

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC  
PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

LISANDRA BURATTO SILVA

UM ESTUDO DE RECORRÊNCIAS E SEU USO DIDÁTICO  
NO ENSINO BÁSICO

Santo André

2015





**Universidade Federal do ABC**

**Centro de Matemática, Computação e Cognição**

**Lisandra Buratto Silva**

**Um estudo de recorrências e seu uso didático no Ensino Básico**

**Orientador: Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre .

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO  
DEFENDIDA PELA ALUNA LISANDRA BURATTO SILVA,  
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MAURÍCIO FIRMINO SILVA LIMA .

**Santo André, 2015**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**Fundação Universidade Federal do ABC**  
**Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática**  
**em Rede Nacional**

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP  
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017  
profmat@ufabc.edu.br

**FOLHA DE ASSINATURAS**

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Lisandra Buratto Silva, realizada em 27 de agosto de 2015:

---

Prof.(a) Dr.(a) **Maurício Firmino Silva Lima** (UFABC) – Presidente

---

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael de Mattos Grisi** (UFABC) – Membro Titular

---

Prof.(a) Dr.(a) **Ricardo Miranda Martins** (UNICAMP) – Membro Titular

---

Prof.(a) Dr.(a) **Daniel Miranda Machado** (UFABC) – Membro Suplente

---

Prof.(a) Dr.(a) **Claudio Aguinaldo Buzzi** (UNESP) – Membro Suplente



**Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.**

**Santo André, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 20\_\_\_\_.**

**Assinatura do autor: \_\_\_\_\_**

**Assinatura do orientador: \_\_\_\_\_**

## AGRADECIMENTOS

---

---

Agradeço primeiramente a Deus que me permitiu a vida e colocou em mim uma boa dose de esperança que o ser humano sempre pode ser melhor.

Aos meus pais, que com um esforço sobre-humano, conseguiram me proporcionar uma formação escolar de qualidade e que até hoje me apoiam nos estudos.

Ao meu esposo, João, que soube com muita paciência me compreender e me incentivar nos momentos mais tensos na elaboração desse trabalho e durante o curso todo.

Aos meus amigos do PROFMAT que, cada um com a sua habilidade, contribuiu para esta conquista. E também pelos momentos de descontração e risadas compartilhadas. E aos amigos da vida, que direta ou indiretamente fizeram parte da torcida pela conclusão deste trabalho.

Ao professor, Maurício Firmino, que com muita dedicação e atenção executou brilhantemente o seu papel de orientador, me corrigindo, me instigando a conhecer mais, me ensinando e me apoiando.

Ao professor Rafael Grisi, coordenador do curso, que não mede esforços para que o curso PROFMAT seja parte integrante da UFABC e para auxiliar cada aluno nos variados assuntos administrativos e pedagógicos.

A todos os outros professores do PROFMAT que procuraram nos transmitir um pouco do vasto conhecimento que possuem.

À fundação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo auxílio financeiro durante o curso.

---

---

“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também  
suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.”

– Bertrand Russell

## RESUMO

---

---

Este trabalho consiste na elaboração de um texto introdutório sobre o estudo das equações de recorrência e algumas aplicações nas aulas de Ensino Básico, especialmente voltadas para o Ensino Médio, que podem ser utilizadas, por professores como instrumento alternativo para resolução de problemas relacionados às sequências e padrões.

Esse trabalho traz exemplos para a maioria dos tipos de equações apresentadas, exercícios resolvidos de variados níveis de dificuldade e um capítulo direcionado especificamente ao desenvolvimento de atividades em sala de aula.

Também realizamos estudo qualitativo de equações de diferenças não lineares de primeira ordem, em torno de pontos fixos e órbitas periódicas.

Concluimos com um estudo detalhado da sequência de *Fibonacci* e a sua relação com a *razão áurea*, bem como algumas aplicações e sugestões para utilização em atividades pedagógicas.

**Palavras-chave:** recorrência, sequência, ponto fixo, órbita periódica, estabilidade, sequencia de Fibonacci.



## ABSTRACT

---

---

This work consists of an introductory text about recurrence equations and some of their applications in Basic Education classes, focused on Secondary School. These applications can be used by teachers as an alternative tool to solve problems concerning sequences and patterns.

This work brings examples for most types of the presented equations, also exercises of varied levels of difficulty with their resolutions and still a chapter specifically directed at activities to be developed in classroom.

Besides, a qualitative study on first order non-linear difference equations around fixed points and periodic orbits was performed.

The work concludes with a detailed study of the Fibonacci sequence, as well as some of its applications and suggestions for its use in pedagogical activities.

**Keywords:** recurrence, sequence, equilibrium point, periodic orbits, stability, sequence Fibonacci.

# CONTEÚDO

---

---

Introdução	1
<b>1 EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS</b>	<b>4</b>
1.1 Noções básicas	4
1.2 Classificação	6
1.2.1 Quanto à ordem	6
1.2.2 Quanto à linearidade	6
1.2.3 Quanto à homogeneidade	7
<b>2 ESTUDO DE RECORRÊNCIAS LINEARES</b>	<b>8</b>
2.1 Equação de Primeira Ordem	8
2.1.1 Homogênea	8
2.1.2 Não Homogênea	9
2.2 Equação de Segunda Ordem	12
2.2.1 Homogênea	12
2.2.2 Não homogênea	17
2.3 Equação Homogênea de Ordem $k$	20
<b>3 TEORIA QUALITATIVA</b>	<b>22</b>
3.1 Órbita e Pontos Fixos	22
3.2 Estabilidade	23
3.2.1 Exemplos	36
3.2.2 Órbitas Periódicas	38
3.2.3 Mapa Logístico	40
<b>4 APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO</b>	<b>50</b>
4.1 Sobre o colégio e os alunos	50
4.2 Aplicação das Atividades	51
4.3 Conclusões	63
4.4 Outras propostas de atividades	63

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO ÁUREO	72
1    A razão áurea	74
1.1    O retângulo áureo	76
CONCLUSÃO	81
Referência Bibliográfica	82



## INTRODUÇÃO

---

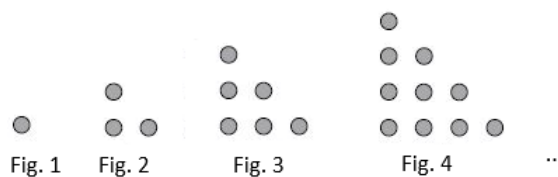
---

O principal objetivo do curso PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) é buscar aprimorar a formação profissional de professores de Matemática em exercício no ensino básico, aprofundando conteúdos relevantes às suas atuações docentes, como o que será trabalhado no presente trabalho.

Nessa busca de aperfeiçoamento profissional, surgiu a ideia de desenvolver um trabalho sobre *equações de recorrências*, tópico estudado em uma das disciplinas do curso, quando notou-se a possibilidade de que esse assunto poderia ser abordado como tema complementar ou adicional ao estudo de progressões à grade curricular usual de matemática no Ensino Básico, com as devidas proporções e ajustes para o público alvo escolhido.

As sequências numéricas e simbólicas revelam-se com muita frequência em exercícios que envolvem padrões e lógica em materiais didáticos e em provas de concursos e olimpíadas, como da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), que geralmente são solucionados por dedução ou tentativas e que neste trabalho, procuramos apresentar formas gerais que resolvam diversos tipos de recorrência com o objetivo de conseguir “regras”, ou seja, uma fórmula geral.

Determinar quantos círculos compõem a 15<sup>a</sup> figura (F<sub>15</sub>) da sequência abaixo, por exemplo, pode ser um tanto dificultoso dependendo do método que se decide utilizar. Por isso, foram desenvolvidas técnicas que proporcionam determinar uma regra geral, que denominamos *Solução da Equação de Recorrência*, que possibilite determinar com poucos cálculos o termo que se desejar da sequência.



Observemos que a figura 2 é formada por dois círculos a mais que a figura 1; a figura 3 é formada por 3 círculos a mais que a figura 2, e assim por diante. A partir de uma *Equação de Recorrência* que associa através de uma função cada termo ao seu imediatamente anterior, realizamos o chamado *Algoritmo de Recursão* e obtemos uma “regra” geral, ou seja, a *solução* que nesse caso é  $x_n = \frac{n^2 + n}{2}$ , onde  $x_n$  é o termo procurado, que nesse exemplo é a quantidade de círculos da figura procurada e  $n$  é a posição da figura. Logo, a 15<sup>a</sup> figura possui  $\frac{15^2 + 15}{2} = 120$  círculos.

De todos os objetivos propostos para serem atingidos no segundo ciclo segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para a cadeira de matemática, há especialmente dois que se ajustam ao projeto desenvolvido nesse trabalho:

- “Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- Ampliar o significado do número natural pelo seu uso em situações problema e pelo reconhecimento de relações e regularidades;” [20]

No entanto, as equações de diferenças possuem uma ampla aplicação em muitos ramos da ciência naturais, onde descrevem fenômenos ao longo do tempo, medidos em intervalos regulares com uma variável discreta, como por exemplo, o efeito da administração de uma determinada dose de substância farmacológica em um indivíduo; a contagem do número de células em uma cultura de bactérias ou de insetos em uma população, etc. Além de se apresentar em segmentos da própria matemática como no cálculo dos juros compostos, na obtenção de raízes de uma função

(Método de Newton)<sup>1</sup> e na resolução de problemas de análise combinatória.

Dessa forma realizamos um estudo detalhado sobre as equações de diferenças bem como suas variações em relação à ordem, linearidade e homogeneidade e também nos aprofundamos sobre o conceito de *estabilidade de pontos fixos* de algumas funções, inclusive de órbitas periódicas nos chamados *Mapas Logísticos*. Procuramos após cada teorema e demonstração apresentar exemplos e gráficos concretos ilustrando cada tipo de equação ou caso estudado, detalhando o processo de resolução com o intuito de elucidar o leitor na busca da compreensão integral do conteúdo deste trabalho.

Concluimos com um capítulo voltado à docentes da área que se interessem em utilizar o trabalho como material complementar ao estudo de sequências e progressões, ou mesmo na elaboração de atividades adicionais dentro de circunstâncias cabíveis em seus âmbitos escolares. Há nesse capítulo, a exposição de um projeto executado com uma turma de 1ª série do Ensino Médio de um escola da rede particular e em seguida algumas propostas de exercícios com resoluções comentadas.

---

<sup>1</sup> O método de Newton para obtenção de raízes é uma técnica que permite encontrar um valor próximo de uma raiz de uma função derivável em  $f(x) = 0$ , onde se obtém pela fórmula iterativa  $x_{n-1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ , termos  $x_n$  que se aproximam rapidamente do limite  $f(x) = 0$ .

## EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

---

---

Neste capítulo introduziremos o conceito de recorrências e as classificaremos de acordo com suas ordem, linearidade e homogeneidade. Além disso, vários exemplos ilustrativos serão apresentados.

### 1.1 NOÇÕES BÁSICAS

Vários modelos matemáticos envolvem variáveis temporais discretas, isto é, que assumem apenas valores inteiros. Nesse contexto, destacamos as chamadas *Equações de Diferenças*, onde uma função relaciona um termo qualquer de uma sequência com um ou mais termos anteriores, recursivamente. Podemos então, representá-la da seguinte forma:

$$x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, n), \quad (1.1)$$

onde  $x_n$  é chamado termo geral da sequência,  $n$  é a posição que o termo ocupa na sequência e  $f$  é a função que relaciona as variáveis.

“Muitas sequências são definidas recursivamente, (isto é, por recorrência), por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediatos(s).” [15]



**Definição 1.1.** Dada a equação de diferenças 1.1, chamamos *solução* a uma sequência  $(x_n)$  tal que satisfaça 1.1, isto é, substituindo  $(x_n)$  na equação 1.1 tem-se uma identidade.

Essa regra, quando conhecida, possibilita o estudo dessas equações de recorrência por diferentes métodos, com o objetivo de determinar uma fórmula geral que dependa exclusivamente da posição do termo.

**Exemplo 1.1.** A sequência dos números naturais ímpares  $1, 3, 5, 7, \dots$  pode ser definida por  $x_{n+1} = x_n + 2$ , para  $n \geq 1$  e  $x_1 = 1$ . Ou seja,  $x_1 = 1, x_2 = x_1 + 2, x_3 = x_2 + 2, \dots, x_n = x_{n-1} + 2$ .

Note que, se somarmos os termos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , obtemos:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_3 + x_{n-1} + x_n = 1 + (x_1 + 2) + \dots + (x_2 + 2) + (x_{n-1} + 2).$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{(n-1)\text{vezes}}, \\ &= 1 + 2(n - 1), \\ &= 2n - 1, n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Obtemos assim, a fórmula da soma dos  $n$  primeiros números ímpares naturais. Observe que se desejássemos conhecer o 138º termo dessa sequência, facilmente o obteríamos a partir da equação 1.2, e com maior dificuldade a partir de  $x_{n+1} = x_n + 2$ .

Outras formas de resolução de outros tipos de recorrências serão apresentados nos próximos capítulos.

## 1.2 CLASSIFICAÇÃO

## 1.2.1 Quanto à ordem

A *ordem* de uma recorrência é definida pela diferença entre os termos da equação com maior e menor índice.

Exemplos:

- a equação de recorrência apresentada no exemplo 1.1 é de primeira ordem, pois cada termo depende diretamente do termo anterior, e somente dele.
- a sequência  $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ <sup>1</sup> cuja equação de recorrência é  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ , com  $x_1 = x_2 = 1$ , é tal que cada termo depende dos dois termos imediatamente anteriores a ele, caracterizando assim, uma recorrência de segunda ordem.

## 1.2.2 Quanto à linearidade

A equação de diferenças diz-se *linear*, se a função  $f$  que a define é de primeiro grau nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Caso contrário, a equação é dita *não linear*.

- $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ , é uma equação de diferença não linear, pois a função que a define  $f(x_n) = x_n^2 + 1$  é não linear.

Note que as equações lineares de ordem  $(n - m)$  podem ser escritas da forma:

$$x_n = \alpha_{n-1}x_{n-1} + \alpha_{n-2}x_{n-2} + \dots + \alpha_m x_m + g(n),$$

ou de forma mais compacta:

$$x_n = \sum_{i=n-1}^m \alpha_i x_i + g(n), \text{ com } \alpha_i \text{ constantes e } m < n.$$

<sup>1</sup> Importante "Sequência de Fibonacci", publicada em 1202 no Livro *Liber Abaci* por Leonardo de Pisa (1175 - 1250), a partir do problema das gerações dos coelhos, que será detalhadamente apresentado no apêndice 1.

## 1.2.3 Quanto à homogeneidade

Considere a equação linear

$$x_{n+1} = f(n)x_n + g(n).$$

Dizemos que essa equação é *homogênea* se  $g(n) = 0$ , caso contrário, a equação diz-se *não homogênea*.

Exemplos:

- $x_{n+1} = x_n + 2n$  é não homogênea;
- $x_{n+1} = 4x_n$  é homogênea.

**Definição 1.2.** Considere a equação linear não homogênea  $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$ . Definimos a equação homogênea associada pela equação  $x_{n+1} = f(n)x_n$ .

# 2

## ESTUDO DE RECORRÊNCIAS LINEARES

---

---

Neste capítulo trataremos das equações de recorrências lineares. Nesse contexto, apresentaremos métodos de obtenção da solução geral para os diversos tipos além de ilustrar tais métodos com exemplos.

### 2.1 EQUAÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM

#### 2.1.1 Homogênea

Considere a equação homogênea dada por  $x_n = \alpha x_{n-1}$ , com a condição inicial  $x_0$  fixado e  $x_0 \neq 0$ . O processo recursivo fornece:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha x_0, \\x_2 &= \alpha x_1, \\x_3 &= \alpha x_2, \\&\cdot \\&\cdot \\&\cdot \\x_n &= \alpha x_{n-1}.\end{aligned}$$

Igualando o produto dos termos do lado esquerdo com o produto dos termos do lado direito, temos:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{n-1} \cdot x_n = \alpha \cdot x_0 \cdot \alpha \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot x_2 \cdots \alpha \cdot x_{n-1}.$$

Como  $x_0 \neq 0$ ,  $\forall n$  segue que:

$$x_n = x_0 \alpha^n.$$

**Exemplo 2.1.** Considere a sequência numérica  $1, 3, 9, 27, \dots$ , cuja equação de recorrência é dada por  $x_n = 3x_{n-1}$ . Pelo processo recursivo, temos que:

$$x_1 = 3x_0, \text{ com } x_0 = 1.$$

$$x_2 = 3x_1,$$

$$x_3 = 3x_2,$$

.

.

.

$$x_n = 3x_{n-1}.$$

Logo,  $x_n = 3^n$  é a solução da equação de recorrência.

### 2.1.2 Não Homogênea

As recorrências desse tipo que mais facilmente se resolvem são as que possuem coeficientes constantes. Vamos apresentar uma fórmula geral para a equação da forma  $x_{n+1} = ax_n + b$ , na qual  $a$  e  $b$  são constantes reais.

Fixado uma condição inicial  $x_0$ , o processo de recorrência fornece:

$$x_1 = ax_0 + b,$$

$$x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b,$$

$$x_3 = ax_2 + b = a[a(ax_0 + b) + b] + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b,$$

.

.

.

$$x_n = a^n x_0 + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + a^2 + ab + b.$$

Daí,

$$x_n = a^n x_0 + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1). \quad (2.1)$$

Observemos que o termo entre parênteses é a soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão geométrica de razão  $a$ , onde o primeiro termo é igual a 1 e dessa forma, temos:

$$x_n = a^n x_0 + b \left[ 1, \frac{a^n - 1}{a - 1} \right].$$

Reescrevendo a fórmula com a condição inicial igual a  $x_1$ , teremos:

$$x_n = a^{n-1} x_1 + b \left[ \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1} \right], a \neq 1. \quad (2.2)$$

Para o caso em que  $a = 1$  segue facilmente de (2.1) que

$$x_n = x_1 + b(n - 1). \quad (2.3)$$

**Exemplo 2.2.** Vamos determinar a forma do termo geral da sequência 1, 5, 17, 53, ..., cuja equação de recorrência é  $x_{n+1} = 3x_n + 2$ , utilizando a fórmula (2.2).

*Solução:* Claramente, vemos que  $a = 3$ ,  $b = 2$  e  $x_1 = 1$ . Então:

$$x_n = 3^{n-1} \cdot 1 + 2 \left[ \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \right] = 2 \frac{3^n}{3} - 1.$$

Para generalizar, vamos apresentar um teorema que garante que qualquer recorrência não homogênea de primeira ordem pode ser transformada em uma da forma  $x_{n+1} = x_n + f(n)$ , cuja solução geral dada por  $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$  é obtida pelo processo recursivo.

**Teorema 2.1.** Se  $a_n$  é uma solução não - nula de

$$x_{n+1} = g(n)x_n,$$

então a substituição  $x_n = a_n y_n$  transforma a recorrência  $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$  em

$$y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1}.$$

*Demonstração.* Substituindo  $x_n = a_n y_n$  em  $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$ , obtemos  $a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$ . Como  $a_n$  é solução da parte homogênea  $x_{n+1} = g(n)x_n$ , então temos  $a_{n+1} = g(n)a_n$ . Assim,

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Daí,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h(n)}{g(n)a_n}, \\ &= y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

□

**Exemplo 2.3.** Utilize o Teorema 2.1 para encontrar a solução da equação  $x_{n+1} = 2x_n + 2^n$ , com  $x_1 = 1$ .

*Solução:* Vamos determinar primeiramente  $a_n$  solução da equação homogênea associada à equação dada, isto é, de  $x_{n+1} = 2x_n$ .

Pelo processo da recursão, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 2x_1, \\ x_3 &= 2x_2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n &= 2x_{n-1}. \end{aligned}$$

Isso resulta em  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots = 1 \cdot 2x_1 \cdot 2x_2 \cdots 2x_{n-1}$ , que, simplificando, fornece

$$a_n = 2^{n-1}.$$

De acordo com o Teorema 2.1, considere a mudança de variáveis  $x_n = a_n y_n$ . Logo,  $x_n = 2^{n-1} y_n$  e substituindo em  $x_{n+1} = 2x_n + 2^n$ , temos:

$$2^n y_{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1} y_n + 2^n,$$

ainda,

$$y_{n+1} = y_n + 1.$$

Ainda temos que  $x_1 = 1$ , portanto  $1 = 2^{1-1} y_1$ , o que significa que  $y_1 = 1$ . Utilizando a fórmula (2.3), concluímos facilmente que  $y_n = n$ .

Obtemos assim, a solução procurada:  $x_n = 2^{n-1} n$ , com  $x_1 = 1$ .

## 2.2 EQUAÇÃO DE SEGUNDA ORDEM

### 2.2.1 Homogênea

Uma equação de recorrência linear de 2ª ordem com coeficientes tem a forma:

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0, \quad (2.5)$$

onde  $q$  é sempre não-nulo, caso contrário, seria uma recorrência de primeira ordem e  $p$  e  $q$  são constantes reais.

Inspirados nas recorrências de primeira ordem, se supormos que  $x_n = kr^n$  é solução da equação  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , então segue que

$$kr^{n+2} + pkr^{n+1} + qkr^n = kr^n(r^2 + pr + q) = 0.$$

À equação de segundo grau  $r^2 + pr + q$  chamamos de *equação característica* associada ao problema (2.5), na qual  $q$  é não-nulo o que implica que 0 não é sua raiz.

Os teoremas seguintes extraídos de Elon [15] e os exemplos visam obter a solução das diferentes equações de recorrência lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, à partir das raízes da equação característica.



**Teorema 2.2.** Se as raízes de  $r^2 + pr + q = 0$  são  $r_1$  e  $r_2$ , então  $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  é solução da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes reais.

*Demonstração.* Substituindo  $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  na recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + pC_1 r_1^{n+1} + pC_2 r_2^{n+1} + qC_1 r_1^n + qC_2 r_2^n, \\ &= C_1 r_1^n r_1^2 + C_2 r_2^n r_2^2 + pC_1 r_1^n r_1^1 + pC_2 r_2^n r_2^1 + qC_1 r_1^n + qC_2 r_2^n, \\ &= C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q), \\ &= 0C_1 r_1^n + 0C_2 r_2^n = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

□

**Teorema 2.3.** Seja  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$  equação de recorrência linear de 2ª ordem com coeficientes constantes,  $r^2 + pr + q = 0$  sua equação característica e  $r_1$  e  $r_2$  raízes:

1. Se  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  e  $r_1 \neq r_2$ , então todas as soluções da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$  são da forma  $x_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ , com  $C_1$  e  $C_2$  constantes.
2. Se  $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$ , então todas as soluções da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$  são da forma  $x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ , com  $C_1$  e  $C_2$  constantes.
3. Se  $r_1 = a + bi$  e  $r_2 = a - bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , então a solução  $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ , com  $C_1$  e  $C_2$  constantes reais, pode ser escrita na forma  $x_n = \rho^n [C'_1 \cos(n\theta) + C'_2 i \sin(n\theta)]$ , onde  $C'_1$  e  $C'_2$  são novas constantes.

*Demonstração.* Caso 1. Do teorema anterior, temos que  $a_n$  é solução e seja agora  $y_n$  uma solução qualquer de  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ . Vamos determinar constantes  $C_1$  e  $C_2$  que sejam soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1, \\ C_1 r_1^2 + C_2 r_2^2 = y_2. \end{cases}$$

Do sistema anterior, temos que:

$$C_1 = \frac{r_2^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)} \text{ e } C_2 = \frac{r_1 y_2 - r_1^2 y_1}{r_1 r_2 (r_2 - r_1)}.$$

Note que a solução acima é possível pois  $r_1 \neq r_2$  e  $r_1, r_2 \neq 0$ .

Consideremos agora  $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$ .

Substituindo  $z_n$  em  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & y_{n+2} - C_1 r_1^{n+2} - C_2 r_2^{n+2} + p y_{n+1} - p C_1 r_1^{n+1} - p C_2 r_2^{n+1} + q y_n - q C_1 r_1^n - q C_2 r_2^n = \\ & = y_{n+2} - C_1 r_1^n r_1^2 - C_2 r_2^n r_2^2 + p y_{n+1} - p C_1 r_1^n r_1 - p C_2 r_2^n r_2 + q y_n - q C_1 r_1^n - \\ & \quad q C_2 r_2^n = \\ & = -C_1 r_1^n \underbrace{(r_1^2 + p r_1 + q)}_{=0} - C_2 r_2^n \underbrace{(r_2^2 + p r_2 + q)}_{=0} + \underbrace{(y_{n+2} + p y_{n+1} + q y_n)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Como  $z_{n+2} + p z_{n+1} + q z_n = 0$ , segue que  $z_n$  é solução de  $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$ .

Além disso, se  $z_n = y_n - C_1 r_1^n - C_2 r_2^n$  e  $C_1 r_1 + C_2 r_2 = y_1$ , então:

$$z_1 = y_1 - C_1 r_1^1 - C_2 r_2^1 = 0.$$

Analogamente,

$$z_2 = y_2 - C_1 r_1^2 - C_2 r_2^2 = 0.$$

Daí,  $z_3 = -p z_2 - q z_1 = 0$  e recursivamente obtemos  $z_n = 0, \forall n$ .

Caso 2. Seja  $y_n$  uma solução qualquer de  $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$ . Como antes, vamos determinar constantes  $C_1$  e  $C_2$  que sejam soluções do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} C_1 r + C_2 r = y_1, \\ C_1 r^2 + 2 C_2 r^2 = y_2, \end{cases}$$

isto é,

$$C_1 = \frac{2y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \text{ e } C_2 = \frac{y_2 - ry_1}{r^2}.$$

Note que a solução acima é possível pois  $r \neq 0$ .

Consideremos agora  $z_n = y_n - C_1 r^n - C_2 n r^n$ .

Substituindo  $z_n$  em  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & y_{n+2} - C_1 r^{n+2} - C_2(n+2)r^{n+2} + py_{n+1} - pC_1 r^{n+1} - pC_2(n+1)r^{n+1} + qy_n - qC_1 r^n - \\ & qC_2 n r^n = \\ & = y_{n+2} - C_1 r^n \cdot r^2 - C_2 n r^n \cdot r^2 - 2C_2 r^n \cdot r^2 + py_{n+1} - pC_1 r^n \cdot r - pC_2 n r^n \cdot r - pC_2 r^n \cdot r - \\ & qy_n - qC_1 r^n - qC_2 n r^n = \\ & = -C_1 r^n \underbrace{(r^2 + pr + q)}_{=0} - C_2 n r^n \underbrace{(r^2 + pr + q)}_{=0} - C_2 r^n r \underbrace{(2r + p)}_{=0^*} + \underbrace{(y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n)}_{=0} = \\ & 0. \end{aligned}$$

Observação(\*):  $2r + p$  é nulo, pois  $r = \frac{-p}{2}$ . De fato como  $r_1 = r_2 = r$  é raiz dupla de  $r^2 + pr + q$ , então temos  $p^2 - 4q = 0$  e portanto  $r = \frac{-p}{2}$ .

Como  $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ , segue que  $z_n$  é solução de  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ .

Além disso, se  $z_n = y_n - C_1 r^n - C_2 n r^n$  e  $C_1 r + C_2 r = y_1$ , então:

$$z_1 = y_1 - C_1 r^1 - C_2 1 r^1 = 0.$$

Analogamente,

$$z_2 = y_2 - C_1 r^2 - C_2 2 r^2 = 0.$$

Daí,  $z_3 = -pz_2 - qz_1 = 0$  e recursivamente obtemos  $z_n = 0, \forall n$ .

Caso 3. A forma trigonométrica é uma facilitação da apresentação de soluções para recorrências cujo polinômio característico possui raízes complexas.

Dados  $r_1 = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  e  $r_2 = \rho(\cos \theta - i \sin \theta)$ , segue da *Fórmula de Moivre* para potenciação de números complexos que:

$$r_1^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

e

$$r_2^n = \rho^n(\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

Como  $r_1 \neq r_2$ , tomamos  $y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes reais, como solução de  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$  e fazemos a substituição:

$$C_1[\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)] + C_2[\rho^n(\cos n\theta - i \sin n\theta)] =$$

$$C_1 \rho^n \cos n\theta + C_1 \rho^n i \sin n\theta + C_2 \rho^n \cos n\theta - C_2 \rho^n i \sin n\theta =$$

$$(C_1 + C_2)(\rho^n \cos n\theta) + (C_1 - C_2)(\rho^n i \sin n\theta).$$

Sendo  $C'_1$  e  $C'_2$  novas constantes reais tais que  $(C_1 + C_2) = C'_1$  e  $(C_1 - C_2) = C'_2$ , então:

$$x_n = \rho^n(C'_1 \cos n\theta + C'_2 i \sin n\theta).$$

□

*Observação:* Note que no item 3 do teorema anterior as soluções  $r_1^n$  e  $r_2^n$  não são reais. No entanto, via combinações dessas, podemos obter um par de soluções reais a saber  $\rho^n \cos n\theta$  e  $\rho^n i \sin n\theta$  que geram o conjunto da equação de recorrência.

**Exemplo 2.4.** A recorrência  $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 21x_n = 0$  tem  $r^2 - 4r - 21 = 0$  como equação característica, cujas raízes são  $r_1 = -3$  e  $r_2 = 7$ .

*Solução* De acordo com o Teorema 2.3, a solução geral da equação é dada por  $x_n = C_1(-3)^n + C_2 7^n$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  constantes reais.

É possível ainda determinar os valores das constantes reais  $C_1$  e  $C_2$  quando são fornecidas as condições iniciais, como ilustrado no exemplo seguinte:

**Exemplo 2.5.** Vamos resolver a equação  $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0$ , dados  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 3$ .  
*Solução:* A equação característica é  $r^2 - 7r + 10 = 0$  com raízes iguais a  $r_1 = 2$  e  $r_2 = 5$  que fornece a solução geral da recorrência:  $x_n = C_1 2^n + C_2 5^n$ .

Sabendo que  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 3$ , podemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} x_0 = 0 = C_1 2^0 + C_2 5^0, \\ x_1 = 3 = C_1 2^1 + C_2 5^1, \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 3 = 2C_1 + 5C_2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos  $C_1 = -1$  e  $C_2 = 1$ . Portanto a solução da recorrência é:

$$x_n = -2^n + 5^n.$$

**Exemplo 2.6.** A recorrência  $x_{n+2} - 10x_{n+1} + 25x_n = 0$  tem  $r^2 - 10r + 25 = 0$  como equação característica, cujas raízes são  $r_1 = r_2 = 5$ .

*Solução* De acordo com o Teorema 2.3, a solução geral da equação é dada por  $a_n = C_1 5^n + C_2 n 5^n$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  constantes reais.

**Exemplo 2.7.** A recorrência  $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 4x_n = 0$  tem  $r^2 - 3r + 4 = 0$  como equação característica, cujas raízes são  $r_1 = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$  e  $r_2 = \frac{3-i\sqrt{7}}{2}$ , e o módulo é  $\rho = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 2$ . Temos também que o argumento principal é  $\theta = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$ .

*Solução* De acordo com o Teorema 2.3, a solução geral da equação é dada por

$$x_n = 2^n [C'_1 \cos(n \arccos(\frac{3}{4})) + C'_2 i \sin(n \arccos(\frac{3}{4}))], \text{ onde } C'_1 \text{ e } C'_2 \text{ constantes reais.}$$

### 2.2.2 Não homogênea

O próximo teorema apresenta uma forma de resolução de equações de recorrência de segunda ordem não homogêneas.

**Teorema 2.4.** Se  $a_n$  é uma solução da equação

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n), \quad (2.7)$$

então a substituição  $x_n = a_n + y_n$  transforma a equação (2.7) em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

*Demonstração.* Substituindo  $x_n = a_n + y_n$  em  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$ , obtemos:

$$a_{n+2} + y_{n+2} + pa_{n+1} + py_{n+1} + qa_n + qy_n = f(n),$$

ou ainda,

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n + y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = f(n).$$

Como  $a_n$  é solução de  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$ , então  $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$  e consequentemente,

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

□

Do teorema anterior somos capazes de exprimir a solução geral de uma equação de recorrência não homogênea da forma  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$  como  $x_n = a_n + y_n$  onde  $a_n$  é uma solução particular de  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$  e  $y_n$  é dada pelo Teorema 2.4.

**Exemplo 2.8.** A recorrência  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$  tem  $r^2 - 5r + 6 = 0$  como equação característica da sua parte homogênea, cujas raízes são  $r_1 = 2$  e  $r_2 = 3$ . Logo, a solução da parte homogênea é  $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$ , para  $C_1$  e  $C_2$  constantes reais.

Pela técnica de *Coefficientes a Determinar*<sup>1</sup>, vamos determinar uma solução particu-

<sup>1</sup> O método dos coeficientes a determinar se baseia no fato de que as derivadas de somas e produtos de constantes, polinômios, exponenciais, senos e cossenos são ainda somas e produtos destas funções. A ideia central deste método é então, partir de uma conjectura, ou um “chute” bem dado, sobre a forma da parte não homogênea da equação. Baseado no tipo de função  $f(n)$  e observando que a combinação

lar  $a_n$ . Para isso, vamos supor  $a_n$  da forma  $a_n = An + B$ , onde  $A, B \in \mathbb{R}$  e assim, vamos determinar (se possível) valores de  $A$  e  $B$  para os quais  $a_n$  é solução de  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$ .

Substituindo  $a_n = An + B$  na equação, temos:

$$\begin{aligned} A(n+2) + B - 5A(n+1) - 5B + 6An + 6B &= n, \\ An + 2A + B - 5An - 5A - 5B + 6An + 6B &= n, \\ 2An - 3A + 2B &= n. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases}$$

Dessa forma, temos que  $A = \frac{1}{2}$  e  $B = \frac{3}{4}$  e finalmente de acordo com o Teorema 2.4, a solução procurada é:

$$x_n = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{n}{2} + \frac{3}{4}, \text{ onde } C_1 \text{ e } C_2 \text{ são constantes reais.}$$

Observemos que no exemplo acima,  $f(n) = n$  e para determinar a sua solução precisamos testar um polinômio que apresentasse as mesmas características da parte não-homogênea.

Abaixo apresentamos uma tabela com algumas funções de entrada e suas respectivas possíveis soluções particulares.

---

linear  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n$  tem que ser igual a  $f(n)$ , parece razoável supor, então, que a solução particular  $a_n$  tenha a mesma forma de  $f(n)$ . [3]

$f(n)$	$a_n$
constante	$A$
constante + $nk^n$	$A + (Bn^3 + Cn^2)k^n$
constante + $k^n$	$A + Bnk^n$
$n$	$An + B$
$k^n$	$Ank^n$
$n + k^n$	$An + B + Cnk^n$
$1 + \text{constante}k^n$	$An + B + Ck^n$

*Observação:* É importante observar que quando  $a_n$  é natural, já aparece na solução da equação homogênea e algumas adaptações precisam ser feitas para que a solução particular seja independente da solução da equação homogênea.

### 2.3 EQUAÇÃO HOMOGÊNEA DE ORDEM $k$

Como vimos no Teorema 2.3, toda solução de uma equação de recorrência de 2ª ordem homogênea e com coeficientes constantes pode ser escrita como combinação de duas soluções particulares, isto é, o espaço solução dessas equações é um espaço vetorial 2 - dimensional.

Para equações de mesmo tipo de ordem  $k$ , também é verdade que o espaço solução é um espaço vetorial de dimensão  $k$ . Logo basta encontrarmos  $k$  soluções linearmente independentes para que qualquer solução seja conhecida.

O processo de encontrar tais soluções segue os seguintes passos:

Dada a equação de diferença linear e homogênea [1]:

$$x_{t+k} + \alpha_{t+k-1}x_{t+k-1} + \alpha_{t+k-2}x_{t+k-2} + \dots + \alpha_{t+1}x_{t+1} + \alpha_t x_t = 0, \quad (2.8)$$

supomos que  $x_t = C\lambda^t$  é solução da equação (2.8) e substituindo  $x_t$ , temos:

$$C\lambda^{t+k} + \alpha_{t+k-1}C\lambda^{t+k-1} + \alpha_{t+k-2}C\lambda^{t+k-2} + \dots + \alpha_{t+1}C\lambda^{t+1} + \alpha_t C\lambda^t = 0$$

↓



$$C\lambda^t(\lambda^k + \alpha_{t+k-1}\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_{t+1}\lambda + \alpha_t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} C\lambda^t = 0 \\ \lambda^k + \alpha_{t+k-1}\lambda^{k-1} + \dots + \alpha_{t+1}\lambda + \alpha_t = 0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$C\lambda^t = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

ou

$$p_k(\lambda) = 0.$$

E daí concluímos que  $\lambda^t$  é uma solução da equação (2.8)  $\Leftrightarrow$   $\lambda$  é uma solução de  $p_k(\lambda)$ , onde  $p_k(\lambda)$  é o polinômio característico dela.

A partir daqui a teoria desenvolvida no caso de ordem 2 pode ser repetida a fim de obter base de soluções de (2.8).

# 3

## TEORIA QUALITATIVA

---

---

Neste capítulo vamos apresentar uma outra forma de abordar as recorrências através da teoria qualitativa. Essa técnica resulta em estudar propriedades das soluções, sem necessariamente, conhecê-las. Tal técnica é extremamente útil em contextos onde a solução é de difícil obtenção ou mesmo impossível.

Nesse contexto nos restringimos ao estudo de soluções na vizinhança de pontos fixos e/ou órbitas periódicas.

### 3.1 ÓRBITA E PONTOS FIXOS

Considere a equação de recorrência de primeira ordem dada por

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (3.1)$$

onde  $f : I \rightarrow I$  é continuamente diferenciável em  $I$  com  $I \subset \mathbb{R}$ .

**Definição 3.1.** Um ponto  $x^*$  no domínio de  $f$  é dito *ponto fixo* de (3.1) se ele é um ponto fixo de  $f$ , isto é,  $f(x^*) = x^*$ . Em outras palavras,  $x^*$  é uma *solução constante* de (3.1).

Note que se  $x^*$  é ponto fixo de  $f$  e se  $x_0 = x^*$  é o ponto inicial, então  $x_1 = f(x^*) = x^*$ , e  $x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^*$ , e assim por diante.

Graficamente, um ponto fixo é a abscissa do ponto onde o gráfico de  $f$  intersecta a reta bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja, onde  $x_{n+1} = x_n$ .

**Definição 3.2.** [17] Chama-se *órbita positiva* ( $\mathcal{O}^+(x_0)$ ) de  $x_0$  o conjunto de todas as iteradas positivas da função  $f$  no ponto  $x_0$  e *órbita negativa* ( $\mathcal{O}^-(x_0)$ ) de  $x_0$  o conjunto de todas as iteradas negativas da função  $f$  no ponto  $x_0$ . O conjunto  $\mathcal{O}^+(x_0) \cup \mathcal{O}^-(x_0)$  é denominado de *órbita* de  $x_0$  e é representada por  $\mathcal{O}(x_0)$ .

*Observação:* Quando nos referimos à órbita negativa, estamos considerando que a função  $f$  é invertível.

### 3.2 ESTABILIDADE

O estudo do comportamento assintótico das soluções de uma determinada equação nas proximidades dos pontos fixos é conhecido como teoria de estabilidade. A seguinte definição é um conceito básico neste domínio.

**Definição 3.3.** Seja  $x^*$  o ponto fixo da equação (3.1) dizemos que:

- i.  $x^*$  é *estável* se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $|x_0 - x^*| < \delta$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , então  $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ . Caso contrário, diz-se *instável*.
- ii.  $x^*$  é *assintoticamente estável* se for estável e ainda existe  $\eta > 0$ , tal que se  $|x_0 - x^*| < \eta$  então  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*$ .

Veremos que a estabilidade de um ponto fixo  $x^*$  pode ser determinada pelo valor do módulo do coeficiente angular da reta tangente à curva de  $f$  no ponto  $x^*$ , isto é,

$$|\lambda| = |f'(x^*)|. \quad (3.2)$$

A fim de estabelecermos esse resultado, utilizaremos o teorema auxiliar abaixo:

**Teorema 3.4.** *Teorema de Taylor [11]:* Seja  $f$  uma função derivável até 2ª ordem no intervalo  $I$  e sejam  $x, x_0 \in I$ . Então, existe pelo menos um  $\bar{x}$  no intervalo aberto de extremos  $x$  e  $x_0$  tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2}_{E(x)}.$$

*Observação:* Note que no teorema anterior, temos em particular

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E(x)}{(x - x_0)} = 0.$$

*Demonstração.* Podemos escrever,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x) \Rightarrow E(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]. \quad (3.3)$$

Assim,

$$E(x_0) = 0 = E'(x_0).$$

Seja  $g(x) = (x - x_0)^2$ . Note que  $g(x_0) = 0 = g'(x_0) = 0$ .

Agora, fazemos

$$\frac{E(x)}{g(x)} = \frac{E(x) - E(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

pelo Teorema de Cauchy<sup>1</sup> existe  $\bar{x}_1$  no intervalo de extremos  $x_0$  e  $x$  tal que

$$\frac{E(x)}{g(x)} = \frac{E'(\bar{x}_1)}{g'(\bar{x}_1)}.$$

Como  $E'(x_0) = g'(x_0) = 0$ , então

$$\frac{E(x)}{g(x)} = \frac{E'(\bar{x}_1) - E'(x_0)}{g'(\bar{x}_1) - g'(x_0)}.$$

Novamente, pelo Teorema de Cauchy, existe  $\bar{x}$  no intervalo aberto de extremos  $x_0$  e  $\bar{x}_1$  tal que

$$\frac{E(x)}{g(x)} = \frac{E''(\bar{x})}{g''(\bar{x})}.$$

Agora, da expressão de  $E(x)$  em (3.3) segue que  $E''(x) = f''(x)$ . E como  $g''(x) = 2$ , tem-se:

<sup>1</sup> [11] Se  $f$  e  $k$  forem funções contínuas em  $[a, b]$  e deriváveis em  $]a, b[$ , então existirá pelo menos um  $c$  em  $]a, b[$  tal que,

$$\frac{f(b) - f(a)}{k(b) - k(a)} = \frac{f'(c)}{k'(c)}, \text{ se } k(b) \neq k(a) \text{ e } k'(c) \neq 0.$$

$$\frac{E(x)}{g(x)} = \frac{f''(\bar{x})}{2}.$$

Portanto,

$$E(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2,$$

para algum  $\bar{x}$  no intervalo aberto de extremos  $x$  e  $x_0$ . □

Observamos que se  $f$  for derivável até a ordem  $n + 1$  no intervalo  $I$  e  $x_0 \in I$ , o teorema anterior pode ser estendido até ordem  $n + 1$ . Para maiores detalhes, ver em [11].

Voltando à equação (3.2), temos:

**Teorema 3.5.** *Sejam  $a$  um ponto fixo da equação (3.1) e  $f$  continuamente diferenciável em  $a$ . Se:*

1.  $|\lambda| < 1$ , então  $a$  é assintoticamente estável ( $a$  é ponto fixo atrator).
2.  $|\lambda| > 1$ , então  $a$  é instável ( $a$  é ponto fixo repulsor).
3.  $\lambda = 1$ , então:
  - a)  $a$  é instável se  $f''(a) \neq 0$ .
  - b)  $a$  é instável se  $f''(a) = 0$  e  $f'''(a) > 0$ .
  - c)  $a$  é assintoticamente estável se  $f''(a) = 0$  e  $f'''(a) < 0$ .
4.  $\lambda = -1$ , então:
  - a)  $a$  é assintoticamente estável se  $-2f'''(a) - 3f''(a)^2 < 0$ .
  - b)  $a$  é instável se  $-2f'''(a) - 3f''(a)^2 > 0$ .

*Demonstração.* 1. Tomamos  $h$  suficientemente próximo de zero, tal que  $x = a + h \in I$ , temos pelo Teorema 3.4, que:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + E(x)$$

↓

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a + \lambda(x - a) + E(x) \\
 &\Downarrow \\
 f(a+h) &= a + \lambda(a+h-a) + \underbrace{E(a+h)}_{E_h} \\
 &\Downarrow \\
 f(a+h) &= a + \lambda h + E_h(h).
 \end{aligned}$$

Daí,

$$f(a+h) - a = h \left( \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right). \quad (3.4)$$

Então,

$$|f(a+h) - a| = |h| \left| \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right|.$$

Como  $|\lambda| < 1$  e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_h(h)}{h} = 0,$$

temos:

$$\left| \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right| < 1.$$

Assim,

$$|f(a+h) - a| = |h| \left| \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right| < |h|.$$

Isso implica em

$$|f(a+h) - a| < |h|.$$

Ou seja, a distância entre  $f(a+h)$  e  $a$  é menor que  $|h|$ , o que prova que  $a$  é ponto fixo *atrator*.

No entanto, ainda temos que analisar dois casos em 1.

1.i)  $0 < \lambda < 1$ .

Neste caso, para  $h \sim 0$ , temos:

$$0 < \left( \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right) < 1,$$

que, para  $h > 0$  implica em

$$0 < \left( \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right) h < h.$$

Disso, temos que se  $h > 0$ , então  $\left( \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right) h > 0$ , o que da equação (3.4) implica que  $f(a+h) - a > 0$  e portanto,  $f(a+h) > a$ . Como segue na figura 1.

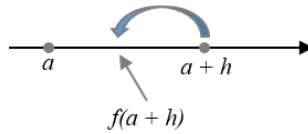


Figura 1: o ponto fixo  $a$  é atrator,  $h > 0$  e  $0 < \lambda < 1$ .

Agora se  $h < 0$ , temos que:

$$h < \left( \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right) h < 0.$$

Assim, da equação (3.4), temos que  $f(a+h) - a < 0$  e  $f(a+h) < a$ . Como segue na figura 2.

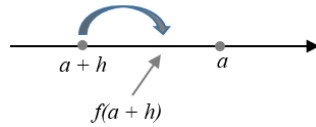


Figura 2: o ponto fixo  $a$  é atrator,  $h < 0$  e  $0 < \lambda < 1$ .

1.ii)  $-1 < \lambda < 0$ .

De forma análoga à anterior, tem-se para  $h \sim 0$  que:

$$-1 < \left( \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right) < 0.$$

Daí, para  $h > 0$ , temos:

$$-h < \left( \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right) h < 0$$

que, de (3.4) implica em  $f(a+h) - a > -h$ , e portanto,  $f(a+h) > a - h$ .

Além disso, pelo Teorema do Valor Médio (T.V.M.), existe  $c \in (a, a+h)$ , tal que  $f(a+h) = f(a) + f'(c)h$ , e como  $f'(c)h < 0$ , implica que  $f(a+h) < a$ , como pode

ser visto na figura 3.

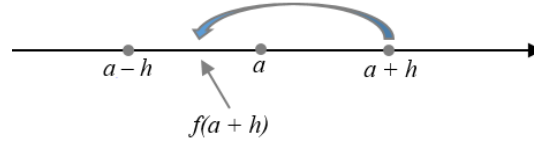


Figura 3: o ponto fixo  $a$  é atrator,  $h > 0$  e  $-1 < \lambda < 0$ .

Agora, se  $h < 0$ , temos:

$$0 < \left( \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right) h < -h.$$

Novamente, de (3.4) segue que,  $\left( \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right) h < -h$ , o que significa que  $f(a+h) - a < -h$  e  $f(a+h) < a-h$ , como pode ser visto na figura 4.

Além disso, pelo Teorema do Valor Médio (TVM), existe  $c \in (a, a+h)$ , tal que  $f(a+h) = f(a) + f'(c)h$ , e como  $f'(c)h > 0$ , implica que  $f(a+h) > a$ .

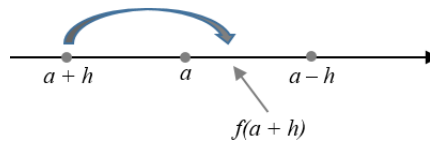


Figura 4: o ponto fixo  $a$  é atrator,  $h < 0$  e  $-1 < \lambda < 0$ .

2.  $|\lambda| > 1$ .

Pelos mesmos argumentos do item anterior, temos que se  $h \sim 0$ , então:

$$\left| \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right| > 1,$$

e daí,

$$|h| \left| \lambda + \frac{E_h(h)}{h} \right| > |h|.$$

Sendo assim,  $|f(a+h) - a|$ , que é a distância entre  $f(a+h)$  e  $a$ , é maior que  $|h|$ , o que prova que  $a$  é repulsor.



Novamente, temos que analisar dois casos.

2.i)  $\lambda > 1$ .

Aqui, para  $h \sim 0$ , tem-se:

$$\left(\lambda + \frac{E_h(h)}{h}\right) > 1,$$

e se  $h > 0$ , vale

$$\left(\lambda + \frac{E_h(h)}{h}\right) h > h,$$

o que, da equação (3.4) implica em  $f(a+h) - a > h$ , ou seja,  $f(a+h) > a+h$ .

O cálculo para  $h < 0$  é análogo e assim concluímos que a dinâmica é dada como na figura 5.

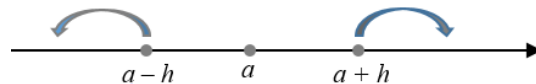


Figura 5: o ponto fixo  $a$  é repulsor e  $\lambda > 1$ .

2.ii)  $\lambda < -1$ .

Temos que para  $h \sim 0$ , de (3.4):

$$\left(\lambda + \frac{E_h(h)}{h}\right) < -1 < 0,$$

e para  $h > 0$  tem-se que

$$\left(\lambda + \frac{E_h(h)}{h}\right) h < -h < 0 \Rightarrow \left(\lambda + \frac{E_h(h)}{h}\right) h < 0.$$

E então,  $f(a+h) < a$ , como segue na figura 6.

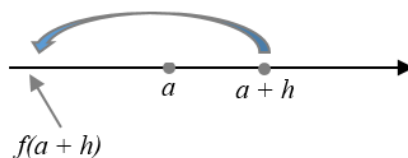


Figura 6: o ponto fixo  $a$  é repulsor,  $h > 0$  e  $\lambda < -1$ .

Agora se  $h < 0$ , vê-se de modo similar

$$\left(\lambda + \frac{E_h(h)}{h}\right)h > 0$$

e a dinâmica é como na figura 7.

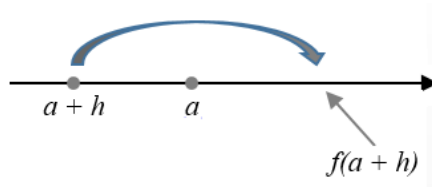


Figura 7: o ponto fixo  $a$  é repulsor,  $h < 0$  e  $\lambda < -1$ .

3.  $\lambda = 1$ .

3.a) Suponha  $f''(a) > 0$ , então segue que  $f'(x)$  é crescente na vizinhança de  $x = a$  e portanto  $f'(x) > 1$  para todo  $x > a$ , tal que  $x \in (a, a+h]$  com  $h > 0$  suficientemente pequeno.

Pelo Teorema do Valor Médio (TVM), existe  $c \in (a, a+h)$ , tal que

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f'(c)(a+h-a), \\ &\Downarrow \\ f(a+h) - f(a) &= \underbrace{f'(c)}_{>1} h > h, \\ &\Downarrow \\ f(a+h) &> a+h \end{aligned}$$

e

$$f(a+h) = a + f'(c)h > a.$$

Por outro lado, se  $x \in (a+h, a)$  onde  $h < 0$  ainda suficientemente próximo de zero, então  $f'(x) < 1$  e

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \underbrace{f'(c)}_{<1} h > h, \\ &\Downarrow \\ f(a+h) &> a+h \end{aligned}$$

e

$$f(a+h) = a + f'(c)h < a.$$

Em resumo, temos esses casos apresentados nas figuras 8 e 9:

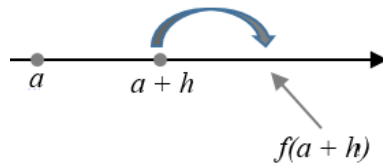


Figura 8:  $f''(a) > 0$ ,  $\lambda = 1$  e  $h > 0$ .

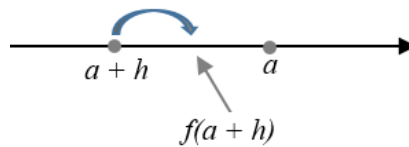


Figura 9:  $f''(a) > 0$ ,  $\lambda = 1$  e  $h < 0$ .

Logo o ponto fixo  $a$  é instável para  $f''(a) > 0$ .

Agora, suponha  $f''(a) < 0$ , então segue que  $f'(x)$  é decrescente na vizinhança de  $x = a$  e portanto  $f''(x) < 1$  para todo  $x > a$ , tal que  $x \in [a, a+h]$  com  $h > 0$  suficientemente pequeno.

Pelo TVM, existe  $c \in (a, a+h)$ , tal que

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f'(c)(a+h-a) \\ &\downarrow \\ f(a+h) - f(a) &= \underbrace{f'(c)}_{<1} h < h \\ &\downarrow \\ f(a+h) &< a+h, \end{aligned}$$

e

$$f(a+h) = a + f'(c)h > a.$$

Por outro lado, se  $x \in (a+h, a)$  com  $h < 0$  suficientemente próximo de zero, então  $f'(x) > 1$ . Pelo TVM, existe  $c \in (a, a+h)$ , tal que

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f'(c)h, \\ &\downarrow \\ f(a+h) - a &= \underbrace{f'(c)}_{>1} h > h, \\ &\downarrow \\ f(a+h) &< a+h, \end{aligned}$$

e

$$f(a+h) = a + f'(c)h < a.$$

Em resumo, temos esses casos apresentados nas figuras 10 e 11:

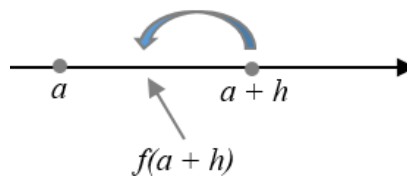


Figura 10:  $f''(a) < 0$ ,  $\lambda = 1$  e  $h > 0$ .

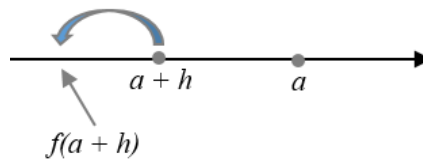


Figura 11:  $f''(a) < 0$ ,  $\lambda = 1$  e  $h < 0$ .

Como consequência, segue que o ponto fixo  $a$  é instável.

3.b) Supondo agora que  $f''(a) = 0$  e  $f'''(a) > 0$ . Pelo teorema de Taylor generalizado, de [11], temos:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + E(x).$$

Tomando  $h$  real suficientemente pequeno, temos:

$$f(a+h) = a + 1(a+h-a) + 0 + \frac{f'''(a)(a+h-a)^3}{3!} + E_h(h), \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E_h(h)}{h^3} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= a+h + \frac{f'''(a)h^3}{3!} + E_h(h), \\ &\downarrow \\ f(a+h) - a &= h + \frac{f'''(a)h^3}{3!} + E_h(h), \\ &\downarrow \\ |f(a+h) - a| &= \left| h + \frac{f'''(a)h^3}{3!} + E_h(h) \right|, \\ &\downarrow \end{aligned}$$

$$|f(a+h) - a| = |h| \left| \left( 1 + \frac{f'''(a)h^2}{3!} + \frac{E_h(h)}{h} \right) \right|. \quad (3.5)$$

Como  $f'''(a) > 0$  e  $\frac{E_h(h)}{h}$  tende a zero, quando  $h \rightarrow 0$ , então  $\left( 1 + \frac{f'''(a)h^2}{3!} + \frac{E_h(h)}{h} \right)$  é maior que 1. Logo,  $|f(a+h) - a| > |h|$ , o que significa dizer que a distância entre  $f(a+h)$  e  $a$  é maior que  $|h|$  e que  $a$  é ponto fixo instável.

Em resumo, temos esses casos apresentados nas figuras 12 e 13:

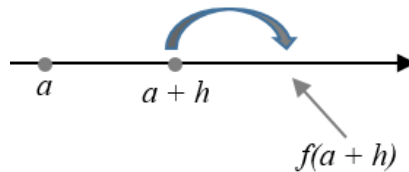


Figura 12: o ponto fixo  $a$  é instável,  $f''(a) = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $h > 0$  e  $f'''(a) > 0$ .

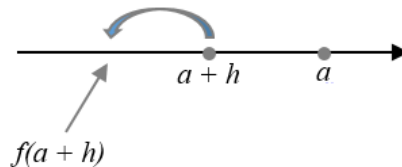


Figura 13: o ponto fixo  $a$  é instável,  $f''(a) = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $h < 0$  e  $f'''(a) > 0$ .

3.c) Supondo  $f''(a) = 0$ ,  $f'''(a) < 0$  e tomando  $h$  suficientemente pequeno, temos pela equação (3.5) que

$$|f(a+h) - a| = |h| \left| 1 + \frac{f'''(a)h^2}{3!} + \frac{E_h(h)}{h} \right|$$

Como  $f'''(a) < 0$  e  $\frac{E_h(h)}{h}$  tende a zero, então  $\left(1 + \frac{f'''(a)h^2}{3!} + \frac{E_h(h)}{h}\right)$  é menor que 1. Logo,  $|f(a+h) - a| < |h|$ , o que significa dizer que a distância entre  $f(a+h)$  e  $a$  é menor que  $h$  e que  $a$  é ponto fixo assintoticamente estável.

Em resumo, temos esses casos apresentados nas figuras 14 e 15:

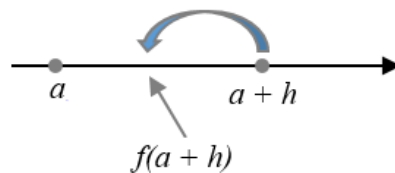


Figura 14: o ponto fixo  $a$  é estável,  $f''(a) = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $h > 0$  e  $f'''(a) < 0$ .

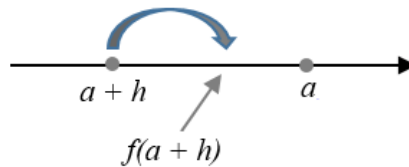


Figura 15: o ponto fixo  $a$  é estável,  $f''(a) = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $h < 0$  e  $f'''(a) < 0$ .

4.  $\lambda = -1$

4.a) Definimos uma função  $g : I \rightarrow I$  por  $g(x) = f(f(x))$ . Dessa forma, como  $f(a) = a$ , então  $g(a) = f(f(a)) = f(a) = a$ .

Ainda temos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(f(x))f'(x), \\ &\Downarrow \\ g'(a) &= f'(a)f'(a) = (f'(a))^2 = (-1)^2 = 1. \end{aligned}$$

E ainda:

$$\begin{aligned} g''(x) &= [f'(f(x))]' f'(x) + f'(f(x)) f''(x), \\ &= f''(f(x)) f'(x) f'(x) + f'(f(x)) f''(x), \\ &= f''(f(x)) (f'(x))^2 + f'(f(x)) f''(x). \end{aligned}$$

Assim,

$$g''(a) = f''(f(a)) \cdot (-1)^2 + \underbrace{f'(a)}_{-1} \cdot f''(a) = 0.$$

Além disso, a terceira derivada de  $g(x)$  é:

$$\begin{aligned} g'''(x) &= f'''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot (f'(x))^2 + f''(f(x)) \cdot 2(f'(x)) \cdot f''(x) + f''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f''(x) + f'(f(x)) \cdot f'''(x) \cdot x' \\ &= f'''(f(x)) \cdot (f'(x))^3 + f''(f(x)) \cdot 2 \cdot (f'(x)) \cdot f''(x) + f''(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f''(x) + f'(f(x)) \cdot f'''(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g'''(a) &= f'''(f(a)) \cdot (f'(a))^3 + f''(f(a)) \cdot 2(f'(a)) \cdot f''(a) + f''(f(a)) \cdot f'(a) \cdot f''(a) + f'(f(a)) \cdot f'''(a) \\ &= f'''(f(a)) (-1)^3 + f''(a) \cdot 2(-1) \cdot f''(a) + f''(f(a)) \cdot (-1) \cdot f''(a) + \underbrace{f'(a)}_{-1} \cdot f'''(a) \\ &= -f'''(a) - 2(f''(a))^2 - (f''(a))^2 - f''(a) \\ &= -2f'''(a) - 3(f''(a))^2. \end{aligned}$$

De acordo com 3b), se  $-2f'''(a) - 3(f''(a))^2 > 0$ , então o ponto fixo  $a$  é instável.

4.b) Este caso segue de modo análogo ao anterior, concluindo que se  $-2f'''(a) - 3(f''(a))^2 < 0$ , então o ponto fixo  $a$  é assintoticamente estável.

□

3.2.1 Exemplos

Vamos agora, analisar o comportamento da solução de equações de alguns casos especiais. Para isso, vamos determinar os pontos fixos da função e analisar a sua estabilidade.

**Exemplo 3.1.** Encontre os pontos fixos de  $f(x) = x_{n+1} = 0,5x_n + 1$  e classifique-os quanto a sua estabilidade.

*Solução*

1º) Determinamos os pontos fixos fazendo  $0,5x_n + 1 = x_n$  e obtemos  $a = 2$ .

2º) Determinamos o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto fixo  $a$ , fazendo  $f'(x) = 0,5$ , temos  $f'(2) = \lambda = 0,5$ .

3º) De acordo com o caso 1., o ponto fixo  $a$  é atrator.

A figura 16 apresenta o gráfico de  $f$  juntamente com a dinâmica da vizinhança do ponto fixo.

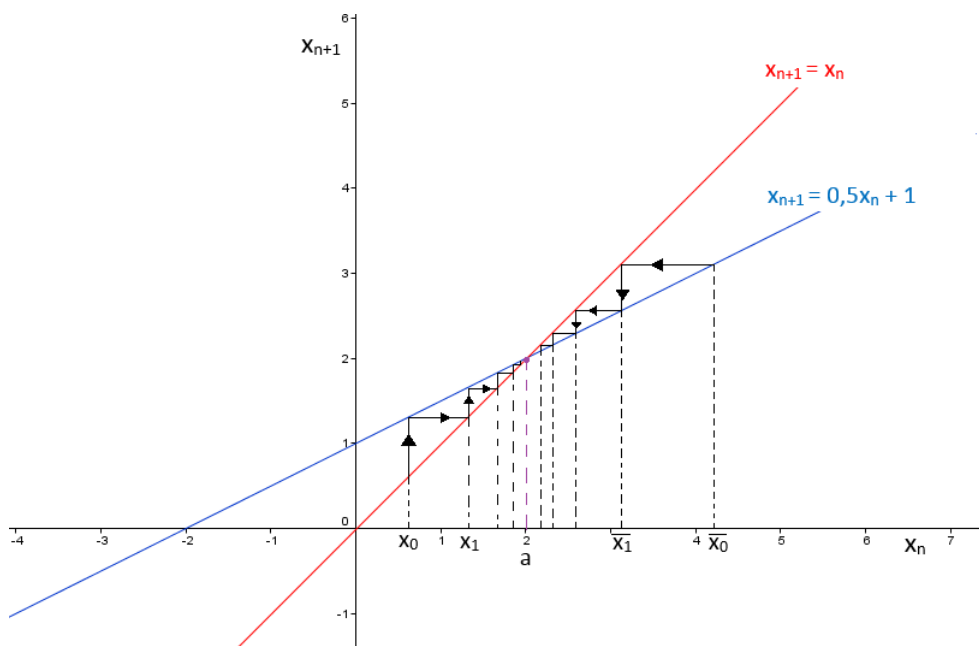


Figura 16: Exemplo de função para  $|\lambda| < 1$ .

**Exemplo 3.2.** Encontre os pontos fixos de  $f(x) = x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4$  e classifique-os quanto à sua estabilidade.



*Solução*

- 1º) Determinamos os pontos fixos fazendo  $x_n^2 - 3x_n + 4 = x_n$  e obtemos  $a = 2$ .
- 2º) Determinamos o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto fixo  $a$ , fazendo  $f'(x) = 2x - 3$ , temos  $f'(2) = \lambda = 1$ .
- 3º) Determinamos  $f''(x) = 2$  e daí  $f''(2) = 2 \neq 0$ .
- 4º) De acordo com o caso 3a., o ponto fixo  $a$  é instável.

A figura 17 apresenta o gráfico de  $f$  juntamente com a dinâmica da vizinhança do ponto fixo.

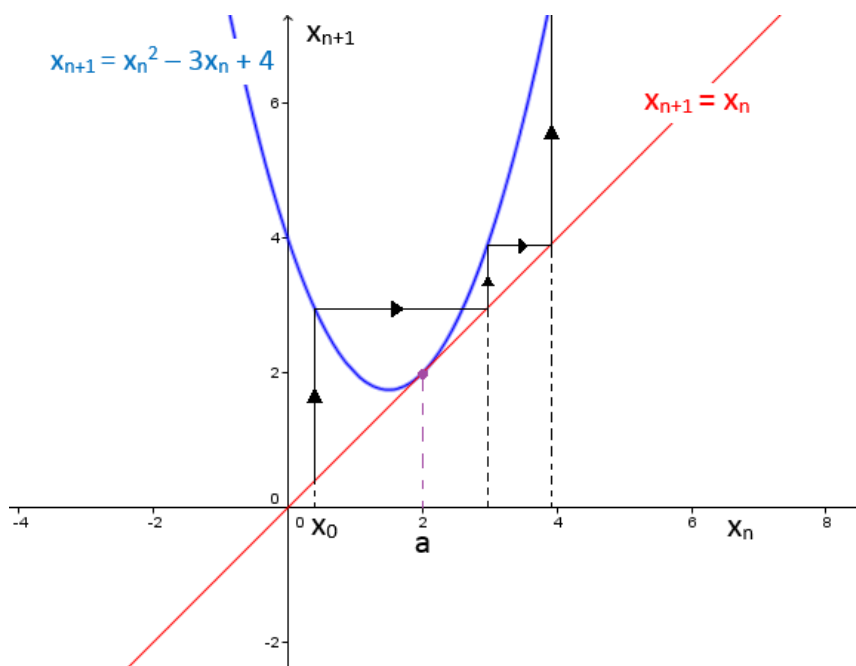


Figura 17: Exemplo de função para  $\lambda = 1$  e  $f''(a) \neq 0$ .

**Exemplo 3.3.** Encontre os pontos fixos de  $x_{n+1} = x_n^3$  e classifique-os quanto à sua estabilidade.

*Solução*

- 1º) Determinamos os pontos fixos fazendo  $x_n^3 = x_n$  e obtemos  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  e  $a_3 = -1$ .
- 2º) Determinamos o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  nos pontos fixos  $a$ , fazendo  $f'(x) = 3x^2$ , temos  $f'(0) = \lambda_1 = 0$ ,  $f'(1) = \lambda_2 = 3$  e

$$f'(-1) = \lambda_3 = 3.$$

3º) De acordo com o caso 1., o ponto fixo  $a_1$  é atrator e de acordo com o caso 2., os pontos fixos  $a_2$  e  $a_3$  são repulsores.

A figura 18 apresenta o gráfico de  $f$  juntamente com a dinâmica da vizinhança do ponto fixo.

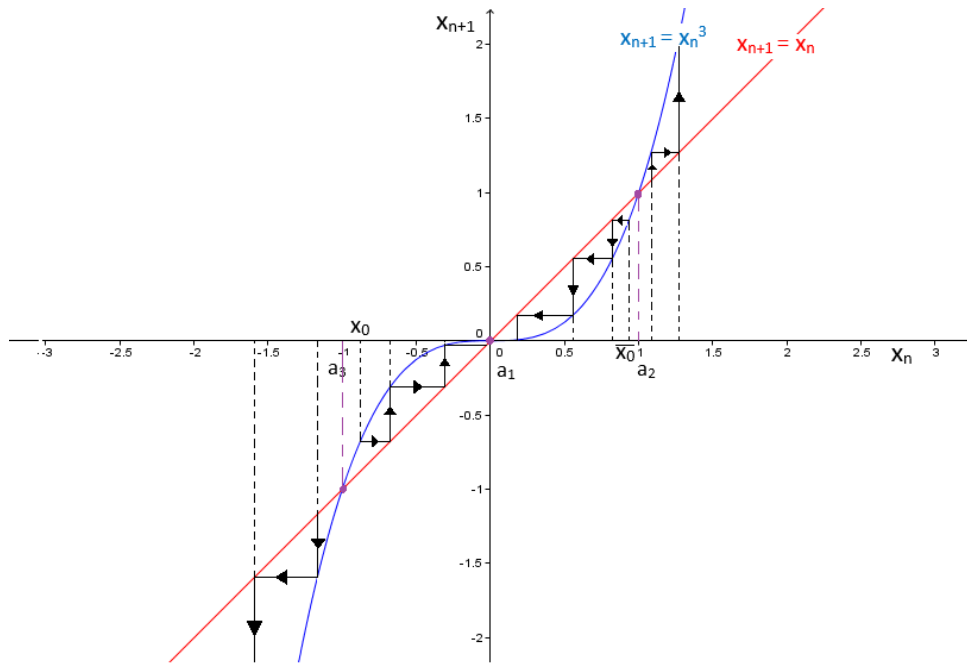


Figura 18: Exemplo de função para  $|\lambda_1| < 1$ ,  $|\lambda_2| = |\lambda_3| > 1$ .

### 3.2.2 Órbitas Periódicas

Nesta seção estudaremos soluções de um tipo especial de recorrência, o chamado *Mapa Logístico* e, neste contexto, abordaremos o conceito de órbitas periódicas e suas estabilidades.

**Definição 3.6.** Dizemos que  $x^*$  é um ponto  $k$  periódico de (3.1) se  $f(x^*), f^2(x^*), \dots, f^{k-1}(x^*) \neq x^*$  e  $f^k(x^*) = x^*$ , onde  $f^j = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{j \text{ vezes}}$ .

*Observações:*

- a) Note que se  $x^*$  é ponto  $k$ -periódico, então  $\mathcal{O}(x^*) = \{x^*, f(x^*), \dots, f^{k-1}(x^*)\}$ . Neste caso, chamamos  $\mathcal{O}(x^*)$  de um  $k$ -ciclo de  $f$ .
- b) Determinar os pontos  $k$ -periódicos de  $f$  é equivalente a determinar os pontos fixos de  $g = f^k$ .

### *Estabilidade de Pontos Periódicos*

“Tal como no caso dos pontos fixos de  $f$ , pontos periódicos podem ser estáveis ou instáveis. Intuitivamente, um ponto periódico de período  $k$  é estável se qualquer trajetória iniciada numa vizinhança dessa órbita não se afasta desses  $k$  pontos em  $k$  iterações. (...) Da mesma forma se interpreta ponto periódico assintoticamente estável e instável”. [21]

Logo, para estudar a estabilidade de um ponto  $k$ -periódico da equação (3.1) é suficiente estudar a estabilidade do ponto fixo de  $g$ , onde  $g = f^k$  e aplicar o Teorema 3.5 à essa nova função.

**Teorema 3.7.** *Seja  $f$  uma função continuamente diferenciável e  $\mathcal{O}^+(x^*) = \{x^* = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$  um  $k$ -ciclo de  $f$ . Então o  $k$ -ciclo  $\mathcal{O}^+(x^*)$  é:*

1. *atrator se  $|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \dots f'(x_{k-1})| < 1$ ;*
2. *repulsor se  $|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \dots f'(x_{k-1})| > 1$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $f$  é uma função continuamente diferenciável e  $\mathcal{O}^+(x^*)$  é um  $k$ -ciclo de  $f$ . Pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned}
[f^k(x_0)]' &= f'(f^{k-1}(x_0))(f^{k-1}(x_0))' \\
&= f'(x_{k-1})f'(f^{k-2}(x_0))(f^{k-2}(x_0))' \\
&= f'(x_{k-1})f'(x_{k-2})f'(f^{k-3}(x_0))(f^{k-3}(x_0))' \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= f'(x_{k-1})f'(x_{k-2})f'(x_{k-3})\dots f'(x_1)f'(x_0).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

De acordo com o Teorema 3.5 vem que se  $|f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{k-1})| < 1$ , então  $x^* = x_0$  é um ponto fixo atrator de  $f^k$ , ou seja, o  $k$ -ciclo  $\mathcal{O}^+(x^*)$  é atrator.

Por outro lado, se  $|f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{k-1})| > 1$ , concluímos que o  $k$ -ciclo  $\mathcal{O}^+(x^*)$  é repulsor.  $\square$

*Observação:* Da equação (3.6) vemos que o lado direito é invariante quando substituirmos  $x_0$  por qualquer dos pontos de  $\mathcal{O}^+(x_0^*)$ , em particular, todos os pontos de  $\mathcal{O}^+(x_0)$  que são fixos de  $g$  têm mesma estabilidade.

### 3.2.3 Mapa Logístico

Comumente utilizado hoje na *Teoria do Caos*, é um mapa descrito pela equação

$$F(x) = wx(1 - x), \tag{3.7}$$

onde  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq w \leq 4$ .

Para os valores do parâmetro  $w$ , temos  $F$  está bem definida em  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .

O gráfico de  $F$  com as restrições de  $w$  é uma parábola côncava para baixo, cujas raízes são 0 e 1 e cujo vértice é o ponto de abscissa  $\frac{1}{2}$  e ordenada  $\frac{w}{4}$ , como pode ser visto na figura 19.

Os pontos fixos de  $F$  são  $x_1^* = 0$  e  $x_2^* = \frac{w-1}{w}$ , com  $w \neq 0$ , pois:

$$wx(1-x) = x \Leftrightarrow x(wx - w + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{w-1}{w}.$$

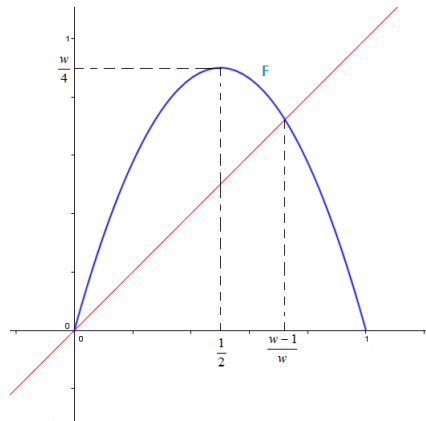


Figura 19: Gráfico de  $F$ , para  $w \neq 1$ .

Observemos ainda que, se  $w = 1$ , então  $x_1^* = x_2^*$  e  $F$  possui apenas um ponto fixo, como segue na figura 20.

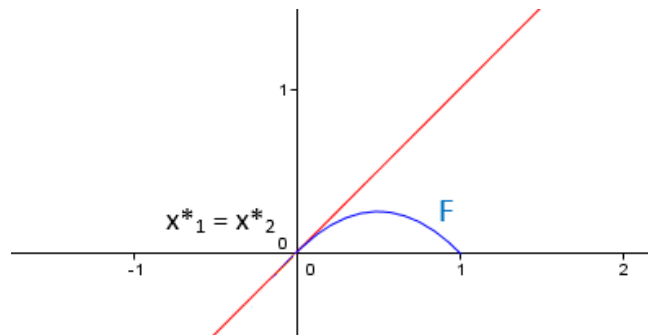


Figura 20: Gráfico de  $F$ , para  $w = 1$ .

Vamos agora então, estudar a estabilidade dos pontos fixos  $x_1^*$  e  $x_2^*$ . Para isso, determinamos o valor de  $F'(x)$ . Da expressão de  $F$  segue que  $F'(x) = w - 2wx$ . Daí,

$$F'(x_1^*) = F'(0) = w$$

e

$$F'(x_2^*) = F'\left(\frac{w-1}{w}\right) = w - 2.w.\left(\frac{w-1}{w}\right) = -w + 2.$$

De acordo com o Teorema 3.1 devemos agora analisar alguns casos separadamente para possíveis valores de  $w \in [0, 4]$ .

- Se  $w < 1$ , então  $F$  admite único ponto fixo  $x_1^*$ , pois nesse caso  $x_2^* \notin I$ . Além disso,  $x_1^*$  é estável, pois  $|F'(x_1^*)| < 1$ .
- Se  $w = 1$ , então  $F$  admite único ponto fixo, onde  $x_1^* = x_2^*$  é instável, pois  $F'(x_1^* = x_2^*) = 1$  e  $F''(x_1^* = x_2^*) = -2 \neq 0$ .
- Se  $w > 1$ , então  $F$  admite dois pontos fixos, onde  $x_1^*$  é ponto fixo instável, uma vez que  $|F'(x_1^*)| > 1$  e  $x_2^*$  é ponto fixo estável, se  $1 < w < 3$ , pois nesse caso,  $|F'(x_2^*)| = |-w + 2| < 1$ , mas é ponto fixo instável, se  $w > 3$ , pois  $|F'(x_2^*)| = |-w + 2| > 1$ .
- Se  $w = 3$ , então  $F$  admite dois pontos fixos, onde  $x_1^*$  é ponto fixo instável, pois  $|F'(x_1^*)| > 1$  e o ponto fixo  $x_2^*$  é estável, pois  $F'(x_1^*) = -1$  e  $-2F'''(x_1^*) - 3(F''(x_1^*))^2 = -108 < 0$ .
- Se  $w > 3$ , então  $F$  admite dois pontos fixos, onde  $x_1^*$  é ponto fixo instável, pois  $|F'(x_1^*)| > 1$  e  $x_2^*$  é ponto fixo instável, pois  $|F'(x_2^*)| > 1$ .

Podemos resumir esses resultados na seguinte tabela:

Estabilidade dos pontos fixos de F					
	$0 \leq w < 1$	$w = 1$	$1 < w < 3$	$w = 3$	$3 < w \leq 4$
$x_1^*$	estável	instável	instável	instável	instável
$x_2^*$	não há	instável	estável	estável	instável

**Exemplo 3.4.** O gráfico (figura 21) abaixo ilustra a função  $F(x) = 3,6x(1 - x)$ . Observamos que, de acordo com a tabela acima, os dois pontos fixos  $x_1^* = 0$  e  $x_2^* = \frac{13}{18}$  são instáveis, pois  $3 < w \leq 4$ .

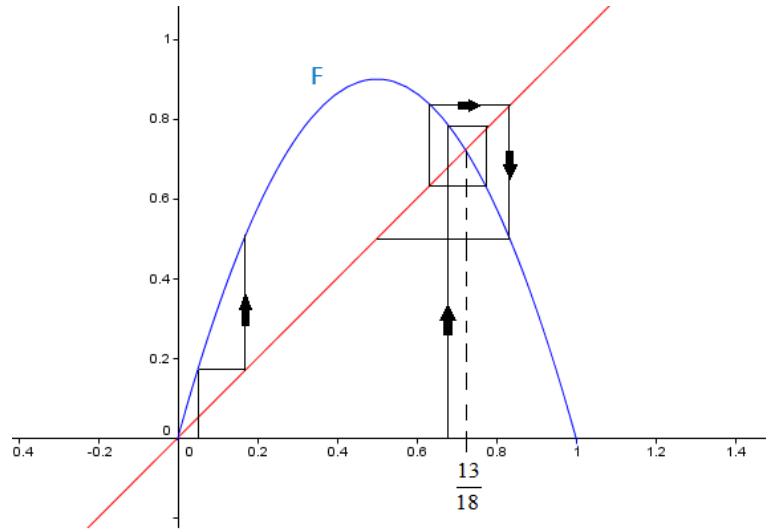


Figura 21: Gráfico de  $F(x)$  para  $3 < w \leq 4$ .

**Exemplo 3.5.** O gráfico (figura 22) abaixo ilustra a função  $F(x) = 2,3x(1 - x)$ . Observe que, de acordo com a tabela acima, o ponto fixo  $x_1^* = 0$  é instável e o ponto fixo  $x_2^* = \frac{13}{23}$  é estável, pois  $1 < w < 3$ .

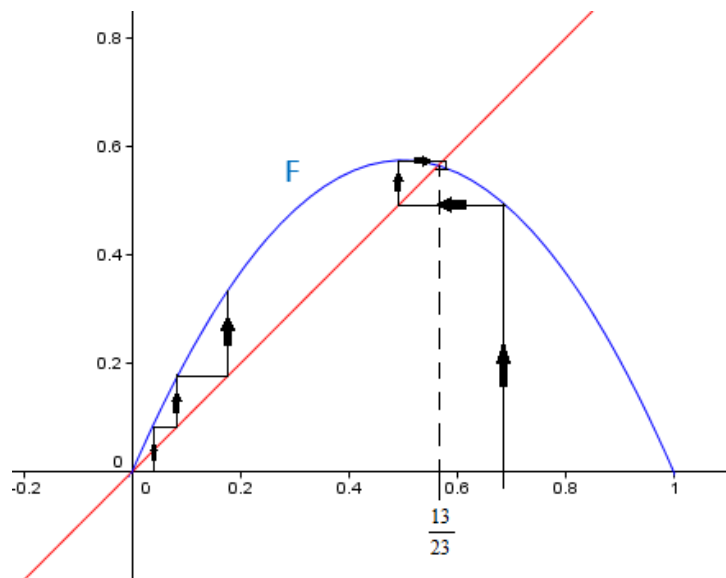


Figura 22: Gráfico de  $F(x)$  para  $1 < w < 3$ .

*Iterações Sucessivas*

Fixado  $x_0 \in [0, 1] \setminus \{x_1^*, x_2^*\}$ , fazendo iterações sucessivas de  $F$ , temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0). \\ x_2 &= F(x_1) = F(F(x_0)), \\ x_3 &= F(x_2) = F(F(F(x_0))), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n &= F(x_{n-1}) = \underbrace{F(F(F \dots F(x_0)))}_{n \text{ vezes}} = F^n(x_0). \end{aligned}$$

Observemos que a função  $F^n$  é um polinômio de grau  $2n$ . Isso dificulta muito o estudo dos pontos fixos dessas funções.

Faremos, então o estudo dos pontos fixos e das estabilidades de suas órbitas até a 2ª iterada de  $F$ .

Primeiramente determinamos  $F^2$ :

$$\begin{aligned} F^2(x) &= F(F(x)) = F(wx(1-x)) = F(wx - wx^2) \\ &= w(wx - wx^2)(1 - wx - wx^2) \\ &= w^2x - w^3x^2 + w^3x^3 - w^2x^2 + w^3x^3 - w^3x^4 \\ &= w^2x + (-w^3 - w^2)x^2 + (2w^3)x^3 - w^3x^4 \end{aligned}$$

Agora, encontramos os seus pontos fixos, fazendo  $F^2(x) = x$ , o que resulta em resolver:

$$w^2x + (-w^3 - w^2)x^2 + (2w^3)x^3 - w^3x^4 - x = 0. \tag{3.8}$$

Porém, também sabemos que os pontos fixos de  $x_1^*$  e  $x_2^*$  de  $F$ , são também pontos fixos de  $F^2$ . Dessa forma, podemos dividir a equação (3.8) por  $(x - x_1^*)(x - x_2^*) = x(x - \frac{w-1}{w}) = x(wx - w + 1)$ , obtendo assim:

$$\frac{w^2 + (-w^3 - w^2)x + (2w^3)x^2 - w^3x^3 - 1}{wx - w + 1} = 0 \Rightarrow -w^2x^2 + (w^2 + w)x - (w + 1) = 0,$$



cujas raízes  $x_3^*$  e  $x_4^*$  são os outros dois pontos fixos procurados de  $F^2$ . Resolvendo esta equação quadrática obtemos:

$$x = \frac{-(w^2 + w) \pm \sqrt{w^4 - 2w^3 - 3w^2}}{-2w^2} = \frac{(w + 1) \pm \sqrt{(w + 1)(w - 3)}}{2w}.$$

Logo,

$$x_3^* = \frac{(w + 1) + \sqrt{(w + 1)(w - 3)}}{2w},$$

$$x_4^* = \frac{(w + 1) - \sqrt{(w + 1)(w - 3)}}{2w}.$$

Observemos que somente existem  $x_3^*$  e  $x_4^*$  reais se  $w > 3$ , ou sejam a órbita 2-periódica  $\{x_3^*, x_4^*\}$  só existe para  $w > 3$ , onde de acordo com a tabela da figura 19, os pontos fixos  $x_1^*$  e  $x_2^*$  são instáveis e onde, em particular,  $x_2^*$  muda de estável para instável.

Observemos que para  $w = 3$ , tem-se que  $x_3^* = x_4^* = x_2^*$  e não há órbita 2-periódica  $\{x_3^*, x_4^*\}$ .

Para estudar a estabilidade da órbita 2-periódica, ou de acordo com o Teorema 3.7, basta determinarmos  $F'(x_3^*)$  e  $F'(x_4^*)$  para estudarmos o comportamento da órbita dos pontos fixos de  $F^2$ .

Assim:

$$F'(x_3^*) = F' \left( \frac{(w + 1) + \sqrt{(w + 1)(w - 3)}}{2w} \right) = 1 + \sqrt{(w + 1)(w - 3)},$$

$$F'(x_4^*) = F' \left( \frac{(w + 1) - \sqrt{(w + 1)(w - 3)}}{2w} \right) = 1 - \sqrt{(w + 1)(w - 3)}.$$

Donde,

$$\begin{aligned} |F'(x_3^*) \cdot F'(x_4^*)| &= |(1 + \sqrt{(w + 1)(w - 3)}) \cdot (1 - \sqrt{(w + 1)(w - 3)})| \\ &= |1^2 - (\sqrt{(w + 1)(w - 3)})^2| \\ &= |1 - w^2 + 2w + 3| \\ &= |-w^2 + 2w + 4|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Agora, pelo Teorema 3.8, temos:

1. se  $|-w^2 + 2w + 4| < 1$ , então a órbita 2-periódica é estável.
2. se  $|-w^2 + 2w + 4| > 1$ , então a órbita 2-periódica é instável.

1. Para que  $|-w^2 + 2w + 4| < 1$ , devemos analisar  $w$  de modo que satisfaça:

$$-1 < -w^2 + 2w + 4 < 1,$$

$$\Downarrow$$

$$w \in {]-\infty, -1[ \cup ]3, +\infty[} \cap {]1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6}[}$$

$$\Downarrow$$

$$w \in ]3, 1 + \sqrt{6}[ , w > 3.$$

Assim, para  $w \in ]3, 1 + \sqrt{6}[$  a órbita 2-periódica é estável.

2. Para que  $|-w^2 + 2w + 4| > 1$ , devemos analisar  $w$  de modo que satisfaça:

$$-w^2 + 2w + 4 > 1 \text{ ou } -w^2 + 2w + 4 < -1,$$

$$\Downarrow$$

$$w \in {]-1, 3[ \cup ]-\infty, 1 - \sqrt{6}[ \cup ]1 + \sqrt{6}, +\infty[}$$

$$\Downarrow$$

$$w \in ]1 + \sqrt{6}, +\infty[.$$

E assim, para  $w \in ]1 + \sqrt{6}, +\infty[$  a órbita 2-periódica é instável.

Para concluir, uma vez que sabemos que  $w > 3$ , precisamos verificar o que ocorre quando  $w = 1 + \sqrt{6}$ .

Partindo que já conhecemos  $(F^2)'(x_3^*) = F'(x_3^*) \cdot F'(x_4^*) = -w^2 + 2w + 4$ , para  $w = 1 + \sqrt{6}$ , obtemos  $(F^2)'(x_3^*) = -1$ , o que de acordo com o item 4. do Teorema 3.5, é necessário analisar o valor de  $-2(F^2)'''(x_3^*) - 3((F^2)''(x_3^*))^2$ , que resulta em um valor menor que zero. Nesse caso, tem-se que 2-periódica  $\{x_3^*, x_4^*\}$  é estável.

Resumindo, a órbita periódica  $\{x_3^*, x_4^*\}$  é:

- estável se  $3 < w \leq 1 + \sqrt{6}$  e,
- instável se  $w > 1 + \sqrt{6}$ .

**Exemplo 3.6.** Utilizando a mesma função do exemplo 3.4, temos que  $F^2(x) = 12,96x - 59,616x^2 + 93,312x^3 - 46,656x^4$ , cujos pontos fixos são  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* \approx 0,72 = \frac{13}{18}$ ,  $x_3^* \approx 0,41$  e  $x_4^* \approx 0,87$ .

Como  $w = 3,6 > 1 + \sqrt{6}$ , então devemos ter instabilidade na órbita 2-periódica  $\{x_3^*, x_4^*\}$ .

O gráfico 23 que segue apresenta o gráfico de  $F^2$  juntamente com a dinâmica na vizinhança de seus pontos fixos  $x_3^*$  e  $x_4^*$ .

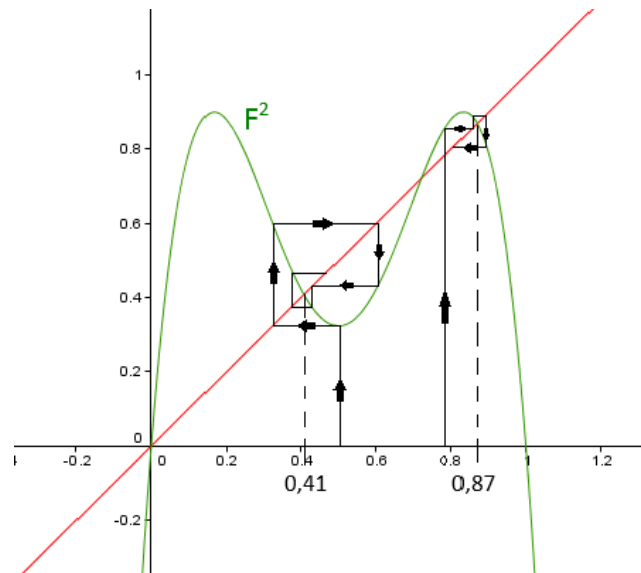


Figura 23: Gráfico de  $F^2(x)$  para  $w > 1 + \sqrt{6}$ .

Graficamente, podemos exemplificar a 3ª iterada de  $F$  para  $w = 3,8$  cujos pontos fixos são  $x_1^* = 0$  e  $x_2^* \approx 0,734$  e observar a não existência de órbitas periódicas, como pode ser visto na figura 24.

Já no caso de  $F^3$  para  $w = 3,9$  (figura 25), cujos pontos fixos são  $x_1^* = 0$  e  $x_2^* \approx 0,743$  podemos observar que há duas órbitas 3-periódica  $\{x_3^*, x_5^*, x_8^*\}$  e  $\{x_4^*, x_6^*, x_7^*\}$ , pois  $F(x_3^*) = x_5^*$ ,  $F(x_5^*) = x_8^*$  e  $F(x_8^*) = x_3^*$ , assim como,  $F(x_4^*) = x_6^*$ ,  $F(x_6^*) = x_7^*$  e  $F(x_7^*) = x_4^*$ , sendo  $x_3^* \approx 0,132$ ,  $x_4^* \approx 0,18$ ,  $x_5^* \approx 0,448$ ,  $x_6^* \approx 0,578$ ,  $x_7^* \approx 0,951$  e  $x_8^* \approx 0,964$ .

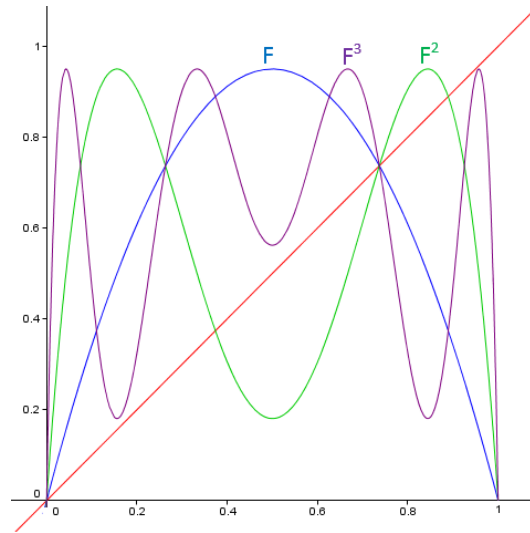


Figura 24: Gráfico de  $F^3(x)$  para  $w = 3, 8$ .

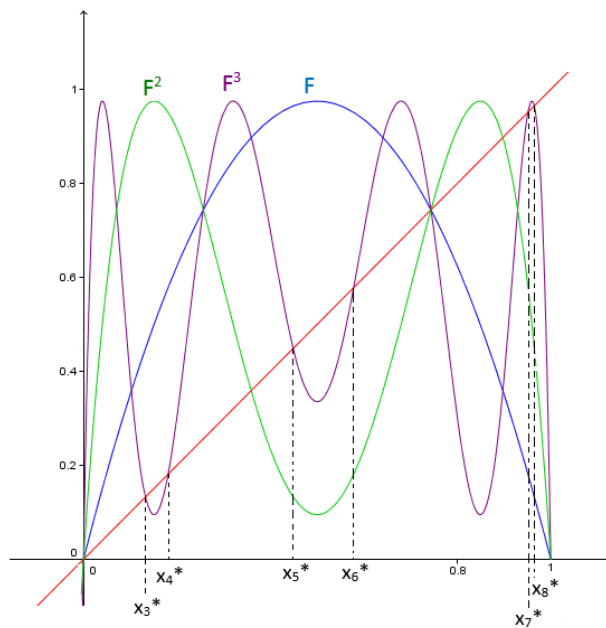


Figura 25: Gráfico de  $F^3(x)$  para  $w = 3, 9$ .

Assim, podemos afirmar que, por continuidade em relação ao parâmetro  $w$ , existe algum  $w \in (3, 8; 3, 9)$ , onde uma única órbita 3-periódica não hiperbólica figura, ou seja, quando o gráfico de  $F^3$  for tangente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Ainda, de acordo com o Teorema de Sarkovskii [7], podemos afirmar que se uma função contínua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  admitir uma órbita periódica de período  $n$ , sendo  $n \in \mathbb{N}$ , então essa mesma função admite órbitas periódicas de todos os períodos à partir de  $n$  segundo a ordem de *Sarkovskii* que mostraremos a seguir:

$$\begin{aligned} 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \\ \triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright 2^3 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1. \end{aligned}$$

Isto é, todos os primeiros números ímpares maiores que 1 em ordem crescente, seguidos por 2 vezes eles, em seguida por  $2^2$ , por  $2^3$  e por todas as potências naturais de 2.

Logo, em particular, se houver em  $f$  órbita de período 3 (primeiro natural na ordem de *Sarkovskii*), então  $f$  terá órbita periódica de todos os períodos.

**Exemplo 3.7.** Observemos que no gráfico que segue na figura 25, a iterada 4 de  $F$  para  $w = 3, 9$ , temos uma órbita 4-periódica  $\{x_3^*, x_6^*, x_5^*, x_8^*\}$  e uma 2-periódica  $\{x_4^*, x_7^*\}$ .

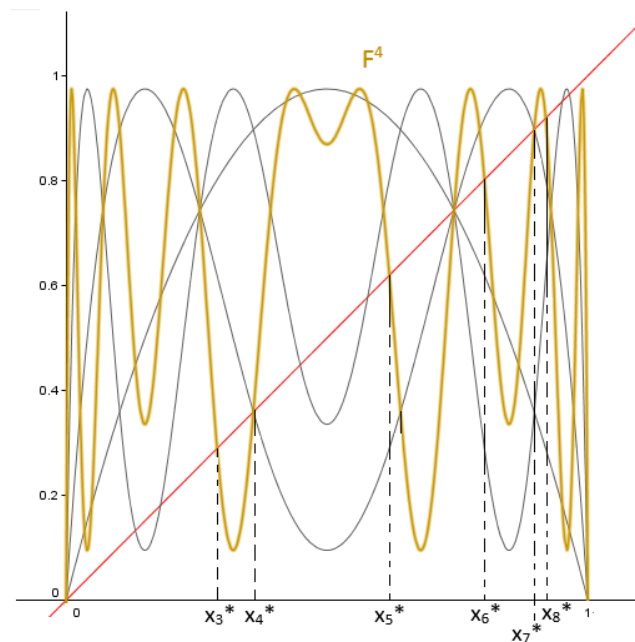


Figura 26: Gráfico de  $F^4(x)$  para  $w = 3, 9$ .

# 4

## APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO

---

---

Neste capítulo vamos apresentar uma sequência de atividades relacionadas às sequências numéricas e de figuras na busca de um padrão, que foram aplicadas compondo duas aulas da 1ª série do Ensino Médio num colégio da rede privada de ensino, chamada *ESI Colégio São José*, situada à Rua Kasato Maru, número 190 na cidade de Santo André, no estado de São Paulo.

### 4.1 SOBRE O COLÉGIO E OS ALUNOS

O colégio foi fundado em 1944 por Irmãs missionárias da *Congressão Scalabriniana de São Carlos Borromeu* que até os dias de hoje a administram. Atualmente, pertence à uma rede integrada chamada ESI composta por cinco escolas pelo Brasil e é atualmente dirigido por Iolanda de Benedetto.

O Colégio São José em questão, possui hoje cerca de 2000 alunos do berçário ao Ensino Médio, cuja missão é segundo [10]:

“Promover uma educação de excelência na sua diversidade, formando pessoas comprometidas com a Cidadania Universal, fundamentada nos valores cristãos.”

Os alunos, em sua maioria, residem no entorno da escola e são oriundos de classe média, porém a instituição oferece muitas bolsas parciais e integrais de estudos com

fins assistenciais.

A atividade foi aplicada em uma turma com 32 alunos de ensino regular de 1<sup>a</sup> série do Ensino Médio, cuja média de idade era de 15 anos e muitos frequentam esta escola desde o Ensino Infantil e/ou Fundamental.

Cada turma do Ensino Médio tem 5 aulas semanais de matemática e utilizam um material apostilado cuja metodologia e conteúdos são voltados à preparação dos alunos para os exames de vestibulares.

Atualmente, o Ensino Médio nessa escola conta com 30 aulas no período matutino e 3 aulas no período vespertino uma vez por semana em sua grade. E foram em duas aulas de uma dessas tardes, em que a referida atividade foi aplicada, cujos recursos utilizados foram uma lousa e um projetor conectado a um computador.

#### 4.2 APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

As aulas escolhidas para a execução da proposta de atividade foram seguintes às aulas que abordaram o conceito e propriedades das progressões aritmética e geométrica. Esse fato foi de extrema importância para o desenvolvimento adequado da atividade, uma vez que sabemos que é necessário utilizar tais conceitos na obtenção de soluções que predominam nas equações de recorrência de primeira ordem.

Por esse motivo, e pelo reduzido tempo disponibilizado, focamos os exemplos e exercícios nas equações de recorrências de primeira ordem.

Primeiramente, foi exposto à turma algumas sequências aleatórias (vide figura 24) e lhes foi solicitado que determinasse, apenas com observação e raciocínio, o próximo elemento de cada sequência, considerando sempre um padrão numérico, ou seja, a quantidade de elementos que formam a figura  $n$ .

### Exemplos de sequências:

a) 1    2    4    7    11    16 ...

b) 1    1    2    3    5    8    13    21 ...

c)  ...

Figura 27: Slide de apresentação.

Oralmente, a maioria dos alunos respondeu corretamente o que foi solicitado, encontrando certa dificuldade no item b) que é uma recorrência de segunda ordem, não tanto trivial para o conhecimento deles até o momento.

Em seguida, foi explicado de forma objetiva e simples, a definição de *recorrência* e o conceito de ordem, utilizando como exemplos as próprias sequências utilizadas como introdução.

Sugeriu-se então, como desafio, o objetivo de obter, ainda somente que com cálculos mentais, o 20º termo de cada sequência. Com um tempo maior, muitos conseguiram responder corretamente, porém determinando elemento a elemento e alguns desistiram. Então, propôs-se que procurassem, pelos mesmos meios, obter o 100º elemento de cada sequência e assim, obviamente quase todos rejeitaram o desafio, a não ser aqueles que conseguiram relacionar este problema a uma progressão aritmética (PA) e a partir do termo geral, obteriam o elemento procurado.

Dessa forma, eles foram instigados a acreditar que deveria haver uma forma mais prática que solucionasse esses tipos de problemas que nem sempre seriam progressões, às quais estavam familiarizados, e assim, introduzimos o primeiro método de obtenção de soluções pelo processo recursivo apresentado neste trabalho para equações de recorrências lineares de primeira ordem. Método esse escolhido por ter um algoritmo com etapas simples e que não requer conhecimentos avançados para o grupo atingido, além de ser facilmente adaptável à diversos tipos de recorrências



lineares de primeira ordem.

Nas figuras 25 e 26 ilustramos a resolução dos dois primeiros exemplos, cujos enunciados e de todos os outros seguintes, solicitavam que fosse determinado o termo geral  $x_n$  que devolve o número de objetos na figura de posição  $n$ .

Exemplo 1)



Figura 28: Exemplo 1.

*Solução:*

$$\begin{aligned}x_1 &= 4, \\x_2 &= x_1 + 3, \\x_3 &= x_2 + 3, \\&\cdot \\&\cdot \\&\cdot \\x_n &= x_{n-1} + 3.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = 4 + x_1 + 3 + x_2 + 3 + x_3 + 3 + \dots + x_{n-1} + 3.$$

Logo,

$$\begin{aligned}x_n &= 4 + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{n-1 \text{ vezes}} \\&= 4 + 3(n - 1) \\&= 1 + 3n.\end{aligned}$$

Exemplo 2)



Figura 29: Exemplo 2.

Solução:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3, \\ x_2 &= x_1 + 2, \\ x_3 &= x_2 + 2, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n &= x_{n-1} + 2. \end{aligned}$$

Assim,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = 3 + x_1 + 2 + x_2 + 2 + x_3 + 2 + \dots + x_{n-1} + 2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= 3 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n-1 \text{ vezes}} \\ &= 3 + 2(n - 1) \\ &= 1 + 2n. \end{aligned}$$

Neste momento, foi entregue a cada aluno uma lista de variados tipos de sequências, como pode ser vista nas figuras 27 e 28 (nas páginas seguintes) e em seguida, com as devidas orientações, sugeriu-se que eles procurassem obter as respectivas soluções, ou seja, as formas gerais, termo com o qual estavam habituados.



## Colégio São José

### PROJETO: RECORRÊNCIA NO ENSINO BÁSICO

Componente curricular: Matemática

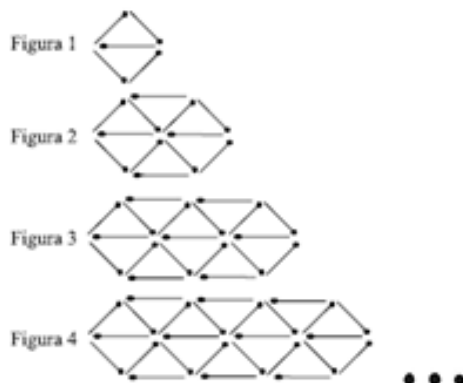
Professor(a): Lisandra Buratto Silva

Data: \_\_\_/\_\_\_/2014

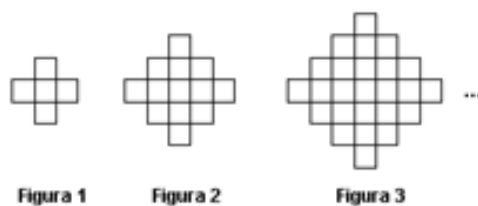
Nome: \_\_\_\_\_ 1º ano \_\_\_\_\_

**Atividade:** Determinar o termo geral  $x_n$  em cada sequência abaixo.

01. (quantidade de palitos)



02.



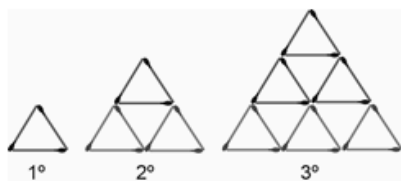
03.



Figura 30: Lista de sequências - frente.

04. 1 4 10 19 ...

05. (Questão 09 - OBMEP 2012, nível 2) Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?



06. Número de regiões em que o plano é dividido por  $n$  retas, sendo que:  
 > há interseção entre cada par de retas;  
 > mais de duas retas não se interceptam em um único ponto.

Figura 31: Lista de sequências - verso.

Observemos que os dois exemplos apresentados no início são modelos mais simples e, para que os estudantes conseguissem executar a atividade, sugerimos que começassem pelo exercícios 01 e 03 da lista, pois apresentam o mesmo nível de dificuldade dos exemplos.

Assim como os dois alunos, cujas resoluções seguem nas figuras 29 e 30, muitos dos outros da turma também conseguiram, sem muitas dificuldades, realizar o que lhes foi proposto, seguindo o mesmo modelo de algoritmo recursivo.

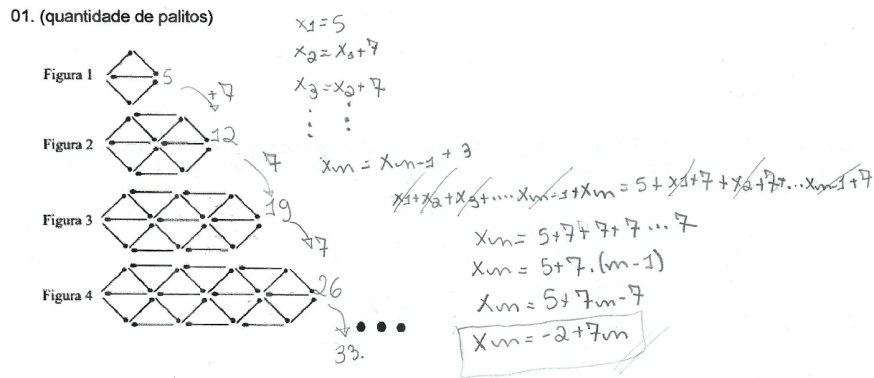


Figura 32: Resolução - aluno 1.

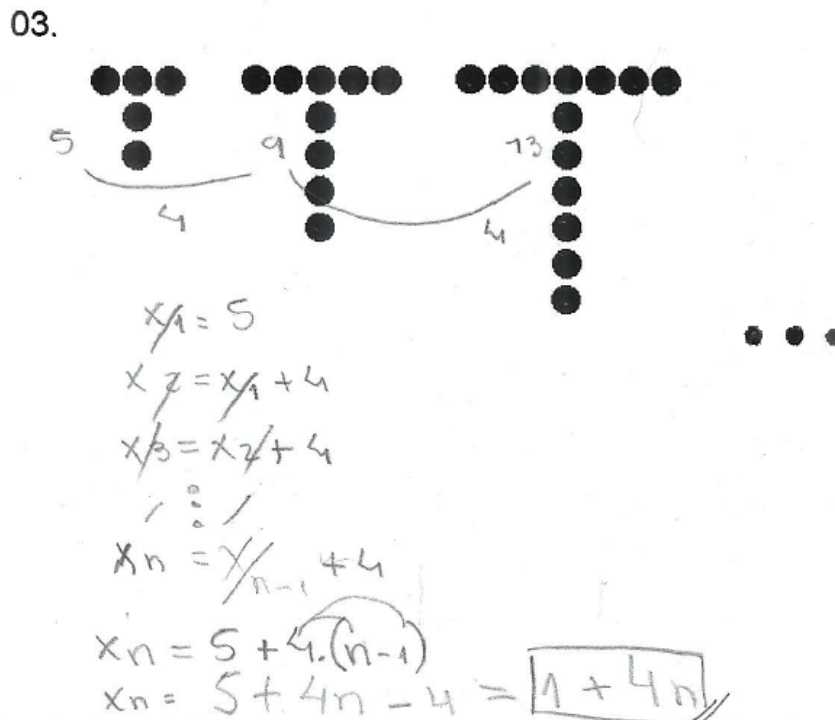


Figura 33: Resolução - aluno 2.

A seguir, lhes foi exibido um exemplo de recorrência de PA de 2ª ordem (Figura 31), ou seja, onde as diferenças entre dois termos consecutivos da sequência não são iguais, mas formam uma PA e os alunos perceberam isso bem rapidamente.

Exemplo 3)

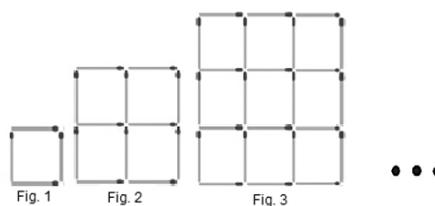


Figura 34: Exemplo 3.

Solução:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 4, \\
 x_2 &= x_1 + 8, \\
 x_3 &= x_2 + 12, \\
 x_4 &= x_3 + 16, \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_n &= x_{n-1} + 4n.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = 4 + x_1 + 8 + x_2 + 12 + x_3 + 16 + \dots + x_{n-1} + 4n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 x_n &= 4 + 8 + 12 + 16 + \dots + 4n \\
 &= \frac{(4 + 4n) \cdot n}{2} \\
 &= 2n + 2n^2.
 \end{aligned}$$

Podemos perceber neste momento, a importância da abordagem anterior sobre soma de PA. Ainda assim, os alunos tiveram maiores complicações ao resolver os exercícios 02 e 04 sugeridos da lista e, da mesma forma, apresentamos abaixo nas figuras 32 e 33 a resolução de dois dos alunos da classe.

02.

Figura 1      8      Figura 2      12      Figura 3      ...

Handwritten solution:

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = x_1 + 8$$

$$x_3 = x_2 + 12$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + 4n$$


---


$$x_n = 5 + 8 + 12 + \dots + 4n$$

$$x_n = 5 + (8 + 4n) \cdot \frac{(n-1)}{2} = 1 + 2n + 2n^2$$

$$x_n = 5 + \frac{8n - 4}{2} + \frac{4n^2}{2} = 5 + 4n - 2 + 2n^2$$

$$= 1 + 2n + 2n^2$$

Figura 35: Resolução - aluno 3.

04.      1      4      10      19...

                 3                   6                   9

Handwritten solution:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1 + 3$$

$$x_3 = x_2 + 6$$

$$x_4 = x_3 + 9$$

$$x_n = x_{n-1} + 3(n-1)$$

$$x_n = 1 + 3 + 6 + 9 + 3(n-1)$$

$$x_n = 1 + (3 + 3n - 3) \cdot \frac{(n-1)}{2}$$

$$x_n = 1 + \frac{3n + 3n^2 - 3n - 3}{2}$$

$$x_n = 1 + \frac{3n^2 - 3}{2}$$

$$x_n = 1 + \frac{3n^2 - 3n}{2}$$

Figura 36: Resolução - aluno 4.

A processo para se obter a solução do exercício 02 é bastante semelhante ao exemplo 03 mostrado previamente, a não ser pelo fato de que  $x_1$ , nesse caso, não é o primeiro termo da PA de segunda ordem e isto foi necessário ser apontado para que continuassem o desenvolvimento do problema. Ainda assim, a maioria da turma conseguiu determinar a sua solução sem maiores dificuldades. No entanto, a questão 04 exigiu maior atenção ao associar cada termo da PA de 2ª ordem com o  $n$  do respectivo termo da sequência e isso causou maiores falhas da elaboração, fazendo com que poucos alunos conseguissem executá-lo de forma satisfatória.

Seguem as soluções dos exercícios 05 e 06 da lista que foram propostos como opcionais e extra classe.

*Solução 05:*

$$\begin{aligned}x_1 &= 3, \\x_2 &= x_1 + 6, \\x_3 &= x_2 + 9, \\&\cdot \\&\cdot \\&\cdot \\x_n &= x_{n-1} + 3n.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}x_n &= 3 + 6 + 9 + \dots + 3n \\&= \frac{(3 + 3n) \cdot n}{2} \\&= \frac{3n + 3n^2}{2}.\end{aligned}$$

Este problema solicita ainda o valor de  $n$ , sendo fornecido  $x_n = 135$ , que é a quantidade de palitos de fósforo. Resolvendo a equação quadrática  $\frac{3n + 3n^2}{2} = 135$ , obtemos um dos valores para  $n < 0$  que não é conveniente e outro é  $n = 9$  o que corresponde à resposta correta.

*Solução 06:* [15] É necessário esboçar alguns desenhos para chegar à tabela abaixo, bastante útil para iniciar a resolução do problema.

retas	planos
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
...	...



E assim, novamente utilizando a recorrência, temos:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, \\x_2 &= x_1 + 1, \\x_3 &= x_2 + 2, \\&\cdot \\&\cdot \\&\cdot \\x_n &= x_{n-1} + (n - 1).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}x_n &= 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1), \\&= 1 + \frac{n^2 - 2n + 1}{2}, \\&= n^2 - 2n + 3.\end{aligned}$$

Ainda foi possível nas aulas apresentar um exemplo (figura 34) de recorrência onde os termos formam uma PG e os alunos identificaram isso também com facilidade.

Exemplo 4)

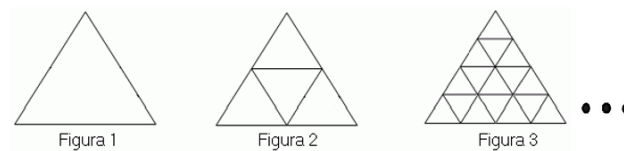


Figura 37: Exemplo 4.

*Solução:*

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, \\x_2 &= x_1 \cdot 4, \\x_3 &= x_2 \cdot 4, \\&\cdot \\&\cdot \\&\cdot \\x_n &= x_{n-1} \cdot 4.\end{aligned}$$

Assim,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \dots + x_{n-1} \cdot x_n = 1 \cdot x_1 \cdot 4 \cdot x_2 \cdot 4 \dots + x_{n-1} \cdot 4.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= 1 \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \dots 4}_{n-1 \text{ vezes}} \\ &= 1 \cdot 4^{n-1}, \\ &= 4^{n-1}. \end{aligned}$$

*Observação:* As atividades sugeridas tiveram autorização de divulgação pelos responsáveis por meio do documento *scaneado* na figura 35.



**Colégio São José**

Srs. Responsáveis,

Venho por meio desta solicitar a autorização para utilizar as resoluções e os resultados das atividades produzidas por \_\_\_\_\_, aluno do 1º \_\_\_\_ - EM, que participou em 18/11/2014 do Projeto: "Recorrência no Ensino Básico", em um trabalho de conclusão de curso que deverá ser defendido em Agosto/2015, pela Universidade Federal do ABC – curso PROFMAT.

O Projeto foi elaborado e conduzido pela professora Lisandra Buratto Silva, que durante 2 horas/aulas apresentou um conteúdo da disciplina de matemática que usualmente não é abordada nos anos de ensino básico (fundamental e médio), mas que com o devido embasamento, e com as devidas adaptações para a faixa etária, é possível de ser compreendido pelos alunos. O objetivo é justamente o de averiguar a dimensão atingida em uma turma e qual profundidade o assunto pode ser trabalhado, a partir de exercícios com diferentes níveis de dificuldade, inclusive exercícios das Olimpíadas Nacionais e Estaduais de Matemática.

Agradeço a colaboração.

Professora Lisandra Buratto Silva

Autorizo a utilização das atividades: \_\_\_\_\_  
Assinatura

Figura 38: Autorização dos responsáveis.

### 4.3 CONCLUSÕES

Considerando o tempo disponível para a realização do projeto, podemos dizer que o resultado foi o esperado e satisfatório. Apesar de não ter havido uma avaliação quantitativa dos alunos, foi possível observar que muitos deles conseguiriam aplicar o conceito e o método recursivo na resolução de alguns problemas que não envolvem progressões aritméticas e geométricas triviais.

Porém, é preciso considerar também, que desde o início do processo, todos os estudantes estavam cientes de que o conteúdo que seria abordado, apesar de figurar como questões de lógica em exames de concursos e vestibulares e como assunto preparatório para o estudo de progressões em algumas metodologias, não está presente como tópico específico cujo título seja *Recorrência* nos tradicionais materiais didáticos, o que leva os alunos a suporem que não seja conteúdo requerido em exames em geral, e por isso, podemos dizer que apesar do esforço em tornar o assunto atraente, alguns deles não despenderam a dedicação necessária na realização das atividades propostas, o que impediu uma adequada e completa verificação do compreensão da turma.

No entanto, mais do que abordar um assunto específico complementar e buscar fazer com que os alunos o compreendessem, o objetivo foi de estimular a capacidade de relação de dados, obtenção de padrões e principalmente o interesse de utilizar os algoritmos para facilitar a resolução de problemas, habilidades essas propostas, inclusive, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio do MEC:

“Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.” [19]

### 4.4 OUTRAS PROPOSTAS DE ATIVIDADES

Esta seção destina-se especialmente à professores que tenham interesse e disponibilidade em tratar o assunto com maiores variações de enunciados e abordagens do tema. Sugerimos que estes sejam lançados como desafios individuais ou em grupos,

sem necessariamente atribuir um valor quantitativo a isso.

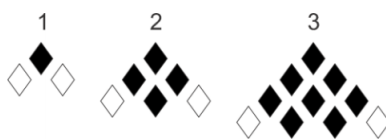
É interessante observar o processo de resolução, o desenvolvimento do raciocínio, as conjecturas, as experimentações e a aplicação do algoritmo recursivo pelos alunos. Ou seja, que não sejam consideradas somente as soluções, mas principalmente, os meios e recursos que os estudantes utilizaram para obtê-las.

Como pôde ser observado na seção anterior, todos os exemplos e exercícios propostos são de recorrências de primeira ordem lineares com coeficientes constantes, presumindo a extensão de assimilação a qual desejaríamos atingir, ponderando os requisitos da turma. Porém, cada docente, tendo tempo hábil e verificando o empenho do grupo e a superação das expectativas, pode buscar aprofundar a dificuldade dos exercícios, passando para equações de recorrências de primeira ordem não homogêneas e de segunda ordem lineares com coeficientes constantes homogêneas, como sugerido no apêndice deste trabalho.

Seguem então as sugestões e suas respectivas resoluções.

**1. Exercício retirado da Prova Canguru Brasil 2014 – Nível E**

Abaixo estão representadas as três primeiras figuras de uma sequência de figuras compostas de losangos pretos e brancos. Quantos losangos pretos aparecerão na sexta figura dessa sequência?



- (A) 19
- (B) 21
- (C) 26
- (D) 28
- (E) 34

*Possível solução:* Determinemos a solução  $x_n$  para a  $n$ -ésima quantidade de losangos pretos pelo processo recursivo:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, \\x_2 &= x_1 + 3, \\x_3 &= x_2 + 4, \\x_4 &= x_3 + 5, \\&\cdot \\&\cdot \\&\cdot \\x_n &= x_{n-1} + (n + 1).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}x_n &= 1 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n + 1), \\&= 1 + \frac{(3 + n + 1)(n - 1)}{2}, \\&= 1 + \frac{n^2 + 3n - 4}{2}.\end{aligned}$$

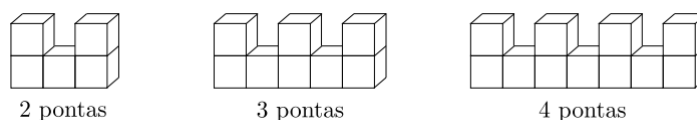
Logo, a alternativa correta é a C, pois  $x_6 = 1 + \frac{6^2 + 3 \cdot 6 - 4}{2} = 26$ .

*Observação:* Este exercício pode facilmente ser resolvido sem a utilização do algoritmo da recursão, por isso sugerimos que o professor aumente o nível de dificuldade do exercício, solicitando ao aluno determinar quantos losangos pretos aparecerão na 50ª figura, por exemplo, o que impulsionaria o aluno a reavaliar o método.

E a partir de  $x_n$  obtido, podemos determinar outros termos como  $x_{50} = 1 + \frac{50^2 + 3 \cdot 50 - 4}{2} = 1324$ .

## 2. Exercício retirado da Prova OBMEP 2014 – Nível 1

Utilizando-se cubos de 1 m de aresta, são construídos muros conforme ilustrado na figura abaixo:



Os muros da figura possuem 2, 3 e 4 pontas.

- Calcule o número de cubos necessários para construir um muro com 5 pontas.
- Calcule o número de cubos necessários para construir um muro com 2014 pontas.
- Decide-se pintar a superfície do muro com 2014 pontas (sem pintar a base). Calcule a área total pintada.

*Possível solução:* Primeiramente, vamos elaborar uma tabela que pode auxiliar muito na obtenção dos padrões:

figura	cubos (unid.)	pontas (unid.)	área ( $m^2$ )
1	5	2	19
2	8	3	29
3	11	4	39
4	14	5	49
...	...	...	...

a) Observando da tabela, facilmente obtemos a resposta desse item, ou seja, para se obter 5 pontas, são necessários  $11 + 3 = 14$  cubos.

b) Vamos determinar, a solução  $x_n$  para o n-ésimo número de cubos pelo algoritmo recursivo:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 5, \\
 x_2 &= x_1 + 3, \\
 x_3 &= x_2 + 3, \\
 x_4 &= x_3 + 3, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 x_n &= x_{n-1} + 3.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}x_n &= 5 + \underbrace{3 + 3 + 3 + \dots + 3}_{n-1 \text{ vezes}}, \\ &= 5 + 3(n - 1), \\ &= 2 + 3n.\end{aligned}$$

Observemos que para conseguir a quantidade de cubos quando há 2014 pontas, é necessário calcular  $x_n$  para  $n = 2013$ .

Então,  $x_{2013} = 2 + 3 \cdot 2013 = 6041$ .

c) Agora, devemos determinar, a solução  $z_n$  para o  $n$ -ésimo valor da área da superfície (sem o piso) pelo processo recursivo:

$$\begin{aligned}z_1 &= 19, \\ z_2 &= z_1 + 10, \\ z_3 &= z_2 + 10, \\ z_4 &= z_3 + 10, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ z_n &= z_{n-1} + 10.\end{aligned}$$

Assim,

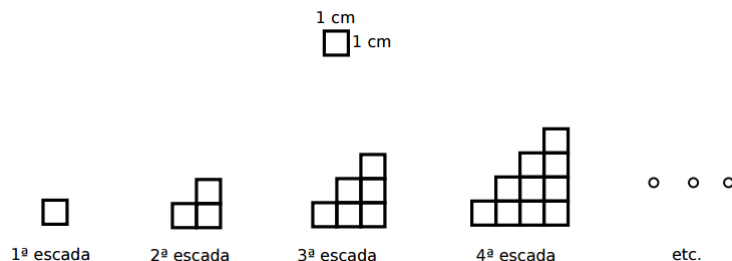
$$\begin{aligned}z_n &= 19 + \underbrace{10 + 10 + 10 + \dots + 10}_{n-1 \text{ vezes}}, \\ &= 19 + 10(n - 1), \\ &= 9 + 10n.\end{aligned}$$

Observemos que, da mesma forma, para conseguir o valor da área da superfície (sem o piso) quando há 2014 pontas, é necessário calcular  $z_n$  para  $n = 2013$ .

Então,  $z_{2013} = 9 + 10 \cdot 2013 = 20139$ .

3. Exercício retirado da Prova OBMEP 2013 – Nível 1

Utilizando-se quadradinhos de 1 cm de lado são construídas escadas conforme a figura abaixo:



- a) Calcule a área total e o perímetro da quinta escada construída.
- b) Precisamos de uma escada de 78 cm<sup>2</sup> de área. Qual escada devemos escolher?
- c) Precisamos de uma escada de 100 cm de perímetro. Qual escada devemos escolher?

*Possível solução:* Novamente, se faz necessária a elaboração de uma tabela relacionando as grandezas do problema:

escada	quadrados (unid.)	área (cm <sup>2</sup> )	perímetro (cm)
1 <sup>a</sup>	1	1	4
2 <sup>a</sup>	3	3	8
3 <sup>a</sup>	6	6	12
4 <sup>a</sup>	10	10	16
5 <sup>a</sup>	15	15	20
...	...	...	...

- a) Completando a tabela, diretamente, obtemos a área e o perímetro da quinta escada, que são 15 cm<sup>2</sup> e 20 cm, respectivamente.
- b) Vamos agora obter a solução  $x_n$  para o n-ésimo valor da área da escada pelo processo recursivo:

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = x_1 + 2,$$



$$\begin{aligned}
 x_3 &= x_2 + 3, \\
 x_4 &= x_3 + 4, \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_n &= x_{n-1} + n.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 x_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n, \\
 &= \frac{(1+n)n}{2}, \\
 &= \frac{n+n^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Precisamos encontrar o valor de  $n$  tal que  $x_n = 78$  de acordo com dados do enunciado do exercício, logo resolvendo a equação quadrática  $\frac{n+n^2}{2} = 78$ , obtemos um dos valores para  $n < 0$  que não é conveniente e outro que é  $n = 12$  o que corresponde à 12ª escada procurada.

#### 4. Exercício retirado de [22] - página 96 (modificado)

O tempo de *meia-vida* de um medicamento é o tempo necessário para que a sua concentração plasmática se reduza à metade. Sabendo que a *meia-vida* da *dipirona sódica* é de aproximadamente 15 minutos (dados reais), se uma pessoa administrar 400 mg desse medicamento em uma dose única, de quanto é a concentração plasmática desse fármaco após 1,5 horas?

*Possível solução:* Primeiramente, calculamos quantas vezes em 1,5 horas, a concentração do medicamento se reduzirá a metade, ou seja, 6 vezes, pois 6.15 minutos = 90 = 1,5 horas.

Agora, vamos obter a solução  $x_n$  para a  $n$ -ésima quantidade de concentração do fármaco no organismo pelo processo recursivo:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 400, \\
 x_2 &= \frac{1}{2}x_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2}x_2, \\ x_4 &= \frac{1}{2}x_3, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_n &= \frac{1}{2}x_{n-1}. \end{aligned}$$

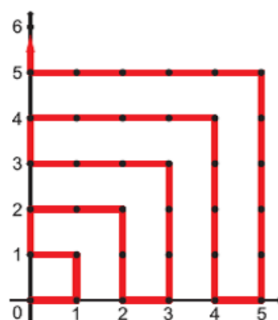
Assim,

$$\begin{aligned} x_n &= 400 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{n-1 \text{ vezes}}, \\ &= 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \\ &= \frac{400}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Atentemos para o fato de que para determinar o que foi solicitado no problema, devemos obter  $x_7$ , pois  $x_1 = 400$ , corresponde a 0 minutos, logo se calculássemos  $x_6$ , conseguiríamos o valor da concentração do fármaco após 75 minutos, o que não é o esperado.

$$\text{Assim, } x_7 = \frac{400}{2^{7-1}} = \frac{400}{2^6} = \frac{400}{64} = 6,25 \text{ mg.}$$

5. **Exercício retirado de PROFMAT- AV1 - MA 12 - 2012 - (modificado)** A figura abaixo mostra uma linha poligonal que parte da origem e passa uma vez por cada ponto do plano cujas coordenadas são números inteiros e não negativos.



Mostre que o comprimento da linha poligonal da origem até o ponto  $(n, n)$  é  $n^2 + n$ , para qualquer inteiro não negativo  $n$  e determine o comprimento da linha poligonal da origem até o ponto  $(9, 9)$ .

*Possível solução:* Mais uma vez, elaboramos uma tabela relacionando as grandezas do problema:

ponto $(n, n)$	comprimento da linha
$(0, 0)$	0
$(1, 1)$	2
$(2, 2)$	6
$(3, 3)$	12
...	...

Agora, procuramos a solução  $x_n$  para o  $n$ -ésimo ponto que corresponde ao comprimento da linha poligonal em  $(n, n)$ :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0, \\
 x_2 &= x_1 + 2, \\
 x_3 &= x_2 + 4, \\
 x_4 &= x_3 + 6, \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_n &= x_{n-1} + 2(n-1).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 x_n &= 0 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2(n-1), \\
 &= \frac{(0 + 2(n-1))n}{2}, \\
 &= n^2 - n.
 \end{aligned}$$

Logo, o comprimento da linha poligonal da origem até o ponto  $(9, 9)$  é  $x_9 = 9^2 - 9 = 72$ .

## A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO ÁUREO

---

---

Há uma certa curiosidade acerca da famosa *Sequência de Fibonacci*, sendo tratado em filmes como algo enigmático ou mágico. Para os alunos, essa ideia não é diferente. Muitos se questionam qual é a relação entre aqueles números sequenciais e a *Razão Áurea* ou *Número de Ouro* como é comumente chamado e representado pela letra grega  $\phi$ .

Este anexo tem como objetivo esclarecer estas indagações e apresentar curiosidades da constante presença da razão áurea na natureza, nos ramos da matemática, na arquitetura e nas artes.

Leonardo de Pisa (1175 - 1250) é considerado um dos matemáticos mais criativos do mundo cristão medieval - conhecido como Fibonacci, publicou em 1202 o livro *Liber Abaci* (ou livro do Abaco), que não trata apenas do instrumento ábaco, mas traz um tratado muito completo sobre os métodos e problemas algébricos, onde encontra-se o problema que deu origem à sua famosa sequência numérica:

*“Quantos coelhos haverá em um ano, começando com um só casal, se em cada mês cada casal adulto gera um novo casal, o qual se tornará produtivo em dois meses?” [2]*

*Observação:* Há variações para o questionamento do enunciado desse problema publicadas em fontes diversas.

O esquema na figura 36 a seguir mostra a evolução dessa “população”, segundo o problema de Fibonacci:

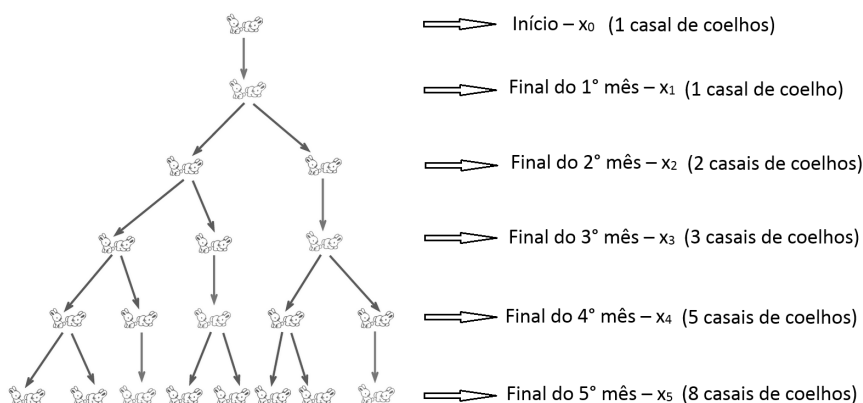


Figura 39: Casais de coelhos de *Fibonacci* no decorrer dos meses.

Daí, surge a sequência infinita de números naturais 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, .... Cada termo dela, a partir do terceiro é igual ao valor da soma dos dois termos imediatamente anteriores à ele. A equação de recorrência que descreve essa situação é da forma:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}. \tag{.1}$$

Podemos obter a solução da equação (.1) que é de segunda ordem homogênea a partir do Teorema 2.2 - caso 1, sendo a sua equação característica associada igual a  $r^2 - r - 1 = 0$ , que tem raízes são reais e distintas iguais a:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

e portanto a solução geral de (.1) com  $C_1$  e  $C_2$  constantes reais é:

$$x_n = C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n. \tag{.2}$$

Para obtermos a solução particular de (.2), é necessário utilizarmos as condições iniciais  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 1$ , assim temos o sistema

$$\begin{cases} C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 = 1, \\ C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1. \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1. \end{cases}$$

de onde obtemos os valores das constantes

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \text{ e } C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Logo, a solução particular de (.1) é:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}. \quad (.3)$$

Voltando ao problema da população de coelhos proposto por Fibonacci, atentemos que não é suficiente calcular a partir da equação (.3) o 12º termo da sequência, ou seja,  $a_{11} = 144$ , temos que calcular o dobro da soma de  $a_0$  a  $a_{11}$ , uma vez que o solicitado foi a quantidade de coelhos e não de casais. Assim, ao final de um ano, haverá:

$$2(1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 + 89 + 144) = 752 \text{ coelhos.}$$

## 1 A RAZÃO ÁUREA

Existem muitas propriedades interessantes na sequência de Fibonacci, porém talvez a que mais causa admiração por parte das pessoas e em particular, dos alunos, é o *Número de Ouro* - o  $\phi$ .

Observemos que em (.3),  $\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) > 1$  e que  $-1 < \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) < 0$ , o que garante que  $x_n$  é uma sequência crescente e não limitada, e portanto não convergente.

No entanto, a razão entre dois termos consecutivos dessa sequência, fornece uma nova sequência  $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$  que é convergente e tem limite igual a  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  quando



Seja então,  $\phi > 0$ , tal que  $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , temos que

$$\frac{1}{\phi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}.$$

Como  $x_n$  satisfaz à equação (.1), então:

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Assim, o valor do limite de  $y_n$  deve satisfazer à equação:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = \phi^2 - \phi + 1 = 0.$$

E como  $\phi > 0$ , logo

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots \text{ (Número Áureo)}$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

### 1.1 O retângulo áureo

Um retângulo de lados de medidas  $a$  e  $b$  que obedecem à proporção:

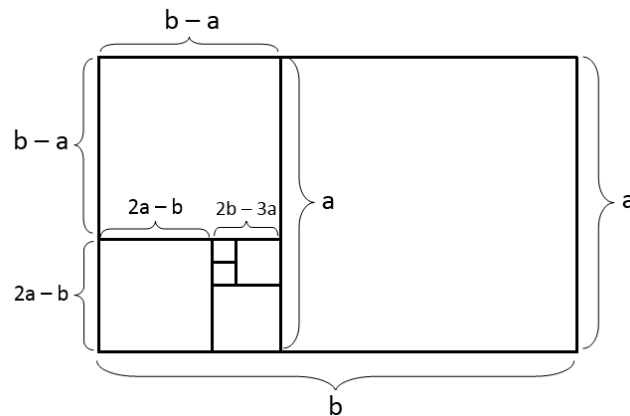
$$\phi = \frac{b}{a},$$

é chamado de *retângulo áureo* (ou de ouro).

A figura 37 ilustra que esta razão aparece infinitas vezes no retângulo áureo.

Podemos provar isto fazendo as seguintes relações:



Figura 40: Retângulo áureo e o  $\phi$ .

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{2a-b} = \frac{2a-b}{2b-3a} = \dots = b^2 - ab - a^2.$$

Onde, se calcularmos  $b^2 - ab - a^2 = 0$ , chegamos a

$$\frac{b}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

que desconsiderando  $\frac{b}{a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ , obtemos o que presumíamos:

$$\frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Uma curiosidade a partir do retângulo áureo, e que pode ser utilizada como atividade em aulas, é que se unirmos sem sobreposição dois quadrados de lados iguais a 1 unidade, obtemos um retângulo de  $2 \times 1$  e a partir do seu lado de medida 2, construirmos um novo quadrado, obtemos um retângulo de  $2 \times 3$  e se a partir do seu lado de medida 3 desse retângulo, unirmos um novo quadrado, obtemos um retângulo de  $3 \times 5$ , e sucessivamente, vemos que a sequência das medidas dos lados quadrados formados é a mesma de Fibonacci. Veja figura 38.

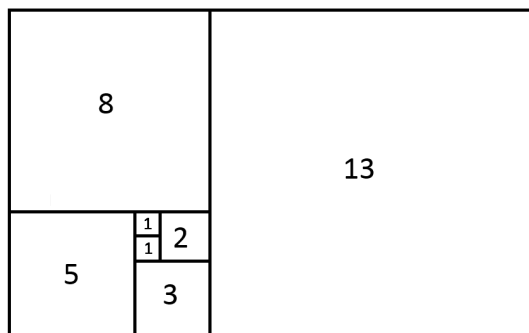


Figura 41: Retângulo áureo e a sequência de Fibonacci.

[9] “Se utilizarmos um compasso e traçarmos o quarto de circunferência inscrito em cada quadrado, encontraremos uma espiral formada pela concordância de arcos cujos raios são os elementos da sequência de Fibonacci.” Veja figura 39.

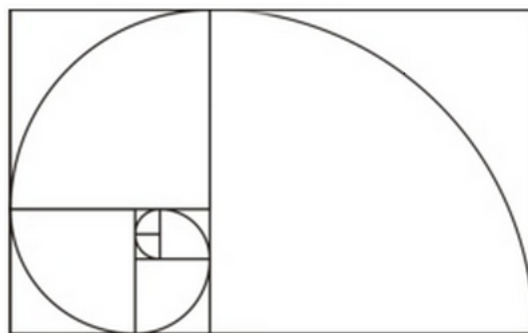


Figura 42: Retângulo áureo e o espiral.

O retângulo áureo sempre foi considerado pelos gregos como o representante da beleza e do equilíbrio.

Muitas construções antigas, esculturas, pinturas seguiam este padrão e atualmente também pode ser encontrado nas medidas de objetos retangulares como cartões e aparelhos eletrônicos.

Com um olhar um pouco mais atento para a natureza, novamente se observa a razão áurea se manifestando, sugerindo a ideia de perfeição.

Veja nas figuras seguintes alguns desses exemplos:

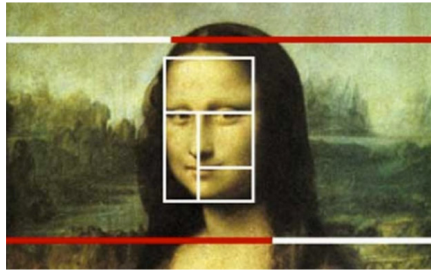


Figura 43: *Monalisa* de Leonardo Da Vinci

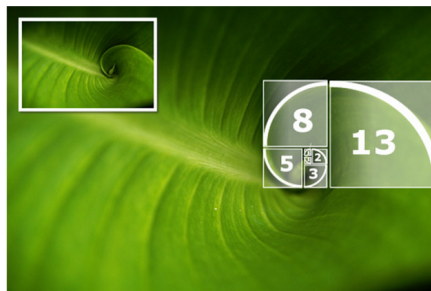


Figura 44: Folha.



Figura 45: Concha Nautilus.

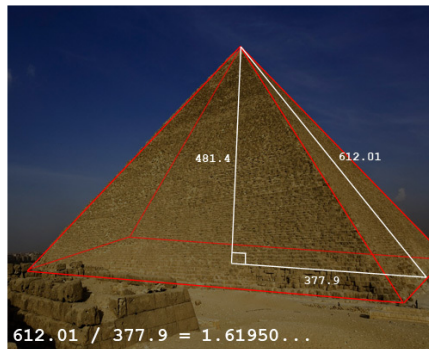


Figura 46: Pirâmide do Egito.

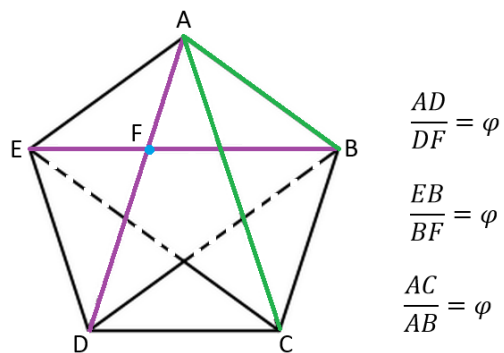


Figura 47: Pentágono Regular.

Como já esclarecemos, existem inúmeras propriedades da sequência Fibonacci que pode ser explorada, no entanto, procuramos neste apêndice, evidenciar os aspectos referentes ao tema do trabalho.

## CONCLUSÃO

---

---

Lamentavelmente, o que vemos hoje são docentes enfrentando muitas adversidades em sua profissão, seja na rede particular que adota livros e apostilas didáticas nas quais, muitas vezes, o professor fica restrito ao conteúdo contido e com o tempo já comprometido em cumprir o planejamento, tornando inviável a prática de atividades extra-curriculares; seja na rede pública, onde os recursos são limitados e os alunos com requisitos insuficientes dificultam um possível aprofundamento de algum assunto.

Além disso, em ambos sistemas de ensino, as inúmeras exigências e obrigatoriedades acabam por tomar parte valorosa do tempo dos professores que deveriam ser destinado à preparação de aulas mais significativas e interessantes ou na busca de capacitação e aprimoramento profissional.

Porém, apesar de todos esses inconvenientes, ainda encontramos um vasto grupo de professores empenhados e motivados na constante transformação das pessoas através da educação e para isso não medem esforços para desempenhar suas funções com extrema competência oferecendo ricas e atrativas aulas extraindo dos educandos os melhores resultados. E é essa demanda de profissionais que o PROFMAT vem atendendo nesses anos.

Podemos afirmar que o objetivo do curso foi atingido com as disciplinas cursadas, algumas novas que nos possibilitaram adquirir conhecimentos diferentes e outros já estudados, mas que nos oportunizaram diversificar a forma de pensar sobre temas conhecidos e aprofundar conceitos habitualmente explorados em cursos de graduação e que certamente contribuirão em melhores construções de atividades para aulas, além de oferecer melhor qualificação profissional.

## CONCLUSÃO

*“A Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico.” [20]*

Nesse sentido, o presente trabalho abrange todas esses atributos e propriedades alcançando o propósito final que é o da apropriação conhecimento e sua efetiva utilização pedagógica.

## BIBLIOGRAFIA

---

---

- [1] ANGEL, D.Y.T.; MACUFA, M.M.M.; KOGA, M.T; *Relatório Final*, Campinas, 2007.
- [2] BASSANEZI, R. C.; JI, L.; *Ensino - aprendizagem com modelagem matemática*, São Paulo, 2009, editora Contexto.
- [3] BIANCHINI, W.; *Aprendendo Cálculo de Várias Variáveis*, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: <<http://www.im.ufrj.br/waldecir/calculo2/calculo2.pdf>>
- [4] BRASIL, Canguru de Matemática. Prova 2014 – Nível E. Disponível em: <<http://www.cangurudematematicabrasil.com.br/index.php/anteriores/finish/12/63>>. Acesso em: 26 jul. 2015.
- [5] CONCURSOS, Aprova. Concurso Técnico Judiciário - PR - 2014. Disponível em: <<https://www.aprovaconcursos.com.br/questoes-de-concurso/questao/241911>>. Acesso em: 24 jul. 2015.
- [6] DAVID, Alex. Concurso CFS 2010. Disponível em: <<http://www.astiadl.somee.com/Matematica/1.html>>. Acesso em: 24 jul. 2015.
- [7] DEVANEY, R. L.; *An Introduction to chaotic Dynamical System*, Massachusetts, USA, 2003, editora Westview Press.
- [8] ELAYDI, S.; *An introduction to difference equations*, Texas, USA, 3ª Edição, 2005, editora Springer.
- [9] ESCOLA, Info. Sequência de Fibonacci. Disponível em: <<http://www.infoescola.com/matematica/sequencia-de-fibonacci/>>. Acesso em: 28 jul. 2015.
- [10] ESI COLÉGIO SÃO JOSÉ. O colégio. Disponível em: <<http://www.esicolegiosaojose.com.br/PG.aspx>>. Acesso em: 21 jul. 2015.

## Bibliografia

- [11] GUIDORIZZI, H. L.; *Um curso de Cálculo, vol.1*, São Paulo, 5ª Edição, 2001, editora LTC.
- [12] HYPENESS. A proporção áurea está em tudo. Disponível em: <<http://www.hypeness.com.br/2014/02/a-proporcao-aurea-esta-em-tudo-na-natureza-na-vida-e-em-voce/>>. Acesso em: 28 jul. 2015.
- [13] IMPA. OBMEP - Banco de Questões 2013. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/bq/bq2013.pdf>>. Acesso em: 27 jul. 2015.
- [14] IMPA. OBMEP - Banco de Questões 2014. Disponível em: <<http://www.obmep.org.br/bq/bq2014.pdf>>. Acesso em: 27 jul. 2015.
- [15] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C., *A matemática no Ensino Médio*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006, editora SBM.
- [16] LOPES, Marinho A. A Mitologia e a Verdade da Razão de Ouro. Disponível em: <<https://sophiaofnature.wordpress.com/2014/01/07/a-mitologia-e-a-verdade-da-razao-de-ouro/>>. Acesso em: 29 jul. 2015.
- [17] LUÍS, R. D. G.; *Equações de diferenças e aplicações*, Funchal, 2006.
- [18] MATEMÁTICA, Dia de. Imagem. Disponível em: <<http://diadematematica.com/vestibular/TEMP/PA/E4955.BMP>>. Acesso em: 24 jul. 2015.
- [19] MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 25 jul. 2015.
- [20] MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em: 25 jul. 2015.
- [21] NICOLAU, J.; *Equações diferenciais & Equações às Diferenças*, Lisboa, 2003.
- [22] PACHECO, A. M.; *Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência*, Cuiabá, 2013.
- [23] PINHO, Andreia. Leonardo Fibonacci. Disponível em: <<https://sites.google.com/site/leonardofibonacci/o-problema-dos->>



- coelhos>. Acesso em: 28 jul. 2015.
- [24] SANTOS, D. P.; *Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos Unidimensionais*, Santo André, 2013.
- [25] SBM et al. OBMEP - 1 fase - nível 2 - 2012. Disponível em: <[http://www.obmep.org.br/provas\\_static/pf1n2-2012.pdf](http://www.obmep.org.br/provas_static/pf1n2-2012.pdf)>. Acesso em: 25 jul. 2015.
- [26] SBM; PROFMAT. Prova 1 - Matemática Discreta - 2012. Disponível em: <[http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos do Site/AV\\_MA\\_12\\_20112/AV1\\_MA12\\_2012.pdf](http://www.profmat-sbm.org.br/files/Arquivos%20do%20Site/AV_MA_12_20112/AV1_MA12_2012.pdf)>. Acesso em: 27 jul. 2015.