quad (2.12)$$

Considerando $P_t = \frac{K(a+1)}{a} x_n$ e $r = a + 1$, basta substituir estes resultados em (2.12), para obtermos (2.10).

May, em seu trabalho, demonstra que modelos não lineares, ainda que muito simples, podem apresentar uma vasta gama de comportamentos dinâmicos, que vão desde a existência de pontos estáveis até flutuações aparentemente aleatórias.

A equação (2.10) é o modelo do mapa logístico estudada neste trabalho.

Consideramos o mapa logístico

$$f(x_n) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.13)$$

com $r \in (0,4]$, $x_n \in [0,1]$ e $f : I \rightarrow I$, onde I é um intervalo real unitário.

O parâmetro r é fixo, pois não varia com o tempo e x_n é a variável representando a quantidade de indivíduos da população máxima.

O gráfico da equação logística é uma parábola e pode ser obtido por iteração da equação (2.13) cujo vértice (ponto máximo) têm coordenadas $x_n = \frac{1}{2}$ e $x_{n+1} = \frac{r}{4}$.

Analicamente as coordenadas obtêm-se derivando (2.13) e igualando a zero, ou seja,

$$f'(x_n) = r - 2rx_n = 0 \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{2}.$$

Substituindo este resultado na equação logística, obtemos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = r\left(\frac{1}{2}\right) - r\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{r}{4}.$$

Quando $r = 4$, o vértice da parábola logística está em $x_{n+1} = 1$; logo se $r > 4$ a condição que x_n esteja no intervalo $[0,1]$ deixa de ser satisfeita. Por outro lado, se $r = 0$ a parábola reduz-se ao eixo horizontal e para valores negativos de r a concavidade da parábola é invertida, o que também leva x_n a valores fora do domínio.

A partir da análise da equação (2.13), observa-se que a equação determina a variável x_{n+1} a partir de x_n . A evolução da variável depende do parâmetro de controle r . É fácil ver que o valor máximo de x_n é 1 e quando x_n é próximo de 1, x_{n+1} será pequeno. Entretanto, quando $x_n \approx 0$, x_{n+1} será proporcional ao parâmetro de controle r .

Assim, considerando x_n como o número de indivíduos em uma população, r pode estar relacionado a uma taxa combinada de reprodução e de morte devido à falta de alimentos, condições climáticas, epidemias ou outros parâmetros a que esta população está submetida num determinado ambiente.

2.6 Estabilidade dos Pontos Fixos da Equação Logística

Considere a equação $f(x_n) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$, com $r > 0$, fazendo

$$f(x^*) = x^*,$$

obtemos:

$$f(x^*) = x^* = rx^*(1 - x^*),$$

ou seja,

$$rx^{*2} - x^*(r - 1) = 0 \Leftrightarrow x^*[rx^* - (r - 1)] = 0,$$

portanto,

$$x^*_1 = 0 \text{ e } x^*_2 = 1 - \frac{1}{r}.$$

Os autovalores associados à equação são dados pela derivada primeira de acordo com (MONTEIRO, 2006).

$$\lambda = [f'(x^*)] = \left[\frac{df(x_n)}{dx_n} \right]_{x_n=x^*} = [r - 2rx_n]_{x_n=x^*}.$$

Assim, para

$$x^*_1 = 0, \text{ tem-se } \lambda_1 = r,$$

$$x^*_2 = 1 - \frac{1}{r}, \text{ tem-se } \lambda_2 = 2 - r.$$

De acordo com o **Teorema 2.4.1**, a análise da estabilidade dos pontos fixos resulta em:

a) Se $0 < r < 1$ o ponto $x^*_1 = 0$ é assintoticamente estável, pois

$$\lambda_1 = r < 1 \text{ e}$$

para $x^*_2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) < 0$ é instável, pois

$$\lambda_2 = (2 - r) > 1.$$

b) Se $r = 1$, $x^*_1 = x^*_2 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (nada se pode afirmar), então segue pelo **Teorema 2.4.1** que

$$f''(x^*_1) = f''(x^*_2) = -2r = -2 \neq 0,$$

logo, ambos são instáveis.

c) Se $r > 1$, o ponto $x^*_1 = 0$ é instável, pois

$$\lambda_1 = r > 1 \text{ e}$$

para $x^*_2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) > 0$ é assintoticamente estável se

$$|\lambda_2| = |2 - r| < 1 \Leftrightarrow 1 < r < 3.$$

d) Se $r = 3$ o ponto $x^*_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ e $\lambda_2 = 2 - r = -1$ (nada se pode afirmar), então segue pelo **Teorema 2.4.1** que

$$-2f'''(x^*_2) - 3[f''(x^*_2)]^2 = -2f'''\left(\frac{2}{3}\right) - 3\left[f''\left(\frac{2}{3}\right)\right] = 0 - 3[-6] = 18 > 0,$$

logo,

$$x^*_2 = \frac{2}{3} \text{ é instável.}$$

Assim, para $r \geq 3$ ambos os pontos fixos x^*_1 e x^*_2 são instáveis, a órbita estável deixa de ser um ponto fixo e passa a oscilar em ciclos periódicos, também conhecido como ciclo limite, ou oscilar de tal modo a apresentar um comportamento irregular ou aperiódico, quando manifesta a presença do caos.

2.7 Comportamento Assintótico do Mapa Logístico

O Mapa Logístico segundo (BASSANEZI, 2011, p.32) “é um dos mais simples exemplos de equações de diferenças não lineares e pode-se notar a complexidade de seu desenvolvimento quando se varia o parâmetro r ”. Isto é, apresenta uma sucessão de fenômenos como: transiente, atrator, bifurcação, caos, janelas periódicas, etc., à medida que o parâmetro de controle r muda de valor.

Assim, nosso objetivo é estudar a evolução deste mapa para alguns valores do parâmetro r caracterizando cada um desses fenômenos, listado acima. Para isto, plotamos os mapas usando o software Excel e Maxima para alguns valores específicos de r .

O estudo da evolução de uma órbita do mapa logístico (2.13) necessita de duas informações: condição inicial x_0 e o valor do parâmetro r .

2.7.1 Espaço de Estados (ou Espaço de Fases) e Atrator

O espaço de estados, ou espaço de fases de um sistema dinâmico, é um espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são o eixo- x_1 , eixo- x_2, \dots , eixo- x_k .

Um estado é representado como um ponto com coordenadas $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$ nesse espaço. Conforme o tempo passa, esse ponto se move, sendo sua evolução temporal determinada pelas k equações de diferenças de primeira ordem.

A dimensão do espaço de fases equivale ao número de equações de primeira ordem necessárias para descrever o sistema, que é igual ao número de variáveis de estado. Por exemplo, um plano é o espaço de fases para um sistema formado por duas equações de primeira ordem. (MONTEIRO, 2006).

O sistema ao evoluir no espaço de fases, traça uma órbita que é conhecida como órbita de fases do sistema. Em determinados sistemas a evolução dessas órbitas tende a ficar limitada a uma região específica do espaço. Ainda que busquemos afastar o sistema dessa região ele é atraído de volta à mesma. Quando isso ocorre, a órbita é chamada de atrator do sistema. (ECKMANN, 1981).

No mapa logístico observamos três tipos diferentes de atratores: atrator tipo ponto fixo, quando o sistema evolui para um único ponto; atrator periódico ou ciclo limite, quando se estabiliza numa repetição de dois ou mais pontos e atrator caótico quando não há um padrão de repetição, neste caso as órbitas ficam confinadas (atraídas) a uma região limitada conhecida como região caótica, essas órbitas são exponencialmente sensíveis às condições iniciais.

O período que antecede o aparecimento do atrator é chamado de transiente, que são os valores das primeiras iteradas. Após o transiente observam-se algumas dinâmicas típicas assumidas pelas órbitas do mapa como: divergência, periodicidade e caoticidade.

Os dois exemplos a seguir ilustram o comportamento transiente e o atrator.

Exemplo 2.7.1.1 Estude o comportamento assintótico da equação logística

$x_{n+1} = 0,5x_n(1 - x_n)$, $x_n \in [0,1]$ para $x_0 = 0,1$, que descreve uma população medida em milhares de indivíduos onde a capacidade suporte desse habitat é de 10 000 indivíduos.

Solução.

Os pontos fixos são $x^*_1 = 0$ e $x^*_2 = 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{0,5} = -1$.

Para $x^*_1 = 0$, $\lambda_1 = 0,5 < 1$, o ponto fixo é assintoticamente estável e para $x^*_2 = -1$, $\lambda_2 = 2 - r = 2 - 0,5 = 1,5 > 1$, o ponto fixo é instável.

Tomando a condição inicial $x_0 = 0,1$ e iterando a equação, obtemos os gráficos:

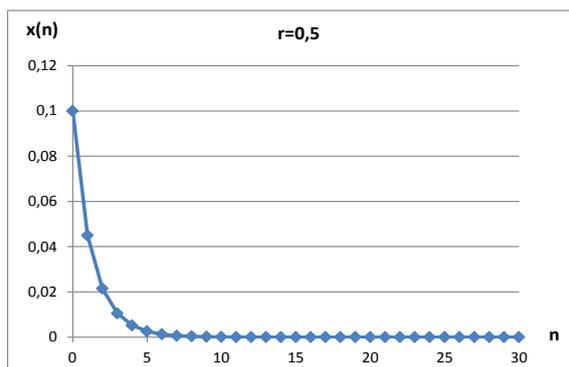


Figura 2.1: Evolução temporal para $r = 0,5$ e $x_0 = 0,1$

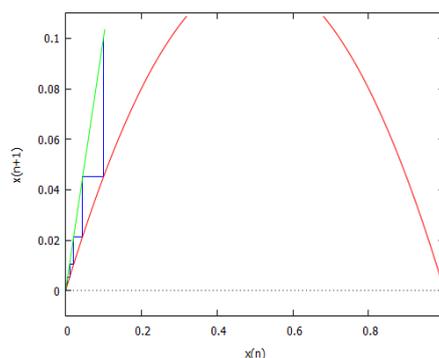


Figura 2.2: Cobweb para $r = 0,5$ e $x_0 = 0,1$

Observe que a órbita converge de forma monótona para o ponto fixo $x^*_1 = 0$ o atrator, figura (2.1) e (2.2). Analisando a figura (2.1), notamos que a população inicial de 1000 indivíduos extinguiu a partir do sexto ano aproximadamente, ou seja, $x_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

■

Exemplo 2.7.1.2 Estude o comportamento assintótico da equação logística

$x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)$, $x_n \in [0,1]$ para $x_0 = 0,1$, que descreve uma população medida em milhares de indivíduos onde a capacidade suporte desse habitat é de 10 000 indivíduos.

Solução

Os pontos fixos são $x^*_1 = 0$ e $x^*_2 = 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{2} = 0,5$.

Para $x^*_1 = 0$, $\lambda_1 = 2 > 1$, o ponto fixo é instável e para $x^*_2 = 0,5$,

$\lambda_2 = 2 - r = 2 - 2 = 0 < 1$, o ponto fixo é assintoticamente estável.

Tomando a condição inicial $x_0 = 0,1$ e iterando a equação, obtemos os gráficos:

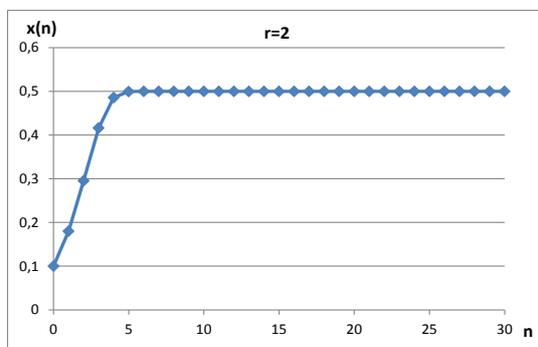


Figura 2.3: Evolução temporal para $r = 2$ e $x_0 = 0,1$.

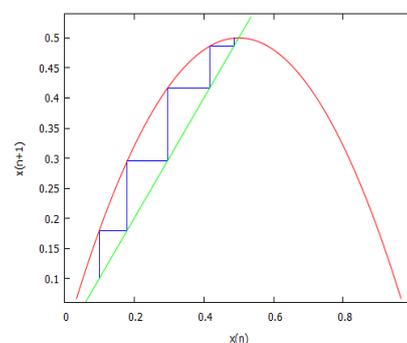


Figura 2.4: Cobweb para $r = 2$ e $x_0 = 0,1$.

Observe que a órbita converge de forma monótona para o ponto fixo $x^*_2 = 0,5$ o atrator, figura (2.3) e (2.4). Analisando a figura (2.3), notamos que a população inicial de 1000 indivíduos cresce e atinge um estado estacionário com 5000 indivíduos aproximadamente, ou seja, $x_n \rightarrow 5000$ quando $n \rightarrow \infty$. ■

2.7.2 Bifurcação

Uma bifurcação é, de modo geral, qualquer alteração qualitativa num ponto de equilíbrio ou órbita periódica, quando um parâmetro do sistema atinge um determinado valor crítico. Esta alteração qualitativa pode ser tanto a criação ou destruição de um ponto fixo ou de uma órbita periódica como a mudança de sua estabilidade. Em outras palavras, bifurcação é uma alteração qualitativa na dinâmica do sistema para valores específicos dos parâmetros. Estes valores são os pontos de bifurcação. (VIANA, 2011).

Neste sentido, chamamos de bifurcação do mapa logístico as alterações qualitativas da dinâmica desse mapa quando variamos o parâmetro r de tal modo a atingir o ponto de bifurcação, onde presenciaremos atratores periódicos com período $p > 1$ aos quais dão origem às órbitas periódicas ou ciclo limite.

Em particular, trataremos da bifurcação de duplicação de período, também chamada de bifurcação “flip”, figura (2.5), esta ocorre quando uma órbita de período n estável torna-se instável no ponto de bifurcação $p = p_B$, de tal forma que surge uma nova órbita estável de período $2n$ para valores de p superiores a p_B .

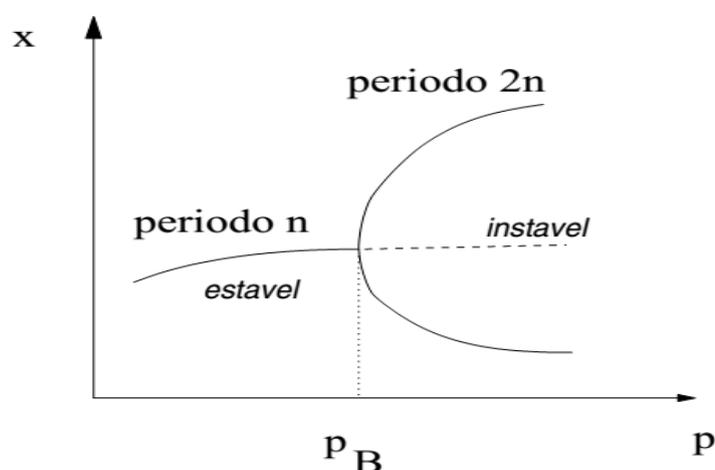


Figura 2.5: Bifurcação de duplicação do período. [34]

Os dois exemplos a seguir ilustram este fato.

Exemplo 2.7.2.1 Estude o comportamento assintótico da equação logística

$x_{n+1} = 3,2x_n(1 - x_n)$, $x_n \in [0,1]$ para $x_0 = 0,1$, que descreve uma população medida em milhares de indivíduos onde a capacidade suporte desse habitat é de 10 000 indivíduos.

Solução.

Os pontos fixos são $x^*_1 = 0$ e $x^*_2 = 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{3,2} = 0,6875$.

Para $x^*_1 = 0$, $\lambda_1 = 3,2 > 1$, o ponto fixo é instável e para $x^*_2 = 0,6875$,

$\lambda_2 = 2 - 3,2 = -1,2$, cujo módulo é maior que um, logo, o ponto fixo é instável.

Tomando a condição inicial $x_0 = 0,1$ e iterando a equação, obtemos os gráficos:

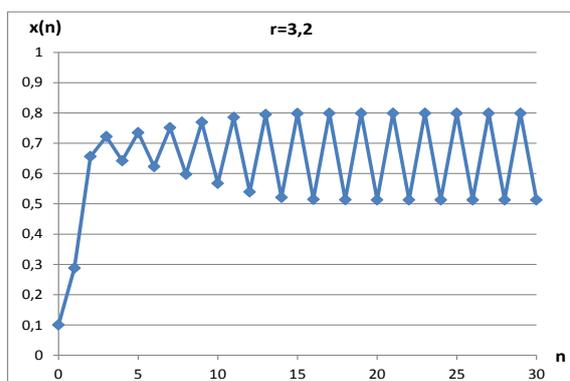


Figura 2.6: Evolução Temporal

$r = 3,2$ e $x_0 = 0,1$.

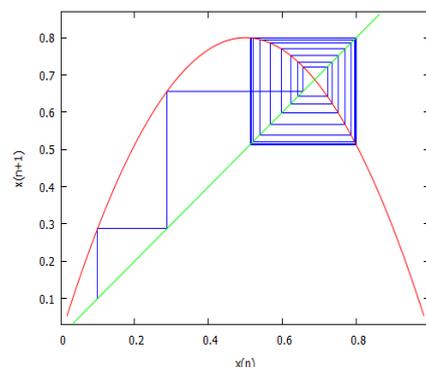


Figura 2.7: Cobweb para

$r = 3,2$ e $x_0 = 0,1$.

Observe que para $r = 3,2$ o ponto fixo $x^*_2 = 1 - \frac{1}{r}$ perde a estabilidade e as iterações convergem para uma órbita de período-2, ou 2-ciclo, em torno desse ponto fixo $x^*_2 = 0,6875$, figura (2.6) e (2.7). Após, cerca de 15 iterações sucessivas a órbita oscila entre $x_1 \approx 0,799$ e $x_2 \approx 0,513$, que são os atratores periódicos. Neste caso, dizemos que ocorreu uma bifurcação, ou seja, o ponto fixo $x^*_2 = 1 - \frac{1}{r}$ que era estável no intervalo $1 < r < 3$ perde a estabilidade bruscamente quando o parâmetro r é variado para $r = 3,2$, dando origem a uma órbita de período-2: $\{x_1, x_2\}$.

Analisando a figura (2.6), notamos que a população inicial de 1000 indivíduos cresce até atingir um estado estacionário ciclo limite, isto é, ela oscila alternando entre uma população maior em uma geração e uma população menor na geração seguinte, ou seja, x_n varia entre os valores 7990 e 5130 aproximadamente quando $n \rightarrow \infty$. ■

Exemplo 2.7.2.2 Estude o comportamento assintótico da equação logística

$x_{n+1} = 3,45x_n(1 - x_n)$, $x_n \in [0,1]$ para $x_0 = 0,1$, que descreve uma população medida em milhares de indivíduos onde a capacidade suporte desse habitat é de 10 000 indivíduos.

Solução.

Os pontos fixos são $x^*_1 = 0$ e $x^*_2 = 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{3,45} \approx 0,71$.

Para $x^*_1 = 0$, $\lambda_1 = 3,45 > 1$, o ponto fixo é instável e para $x^*_2 \approx 0,71$,

$\lambda_2 = 2 - 3,45 = -1,45$, cujo módulo é maior que um, logo, o ponto fixo é instável.

Tomando a condição inicial $x_0 = 0,1$ e iterando a equação, obtemos os gráficos:

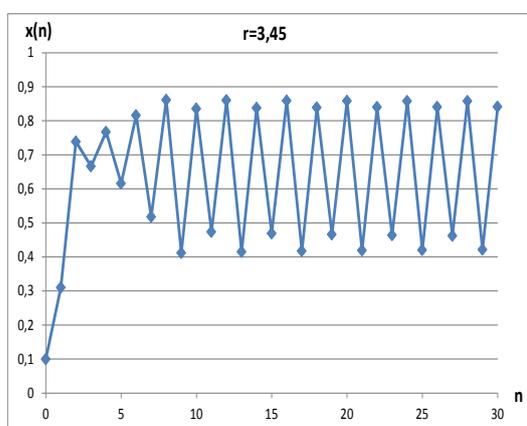


Figura 2.8: Evolução temporal para $r = 3,45$ e $x_0 = 0,1$.

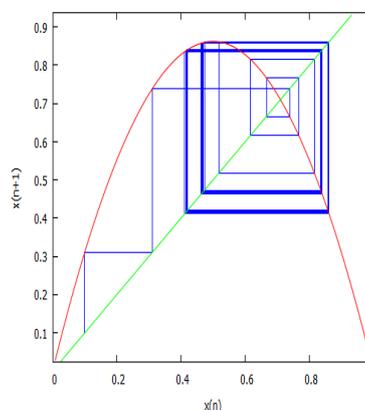


Figura 2.9: Cobweb para $r = 3,45$ e $x_0 = 0,1$.

Observe que para $r = 3,45$ as iterações convergem para uma órbita de período-4, ou 4-ciclo, em torno desse ponto fixo $x^*_2 \approx 0,71$, figura (2.8) e (2.9). Após, cerca de 14 iterações sucessivas a órbita oscila entre $x_1 \approx 0,84$, $x_2 \approx 0,47$, $x_3 \approx 0,86$ e $x_4 \approx 0,42$ que são os atratores periódicos. Neste caso, ocorreu outra bifurcação, além daquela já ocorrida anteriormente com o período-2, isto é, a órbita anterior de período-2 torna-se instável e surge um 4-ciclo.

Analisando a figura (2.8), notamos que a população inicial de 1000 indivíduos aproxima-se de um ciclo que agora se repete a cada quatro gerações, o ciclo anterior dobrou seu período para período-4, ou seja, x_n varia entre os valores 8400, 4700, 8600 e 4200 aproximadamente quando $n \rightarrow \infty$. ■

Outras bifurcações sucessivas vão produzir períodos $p = 8, 16, 32$ e assim por diante, gerando órbitas de período 2^m , com $m \in \mathbb{N}$.

Para $m \rightarrow \infty$ o período do ciclo é infinito, sendo, portanto, aperiódico. Nesse caso, a órbita passa a comportar-se caoticamente, isso acontece para o parâmetro de controle indicado por $r = r_\infty \approx 3,57$, também conhecido por ponto de acumulação dos ciclos 2^m , onde se entra num regime que Li e Yorke designaram por caótico.

“A cascata de bifurcações de duplicação do período pode ser encarada como uma “rota para o caos”, no sentido de que podemos passar de um regime periódico para o caótico variando continuamente um parâmetro. Há, no entanto, outras rotas pelas quais o caos pode aparecer pela variação de um parâmetro.” (VIANA, 2011, p.92).

2.7.3 Caos

Em 1963, o meteorologista Edward Lorenz por meio de suas experiências estudou modelos para estimar previsão do tempo. Lorenz observou que as soluções das equações não convergiram para um equilíbrio ou estado periódico, mas oscilavam de forma aperiódica ou irregular. Além disso, partindo de condições ligeiramente próximas os resultados logo se tornariam totalmente diferente. Esta dependência sensível às condições iniciais foi denominada por Lorenz de Efeito Borboleta conforme [17] e [31]. Em 1972, este apresentou uma palestra intitulada “O bater das asas de uma borboleta no Brasil pode ocasionar um tornado no Texas?”. [34]

Li e Yorke em 1975, inspirado pelo trabalho de Lorenz, publicou um artigo intitulado “Período Três implica Caos” [16], onde a palavra “caos” apareceu pela primeira vez na literatura científica com a acepção atualmente empregada na teoria dos sistemas dinâmicos. Em 1976, May publicou um artigo intitulado “Modelo Simples de Matemática com Dinâmica muito Complicada” [20], que popularizou várias propriedades interessantes do mapa logístico. Este mapa entre os valores 3,5699 e 4, exibe predominantemente comportamento caótico. (VIANA, 2011).

Caos em sistema dinâmico é um comportamento irregular ou aperiódico desse sistema tornando difícil a previsão do sistema à longo prazo e com alta sensibilidade às condições iniciais, isto é, condições iniciais originalmente muito próximas geram órbitas que divergem exponencialmente.

Estas são as duas propriedades básicas que caracterizam o comportamento caótico, conforme [1] e [34].

Este comportamento, embora seja aperiódico e imprevisível, a sua dinâmica é governada por equações diferenciais ou de diferenças determinísticas simples, o que leva à caracterização de caos determinístico.

“Atualmente, muitas áreas do conhecimento têm se deparado com o caos, dentre as quais vale destacar a engenharia, a medicina, a ecologia, a biologia e a economia.” (SAVI, 2006, p.24).

Discutiremos separadamente as duas propriedades.

2.7.3.1 Aperiodicidade

Uma órbita periódica de um modelo discreto, após certo número de iterações, um determinado ponto da órbita volta ao ponto de partida:

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_0.$$

Neste caso, a órbita apresenta um padrão bem definido permitindo saber quais pontos que a mesma irá visitar, facilitando muito fazermos previsões futuras sobre o modelo. Já uma órbita caótica, não apresenta um padrão identificável de comportamento, ou seja, a órbita não converge a nenhum ponto, nem a um ciclo e também não diverge para o infinito. As iteradas do mapa ficam oscilando de tal modo a apresentar um comportamento irregular ou aperiódico, figura (2.10). Esta característica dificulta grandemente qualquer possibilidade de previsão do comportamento futuro das iterações de uma órbita caótica, conhecido o estado presente. (VIANA, 2011).

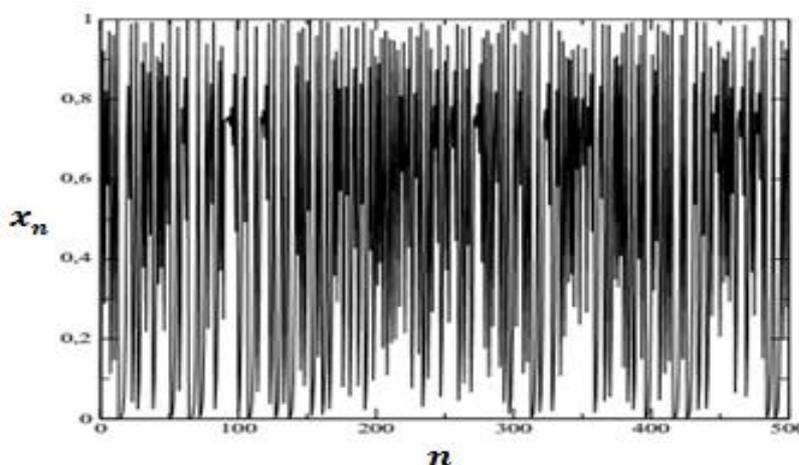


Figura 2.10: Iteração do mapa logístico para $r = 4$. [34]

O exemplo a seguir ilustra este fato.

Exemplo 2.7.3.1.1 Estude o comportamento assintótico da equação logística

$x_{n+1} = 3,59x_n(1 - x_n)$, $x_n \in (0,1)$ para $x_0 = 0,1$, que descreve uma população medida em milhares de indivíduos onde a capacidade suporte desse habitat é de 10 000 indivíduos.

Solução.

Os pontos fixos são $x^*_1 = 0$ e $x^*_2 = 1 - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{3,59} \approx 0,72$.

Para $x^*_1 = 0$, $\lambda_1 = 3,59 > 1$, o ponto fixo é instável e para $x^*_2 \approx 0,72$,

$\lambda_2 = 2 - 3,59 = -1,59$, cujo módulo é maior que um, logo, o ponto fixo é instável.

Tomando a condição inicial $x_0 = 0,1$ e iterando a equação, obtemos os gráficos:

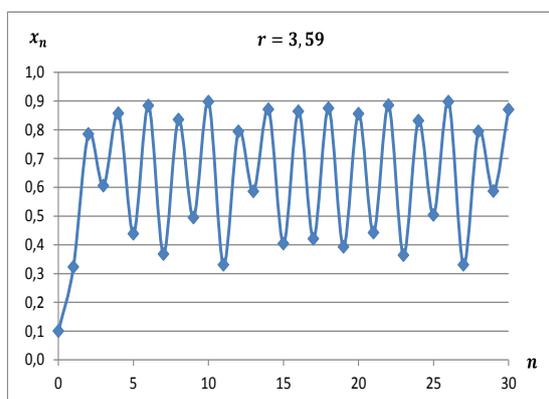


Figura 2.11: Evolução temporal

$r = 3,59$ e $x_0 = 0,1$.

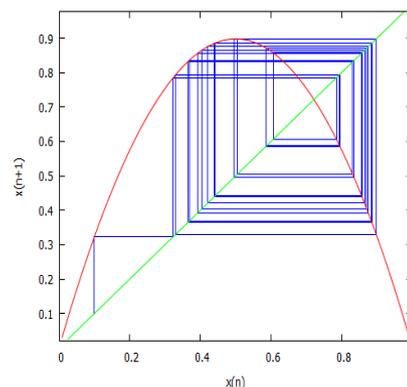


Figura 2.12: Cobweb para

$r = 3,59$ e $x_0 = 0,1$.

Observe que para o valor de $r = 3,59$ as iterações não convergem para uma órbita periódica em torno do ponto fixo $x^*_2 \approx 0,72$, elas se tornam aperiódicas, figura (2.11) e (2.12). Neste caso, há um regime caótico que se inicia a partir de $r = r_\infty \approx 3,57$, conforme (VIANA, 2011).

Analisando a figura (2.11), notamos que a população inicial de 1000 indivíduos cresce até aproximar-se de 8000 indivíduos quando então passa a oscilar de forma aperiódica, isto é, a população flutua entre um grande número de valores possíveis dificultando encontrar qualquer estimativa para a população à longo prazo. ■

Para ver os comportamentos do mapa logístico para todos os valores de r via duplicação de períodos, plota-se o diagrama de bifurcação que mostra a existência de uma rota para o caos, a chamada cascata de duplicação de períodos ou rota de Feigenbaum.

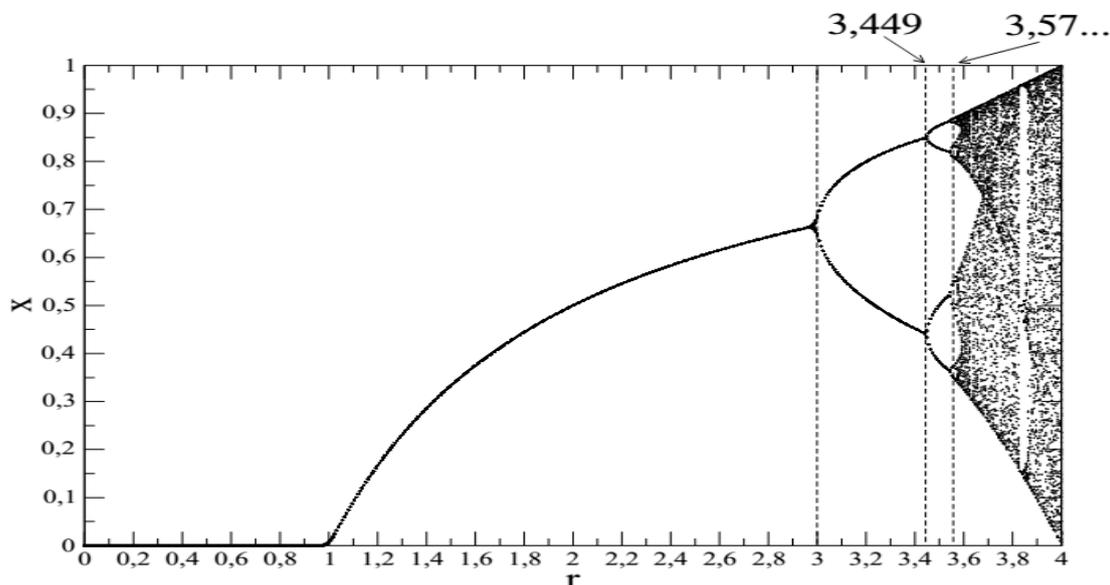


Figura 2.13: Gráfico Diagrama de bifurcação. [34]

O diagrama mostra o início, a evolução e o fim dos atratores. Algumas observações importantes podem ser feitas. Por exemplo, para $0 < r < 3$ temos a órbita de período-1, pois para $0 < r < 1$ e para $1 < r < 3$ o mapa tem um ponto fixo atrator respectivamente em $x = 0$ e $x = \frac{r-1}{r}$. Para $3 \leq r < 3,449$ órbitas de período-2, para $3,449 \leq r < 3,57$ ocorre a famosa cascata de bifurcações de períodos 2^m , com $m \in \mathbb{N}$. Aproximadamente a partir de $r = 3,57$, passa a ocorrer órbitas de todos os períodos, onde se inicia o regime caótico.

2.7.3.2 Sensibilidade às Condições Iniciais

Uma característica visível que ocorre em regime caótico é a sensibilidade às condições iniciais. Para exemplificar este fato, observe a figura (2.14) construída para o mapa logístico com $r = 4$ e $n = 50$.

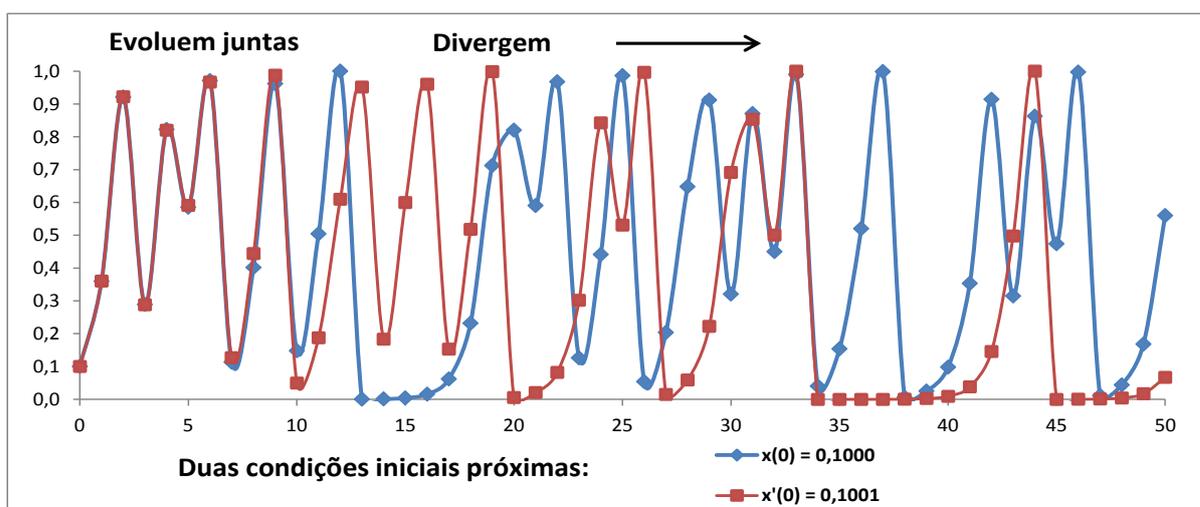


Figura 2.14: Iterações de uma órbita caótica do mapa logístico para $r = 4$ com condições iniciais muito próximas: $x_0 = 0,1000$ e $x'_0 = 0,1001$.

Na figura (2.14) observamos que tomando duas condições iniciais muito próximas uma da outra: $x_0 = 0,1000$ e $x'_0 = 0,1001$, as dez primeiras iteradas, mais ou menos, ambas as trajetórias permanecem próximas uma da outra. Entretanto, com o tempo depois de um número finito de iterações elas passam a se afastar, comportando-se de forma totalmente independente e fornecendo resultados completamente diferentes, devido ao regime caótico ser sensível às condições iniciais.

A evolução das trajetórias da órbita caótica também pode ser observada a partir dos resultados numéricos na tabela (2.1).

Número de iterações	Condição inicial $x(0) = 0,1000$	Condição inicial $x'(0) = 0,1001$
0	0,1000	0,1001
1	0,3600	0,3603
2	0,9216	0,9220
3	0,2890	0,2878
4	0,8219	0,8199
5	0,5854	0,5907
10	0,9708	0,9671
15	0,1133	0,1272
20	0,4020	0,4441
25	0,9616	0,9875
30	0,1478	0,0494
35	0,5039	0,1877
40	0,9999	0,6098
45	0,0002	0,9518
50	0,0010	0,1837

Tabela 2.1: Resultados das iteradas do mapa logístico para $r = 4$ com condições iniciais muito próximas: $x_0 = 0,1000$ e $x'_0 = 0,1001$.

Segundo Viana (2011), não importa qual a precisão que seja usada na especificação da segunda condição inicial, esta sempre afastar-se-á da outra órbita após certo número finito de iterações. Assim, o desconhecimento de uma condição inicial com precisão nos traz novamente ao problema da previsibilidade de um sistema caótico, implicando na impossibilidade de fazermos previsões futuras sobre um sistema caótico.

O afastamento das trajetórias observado na figura (2.14) e na tabela (2.1) “ocorre a uma taxa exponencial, à qual nos referimos como expoente de Lyapunov λ da órbita. Se λ for positivo, temos uma marca registrada da ocorrência de caos.” (VIANA, 2011. p.103).

Este expoente consiste basicamente numa medida da divergência exponencial de duas condições iniciais arbitrariamente próximas onde esta medida quantifica a dependência sensível às condições iniciais. Deste modo, expoentes de Lyapunov positivos indicam comportamento caótico, expoentes negativos ou nulos representam estabilidade (ciclos limite). Aprofundamento vide [34].

O expoente de Lyapunov é em homenagem ao matemático russo Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918).

As observações sobre a dependência sensível às condições iniciais podem ser escritas numa forma mais matematicamente precisa através da definição a seguir.

Definição 2.7.3.2.1 O modelo discreto unidimensional $f: J \rightarrow J$, com $J \subseteq \mathbb{R}$ apresenta dependência sensível às condições iniciais se existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in J$ e qualquer vizinhança N centrada em x , existe um $y \in N$ e $n \geq 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

“Em outros termos, o modelo exibirá dependência sensível às condições iniciais se existirem pontos arbitrariamente próximos a qualquer ponto x que separar-se-ão de x por ao menos uma distância delta sob iterações do modelo.” (VIANA, 2012, p. 418).

2.7.4 Janelas Periódicas

O diagrama de bifurcações do modelo logístico discreto figura (2.15) mostra a ampliação da região caótica que inicia no valor de acumulação das bifurcações $r_\infty \approx 3,57$ e termina abruptamente em $r = 4$. Nesse intervalo, boa parte dos valores de r parecem dar origem a órbitas caóticas (as bandas escuras observadas), é bastante evidente a existência de “janelas” (as manchas brancas), onde o comportamento volta a ser periódico. (VIANA, 2011).

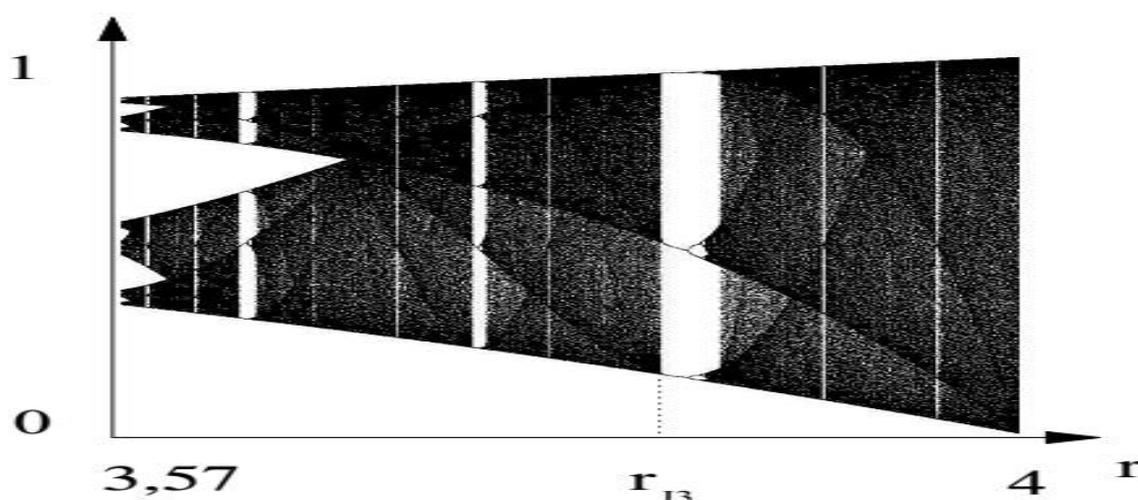


Figura 2.15: Diagrama de bifurcações do modelo logístico discreto, na região predominantemente caótica: $r_\infty < r \leq 4$. [34]

No diagrama da figura (2.15), para $r_{j3} = 3,8284 \dots < r < 3,8415 \dots$, o mapa logístico apresenta uma órbita assintoticamente estável de período-3, que corresponde à maior janela observada no diagrama de órbitas para $r > r_\infty$. Esta janela é denominada de “janela de período-3”.

Segundo (MONTEIRO, 2006), aumentando progressivamente o valor de r a partir de $r \approx 3,8415$, surge novamente uma cascata de bifurcações flip, originando ciclos assintoticamente estáveis com períodos $3, 6, 12, \dots, 3 \times 2^k, \dots$ para $k \in \mathbb{N}$. Esta cascata se acumula no ponto de acumulação $r'_\infty \approx 3,8495$. A partir desse valor, nascem três atratores caóticos aos quais dão origem a três bandas caóticas conforme pode ser observadas na figura (2.15).

A janela de período-3 é de suma importância, pois a existência da órbita de período três leva a outras órbitas periódicas de todos os períodos, conforme mostrado pelo teorema de Li e Yorke em 1975, vide [16]. Mais formalmente, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.7.4.1 (Li e Yorke). Suponhamos que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua e que f tem um ponto periódico de período três. Então, f também tem pontos periódicos de todos os outros períodos.

Demonstração vide [5].

“Li e Yorke também mostraram que, para tal mapa com período 3, existe um conjunto não enumerável de órbitas que permanecem limitadas, são não periódicas e divergem de outras órbitas que partem de uma condição inicial arbitrariamente próxima. Eles introduziram o termo caos para caracterizar essa situação.” (MONTEIRO, 2006, p. 402).

De acordo com (VIANA, 2011) o resultado do teorema de Li e Yorke foi obtido de maneira independente de outro teorema, anterior e mais geral, o teorema de Sarkovskii publicado em 1964 por A. N. Sarkovskii numa revista de pouca divulgação, onde provou que se um mapa unidimensional tiver órbita com determinado período, então existirão órbitas com outros períodos.

Antes de apresentarmos o teorema, vamos definir o ordenamento de Sarkovskii (\prec), que é um modo de ordenar todos os números inteiros positivos e consiste-se no fato de que todo inteiro positivo pode ser escrito na forma $2^k \times n$, onde n é um inteiro ímpar, para algum inteiro não negativo k .

O ordenamento de Sarkovskii é o seguinte:

$$\begin{aligned} 3 &\prec 5 \prec 7 \prec \dots 2 \times 3 \prec 2 \times 5 \prec 2 \times 7 \prec \dots \\ \dots 2^2 \times 3 &\prec 2^2 \times 5 \prec 2^2 \times 7 \prec \dots 2^3 \times 3 \prec 2^3 \times 5 \prec 2^3 \times 7 \prec \dots \\ \dots 2^3 &\prec 2^2 \prec 2^1 \prec 1, \end{aligned}$$

onde $m \prec n$ significa que m precede a n em tal ordenamento. (VIANA, 2011).

Teorema 2.7.4.2 (Sarkovskii). Suponhamos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e que f tem um ponto periódico de período m . Se m precede n na ordem de Sarkovskii, então f tem também ponto periódico de período n .

Demonstração vide [5].

Em outras palavras se um modelo discreto unidimensional tiver uma órbita de período m , então existirão órbitas com todos os períodos n , tais que $m \prec n$ no ordenamento. Por exemplo, embora a existência de uma órbita de período-5 implica a não existência de um período-3, já que $3 \prec 5$, isto implica órbitas de todos os outros períodos inteiros.

Neste trabalho não tratamos teoricamente o caso bidimensional de sistemas não lineares, essa teoria pode ser encontrada em [22] e [34], entretanto apresentamos dois exemplos interessantes que apresentam comportamentos caóticos.

2.8 Modelo Competição entre Duas Espécies de Pássaros num mesmo Habitat

Analisamos um modelo sensível às condições iniciais, de competitividade entre duas espécies de pássaros num mesmo habitat. [11]

Exemplo 2.8.1 (Competição entre duas espécies de pássaros num mesmo habitat). Suponhamos que uma espécie de corujas manchadas C_n compete pela sobrevivência em um habitat que também suporta falcões F_n . Na ausência das outras espécies, cada espécie individual exibe livre crescimento proporcional ao seu tamanho inicial durante um intervalo de tempo n . Por outro lado, o efeito da presença de uma segunda espécie é o de diminuir a taxa de crescimento de outra espécie, e vice-versa. Vamos supor que esta diminuição seja aproximadamente proporcional ao número de possíveis interações entre as duas espécies. Estas considerações são modeladas pelas equações

$$\begin{aligned}C_{n+1} &= (1 + k_1)C_n - k_3 C_n F_n \\F_{n+1} &= (1 + k_2)F_n - k_4 C_n F_n\end{aligned}$$

onde k_1, \dots, k_4 são constantes positivas. Escolhendo seletivos valores para as constantes da proporcionalidade temos o sistema

$$\begin{aligned}C_{n+1} &= 1,2C_n - 0,001C_n F_n \\F_{n+1} &= 1,3 F_n - 0,002C_n F_n\end{aligned} \quad (2.14)$$

Solução.

Primeiramente encontramos os valores de equilíbrio. Se chamarmos os valores de equilíbrio C e F então devemos ter

$$C = C_{n+1} = C_n$$

e

$$F = F_{n+1} = F_n,$$

simultaneamente. Substituindo os valores de equilíbrio no sistema, obtemos:

$$\begin{aligned}C &= 1,2C - 0,001CF \\F &= 1,3 F - 0,002CF\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}0 &= 0,2C - 0,001CF = C(0,2 - 0,001F) \\0 &= 0,3 F - 0,002CF = F(0,3 - 0,002C)\end{aligned}$$

A primeira equação indica que não há nenhuma mudança na população de corujas se $C = 0$

ou $F = \frac{0,2}{0,001} = 200$. A segunda equação indica que não há mudança na população de falcões

se $F = 0$ ou $C = \frac{0,3}{0,002} = 150$, como representado na figura (2.16).

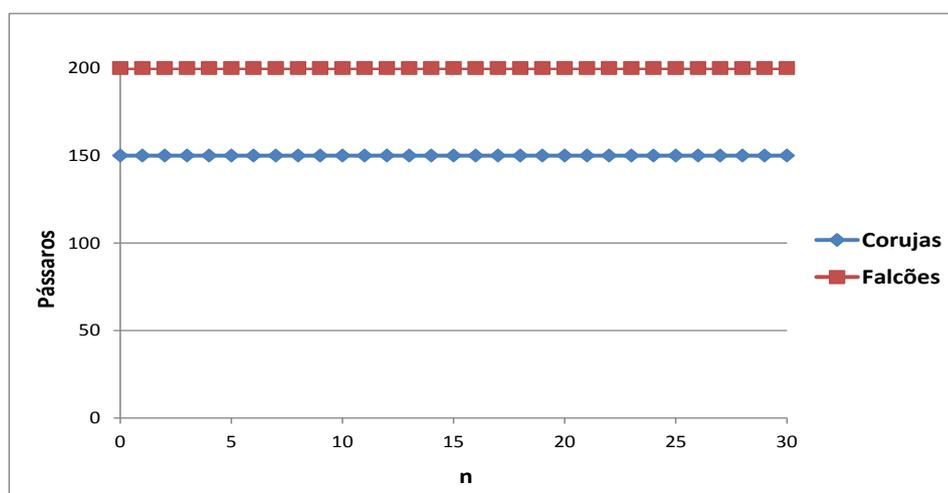


Figura 2.16: Evolução temporal de (2.14), com condições iniciais $C_0 = 150$ e $F_0 = 200$.

Observamos que existem valores de equilíbrio quando $(C, F) = (0, 0)$ e $(C, F) = (150, 200)$, pois nenhuma população irá mudar nesses pontos. Substituindo os valores de equilíbrio na equação (2.14) verificamos que o sistema de fato permanece em $(0, 0)$ e $(150, 200)$, onde qualquer um desses pontos representa os valores iniciais.

Agora, vamos analisar o que acontece na vizinhança dos valores de equilíbrio que temos encontrado. Vamos construir soluções numéricas a partir das três populações conforme mostra a tabela (2.2).

	Corujas	Falcões
Caso 1	151	199
Caso 2	149	201
Caso 3	10	10

Tabela: 2.2

Observamos que os dois primeiros valores aproximam-se do valor de equilíbrio $(150, 200)$, enquanto que o terceiro é próximo da origem.

Suponhamos que 350 pássaros entre corujas e falcões serão colocados em um habitat modelado pela equação (2.14). Já vimos que se 150 dos pássaros são corujas e os outros 200 pássaros são falcões nosso modelo prevê que as corujas permanecerão em 150 e os falcões em 200 para sempre.

Iterando a equação (2.14), com as condições iniciais mostradas na tabela (2.2) e plotando os gráficos obtemos os seguintes resultados:

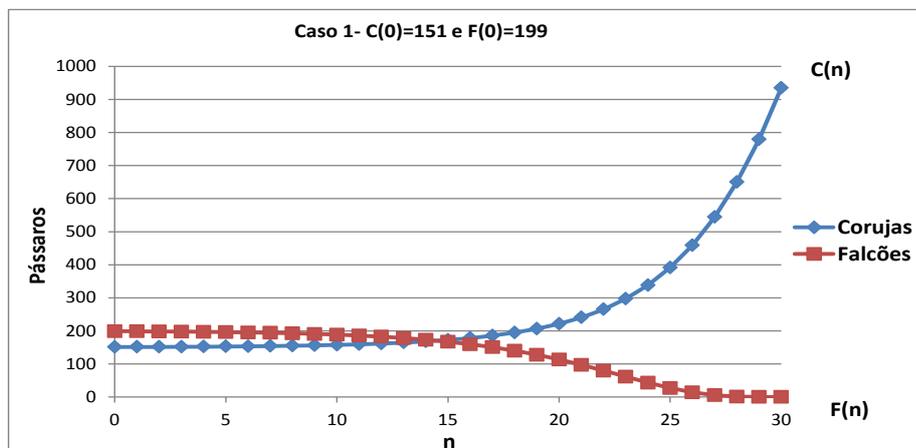
Caso 1:

Figura 2.17: Evolução temporal de (2.14), com condições iniciais $C_0 = 151$ e $F_0 = 199$.

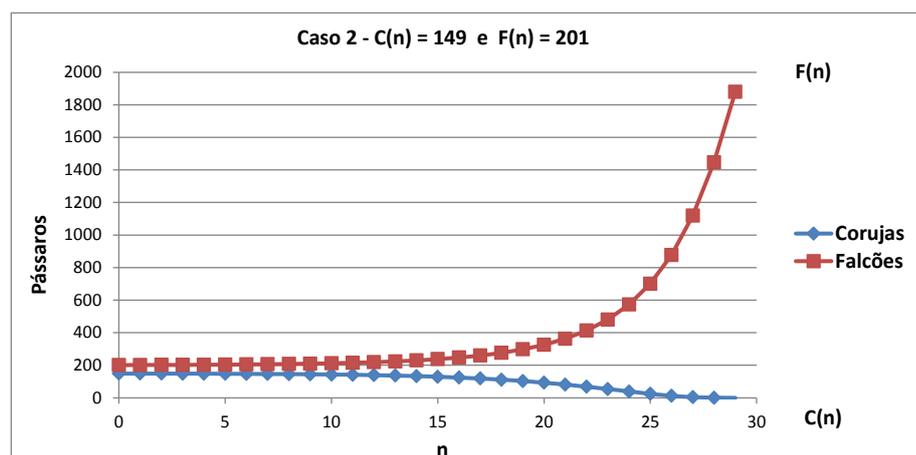
Caso 2:

Figura 2.18: Evolução temporal de (2.14), com condições iniciais $C_0 = 149$ e $F_0 = 201$.

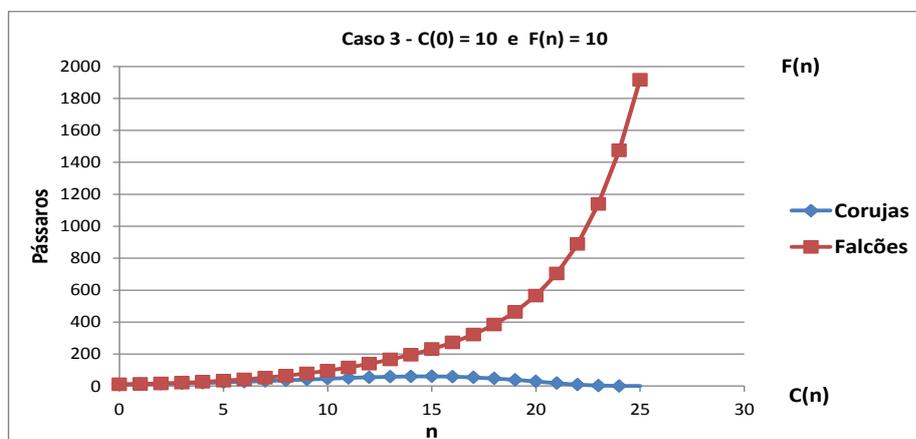
Caso 3:

Figura 2.19: Evolução temporal de (2.14), com condições iniciais $C_0 = 10$ e $F_0 = 10$.

Analisando os gráficos, temos as seguintes conclusões com relação ao comportamento das espécies de acordo com os dados referente aos três casos da tabela (2.2).

Primeiramente observamos que, em cada caso, uma das duas espécies eventualmente conduz a outra à extinção.

No primeiro caso, se um falcão é removido do habitat (deixando 199), em seguida o modelo prevê que as corujas vão crescer sem limites e os falcões desaparecerão.

De modo análogo para o segundo caso, se uma coruja é removida do habitat (deixando 149), em seguida o modelo prevê que os falcões vão crescer sem limites e as corujas desaparecerão.

Para o terceiro caso, se ambas as populações iniciam com 10 pássaros, em seguida o modelo prevê que os falcões vão crescer sem limites e as corujas desaparecerão.

Este modelo é extremamente sensível às condições iniciais. Os valores de equilíbrio são instáveis no sentido de que, se começarmos próximos de qualquer dos valores de equilíbrio, nós não permanecemos perto deles. Assim, o modelo prevê que a coexistência das duas espécies num mesmo habitat é altamente improvável, porque uma das duas espécies, eventualmente dominará o habitat. ■

2.9 Modelo Presa-Predador (Lotka-Volterra)

Volterra (1926) propôs pela primeira vez um modelo simples para a predação de uma espécie por outra, para explicar os níveis oscilatórios de certas capturas de peixe no mar Adriático. Se $x(t)$ representa a população de presas e $y(t)$ a de predador no tempo t , este modelo é regido por um sistema bidimensional de equações diferenciais como se segue:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases},$$

onde a, b, c, d são parâmetros constantes positivos. (MURRAY, 2002).

Este modelo foi estabelecido também por Lotka (1925) na mesma ocasião e independente de Volterra, analisando a dinâmica de drosófilas. (BASSANEZI, 2011).

Neste modelo, na ausência de predadores, a população de presas aumenta ilimitadamente.

Para corrigir este problema, acrescentou-se o efeito natural inibidor que o ambiente tem devido a suas limitações, sobre uma população crescente.

Um modelo presa-predador diferencial generalizado com o efeito inibidor do tipo proposto por (Verhulst, 1945) tanto para o predador quanto para presa é apresentado num trabalho por (GRAFTON - ECHENIQUE, 1994) e pode ser escrito como segue:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x(1-x) - b_1xy \\ \frac{dy}{dt} = a_2y(1-y) + b_2xy \end{cases}.$$

De acordo com (GRAFTON e ECHENIQUE, 1997), uma versão discreta desse modelo presa-predador contínuo foi proposta por (HALE e KOCAK, 1991; GRAFTON - ECHENIQUE, 1994). Também, essa versão discreta foi proposta por (GUMOWSKI e MIRA, 1980), mas incluía uma função exponencial nas equações conforme (GRAFTON - ECHENIQUE, 1994).

Assim, o modelo presa-predador discreto generalizado é definido pelas equações

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1x_n(1-x_n) - b_1x_ny_n \\ y_{n+1} = a_2y_n(1-y_n) + b_2x_ny_n \end{cases} \quad (2.15)$$

onde

x_n e y_n são as populações de presas e predadores, respectivamente, em um instante n e a_1, a_2, b_1, b_2 são parâmetros constantes positivos.

As premissas do modelo são:

- I) O ambiente suporta as populações x_n e y_n num intervalo de variação $[0,1]$.
- II) Os parâmetros a_1 e a_2 dizem respeito às taxas de crescimento de presas e predadores, respectivamente.
- III) Os parâmetros b_1 e b_2 dizem respeito às taxas que medem a relação de interação entre presas e predadores, respectivamente.
- IV) O número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das duas populações x_ny_n num instante n . Assim, em cada encontro, a taxa de crescimento da população de predadores é aumentada pelo termo $b_2x_ny_n$, por outro lado a taxa de crescimento da população de presas é diminuída pelo termo $-b_1x_ny_n$.

Nosso objetivo é estudar por meio de simulações gráficas os comportamentos desse sistema variando os parâmetros a_1, a_2, b_1 e b_2 para alguns valores. Como exemplos de interações entre predadores e presas podem citar: leões e zebras, raposas e coelhos, lincos e lebres, etc..

Exemplo 2.9.1 Estude o modelo discreto presa-predador com os seguintes parâmetros:

Presa: $x_0 = 0,5$; $a_1 = 1,8$ e $b_1 = 0,7$.

Predadores: $y_0 = 0,3$; $a_2 = 2,2$ e $b_2 = 0,5$.

Supondo que este modelo descreve anualmente as populações medidas em milhares de indivíduos, onde a capacidade suporte desse habitat é de 10 000 indivíduos para ambas às populações.

Solução.

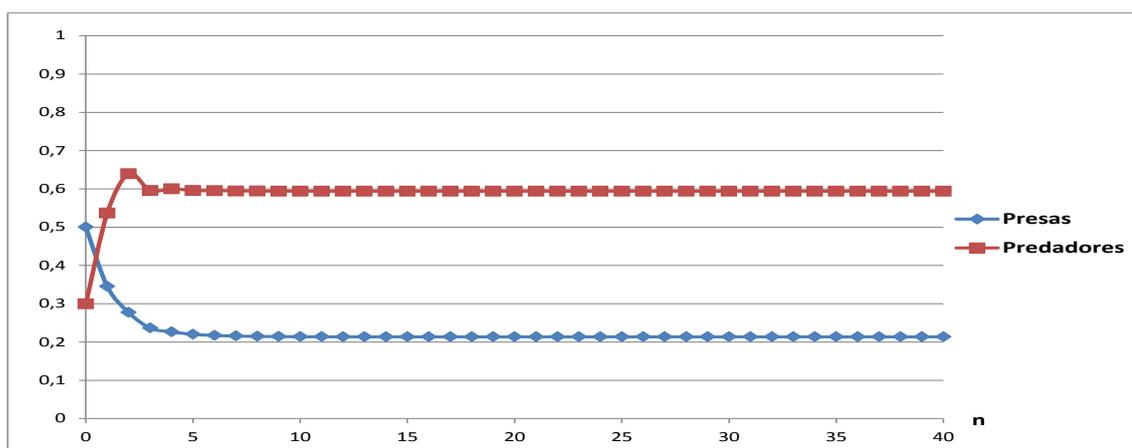


Figura 2.20: Evolução temporal do modelo presa-predador discreto em 40 anos.

No gráfico observamos que a iteração entre presas e predadores com populações iniciais respectivamente 5000 e 3000 indivíduos, a partir do sexto ano essas populações se estabilizarão respectivamente em valores aproximadamente a 2100 e 6000, isto é, o sistema apresenta uma dinâmica estável tanto para as presa quanto para os predadores. ■

Exemplo 2.9.2 Estude o modelo discreto presa-predador com os seguintes parâmetros:

Presa: $x_0 = 0,5$; $a_1 = 4$ e $b_1 = 0,7$.

Predadores: $y_0 = 0,3$; $a_2 = 2,3$ e $b_2 = 0,5$.

Supondo que este modelo descreve anualmente as populações medidas em milhares de indivíduos, onde a capacidade suporte desse habitat é de 10 000 indivíduos para ambas às populações.

Solução.

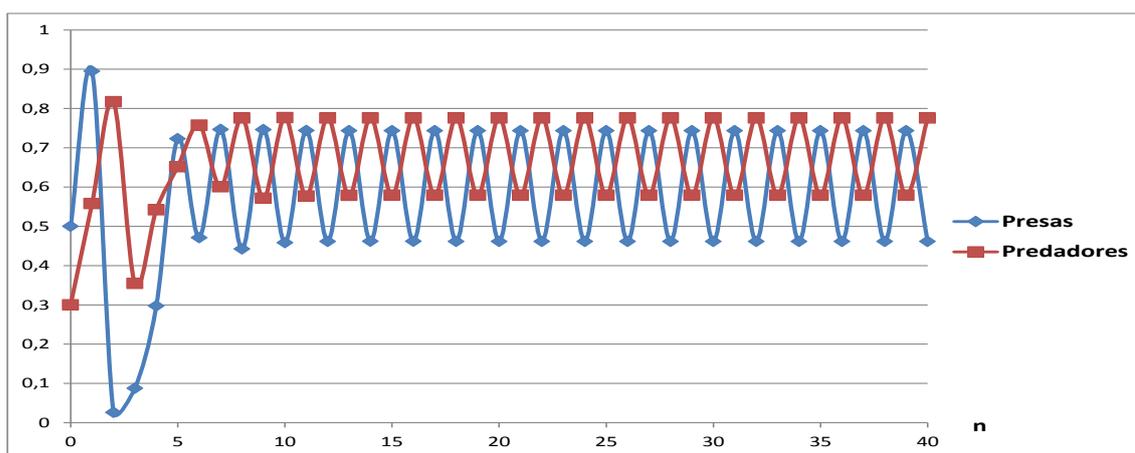


Figura 2.21: Evolução temporal do modelo presa-predador discreto em 40 anos.

No gráfico observamos que a iteração entre presas e predadores com populações iniciais respectivamente 5000 e 3000, a partir do décimo quarto ano a população de presa se estabilizará em valores aproximadamente a 4600 e 7400 alternadamente e a população de predadores se estabilizará em valores aproximadamente a 5800 e 7800 alternadamente, isto é, o sistema apresenta uma dinâmica estável de período-2, tanto para as presas quanto para os predadores.

Este resultado traduz-se da seguinte maneira: as presas quando em grande quantidade, provocam um crescimento do número de predadores no mesmo ano. Os predadores por sua vez, quando em grande quantidade, provocam uma diminuição do número de presas no ano seguinte. Por outro lado, as presas quando em pequena quantidade, provocam uma diminuição do número de predadores no mesmo ano. Os predadores por sua vez, quando em pequena quantidade, provocam um crescimento do número de presas no ano seguinte. A partir daí o ciclo começa novamente, pois os números de presas estão crescendo o que acarreta no crescimento dos predadores. ■

Exemplo 2.9.3 Estude o modelo discreto presa-predador com os seguintes parâmetros:

Presas: $x_0 = 0,5$; $a_1 = 3,8$ e $b_1 = 0,4$.

Predadores: $y_0 = 0,3$; $a_2 = 2,3$ e $b_2 = 0,1$.

Supondo que este modelo descreve anualmente as populações medidas em milhares de indivíduos, onde a capacidade suporte desse habitat é de 10 000 indivíduos para ambas às populações.

Solução.

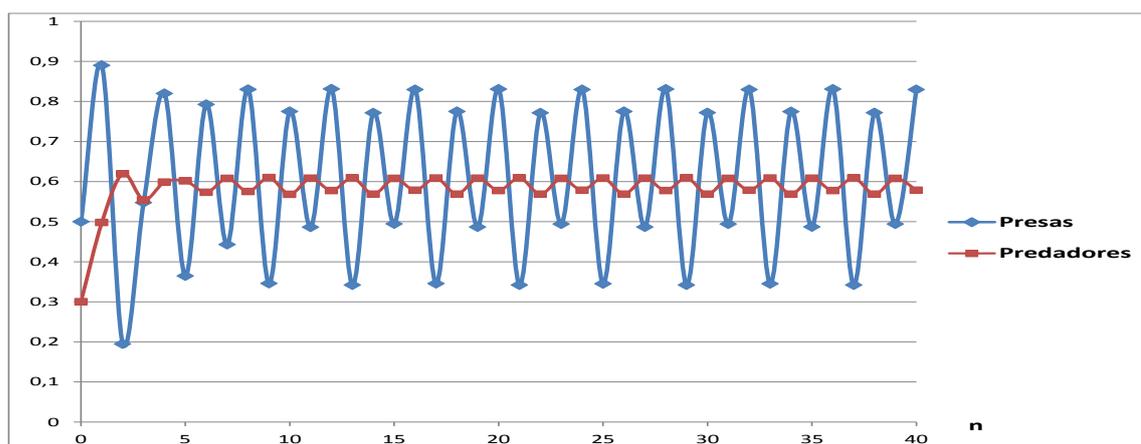


Figura 2.22: Evolução temporal do modelo presa-predador discreto em 40 anos.

No gráfico observamos que a iteração entre presas e predadores com populações iniciais respectivamente 5000 e 3000, a partir do vigésimo ano a população de presas se estabilizará em valores aproximadamente a 3400, 7800, 4900 e 8300 alternadamente e a população de predadores se estabilizará em valores aproximadamente a 5700 e 6100 alternadamente, isto é, o sistema apresenta uma dinâmica estável de período-4 para as presas e período-2 para os predadores. ■

Exemplo 2.9.4 Estude o modelo discreto presa-predador com os seguintes parâmetros:

Presa: $x_0 = 0,5$; $a_1 = 3,9$ e $b_1 = 0,7$.

Predadores: $y_0 = 0,3$; $a_2 = 2,8$ e $b_2 = 0,5$.

Supondo que este modelo descreve anualmente as populações medidas em milhares de indivíduos, onde a capacidade suporte desse habitat é de 10 000 indivíduos para ambas às populações.

Solução.

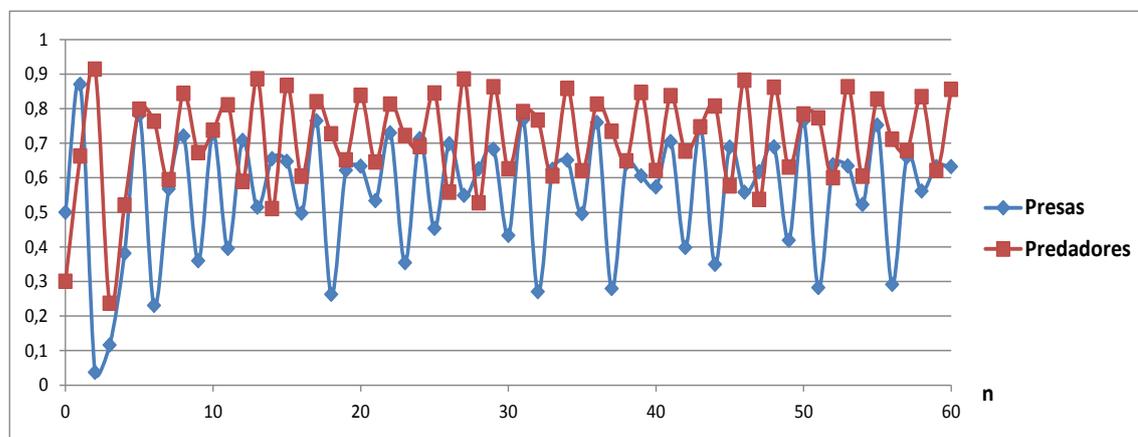


Figura 2.23: Evolução temporal do modelo presa-predador discreto em 60 anos.

No gráfico observamos que neste caso a iteração entre presas e predadores com populações iniciais respectivamente 5000 e 3000, é totalmente aperiódica, que é uma das propriedades de um sistema caótico. Assim, vamos verificar se este modelo é sensível às condições iniciais que é segunda propriedade de um sistema caótico. Para isso, modificaremos as condições iniciais, isto é, as populações iniciais de presas e predadores serão respectivamente 5100 e 2900 indivíduos.

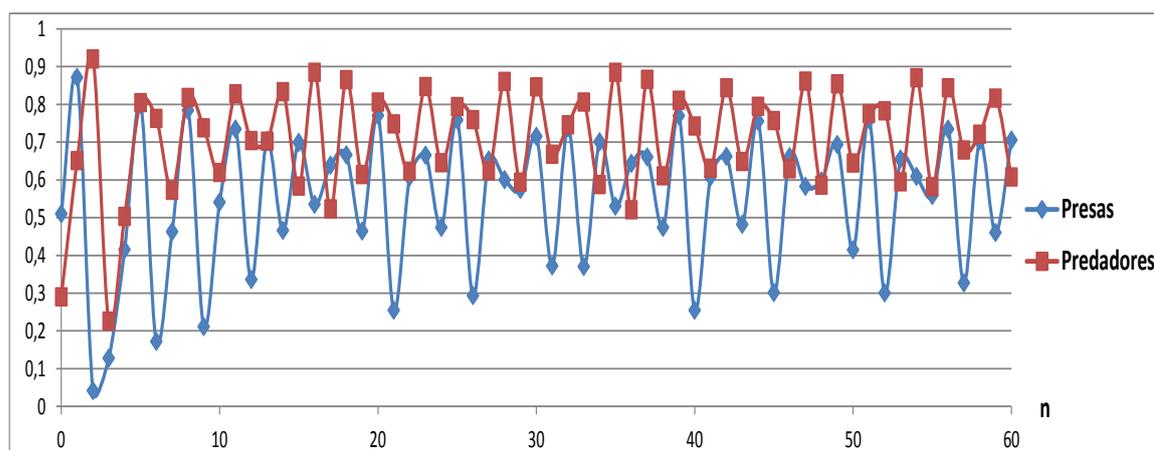


Figura 2.24: Evolução temporal do modelo presa-predador discreto em 60 anos.

Comparando os gráficos da figura (2.23) com a figura (2.24), podemos observar que aproximadamente até o nono ano as órbitas tanto das presas quanto dos predadores em ambos os gráficos são semelhantes, quando a partir daí essas órbitas tomam rumos diferentes devido à sensibilidade às condições iniciais. Portanto, para este exemplo o modelo representa um sistema caótico dificultando quaisquer estimativas das populações de presas e predadores à longo prazo. ■

Este modelo presa-predador discreto envolvendo apenas duas espécies não podem descrever completamente as relações complexas, de fato, na natureza. Apesar disso, o estudo desse modelo simples é possível termos uma ideia de como pode evoluir um ecossistema de um modelo presa-predador. No modelo que estudamos podemos observar que:

- a) Sob condições favoráveis, tanto as presas como os predadores crescem aproximadamente no máximo até à capacidade suporte do ambiente que é de 10 000 indivíduos.
- b) Na ausência dos predadores e sob condições favoráveis as presas crescem sem inibição aproximadamente até à capacidade suporte do ambiente. Por outro lado, na presença de predadores, o crescimento dessa população é controlado por uma taxa predatória que inibe o

crescimento até à capacidade suporte do ambiente, onde este crescimento pode se estabilizar numa população constante, ou se estabilizar de forma periódica conforme vistos nos **Exemplos 2.9.1, 2.9.2 e 2.9.3**, ou ainda apresentar flutuações irregulares, o caos, conforme mostra o **Exemplo 2.9.4**, onde neste caso teremos dificuldades de fazermos qualquer previsão da quantidade dessas populações à longo prazo.

Um fato importante a ser observado apesar de não termos feito uma simulação é que dependendo da taxa de crescimento específica das presas e da taxa predatória dos predadores, a população de presas pode vir à extinção.

c) Na ausência das presas o crescimento dos predadores passa a depender exclusivamente das condições do meio ambiente, estas sendo favoráveis eles podem crescer aproximadamente até à capacidade suporte do meio, caso contrário a população também pode vir à extinção.

As atividades desenvolvidas neste capítulo podem ser facilmente trabalhadas no Ensino Médio, pois a equação logística trata-se de uma equação do 2º grau que por composição de função geramos as órbitas, onde estas podem ser plotadas no Excel para análise da evolução das mesmas. Além disso, outras atividades podem ser exploradas como o cálculo do valor de máximo da equação logística ao variar o parâmetro r , determinação das coordenadas do vértice e representação gráfica da parábola.

No caso dos modelos populacionais envolvendo sistemas, também não há grandes dificuldades pelo fato de que as análises dos resultados são feitas através de simulações gráficas.

Outras atividades semelhantes a estas podem ser trabalhadas, como por exemplo: a família de equações quadráticas $x_{n+1} = x_n^2 + a$, que de acordo com (SCHEINERMAN, 1996), variando-se o valor da constante a , a iteração desta equação em x_n pode conduzir a soluções estáveis, periódicas ou caóticas.

CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos os aspectos teóricos, aplicações e simulações gráficas das equações de diferenças autônomas.

Constatamos que as equações de diferenças descrevem sistemas que variam no tempo em intervalos discretos, como por exemplos: econômicos, ecológicos, demográficos, etc., conforme pode ser verificado em todo trabalho. O fato de estes serem descritos pelas equações de diferenças (relação de recorrência), implica que para obtermos certo resultado recorreremos a resultados anteriores previamente determinados, o que se torna uma tarefa extremamente difícil em se tratando de buscas de resultados à longo prazo.

Diante disso, a teoria relacionada à determinação da solução geral das equações e sistemas de equações de diferenças lineares autônomas foi fundamental para determinação de uma solução para um instante qualquer, sem precisarmos calcular as iteradas sucessivas a partir de uma condição inicial para obtermos o resultado desejado. Além disso, a solução geral foi extremamente importante na análise do comportamento assintótico, ou seja, da evolução do sistema dinâmico discreto linear.

Acreditamos ter utilizada uma metodologia diferenciada em se tratando de estudos de recursividades no Ensino Médio, onde quase sempre esse estudo limita-se a aplicação sistemática de fórmulas prontas e raramente são feitas simulações gráficas para análise da evolução de um modelo. Para exemplificação, podemos citar os estudos de: crescimento e decréscimo de taxas, em particular juros compostos e desintegrações de materiais orgânicos ou radioativos; P.A., P.G e, de modo geral, seqüências definidas recursivamente.

No caso das equações de diferenças não lineares, na impossibilidade de encontrar a solução geral, fizemos um estudo qualitativo dessas equações. Para isso, analisamos uma família de mapas logísticos discretos, onde a partir da variação de um parâmetro verificamos alguns comportamentos como: pontos fixos, órbitas periódicas, bifurcação e caos.

Os exemplos que mostram esses comportamentos dinâmicos foram contextualizados de forma a tornar mais interessante e dar mais sentido matemático aos comportamentos estudados na dinâmica do mapa.

Sumarizamos a riqueza dos comportamentos periódicos do mapa logístico usando o diagrama de bifurcações, onde presenciamos a famosa cascata de bifurcações de períodos 2^m , $m \in \mathbb{N}$. Esta sucessão de bifurcações conduz ao caos e define a rota para o caos, isto é, no

ponto $r \approx 3,57$ ocorre a transição da regularidade para o caos, mas não é o único caminho que pode levar ao comportamento caótico.

Conforme a teoria do caos, as equações do movimento caótico são inteiramente determinísticas, isto é, não há qualquer parâmetro ou variável aleatória envolvida. Sendo assim, as oscilações aparentemente aleatórias na verdade são irregulares ou aperiódicas.

Verificamos por meio de modelos de sistemas caóticos que estes exibem uma propriedade que se designa por sensibilidade às condições iniciais. Isto significa dizer que duas órbitas do sistema, iniciadas a partir de condições iniciais suficientemente próximas uma da outra tende a afastar-se exponencialmente com o passar do tempo. Como nunca é possível especificar as condições iniciais do sistema com rigor absoluto, a previsão à longo prazo é impossível. Este fato torna o sistema imprevisível apesar de ser determinístico.

Em geral, temos a ideia de que o caos é desordem absoluta ou uma perda completa da forma e neste estudo constatamos que isto não é verdade, pois vimos que há ordem no caos de acordo com a subseção (2.7.4), onde estudamos as janelas periódicas.

Presenciamos por meio do estudo do mapa logístico, mesmo sendo uma simples equação do 2º grau com uma variável, comportamentos dinâmicos bastante interessantes, pelos quais vimos uma matemática qualitativa no lugar da quantitativa. Acreditamos que esta seja uma maneira de abordarmos estudos introdutórios de comportamentos complexos e imprevisíveis no Ensino Médio.

Enfim, concluímos que os sistemas dinâmicos discretos é uma ferramenta importante para modelar e explicar fenômenos naturais, porém as previsões são possíveis dentro de certas limitações. Além disso, para os sistemas caóticos os resultados são sempre imprevisíveis.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. Chaos – An Introduction to Dynamical Systems, New York: Springer, 1996.
- [2] ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra Linear com Aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [3] BASSANEZI, R. C. Equações Diferenciais Ordinárias. Um Curso Introductório, UFABC, CMCC, Santo André, 2011.
- [4] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Tradução Técnica IORIO, V. M. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [5] DEVANEY, R. L. A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiments. Westview Press, 1992.
- [6] ECKMANN, J. P. Roads to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems. Reviews of Modern Physics, v. 53, n. 4, p. 643-654, 1981. Disponível em <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.53.643>. Acessado em 10/06/2015.
- [7] ELAYDI, S. An Introduction to Difference Equations. 3. ed. New York: Springer Verlag, 2005.
- [8] FARIAS, R. F. A Química do Tempo: Carbono 14. QNESC, v.16, 6-8, Novembro, 2002. Disponível em http://qnesc.s bq.org.br/online/qnesc16/v16_A03.pdf. Acessado em 27/05/2015.
- [9] FERNANDES, D. J. M. Série de Fibonacci e o Número de Ouro. Disponível em <http://pt.slideshare.net/DiogoFernandes/srie-de-fibonacci-e-o-nmero-de-ouro>. Acessado em 13/9/2014.
- [10] GARBI, G. G. O Romance das Equações Algébricas. 3. ed. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2009.
- [11] GIORDANO, F. R.; FOX, W. P. e HORTON, S. B. A First Course in Mathematical Modeling. 5. ed. Brook/Cole, Cengage Learning, 2014.
- [12] GOMES, M. C. Notas de Aulas sobre Dinâmica Populacional. Universidade de Lisboa, 2013. Disponível em <http://webpages.fc.ul.pt/~mcgomes/aulas/dinpop/index.html>. Acessado em 08/06/2015.
- [13] GRAFTON, R. Q.; ECHENIQUE, J.S. How to Manage Nature? Strategies, Predator-Prey Models, and Chaos, 1997. Disponível em <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.128.2915&rep=rep1&type=pdf>. Acessado em 06/06/2015.

- [14] LAGARIAS, J. C. The $3x+1$ problem annotated bibliography. Department of Mathematics University of Michigan. Ann Arbor, MI 48109-1109, 2012. Disponível em <http://arxiv.org/pdf/math/0608208.pdf>. Acessado em 07/10/2015.
- [15] LAY, D. C. Álgebra Linear e suas Aplicações. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- [16] LI, T. Y.; YORKE J. A. “Period Three Implies Chaos”. The American Mathematical Monthly, Vol. 82, n.10. (Dec., 1975), pp. 985-992. Disponível em <http://www.jstor.org/stable/2318254>. Acessado em 12/05/2015.
- [17] LORENZ, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow. Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 20, 130 – 141. Disponível em [http://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469\(1963\)020%3C0130%3ADNF%3E2.0.CO%3B2](http://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130%3ADNF%3E2.0.CO%3B2). Acessado em 10/09/2015.
- [18] LUENBERGER, D. G. Introduction to Dynamic Systems, Theory, Models and Applications. Stanford University California, 1979.
- [19] MALTHUS, T. R. Na Essay on the Principle of Population, 1798. Pinter for J. Johnson, in St. Paul’s Church-Yard. Disponível em <http://www.esp.org/books/malthus/population/malthus.pdf> . Acessado em 05/06/2015.
- [20] MAY, R. M. Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics. In Nature, 261,1976. Disponível em http://abel.harvard.edu/archive/118r_spring_05/docs/may.pdf. Acessado em 05/06/2015.
- [21] MIGUEL, J. M. S. Notas de Aulas sobre Sistema Dinâmico Discreto. Universidade de Sevilla. Disponível em <http://personal.us.es/jmiguel/Informacion/Material/M-II-Temas/Lec8-EcDiferencias.pdf>. Acessado em 15/12/2014.
- [22] MONTEIRO, L. H. A. Sistemas Dinâmicos. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.
- [23] MURRAY, J. D. Mathematical Biology I. Na Introduction. 3. ed. New York: Springer, 2002.
- [24] NICHOLSON, W. K. Tradução Técnica LOPES, C. M. C.; FIGUEIREDO, L. M. V. e MONTEIRO, M. S. Álgebra Linear. 2. ed. São Paulo: Mcgraw-Hill, 2006.
- [25] PELLEGRINI, J. C. Notas de Aulas sobre Álgebra Linear. UFABC, Santo André, 2014. Disponível em <http://aleph0.info/cursos/al/notas/al.pdf>. Acessado em 05/10/2014.
- [26] SALINAS, S. P.; JIMÉNEZ, J. M. G. Dinámica del Método de Newton. Universidad de La Rioja, Servicio de Publicaciones, 2013. Disponível em <http://dialnet.unirioja.es/descarga/libro/529750.pdf>. Acessado em 15/09/2015.
- [27] SANTOS, R. J. Diagonalização de Matrizes 2×2 e Sistemas de Equações Diferenciais Lineares. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2002. Disponível em <http://www.mat.ufmg.br/~regi/eqdif/diagsistedf.pdf>. Acessado em 10/09/2014.

- [28] SAVI, M. A. Dinâmica Não linear e Caos. 1.ed. Rio de Janeiro: E-papers Serviços Editoriais, Ltda, 2006.
- [29] SCHEINERMAN, E. R. Invitation to Dynamical Systems. Department of Mathematical Sciences The Johns Hopkins University, Baltimore, 1996.
- [30] SHONE, R.; Economic Dynamics. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2002.
- [31] STROGATZ, S. M. Nonlinear Dynamics and Chaos. Perseus Books Reading, Massachusetts, 1994.
- [32] VENDITE, L. L. Matemática Financeira. Unicamp, Campinas, 2010. Disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~vendite/matfin2010.pdf>. Acessado em 22/10/2014.
- [33] VERHULST, P. F. Notice Sur la Loi que la Population Suite Dans son Accroissement. in: Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 1820, 1845. Disponível em. http://web.lru.dk/sites/lru.dk/files/lru/124_kap6_verhulst_artikel_1844.pdf. Acessado em 06/06/2015.
- [34] VIANA, R. L. Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos. Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.
- [35] VIANA, R. L. Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos em Economia. Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.
- [36] VICENTE J. BOLÓS LACAVE. Matemáticas para los Modelos Dinámicos. Departamento de Matemática para la Economía y la Empresa. Universidade de Valencia, Espanha. Disponível em <http://www.uv.es/vbolos/docencia/mplmd/apuntes.pdf>. Acessado em 11/05/2015.
- [37] ZUBEN, F.J.V. Notas de aulas sobre Estabilidade em Sistema Não Lineares. Unicamp, Campinas, 2010. Disponível em ftp://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/ea616_1s10/notas_de_aula/topico2_EA616_1s2010.pdf . Acessado em 13/02/2015.

APÊNDICE

Teoria Básica de Álgebra Linear

A teoria apresentada baseia-se nas referências [2], [15], [25] e [27].

Teorema A.1 (Autovetores L.I.). Se v_1, \dots, v_n são autovetores associados a autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (L.I.).

Demonstração.

Sejam os escalares $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$. Vamos fazer a demonstração por indução sobre n .

i) Se $n = 1$, então $c_1 v_1 = 0$. Logo, $c_1 = 0$, pois $v_1 \neq 0$. Portanto, v_1 associado ao autovalor λ_1 é linearmente independente.

ii) Suponhamos válido para n e mostremos que o teorema vale para $n + 1$. Consideremos então, v_1, \dots, v_{n+1} autovetores associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ e façamos

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n + c_{n+1} v_{n+1} = 0. \quad (1)$$

Multiplicando os dois lados de (1) por A e usando o fato de que $Av_k = \lambda_k v_k$ para cada k , obtemos:

$$\begin{aligned} c_1 A v_1 + \dots + c_n A v_n + c_{n+1} A v_{n+1} &= 0, \\ c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_n \lambda_n v_n + c_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Agora, multiplicando os dois lados de (1) por λ_{n+1} , temos:

$$c_1 \lambda_{n+1} v_1 + \dots + c_n \lambda_{n+1} v_n + c_{n+1} \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0. \quad (3)$$

Subtraindo (3) de (2), obtemos:

$$c_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) v_1 + \dots + c_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) v_n = 0.$$

Logo, pela hipótese de indução

$$c_i (\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Como $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$, pois os autovalores são distintos, segue que

$$c_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1) temos que

$c_{n+1} v_{n+1} = 0$, mas isto implica que $c_{n+1} = 0$. Portanto, o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é linearmente independente. ■

Teorema A.2 (Diagonalização). Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável, se e somente se ela possui n autovetores linearmente independentes.

Demonstração.

(\Rightarrow) Suponha que A é diagonalizável, isto é, que exista uma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}AP$, onde D é uma matriz diagonal.

Em particular, segue que

$$AP = DP.$$

Escreva P segundo suas colunas

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n],$$

então,

$$AP = [Av_1 \quad Av_2 \quad \dots \quad Av_n]$$

e

$$DP = [\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \dots \quad \lambda_n v_n].$$

Comparando, concluímos que

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\vdots$$

$$Av_n = \lambda_n v_n.$$

Isto é, as colunas de P são autovetores de A . Como P é invertível, suas colunas são L.I.. Logo, encontramos n autovetores L.I. para A .

(\Leftarrow) Reciprocamente, suponha agora que existam n autovetores L.I., v_1, v_2, \dots, v_n tais que

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, \dots, Av_n = \lambda_n v_n.$$

Defina uma matriz $n \times n$ P por, $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$. Como as colunas de P são L.I., segue que P é invertível. Temos:

$$AP = A[v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] = [Av_1 \quad Av_2 \quad \dots \quad Av_n] = [\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \dots \quad \lambda_n v_n] =$$

$$[v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = PD,$$

$$\text{onde denotamos } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Multiplicando ambos os lados da equação por P^{-1} , obtemos $P^{-1}AP = D$.

Logo, A é diagonalizável. ■

Corolário A.3 Se uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ possui n autovalores distintos, então A é diagonalizável.

Teorema A.4 (Potência de matrizes). Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz diagonalizável e $k \in \mathbb{N}$. Então $A^k = PD^kP^{-1}$. (1)

Demonstração.

Por indução, demonstra a validade de (1).

O caso $k = 1$ é trivialmente verificado. Como A é diagonalizável, existe D e P tal que $A = PDP^{-1}$.

Suponha que valha para k (hipótese indutiva), ou seja,

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Verifiquemos então para $k + 1$.

$$A^{k+1} = A^k A = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^k(PP^{-1})DP^{-1} = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}.$$

O que prova a validade para $\forall k \in \mathbb{N}$. ■

Definição A.5 (Autovalores Complexos). Seja A uma matriz 2×2 com entradas reais que tem autovalores complexos. Um vetor \mathbb{C}^2 pode ser escrito como

$$v = (z_1, z_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) = (v_1, v_2) + i(w_1, w_2) = v_R + iv_I,$$

Em que v_R e v_I são vetores no \mathbb{R}^2 .

A proposição a seguir é válida exclusivamente para matrizes com entradas que são números reais.

Proposição A.6 Seja A uma matriz $n \times n$ com entradas reais. Se $v = v_R + iv_I$ é um autovetor de A associado ao autovalor complexo $\lambda = \alpha + i\beta$ com $\beta \neq 0$, ou seja, $Av = \lambda v$, então $\bar{v} = v_R - iv_I$ também é um autovetor de A mas associado a $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$.

Demonstração.

Substituindo $v = v_R + iv_I$ e $\lambda = \alpha + i\beta$, em $Av = \lambda v$ obtemos:

$$Av_R + iAv_I = \alpha(v_R + iv_I) + i\beta(v_R + iv_I) = (\alpha v_R - \beta v_I) + i(\alpha v_I + \beta v_R).$$

Isto implica que

$$Av_R = \alpha v_R - \beta v_I \quad e \quad Av_I = \alpha v_I + \beta v_R.$$

Agora, usando os valores de Av_R e Av_I obtidos temos que

$$\begin{aligned} A\bar{v} &= A(v_R - iv_I) = Av_R - iAv_I = \alpha v_R - \beta v_I - i(\alpha v_I + \beta v_R) \\ &= (\alpha - i\beta)v_R - (\beta + i\alpha)v_I = (\alpha - i\beta)v_R - i(\alpha - i\beta)v_I \end{aligned}$$

$$= (\alpha - i\beta)(v_R - iv_I) = \bar{\lambda} \bar{v}.$$

Se $\beta \neq 0$, então λ e $\bar{\lambda}$ são diferentes. Logo, pelo **Teorema A.1** v e \bar{v} são L.I..

Assim, se uma matriz $A, n \times n$, com entradas reais tem autovalores complexos, então ela é diagonalizável e as matrizes

$$P = [v_1 \quad \bar{v}_1 \quad \cdots \quad v_k \quad \bar{v}_k] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{\lambda}_k \end{bmatrix}$$

são tais que

$$A = PDP^{-1}. \quad \blacksquare$$

Forma Canônica de Jordan

Quando a matriz não é diagonalizável, então se pode usar a forma canônica de Jordan para determinar a potência da matriz.

Definição A.7 (Bloco de Jordan). Um bloco de Jordan é uma matriz quadrada onde todos os elementos da diagonal são iguais a um mesmo elemento λ , os elementos acima da diagonal são todos iguais a um e os demais elementos são todos iguais a zero.

Exemplos.

$[\lambda]$ é um bloco de Jordan de ordem 1

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ é um bloco de Jordan de ordem 3}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \text{ é um bloco de Jordan de ordem } k.$$

Definição A.8 (Forma de Jordan). Uma matriz A está na forma de Jordan se é diagonal por blocos de Jordan, cada um tendo um autovalor de A em sua diagonal, ou seja,

$$\text{diag}(J_1, \dots, J_k) = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & J_k \end{bmatrix},$$

onde cada J_i é um bloco de Jordan da forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Definição A.9 (Cadeia de Jordan). Seja v um autovetor generalizado de ordem ρ para o autovalor λ da matriz A . Então a sequência de vetores

$$\begin{aligned} &v, \\ &(A - \lambda I)v = w_1, \\ &(A - \lambda I)^2 v = (A - \lambda I)(A - \lambda I)v = (A - \lambda I)w_1 = w_2, \\ &(A - \lambda I)^3 v = (A - \lambda I)(A - \lambda I)^2 v = (A - \lambda I)w_2 = w_3, \\ &\quad \vdots \\ &(A - \lambda I)^{\rho-1} v = w_{\rho-1}, \end{aligned}$$

é uma cadeia de Jordan, ou cadeia de autovetores generalizados, pertencente ao autovalor λ .

Teorema A.10 Uma cadeia de Jordan pertencente a um autovalor de um operador é linearmente independente.

Demonstração vide [25].

Teorema A.11 (Matriz não diagonalizável). Seja a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não diagonalizável com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ contando com multiplicidade, então existe uma matriz de Jordan J e uma matriz inversível P tal que

$$P^{-1}AP = J,$$

ou

$$A = PJP^{-1},$$

sendo

$$P = [v \quad w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_{k-1}] \text{ e}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & J_k \end{bmatrix},$$

onde cada bloco J_i tem uma mesma entrada λ_i em toda diagonal e uns acima dela, sendo todas as outras entradas iguais a zero:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Observamos que podemos escrever cada bloco J_i na forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \lambda_i & 1 & 0 & \vdots \\ \ddots & \ddots & \lambda_i & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & \ddots & \ddots & \dots & \dots \\ \ddots & \lambda_i & \ddots & 0 & \vdots \\ \ddots & \ddots & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \ddots & \ddots & 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $J_i = D_i + N_i$,

onde D_i é uma matriz diagonal e N_i é uma matriz nilpotente de ordem k ou seja, $N_i^r = 0$ para todo $r \geq k$. Elevando J_i a expoente n temos:

$$\begin{aligned} J_i^n &= (D_i + N_i)^n = (\lambda_i I + N_i)^n \\ &= \lambda_i^n + \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} N_i + \binom{n}{2} \lambda_i^{n-2} N_i^2 \dots + \binom{n}{k-1} \lambda_i^{n-k+1} N_i^{k-1}. \end{aligned}$$

Logo, para $n \geq 2$, temos:

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2} \lambda_i^{n-2} & \dots & \binom{n}{k-1} \lambda_i^{n-k+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} & \dots & \binom{n}{k-2} \lambda_i^{n-k+2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \lambda_i^n \end{bmatrix}.$$

Cada linha tem, começando no elemento da diagonal, os coeficientes da expansão binomial de

$$(1 + \lambda_i)^n,$$

ou seja,

$$\binom{n}{0} \lambda_i^n, \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1}, \dots, \binom{n}{n} \lambda_i^0.$$

Portanto,

$$A^n = P J^n P^{-1}.$$

Demonstração vide [7].