Universidade Federal do ABC

PROFMAT

Maria Aparecida Domingues Garbin de Oliveira

Estudo Didático do Grupo de Frisos

Santo André, 2015

Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Maria Aparecida Domingues Garbin de Oliveira

Estudo Didático do Grupo de Frisos

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação defendida pela aluna Maria Aparecida Domingues Garbin de Oliveira, e orientada pelo Prof. Dr. Marcio Fabiano Silva.

Santo André, 2015

Dedico este trabalho aos meus filhos e em especial ao meu marido José Eduardo que me apoiou e me acompanhou durante toda a jornada deste mestrado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Divina Providência, que sempre esteve presente em minha vida e me conduziu até aqui.

À Nossa Senhora Aparecida que, com seu amor maternal, me protegeu nos momentos difíceis e me ajudou a perseverar até o fim.

Aos meus familiares, que me apoiaram e incentivaram durante a minha jornada acadêmica.

Aos meus filhos que, mesmo pequeninos, fizeram parte da minha história no PROFMAT.

Ao meu marido José Eduardo que, sempre paciente me incentivou e não mediu esforços para que eu concluísse mais uma etapa da minha vida acadêmica.

Aos meus colegas de turma Simone, Oertes e Leandro, que me ajudaram nas dificuldades do curso.

A todos os professores do curso, em especial ao meu orientador professor Márcio Silva, que me ajudou e me conduziu nesta etapa final.

A todos que, de alguma forma, participaram deste trabalho meus sinceros agradecimentos.

"Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível"

São Francisco de Assis

RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo estudar uma manifestação específica de simetria que se dá em alguns ornamentos, os frisos.

Desenvolvemos primeiramente algumas operações geométricas associadas ao conceito de isometria para, seguido da definição de simetria de uma figura plana, estudar a composição dessas isometrias.

Em seguinda definimos e classificamos os sete grupos de frisos, objetivo principal deste trabalho, e encerramos o estudo com a apresentação de atividades que podem ser exploradas num contexto de sala de aula.

Palavras-chave: Simetria, Frisos, Isometrias

ABSTRACT

This dissertation is about studying a specific demonstration found in some ornaments, the friezes.

Firstly we developed some geometrics operations associated to the concept of isometry, followed by the symmetry definition of a plan figure, we study the composition of those isometries.

Then, we define and classify the seven groups of friezes, main objective of this dissertation, and lastly we propose some activities which can be explored in a classroom environment.

Keywords: Symmetries, Friezes, Isometries.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

A busca pela harmonia e pela beleza sempre foi uma característica natural do ser humano. A expressão desta busca incansável que muito agrada os nossos sentidos se dá por meio da obra artística, seja ela uma obra arquitetônica, uma escultura, uma pintura, uma música, uma poesia, entre outros.

Estudando com critérios objetivos ou apenas apreciando algumas dessas manifestações artísticas com que nos deparamos à nossa volta, encontramos uma característica muito evidente em grande parte delas, que é a simetria.

Os registros do uso da simetria por vários artistas e povos é compreensível, pois muitos temas artísticos tratam da natureza, onde a simetria nos aparece de diversas formas.

O objetivo deste trabalho está além da definição matemática de simetria. Vamos estudar aqui principalmente uma manifestação específica de simetria que se dá em alguns ornamentos. São padrões de repetição de uma figura ou motivo indefinidamente em uma única direção: os frisos.

Este trabalho desenvolve primeiramente algumas operações geométricas associadas ao conceito de isometria para, seguido da definição de simetria de uma figura plana, estudar a composição dessas isometrias.

É no segundo capítulo que definimos e classificamos os sete grupos de frisos, objetivo principal deste trabalho. Aqui fazemos uso de esquemas explicativos e exemplos para melhor compreender e visualizar cada grupo de friso.

As numerosas ilustrações, construções geométricas e esquemas que acompanham o texto auxiliam o leitor a explorar de forma didática os temas matemáticos aqui abordados.

O terceiro capítulo encerra o trabalho com a apresentação de algumas atividades que podem ser exploradas num contexto de sala de aula para alunos do ensino médio com o objetivo final de classificação dos grupos de frisos.

Esperamos que professores, alunos e amantes da geometria possam melhor contemplar a beleza e a riqueza matemática presentes na arte e na natureza e que este trabalho também seja fonte de inspiração para a exploração de um universo muito mais vasto do que foi tratado nesta exposição introdutória.

1

ISOMETRIAS DO PLANO

Na primeira seção deste capítulo definimos grupo discreto, as isometrias do plano, as formas de isometria entre outros termos matemáticos elementares que serão mencionados ao longo do trabalho e são de total importância para uma boa compreensão do tema a ser desenvolvido. Procuramos explorar algumas ilustrações de forma a deixar claros os termos matemáticos aqui utilizados.

Na seção seguinte exploramos o significado de simetria, dando uma definição matemática e estudando sua presença em algumas figuras planas, dentre elas, o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular.

Na terceira seção ilustramos algumas formas de composição de isometrias e fizemos algumas análises breves dos resultados encontrados.

1.1 PROPRIEDADES ELEMENTARES

Definição 1.1. Seja T um conjunto não vazio. Uma aplicação binária em T é uma aplicação $f : T \times T \to T$.

Exemplo:

A aplicação $f : N \times N \to N$ definida por $f(r, s) = r + s$, sendo N o conjunto dos números naturais, é uma aplicação binária, onde + é a adição usual.

Definição 1.2. Um grupo é uma estrutura $(T, *)$, formada por um conjunto não vazio T sobre o qual foi definido uma aplicação binária *, satisfazendo às propriedades:

- $(T, *)$ é associativa, ou seja, para quaisquer $r, s, t \in T : (r * s) * t = r * (s * t)$;

- $(T, *)$ possui um elemento neutro a, ou seja, $a \in T$ tal que para todo $n \in T$: $a * n = n * a = n$;
- Cada elemento $n \in T$ possui um simétrico m com relação à operação *, ou seja, para cada $n \in T$, existe $m \in T$ tal que $n * m = m * n = a$, sendo a o elemento neutro.

Definição 1.3. O número de elementos de um grupo G é a sua ordem g, que pode ser finita ou infinita. Se os elementos desse grupo forem enumeráveis, ou seja, podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais, esse grupo é dito *discreto*. Caso contrário, esse grupo é dito *contínuo*. Exemplos:

- Conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$: é um grupo discreto com ordem infinita.
- Conjunto dos números reais $\mathbb{R}$: é um grupo contínuo.

Definição 1.4. *Transformação do plano euclidiano* é uma aplicação bijetora do conjunto dos pontos do plano sobre si mesmo.

Seja dist uma função métrica do plano tal que $\text{dist}(A, B)$ é a distância (no plano euclidiano) entre os pontos A e B. Podemos definir então:

Definição 1.5. *Isometria* é uma transformação do plano euclidiano, tal que a distância relativa entre pontos permanece a mesma.

Isto é, se f é uma isometria do plano então $\text{dist}(f(A), f(B))=\text{dist}(A, B)$, ou seja, é uma transformação que preserva as distâncias entre os pontos no plano.

Para ilustrar a definição acima, vamos analisar a seguinte situação:

Seja um objeto com três pontos fixos A , B e C quaisquer.

Se colocarmos este objeto diante de um espelho, teremos sua imagem refletida com os pontos A , B e C agora também refletidos, sendo agora chamados de A' , B' e C' (ver Figura 1).

Intuitivamente podemos fazer as seguintes afirmações:

1. $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(A', B')$
2. $\text{dist}(B, C) = \text{dist}(B', C')$
3. $\text{dist}(A, C) = \text{dist}(A', C')$

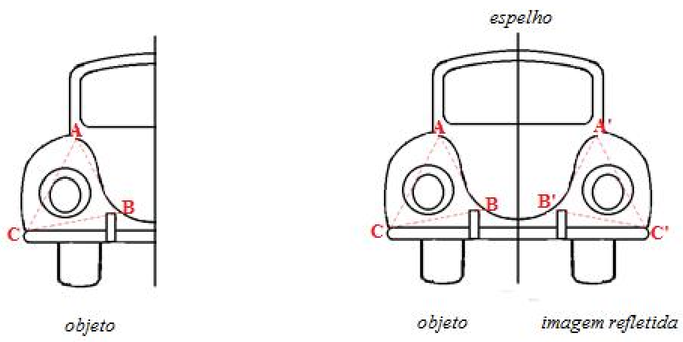


Figura 1: Isometria

Temos aqui então um exemplo de isometria a qual, como podemos observar, fixa as distâncias entre pontos.

Há quatro formas de isometrias do plano a serem consideradas: *translação*, *rotação*, *reflexão*, e *reflexão transladada* .

Translação τ:

Seja $\overrightarrow{AB}$ um vetor do plano. Uma translação de vetor $\overrightarrow{AB}$ é uma isometria $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ tal que para cada ponto P do plano associa um ponto P', imagem de P, de forma que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$.

Podemos escrever: $\tau_{\overrightarrow{AB}}(P) = P + \overrightarrow{AB} = P'$.

Aplicando a translação numa figura G do plano, esta move cada ponto de G de uma mesma extensão, numa mesma direção e num mesmo sentido, dados pelo vetor $\overrightarrow{AB}$.

Vamos analisar os esquemas a seguir:

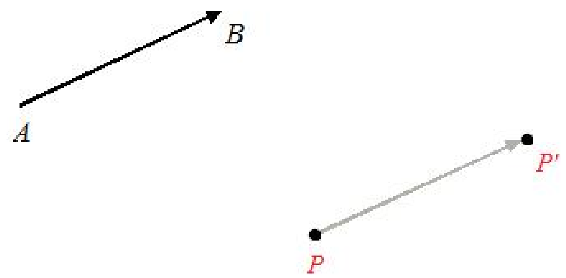


Figura 2: Translação $\tau_{\overrightarrow{AB}}(P)$

Aplicando a translação de vetor $\overrightarrow{AB}$ no ponto P, obtemos o ponto P', imagem de P. Observe que $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$.

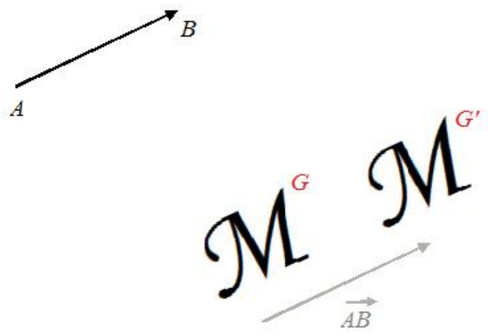


Figura 3: Translação de uma figura G por um vetor $\overrightarrow{AB}$

Observe que aplicando uma translação de vetor $\overrightarrow{AB}$ na figura G, obtemos a figura G', que é congruente à primeira.

Rotação ρ:

Dado um ponto O do plano e um número real α, a rotação de centro O e ângulo α é uma isometria que fixa o ponto O e associa a cada ponto P do plano, $P \neq O$, o ponto P' pertencente à circunferência de centro O e raio $\overline{OP}$ e tal que a medida do ângulo orientado $\angle POP'$ é igual a α.

Podemos escrever: $\rho_{O,\alpha}(P) = P'$

Observação 1. Consideraremos $\alpha > 0$ se a rotação for no sentido anti-horário e, $\alpha < 0$ se a rotação for no sentido horário.

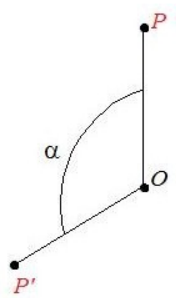


Figura 4: Rotação $\rho_{O,\alpha}(P)$

Aplicando uma rotação de centro O e ângulo α ($\rho_{O,\alpha}$) no ponto P do plano obtemos o ponto P', imagem de P (ver Figura 4). Observe que $\overline{OP} = \overline{OP'}$ e que $\angle POP' = \alpha$.

Agora vamos analisar a aplicação de uma rotação de centro O e ângulo α ($\rho_{O,\alpha}$) numa figura G do plano. Sejam P um ponto tal que $P \in G$ e G' a imagem de G por $\rho_{O,\alpha}$. Então P' é imagem de P e $P' \in G$ (ver Figura 5). Observe que $\overline{OP} = \overline{OP'}$, $\angle POP' = \alpha$ e que a figura G' é congruente à figura G.

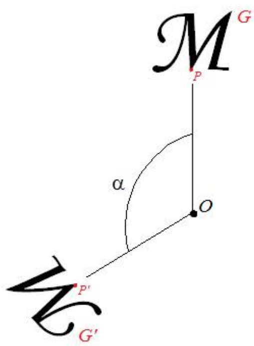


Figura 5: Rotação de centro O e ângulo α sobre uma figura G

Reflexão σ:

Há dois tipos de reflexão, que vamos diferenciar.

1. Reflexão em relação a uma reta (σ):

   Dada um reta l do plano, a reflexão em relação a l é uma isometria que fixa todos os pontos de l e associa a cada ponto P do plano, o ponto P' tal que l é a reta mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Chamamos l de eixo de reflexão.

   Podemos escrever: $\sigma_l(P) = P'$

   Aplicando uma reflexão de l (σ_l) no ponto P do plano obtemos o ponto P', imagem de P (ver Figura 6). Observe que o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular à reta l e que l, por sua vez é mediatriz de $\overline{PP'}$.

   Agora vamos analisar a aplicação de uma reflexão de eixo l (σ_l) numa figura G do plano. Sejam P um ponto tal que $P \in G$ e G' a imagem de G por σ_l. Então P' é imagem de P e $P' \in G$ (ver Figura 7). Observe que $PP' \perp l$, com l mediatriz de $\overline{PP'}$ e que a figura G' é congruente à figura G.

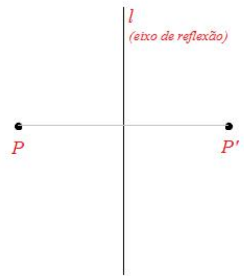


Figura 6: Reflexão $\sigma_l(P)$

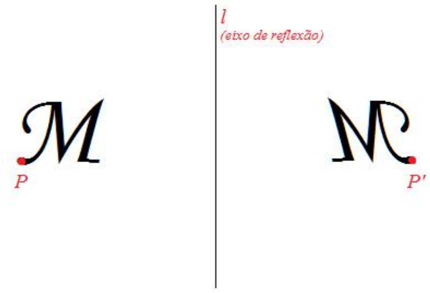


Figura 7: Reflexão de eixo l sobre uma figura G

2. Reflexão em relação a um ponto (σ_A):

   Dado um ponto A do plano, a reflexão em relação a A é uma isometria que fixa este ponto A e associa a cada ponto P do plano, com P distinto de A, o ponto P' de forma que o ponto A é ponto médio do segmento de reta $\overline{PP'}$.

   Podemos escrever: $\sigma_A(P) = P'$

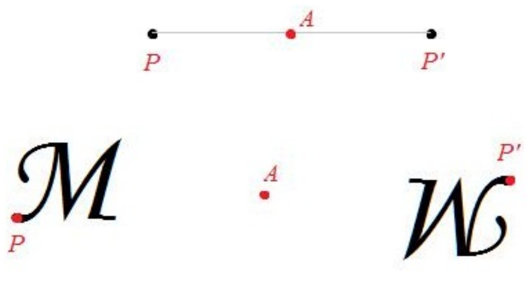


Figura 8: Reflexão em relação a um ponto σ_A

> Observe que a reflexão σ_A em relação a um ponto A é também uma rotação de meia volta, ou seja, uma rotação $\rho_{A,\alpha}$, com centro em A e ângulo α igual a 180°.

Reflexão Transladada γ:

Sejam l uma reta do plano e $\overrightarrow{AB}$ um vetor tal que sua direção é paralela à reta l.

Uma reflexão transladada é uma isometria de eixo l e vetor $\overrightarrow{AB}$ ($\gamma_{l,\overrightarrow{AB}}$) que associa a cada ponto$P$ do plano, o ponto P' que é gerado por uma reflexão σ_l, de eixo l, seguida de uma translação $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ de vetor $\overrightarrow{AB}$.

Podemos escrever: $\gamma_{l,\overrightarrow{AB}}(P) = P'$

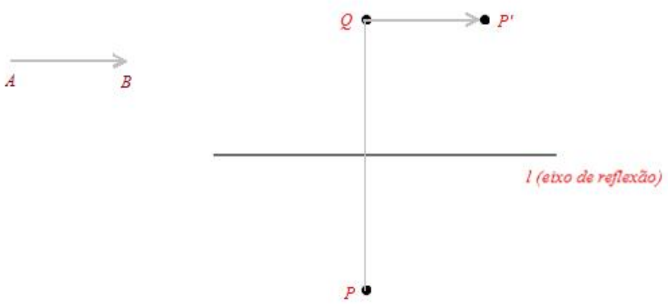


Figura 9: Reflexão Transladada $\gamma_{l,\overrightarrow{AB}}(P)$

Na Figura 9 ilustramos uma reflexão transladada aplicada num ponto P do plano. Observe que esta isometria se dá em duas etapas: se aplica uma reflexão de eixo l no ponto P, resultando num ponto Q e, por fim, se aplica uma translação de vetor $\overrightarrow{AB}$ no ponto Q (cuja direção é paralela à reta l), gerando o ponto P'.

Em outras palavras, o ponto P' é a imagem do ponto P por σ_l seguido de $\tau_{\overrightarrow{AB}}$.

Da mesma forma, a aplicação de uma reflexão transladada em uma figura G se dá aplicando primeiramente uma reflexão de eixo l na figura G, resultando numa figura H e, por fim, se aplica uma translação de vetor $\overrightarrow{AB}$, na figura H, gerando a figura G', imagem de G por σ_l seguido de $\tau_{\overrightarrow{AB}}$ (ver Figura 10).

Observe agora (ver Figura 11) a ilustração do resultado da aplicação de uma reflexão transladada sobre uma figura do plano.

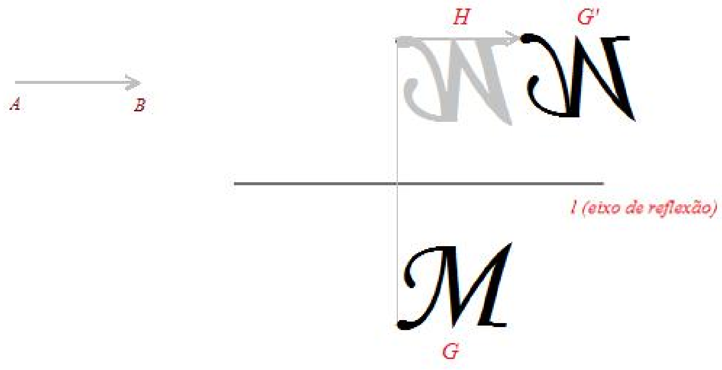


Figura 10: Reflexão σ_l seguida de uma translação $\tau_{\overrightarrow{AB}}$

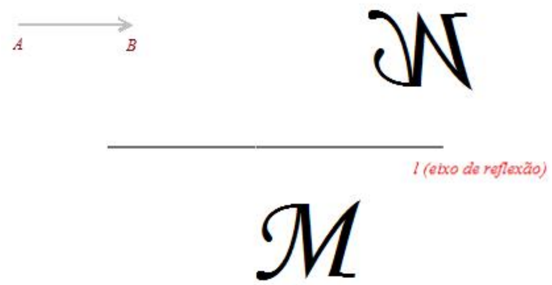


Figura 11: Reflexão Transladada aplicada sobre G

Observação 2. De um modo geral temos:

- **Translação não trivial:** Não fixa nenhum ponto, mas fixa cada linha paralela a direção da translação;

- **Rotação não trivial:** Fixa o centro de rotação;

- **Reflexão:** Fixa cada ponto do eixo de reflexão e cada linha perpendicular ao eixo;

- **Reflexão Transladada:** Fixa o eixo de reflexão;

- **Identidade:** Fixa todos os pontos do plano e todas as linhas.

Definição 1.6. *Isometrias Próprias* são resultadas da composição de um número par de reflexões em relação a retas.

São isometrias próprias:

- a translação (τ)

Teorema 1.7. *Sejam l_1 e l_2 retas paralelas distintas do plano e $\overrightarrow{AB}$ uma reta perpendicular tal que $A \in l_1$ e $B \in l_2$. Então $\sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1} = \tau_{2\overrightarrow{AB}}$, em outras palavras, toda translação é resultado de uma composta de duas reflexões em relação a linhas.*

Demostração 1. Seja $A' = \sigma_{l_2}(A)$. Como $\overrightarrow{AB}$ é perpendicular à reta l_2, pela propriedade da isometria de reflexão, $\overline{AA'} \perp l_2$ e $\overline{AB} = \overline{BA'}$. Assim $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$ e portanto, $A' = \tau_{\overrightarrow{AA'}}(A) = \tau_{2\overrightarrow{AB}}(A)$. (Ver Figura 12).

Seja um ponto C de l_1, com C distinto de A e tal que $C' = \sigma_{l_2}(C)$. Pela propriedade da isometria de reflexão $\overline{CC'} \perp l_2$ e, portanto, $\overline{CC'} \parallel \overline{AA'}$. Temos também que $A \in l_1$ e $C \in l_1$. Logo, $\overline{AC} \parallel l_2$ e, por consequência, $\overline{A'C'} \parallel l_2$. Portanto o quadrilátero $ACC'A'$ é um retângulo, sendo que $\overline{CC'} = \overline{AA'} = 2\overline{AB}$.

Por fim, seja $B' = \sigma_{l_1}(B)$. Temos que $B = \sigma_{l_1}(B')$, $\overrightarrow{B'B} = 2\overrightarrow{AB}$ e, portanto, $B = \tau_{\overrightarrow{B'B}}(B') = \tau_{2\overrightarrow{AB}}(B')$

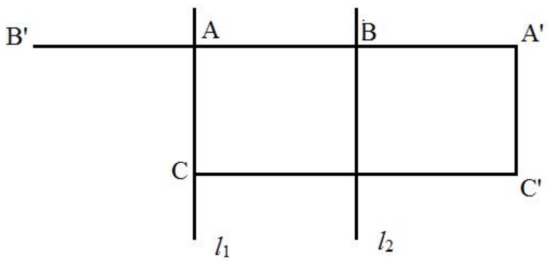


Figura 12: Isometria Própria - Translação

Concluímos que:

$(\sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1})(A) = \sigma_{l_2}(A) = A' = \tau_{2\overrightarrow{AB}}(A)$

$(\sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1})(C) = \sigma_{l_2}(C) = C' = \tau_{2\overrightarrow{AB}}(C)$

$(\sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1})(B') = \sigma_{l_2}(B) = B = \tau_{2\overrightarrow{AB}}(B')$

Chegamos, assim, na igualdade das isometrias $\sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1}$ e $\tau_{2\overrightarrow{AB}}$

- a rotação (ρ)

Teorema 1.8. *Sejam l_1 e l_2 retas distintas concorrentes num ponto O do plano e seja α a medida de um dos ângulos orientados da reta l_1 para l_2. Então $\sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1} = \rho_{O,2\alpha}$, em outras palavras, toda rotação é resultado de uma composta de duas reflexões em relação a linhas.*

Demostração 2. Escolhendo um ponto qualquer A de l_1, com A distinto de O, e seja $B \in l_2$ tal que B é a imagem de A por uma rotação de centro O e ângulo α, ou seja, $\rho_{O,\alpha}(A) = B$ (ver Figura 13).

Se tomarmos um ponto A' de modo que este seja imagem de A por uma reflexão em relação à reta l_2 , ou seja, $A' = \sigma_{l_2}(A)$, então l_2 será a reta mediatriz do segmento $\overline{AA'}$. Assim, como $O \in l_2$, pela propriedade da isometria de reflexão, podemos dizer que $\overline{OA} = \overline{OA'}$. Além disso, como l_2 contem a bissetriz do ângulo orientado $\angle AOA'$, segue que este ângulo tem medida igual a 2α e, portanto, podemos dizer que A' é imagem de A por uma rotação de centro O e ângulo 2α , ou seja, $A' = \rho_{O,2\alpha}(A)$.

Analogamente, como $B' = \sigma_{l_1}(B)$ segue que $\overline{OB} = \overline{OB'}$ e o ângulo orientado $\angle B'OB$ tem medida igual a 2α e, portanto, $B = \rho_{O,2\alpha}(B')$.

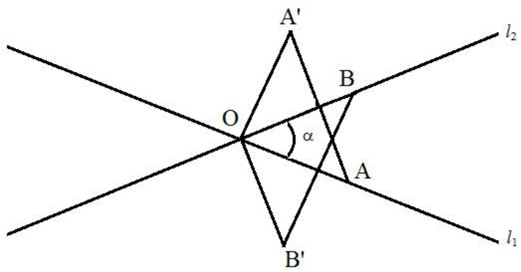


Figura 13: Isometria Própria - Rotação

Assim, temos:

$(\sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1})(O) = \sigma_{l_2}(O) = O = \rho_{O,2\alpha}(O)$,

$(\sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1})(A) = \sigma_{l_2}(A) = A' = \rho_{O,2\alpha}(A)$ e

$(\sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1})(B') = \sigma_{l_2}(B) = B = \rho_{O,2\alpha}(B')$

Chegamos, assim, na igualdade das isometrias $\sigma_{l_2} \circ \sigma_{l_1}$ e $\rho_{O,2\alpha}$.

As demonstrações das propriedades acima, bem como de outras, podem ser vistas em [1].

1.2 SIMETRIA

Uma isometria T do plano é uma simetria de uma figura A do plano se A é invariante por T, isto é, $T(A) = A$, ou seja, a imagem da figura A pela isometria T é a própria figura A.

Vejamos a seguir a aplicação de simetrias em algumas figuras geométricas.

Aplicando uma reflexão de eixo l na figura G obtemos a figura G' (ver Figura 14). Observe que a imagem G' da figura G, pela aplicação dessa isometria, é a própria figura G.

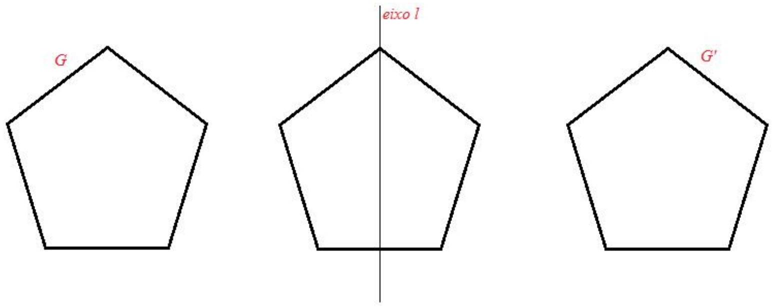


Figura 14: Reflexão de eixo l

Aplicando uma rotação de centro O (baricentro de H) e ângulo $\alpha = 120^{o}$ na figura H obtemos a figura H' (ver Figura 15). Observe que a imagem H' da figura H, pela aplicação dessa isometria, é a própria figura H.

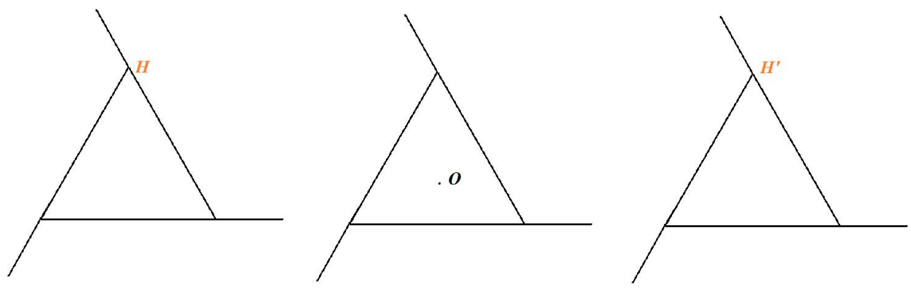


Figura 15: Rotação de centro O

Observemos agora as simetrias presentes em algumas figuras geométricas.

- **Simtrias do Triângulo Equilátero**

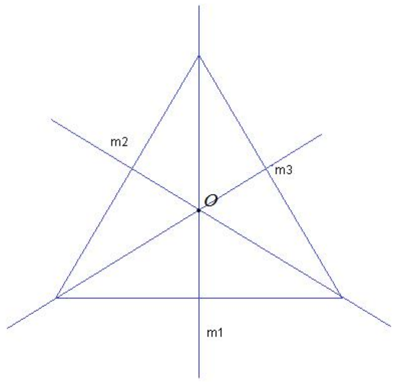


Figura 16: Simetrias do triângulo equilátero

1. Identidade (ou rotação: 1 volta);
2. Rotação: $\frac{1}{3}$ de volta, ou rotação de 120º em relação ao centro O;
3. Rotação: $\frac{2}{3}$ de volta, ou rotação de 240º em relação ao centro O;
4. Reflexão na linha m_1;
5. Reflexão na linha m_2;
6. Reflexão na linha m_3

Como a identidade é uma simetria de rotação (uma volta completa), temos então que, para o triângulo equilátero, existem 3 simetrias de rotação e 3 simetrias de reflexão.

- **Simetrias do Quadrado**

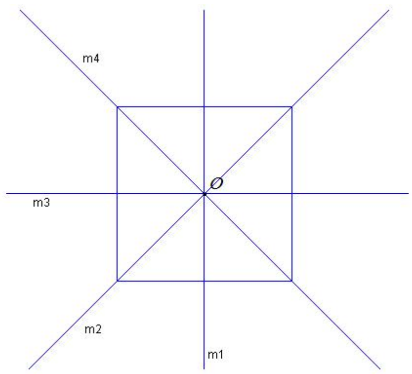


Figura 17: Simetrias do quadrado

1. Identidade;
2. Rotação: $\frac{1}{4}$ de volta, ou rotação de 90º em relação ao centro O;
3. Rotação: $\frac{1}{2}$ de volta, ou rotação de 180º em relação ao centro O;
4. Rotação: $\frac{3}{4}$ de volta, ou rotação de 270º em relação ao centro O;
5. Reflexão na linha m_1;
6. Reflexão na linha m_2;
7. Reflexão na linha m_3
8. Reflexão na linha m_4

Como a identidade é uma simetria de rotação (uma volta completa), temos então que, para o quadrado, existem 4 simetrias de rotação e 4 simetrias de reflexão.

- **Simtrias Hexágono Regular**

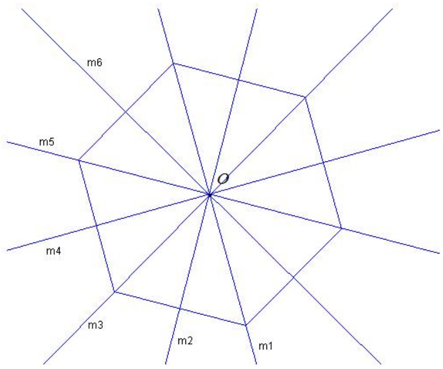


Figura 18: Simetrias do hexágono regular

1. Identidade;
2. Rotação: $\frac{1}{2}$ de volta, ou rotação de 180º em relação ao centro O;
3. Rotação: $\frac{1}{3}$ de volta, ou rotação de 120º em relação ao centro O;
4. Rotação: $\frac{2}{3}$ de volta, ou rotação de 240º em relação ao centro O;
5. Rotação: $\frac{1}{6}$ de volta, ou rotação de 60º em relação ao centro O;
6. Rotação: $\frac{5}{6}$ de volta, ou rotação de 300º em relação ao centro O;

7. Reflexão na linha m_1;
8. Reflexão na linha m_2;
9. Reflexão na linha m_3
10. Reflexão na linha m_4
11. Reflexão na linha m_5
12. Reflexão na linha m_6

Como a identidade é uma simetria de rotação (uma volta completa), temos então que, para o hexágono regular, existem 6 simetrias de rotação e 6 simetrias de reflexão.

1.3 ALGUMAS COMPOSIÇÕES DAS ISOMETRIAS

Nesta seção examinaremos algumas formas de combinar as isometrias. Aqui, não estamos preocupados em demonstrar os resultados destas combinações, mas apenas ilustrar alguns deles. Sendo assim, caso haja interesse, recomendamos a leitura de [1].

Primeiramente vamos adotar algumas notações:

Id: Identidade;

ρ: menor rotação possível (sentido anti-horário). Ex: quadrado: $\rho = \frac{1}{4}$ de volta;

$\rho^2 = \rho\rho$: duas rotações seguidas;

$\rho^3 = \rho\rho\rho$: três rotações seguidas (e assim por diante);

ρ^{-1}, ρ^{-2} : rotações no sentido horário;

σ: reflexão por uma linha.

Observação 3. Os resultados das combinações serão analisados somente no triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular.

- Verifiquemos que a composta $\sigma\rho\sigma$ é equivalente a uma rotação:
  - Triângulo equilátero

    Observe o esquema da composta de isometrias, citada acima, no triângulo equilátero.

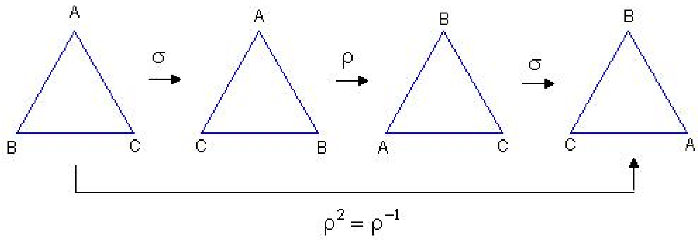


Figura 19: Composta $\sigma\rho\sigma$ no triângulo equilátero

1. A primeira reflexão σ foi aplicada sobre o eixo m_1 do triângulo (ver simetrias do triângulo equilátero). Como podemos observar, o ponto A manteve-se fixo enquanto que os pontos B e C foram invertidos;
2. A rotação ρ foi aplicada sobre o centro O do triângulo (ver simetrias do triângulo equilátero) com $\alpha = 120^o$ no sentido anti-horário. Agora o ponto B é o vértice superior do triângulo e os vértices da base são A (vértice da esquerda) e C (vértice da direita);
3. A segunda reflexão σ foi aplicada também sobre o eixo m_1 do triângulo. Como podemos observar, o ponto B manteve-se fixo enquanto que os pontos A e C foram invertidos.

Este resultado final poderia ter sido obtido a partir do triângulo inicial aplicando-se duas rotações sobre o centro O do triângulo, com $\alpha = 120^o$, no sentido anti-horário ou ainda, aplicando-se uma rotação sobre o centro O do triângulo, com $\alpha = 120^o$ no sentido horário.

– Quadrado

Observe o esquema da composta de isometrias, citada acima, no quadrado.

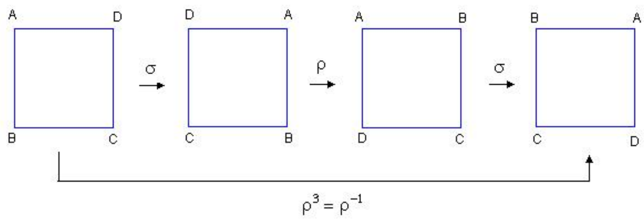


Figura 20: Composta $\sigma\rho\sigma$ no quadrado

Para facilitar a compreensão do esquema acima vamos ler os vértices do quadrado no sentido anti-horário sendo o primeiro vértice o superior à esquerda. No caso, o quadrado inicial é o quadrado $ABCD$.

1. A primeira reflexão σ foi aplicada sobre o eixo m_1 do quadrado $ABCD$ (ver simetrias do quadrado). Como podemos observar, os pontos A e D foram invertidos assim como os pontos B e C. Temos então o quadrado $DCBA$;
2. A rotação ρ foi aplicada sobre o centro O do quadrado (ver simetrias do quadrado) com $\alpha = 90^o$ no sentido anti-horário. Temos então o quadrado $ADCB$;
3. A segunda reflexão ρ foi aplicada também sobre o eixo m_1 do quadrado. Como podemos observar, os pontos A e B foram invertidos assim como os pontos D e C. Temos então o quadrado $BCDA$.

Este resultado final poderia ter sido obtido a partir do quadrado inicial aplicando-se três rotações sobre o centro O do quadrado, com $\alpha = 90^o$, no sentido anti-horário ou ainda, aplicando-se uma rotação sobre o centro O do quadrado, com $\alpha = 90^o$ no sentido horário.

– Hexágono regular

Observe o esquema da composta de isometrias, citada acima, no hexágono regular.

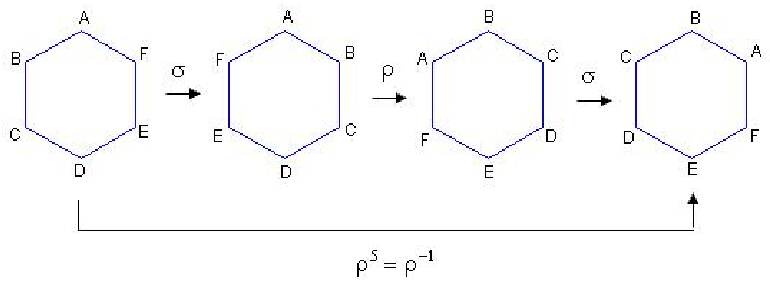


Figura 21: Composta $\sigma\rho\sigma$ no hexágono

Seja o hexágono regular inicial o hexágono $ABCDEF$, seguindo a mesma regra de nomenclatura do quadrado.

1. A primeira reflexão σ foi aplicada sobre o eixo m_1 do hexágono regular $ABCDEF$ (ver simetrias do hexágono regular). Como podemos

observar, os pontos B e F foram invertidos assim como os pontos C e E. Temos então o hexágono regular $AFEDCB$;

2. A rotação ρ foi aplicada sobre o centro O do hexágono regular (ver simetrias do hexágono regular) com $\alpha = 60^o$ no sentido anti-horário. Temos então o hexágono regular $BAFEDC$;
3. A segunda reflexão ρ foi aplicada também sobre o eixo m_1 do hexágono regular. Como podemos observar, os pontos A e C foram invertidos assim como os pontos F e D. Temos então o hexágono regular $BCDEFA$.

Este resultado final poderia ter sido obtido a partir do hexágono regular inicial aplicando-se cinco rotações sobre o centro O do hexágono, com $\alpha = 60^o$, no sentido anti-horário ou ainda, aplicando-se uma rotação sobre o centro O do hexágono, com $\alpha = 60^o$ no sentido horário.

- Vamos expressar as simetrias de reflexão do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular em termos de σ e ρ.

  - Triângulo equilátero

    A figura 22 representa a reflexão sobre o eixo m_1 do triângulo equilátero (ver simetrias do triângulo equilátero).

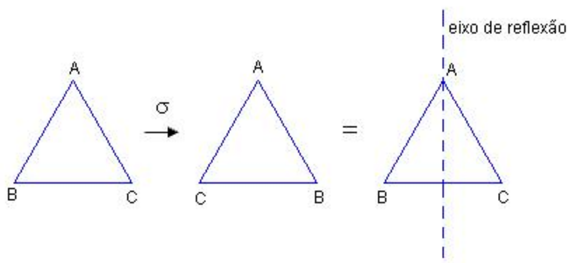


Figura 22: Reflexão sobre o eixo m_1 do triângulo equilátero

A figura 23 representa a aplicação de uma rotação de centro O e ângulo $\alpha = 120^o$ no sentido anti-horário seguida de uma reflexão sobre o eixo m_1 do triângulo equilátero. O mesmo resultado poderia ser obtido por uma reflexão de eixo m_2 (ver simetrias do triângulo equilátero).

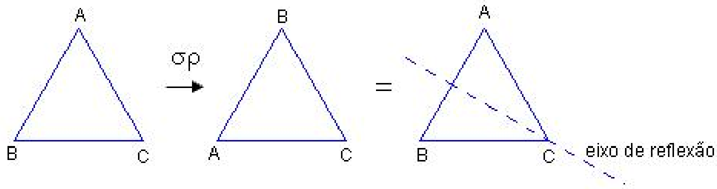


Figura 23: Reflexão sobre o eixo m_2 do triângulo equilátero

A figura 24 representa a aplicação de duas rotações de centro O e ângulo $\alpha = 120^o$ no sentido anti-horáriouma seguida de uma reflexão sobre o eixo m_1 do triângulo equilátero. O mesmo resultado poderia ser obtido por uma reflexão de eixo m_3 (ver simetrias do triângulo equilátero).

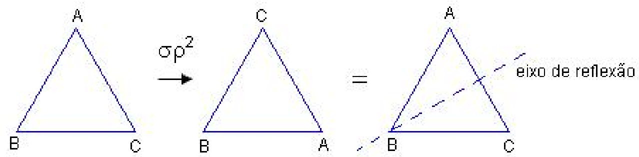


Figura 24: Reflexão sobre o eixo m_3 do triângulo equilátero

- Quadrado

  A figura 25 representa a reflexão sobre o eixo m_1 do quadrado (ver simetrias do quadrado).

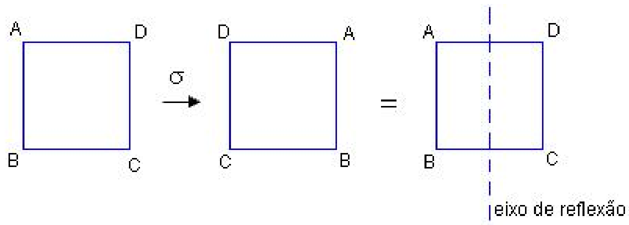


Figura 25: Reflexão sobre o eixo m_1 do quadrado

A figura 26 representa a plicação de uma rotação de centro O e ângulo $\alpha = 90^o$ no sentido anti-horário seguida de uma reflexão sobre o eixo m_1 do quadrado. O mesmo resultado poderia ser obtido por uma reflexão de eixo m_4 (ver simetrias do quadrado).

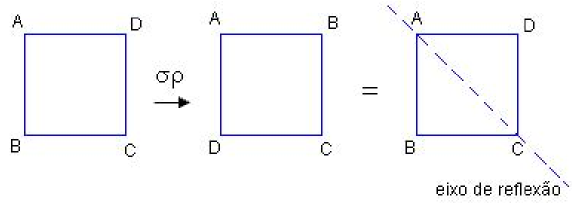


Figura 26: Reflexão sobre o eixo m_4 do quadrado

A figura 27 representa a aplicação de duas rotações de centro O e ângulo $\alpha = 90^o$ no sentido anti-horário seguida de uma reflexão sobre o eixo m_1 do quadrado. O mesmo resultado poderia ser obtido por uma reflexão de eixo m_3 (ver simetrias do quadrado).

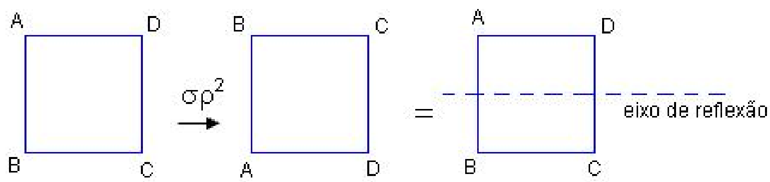


Figura 27: Reflexão sobre o eixo m_3 do quadrado

A figura 28 representa a aplicação de três rotações de centro O e ângulo $\alpha = 90^o$ no sentido anti-horário seguida de uma reflexão sobre o eixo m_1 do quadrado. O mesmo resultado poderia ser obtido por uma reflexão de eixo m_2 (ver simetrias do triângulo quadrado).

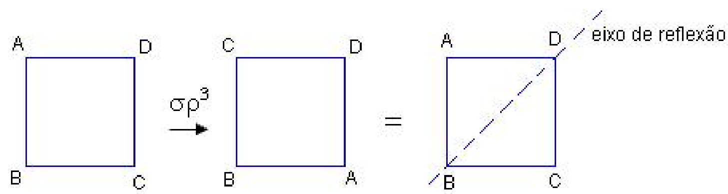


Figura 28: Reflexão sobre o eixo m_2 do quadrado

- Hexágono regular

  A figura 29 representa a reflexão sobre o eixo m_1 do hexágono regular (ver simetrias do hexágono regular).

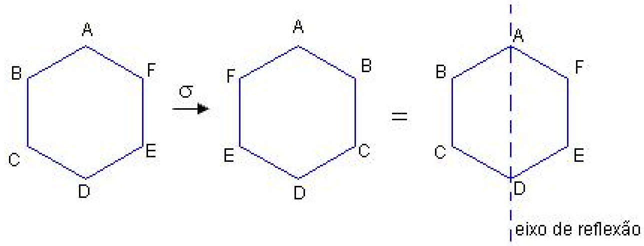


Figura 29: Reflexão sobre o eixo m_1 do hexágono

A figura 30 representa a aplicação de uma rotação de centro O e ângulo $\alpha = 60^o$ no sentido anti-horário seguida de uma reflexão sobre o eixo m_1 do hexágono regular. O mesmo resultado poderia ser obtido por uma reflexão de eixo m_6 (ver simetrias do hexágono regular).

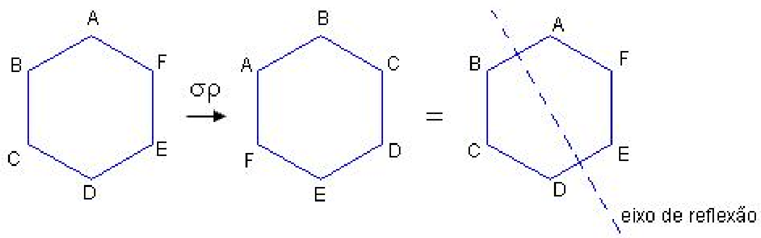


Figura 30: Reflexão sobre o eixo m_6 do hexágono

A figura 31 representa a aplicação de duas rotações de centro O e ângulo $\alpha = 60^o$ no sentido anti-horário seguida de uma reflexão sobre o eixo m_1 do hexágono regular. O mesmo resultado poderia ser obtido por uma reflexão de eixo m_5 (ver simetrias do hexágono regular).

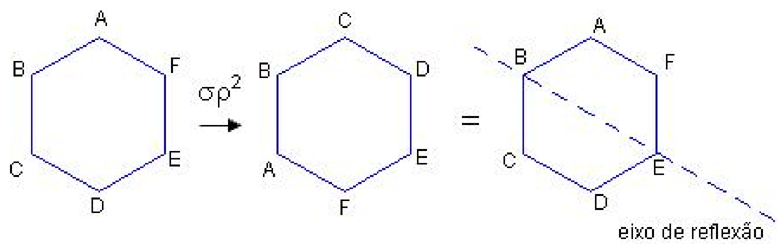


Figura 31: Reflexão sobre o eixo m_5 do hexágono

A figura 32 representa a aplicação de três rotações de centro O e ângulo $\alpha = 60^o$ no sentido anti-horário seguida de uma reflexão sobre o eixo m_1 do hexágono regular. O mesmo resultado poderia ser obtido por uma reflexão de eixo m_4 (ver simetrias do hexágono regular).

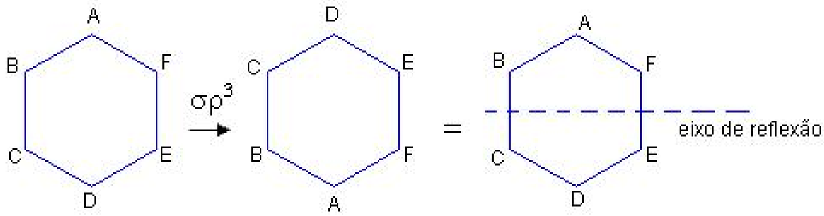


Figura 32: Reflexão sobre o eixo m_4 do hexágono

A figura 33 representa a aplicação de quatro rotações de centro O e ângulo $\alpha = 60^o$ no sentido anti-horário seguida de uma reflexão sobre o eixo m_1 do hexágono regular. O mesmo resultado poderia ser obtido por uma reflexão de eixo m_3 (ver simetrias do hexágono regular).

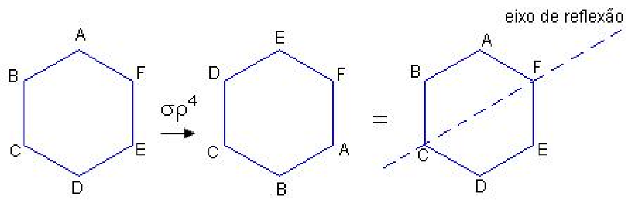


Figura 33: Reflexão sobre o eixo m_3 do hexágono

A figura 34 representa a aplicação de cinco rotações de centro O e ângulo $\alpha = 60^o$ no sentido anti-horário seguida de uma reflexão sobre o eixo m_1 do hexágono regular. O mesmo resultado poderia ser obtido por uma reflexão de eixo m_2 (ver simetrias do hexágono regular).

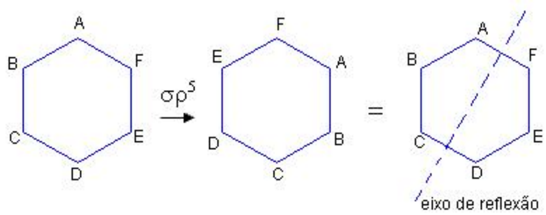


Figura 34: Reflexão sobre o eixo m_2 do hexágono

- Verificaremos que a composta $\rho\sigma\rho$ é equivalente a σ.

  - Triângulo equilátero

    Observe o esquema da composta de isometrias, citada acima, no triângulo equilátero.

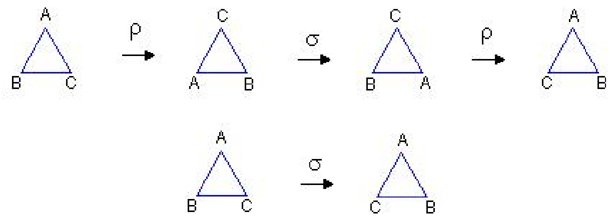


Figura 35: Composta $\rho\sigma\rho$ no triângulo equilátero

1. A primeira rotação ρ foi aplicada sobre o centro O do triângulo ABC (ver simetrias do triângulo equilátero) com $\alpha = 120^o$ no sentido anti-horário. Obtemos então o triângulo CAB;
2. A reflexão σ foi aplicada sobre o eixo m_1 do triângulo (ver simetrias do triângulo equilátero). Como podemos observar, o ponto C manteve-se fixo enquanto que os pontos A e B foram invertidos;
3. A segunda rotação ρ foi aplicada também sobre o centro O do triângulo com $\alpha = 120^o$ no sentido anti-horário. Agora temos como resultado final o triângulo ACB.

Este resultado final poderia ter sido obtido a partir do triângulo inicial aplicando-se uma reflexão sobre o eixo m1 do triângulo, como representado na figura 35.

  - Quadrado

    Observe o esquema da composta de isometrias, citada acima, no quadrado.

1. A primeira rotação ρ foi aplicada sobre o centro O do quadrado $ABCD$ (ver simetrias do quadrado) com $\alpha = 90^o$ no sentido anti-horário. Obtemos então o quadrado $DABC$;
2. A reflexão σ foi aplicada sobre o eixo m_1 do quadrado (ver simetrias do quadrado). Como podemos observar, os pontos D e C foram invertidos assim como os pontos A e B;

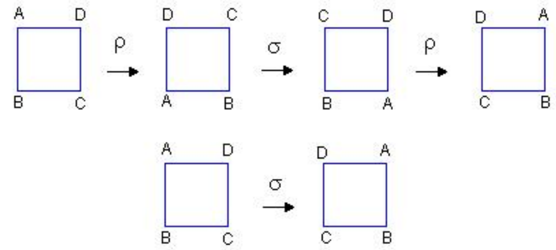


Figura 36: Composta $\rho\sigma\rho$ no quadrado

3. A segunda rotação ρ foi aplicada também sobre o centro O do quadrado com $\alpha = 90^o$ no sentido anti-horário. Agora temos como resultado final o quadrado $DCBA$.

Este resultado final poderia ter sido obtido a partir do quadrado inicial aplicando-se uma reflexão sobre o eixo m_1 do quadrado, como representado na figura 36.

– Hexágono regular

Observe o esquema da composta de isometrias, citada acima, no hexágono regular.

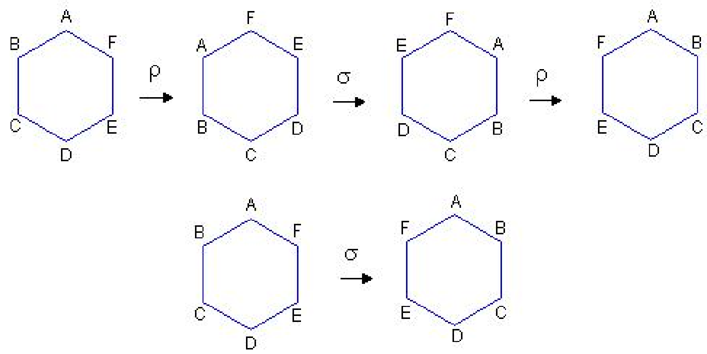


Figura 37: Composta $\rho\sigma\rho$ no hexágono regular

1. A primeira rotação ρ foi aplicada sobre o centro O do hexágono regular $ABCDEF$ (ver simetrias do hexágono regular) com $\alpha = 60^o$ no sentido anti-horário. Obtemos então o hexágono $FABCDE$;
2. A reflexão σ foi aplicada sobre o eixo m_1 do hexágono (ver simetrias do hexágono). Como podemos observar, os pontos F e C mantiveram-

se fixos e os pontos A e E, assim como os pontos B e D, foram invertidos;

3. A segunda rotação ρ foi aplicada também sobre o centro O do hexágono com $\alpha = 60^{o}$ no sentido anti-horário. Agora temos como resultado final o hexágono regular $AFEDCB$.

Este resultado final poderia ter sido obtido a partir do hexágono inicial aplicando-se uma reflexão sobre o eixo m_1 do hexágono, como representado na figura 37.

2

OS SETE GRUPOS DE FRISOS

Analisando alguns elementos decorativos de uma construção ou de padrões encontrados em um artesanato como uma tapeçaria, observamos que há frequentemente a repetição indefinida de alguma figura ou motivo. A essa característica muito observada nos ornamentos artísticos damos o nome de frisos.

Apesar da infinita variedade destes ornamentos, veremos que, considerando apenas as combinações das isometrias presentes em cada um, existem somente sete possibilidades, as quais denominamos os sete grupos de frisos.

Neste capítulo faremos uso de ilustrações e esquemas para definir e classificar o grupo de frisos de forma didática.

2.1 2.1 DEFINIÇÃO E CLASSIFICAÇÃO

Um Grupo de Frisos $\mathcal{F}$ é um grupo discreto de isometrias cujas translações distintas da identidade são todas em uma única direção. Esta direção distinguida é denominada o centro do Grupo de Frisos.

Para melhor estudar o grupo de frisos, vamos dividi-lo em duas classes distintos. Maiores detalhes podem ser vistos em [3] e [6].

1. 1ª classe: $\mathcal{F}$ contêm somente isometrias próprias, ou seja, isometrias dadas pela composta de um número par de reflexões em relação a linhas:
    a) Seja $\mathcal{F}$ um Grupo de Frisos gerado apenas por uma translação . Chamaremos esse grupo de$\mathcal{F}_1$.

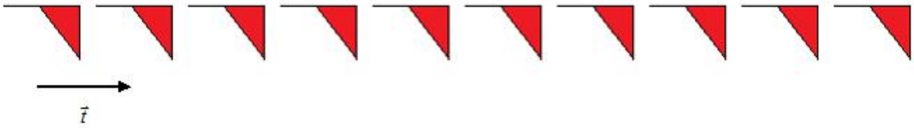


Figura 38: Friso gerado apenas por uma translação

Observe que o esquema acima não apresenta qualquer linha de reflexão ou centro de rotação. Aqui a figura se repete indefinidamente numa única direção por uma translação $\overrightarrow{t}$.

Veja alguns exemplos do grupo $\mathcal{F}_1$ (Exemplos tirados de [10]).

Figura 39: Exemplos de frisos do grupo $\mathcal{F}_1$

b) Seja $\mathcal{F}$ um Grupo de Frisos gerado apenas por translações e rotações. Os elementos deste grupo serão a translação e a rotação $\rho_{A,\alpha}$ de meia volta, ou seja, a reflexão σ_A em relação a um ponto. Chamaremos esse grupo de $\mathcal{F}_2$.

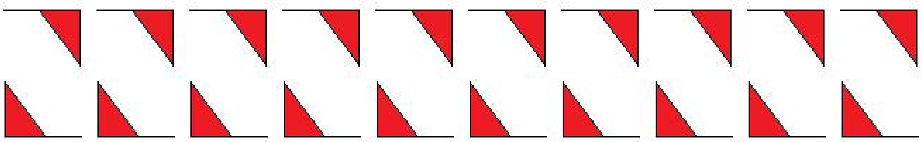


Figura 40: Frisos gerado apenas por translações e rotações

Aqui a figura se repete indefinidamente por uma rotação de meia volta e por uma translação. Para melhor visualizar como este grupo foi gerado vamos analisar, passo a passo, sua construção:

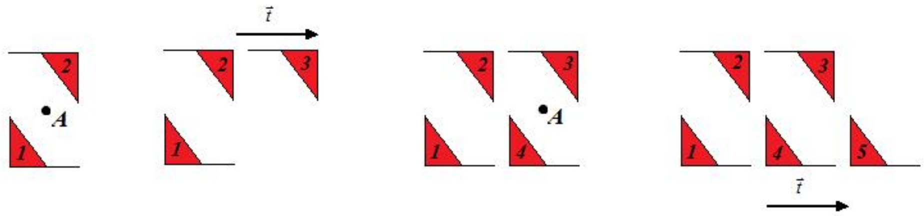


Figura 41: Construção do Friso por uma rotação de meia volta e por uma translação

Seja a figura 1 inicial (ver Figura 41): a figura 2 foi gerada a partir de 1 por uma rotação de meia volta de centro A; a figura 3 foi gerada a partir de 2 por uma translação; a figura 4 foi gerada a partir de 3 por uma rotação de meia volta de centro A; a figura 5 foi gerada a partir de 4 por uma translação; e assim por diante.

Veja um exemplo do grupo $\mathcal{F}_2$ (Exemplo tirado de [10]):

Figura 42: Exemplo de friso do grupo $\mathcal{F}_2$

2. 2ª classe: $\mathcal{F}$ contêm isometrias impróprias, ou seja, isometrias dadas pela composta de um número ímpar de reflexões em relação a linhas:

   a) Grupos de Frisos que contêm reflexões em linhas (σ); Se a reflexão σ pertence ao Grupo de Frisos $\mathcal{F}$ de translação τ, teremos duas situações: ou o eixo de reflexão é paralelo à direção da translação τ, ou é perpendicular à ela. Vamos então distinguir quatro tipos de grupos de frisos de translação τ contendo uma reflexão σ:

      – Seja $\mathcal{F}$ um Grupo de Friso com translação τ, contendo o eixo de reflexão paralelo a direção da translação, cujo subgrupo de isometrias próprias é do tipo $\mathcal{F}_1$, ou seja, translações. Chamaremos este grupo de $\mathcal{F}_1^1$.

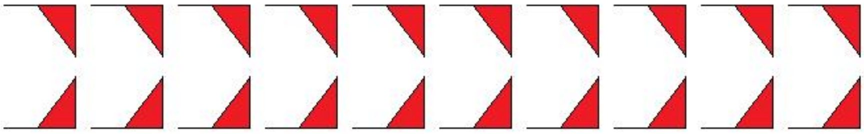


Figura 43: Esquema de friso do grupo $\mathcal{F}_1^1$

Aqui a figura se repete indefinidamente por uma reflexão em relação a uma reta e por uma translação. Para melhor visualizar como este grupo foi gerado vamos analisar, passo a passo, sua construção:

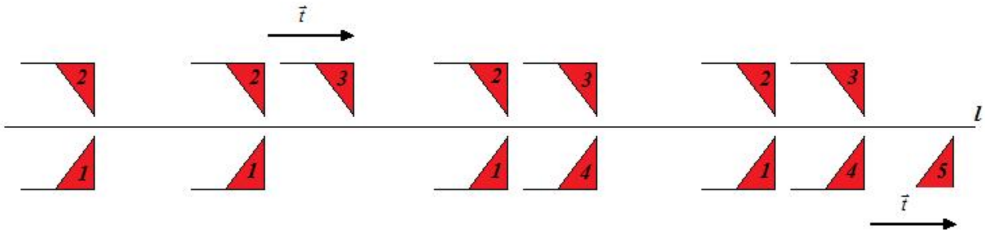


Figura 44: Construção do friso por uma reflexão em relação a uma reta e por uma translação

Seja a figura 1 inicial (ver Figura 44): a figura 2 foi gerada a partir de 1 por uma reflexão em relação a reta l (observe que a reta l é paralela à direção da translação τ); a figura 3 foi gerada a partir de 2 por uma translação; a figura 4 foi gerada a partir de 3 por uma reflexão em relação a reta l; a figura 5 foi gerada a partir de 4 por uma translação; e assim por diante.

Veja um exemplo do grupo $\mathcal{F}_1^1$ (Exemplo tirado de [10]):

Figura 45: Exemplo de friso do grupo $\mathcal{F}_1^1$

– Seja $\mathcal{F}$ um Grupo de Friso com translação τ, contendo o eixo de reflexão paralelo a direção da translação, cujo subgrupo de isometrias próprias é do tipo $\mathcal{F}_1$, ou seja, translações e rotações. Chamaremos este grupo de $\mathcal{F}_2^1$.

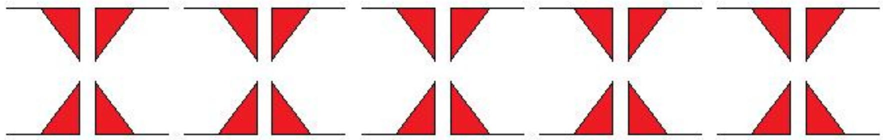


Figura 46: Esquema de friso do grupo $\mathcal{F}_2^1$

Aqui a figura se repete indefinidamente por uma reflexão em relação a uma reta, por uma rotação e por uma translação. Para melhor visualizar como este grupo foi gerado vamos analisar, passo a passo, sua construção:

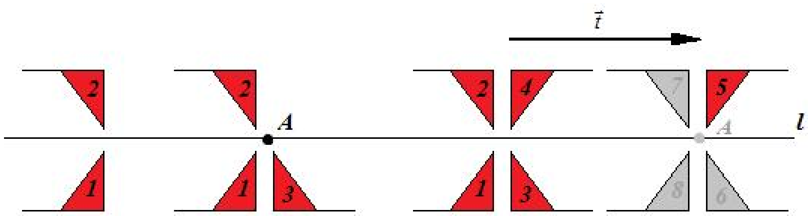


Figura 47: Construção do friso por uma reflexão em relação a uma reta, por uma rotação e por uma translação

Seja a figura 1 inicial (ver Figura 47): a figura 2 foi gerada a partir de 1 por uma reflexão em relação a reta l (observe que a reta l é paralela à direção da translação τ); a figura 3 foi gerada a partir de 2 por uma rotação de meia volta de centro A; a figura 4 foi gerada a partir de 3 por uma reflexão em relação a reta l; a figura 5 foi gerada a partir de 4 por uma translação; e assim por diante.

Poderíamos descrever a construção acima de uma outra forma: formado o motivo com as figuras 1, 2, 3 e 4 como descrito anteriormente, este se repete indefinidamente por uma translação. Veja o esquema na Figura 48:

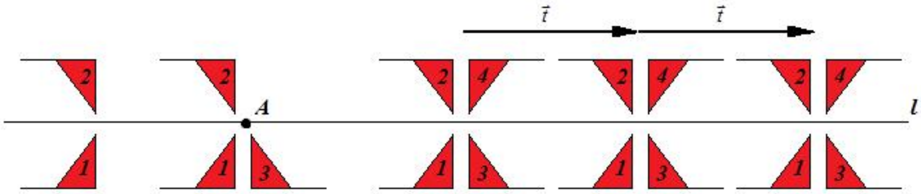


Figura 48: Construção do friso pela translação do motivo já determinado

Veja dois exemplos do grupo $\mathcal{F}_2^1$ (Exemplos tirados de [10]):

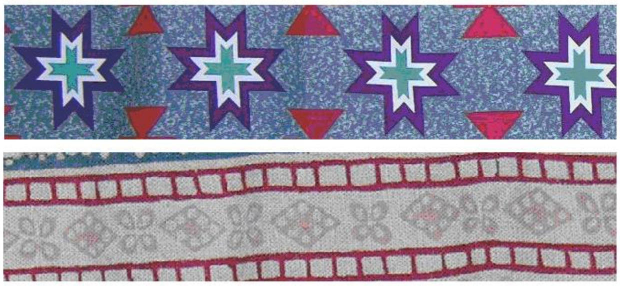


Figura 49: Exemplos de frisos do grupo $\mathcal{F}_2^1$

– Seja $\mathcal{F}$ um Grupo de Friso com translação τ, contendo o eixo de reflexão perpendicular à direção da translação, cujo subgrupo de isometrias próprias é do tipo$\mathcal{F}_1$, ou seja, translações. Chamaremos este grupo de $\mathcal{F}_1^2$.

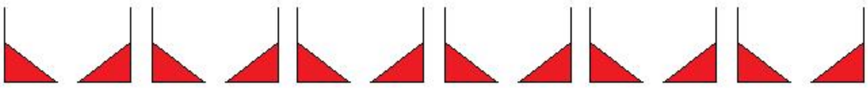


Figura 50: Esquema de friso do grupo $\mathcal{F}_1^2$

Aqui a figura se repete indefinidamente por uma reflexão em relação a uma reta e por uma translação. Para melhor visualizar como este grupo foi gerado vamos analisar, passo a passo, sua construção:

Seja a figura 1 inicial (ver Figura 51): a figura 2 foi gerada a partir de 1 por translação; a figura 3 foi gerada a partir de 2 por uma reflexão em relação a reta l (observe que a reta l é perpendicular à direção da translação τ); a figura 4 foi gerada a

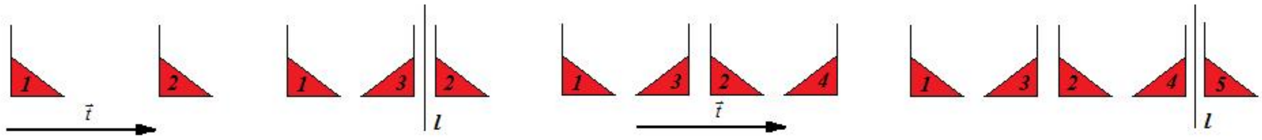


Figura 51: Construção do friso por uma reflexão em relação a uma reta e por uma translação

partir de 3 por uma translação; a figura 5 foi gerada a partir de 4 por uma reflexão em relação a reta l; e assim por diante.

Poderíamos descrever a construção acima de uma outra forma: seja a figura 2 gerada a partir de 1 por uma reflexão em relação a reta l; as figuras 1 e 2 formam um motivo que se repete indefinidamente por uma translação. Veja o esquema na Figura 52.

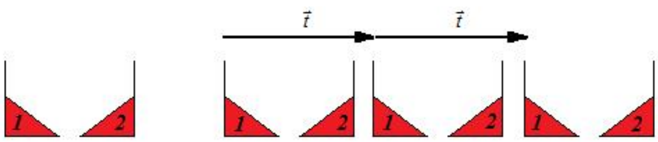


Figura 52: Construção do friso pela translação do motivo já determinado

Veja dois exemplos do grupo $\mathcal{F}_1^2$ (Exemplos tirados de [10]) :

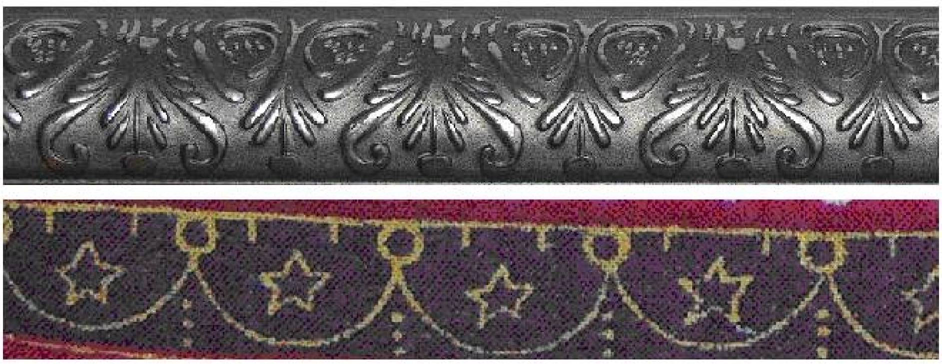


Figura 53: Exemplos de frisos do grupo $\mathcal{F}_1^2$

- Seja $\mathcal{F}$ um Grupo de Friso com translação τ, contendo o eixo de reflexão perpendicular à direção da translação, cujo subgrupo de isometrias próprias é do tipo $\mathcal{F}_1$, ou seja, translações e rotações. Chamaremos este grupo de $\mathcal{F}_2^2$.

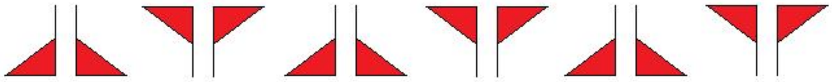


Figura 54: Esquema de friso do grupo $\mathcal{F}_2^2$

Aqui a figura se repete indefinidamente por uma reflexão em relação a uma reta, por uma rotação e por uma translação. Para melhor visualizar como este grupo foi gerado vamos analisar, passo a passo, sua construção:

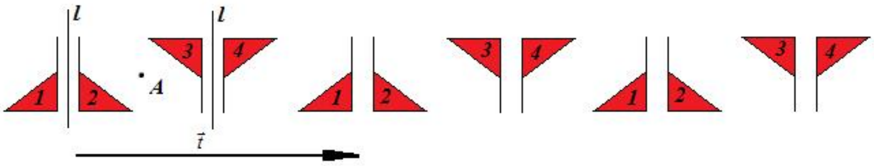


Figura 55: Construção do friso por uma reflexão em relação a uma reta, por uma rotação e por uma translação

Seja a figura 1 inicial (ver Figura 55): a figura 2 foi gerada a partir de 1 por uma reflexão em relação a reta l (observe que a reta l é perpendicular à direção da translação τ); a figura 3 foi gerada a partir de 2 por uma rotação de meia volta de centro A; a figura 4 foi gerada a partir de 3 por uma reflexão em relação a reta; as figuras 1, 2, 3 e 4 formam um motivo que se repete indefinidamente por uma translação.

Veja um exemplo do grupo $\mathcal{F}_2^2$ (Exemplo tirado de [10]):

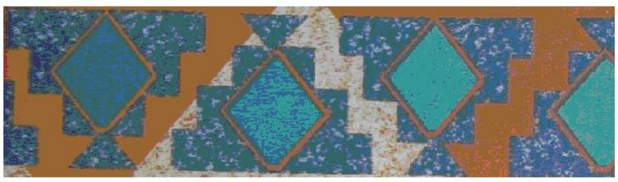


Figura 56: Exemplo de friso do grupo $\mathcal{F}_2^2$

b) Grupos de Frisos que contêm reflexões transladadas:

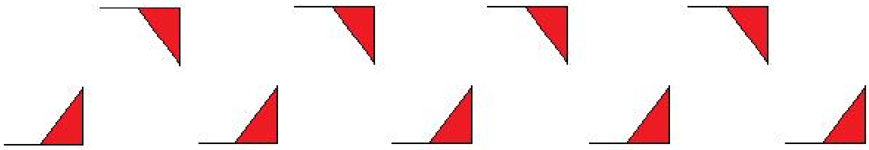


Figura 57: Esquema de friso do grupo $\mathcal{F}_1^3$

– Seja $\mathcal{F}$ um Grupo de Frisos gerado por uma reflexão transladada γ. Chamaremos esse grupo de$\mathcal{F}_1^3$.

Aqui a figura se repete indefinidamente por uma reflexão transladada. Para melhor visualizar como este grupo foi gerado vamos analisar, passo a passo, sua construção:

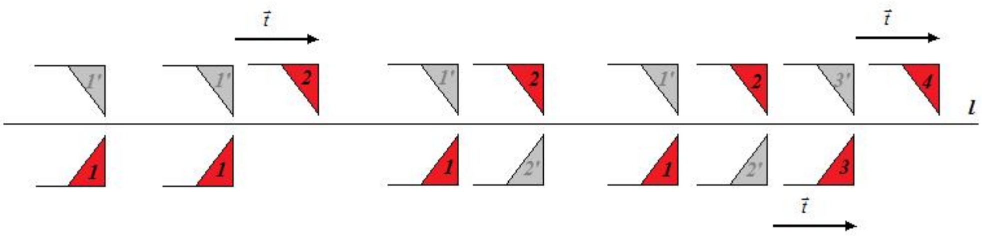


Figura 58: Construção do friso por uma reflexão transladada

Seja a figura 1 inicial (ver Figura 58): a figura 1' foi gerada a partir de 1 por uma reflexão em relação a reta l (observe que a reta l é paralela à direção da translação τ); a figura 2 foi gerada a partir de 1' por uma translação; a figura 2' foi gerada a partir de 2 por uma reflexão em relação a reta l; a figura 3 foi gerada a partir de 2' por uma translação, e assim por diante. Observe que as figuras 1', 2', 3',..., n' são apenas suportes para melhor compreender como o grupo foi gerado e que, por isso, não fazem parte do resultado final.

Veja um exemplo do grupo $\mathcal{F}_1^3$ (Exemplo tirado de [8]):

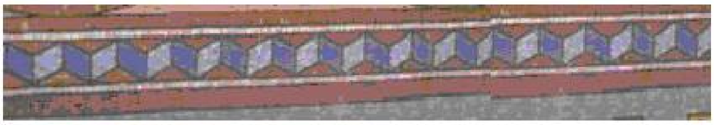


Figura 59: Exemplo de friso do grupo $\mathcal{F}_1^3$

3

PROPOSTA DE ATIVIDADES

Neste capítulo propomos um conjunto de tarefas que o professor pode aplicar aos alunos do ensino médio, auxiliando-o com a divulgação e orientação no que se refere ao grupo de frisos.

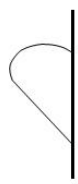
Esperamos que após a leitura e estudo dos capítulos anteriores, o leitor seja capaz não só de identificar como também classificar um friso.

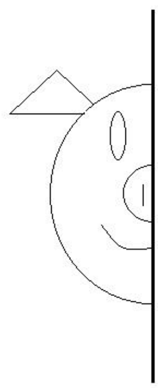
Observação 4. Todas as atividades aqui desenvolvidas foram adaptadas de [11].

3.1 ATIVIDADES DE APRENDIZADO

ATIVIDADE 1

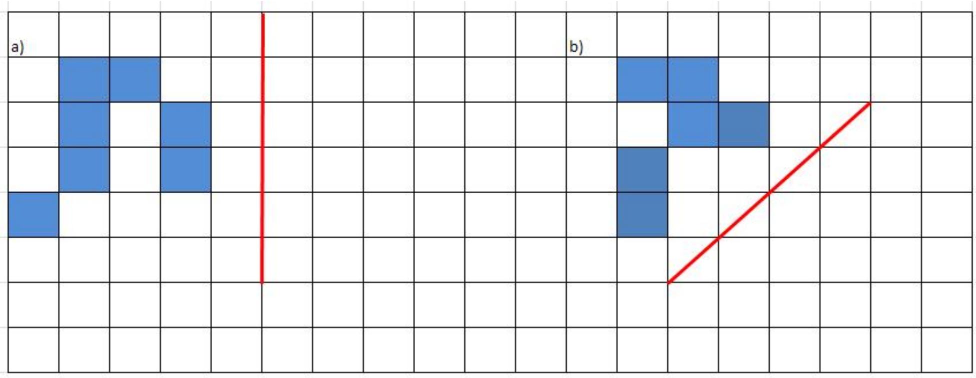
Com o auxílio de um espelho plano e retangular sobre a reta desenhada em cada figura, complete a figura com a imagem obtida no espelho.





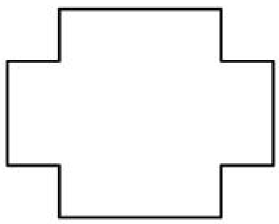
ATIVIDADE 2

Desenhe a imagem de cada uma das seguintes figuras por reflexão considerando que as retas representadas são o eixo de reflexão.



ATIVIDADE 3

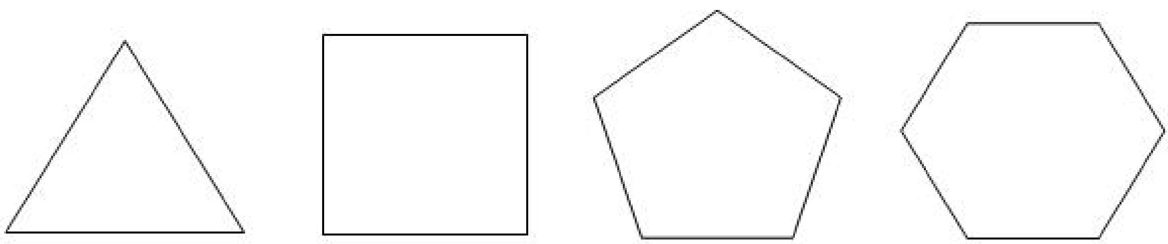
a) Com o auxilio de um espelho plano e retangular, obtenha uma figura completa fazendo uso apenas de uma parte da figura.



b) Desenhe os eixos de simetria da figura

ATIVIDADE 4

Com o auxílio de um espelho plano e retangular encontre os eixos de simetria de cada um dos polígonos regulares abaixo:



ATIVIDADE 5

Indique uma isometria usada que torna a segunda figura imagem da primeira.

a) Figura B imagem da figura A;

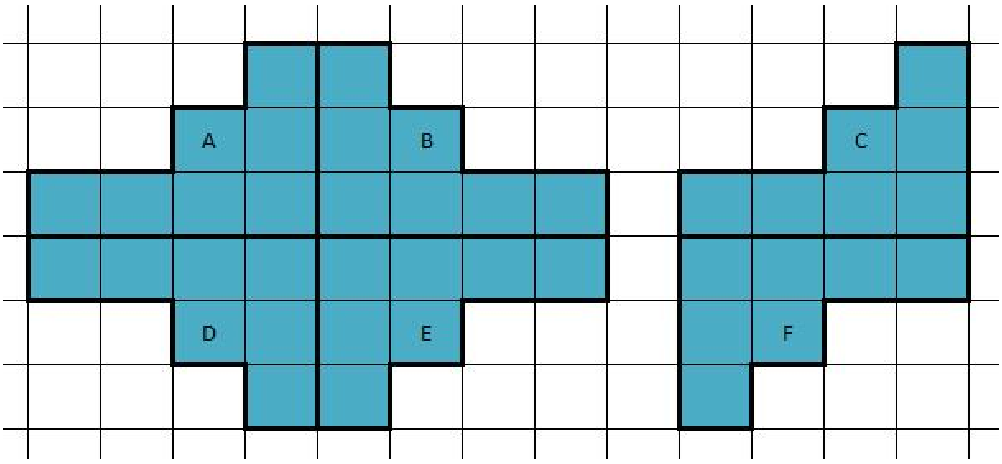
b) Figura C imagem da figura A;

c) Figura D imagem da figura B;

d) Figura E imagem da figura B;

e) Figura F imagem da figura B;

f) Figura C imagem da figura B.



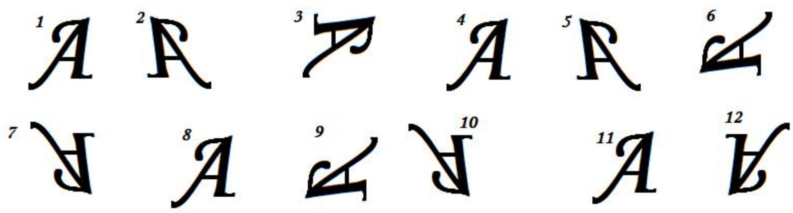
ATIVIDADE 6

Identifique, fazendo uso da numeração indicada em cada figura, as figuras que são imagens da figura 1 pela aplicação de uma isometria de:

a) Reflexão:

b) Translação:

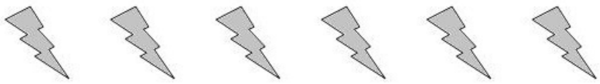
c) Reflexão transladada:



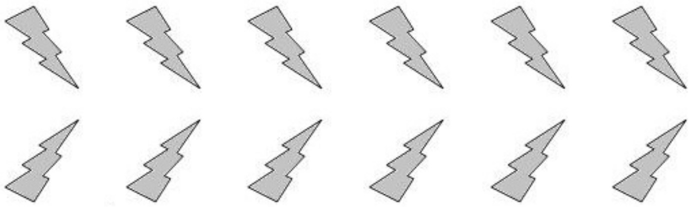
ATIVIDADE 7

Identifique as isometrias (translação, rotação de meia volta, reflexão e reflexão transladada) existentes em cada um dos frisos abaixo:

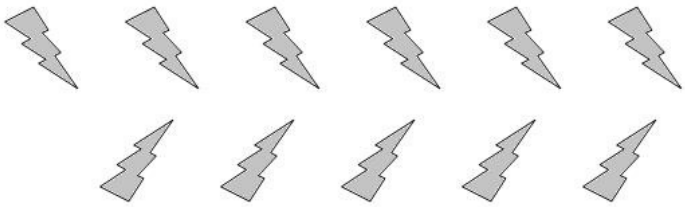
a) friso 1



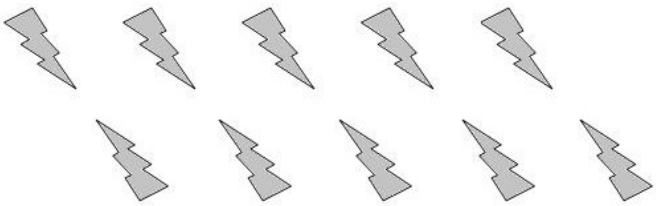
b) friso 2



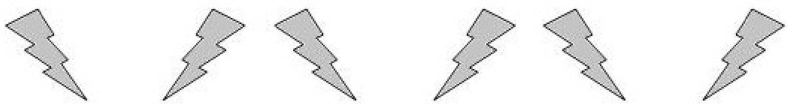
c) friso 3



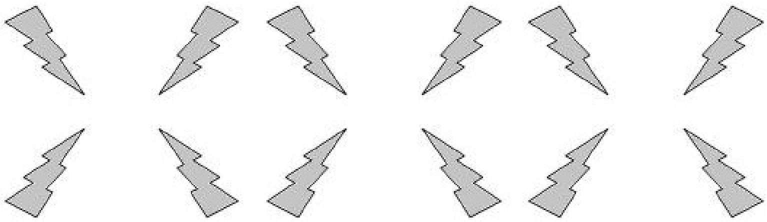
d) friso 4



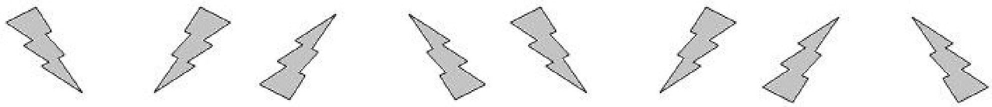
e) friso 5



f) friso 6

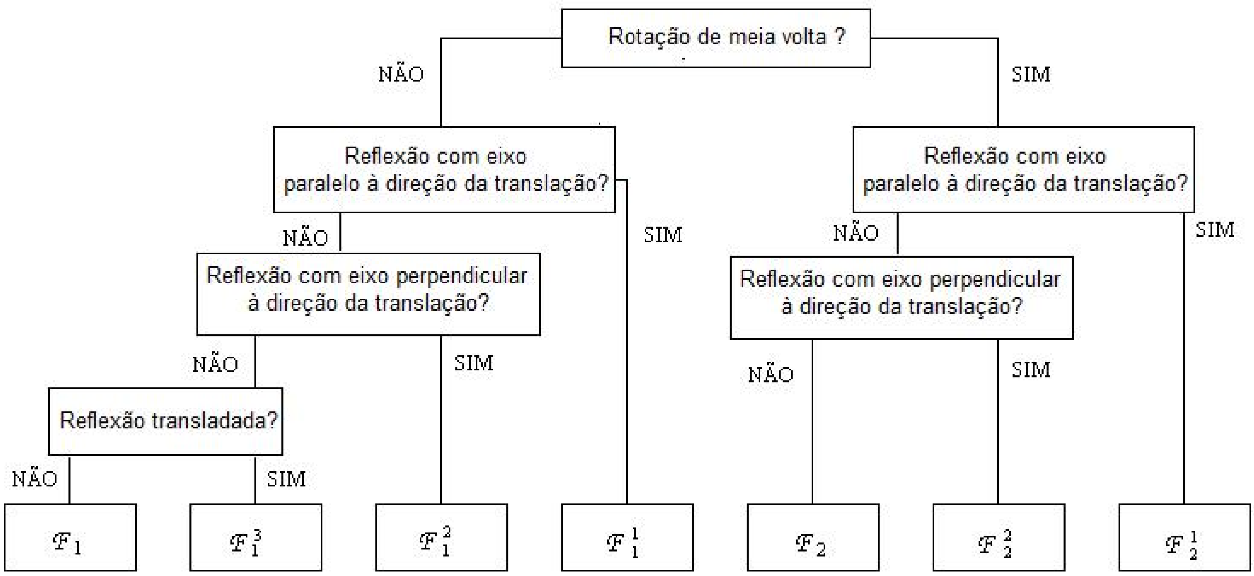


g) friso 7



ATIVIDADE 8

A partir dos resultados obtidos na tarefa anterior, vamos classificar cada um dos frisos. Para isto, vamos fazer uso do “organograma do grupo de frisos”



3.2 PLANO DAS ATIVIDADES

Tema Geometria

Tópicos Matemáticos: Simetria; isometrias de translação, reflexão, rotação e reflexão transladada.

Aprendizagens visadas:

- desenhar figuras simétricas em relação a um eixo;
- ser capaz de identificar eixos de simetria em uma figura;
- ser capaz de identificar figuras simétricas em relação a um eixo;
- ser capaz de identificar isometrias ou composição de isometrias aplicadas sobre uma figura;
- ser capaz de classificar um friso dentro do grupo de frisos.

Recursos utilizados: espelho, papel quadriculado, polígonos recortados;

Notas ao professor:

- Atividade 1:

  Nesta atividade o professor deve discutir com os alunos a questão do uso do espelho para concluir a tarefa, não esquecendo que quando é aplicada uma isometria sobre uma figura, sua imagem é congruente a ela. O professor deve concluir que o espelho, nesta tarefa, funciona como eixo de simetria.

  Como atividade complementar o professor pode pedir aos alunos que recortem a figura (já completa) e façam uma dobragem sobre a reta de modo a conferir o resultado obtido.

- Atividade 2:

  Os alunos devem desenhar as imagens da figura no quadriculado e podem, posteriormente, utilizar um espelho para confirmar os resultados obtidos.

- Atividades 3 e 4:

  O objetivo destas atividades é que os alunos identifiquem eixos de simetria de figuras manuseando um espelho, dando um destaque aos eixos de simetria dos polígonos regulares.

Como atividade complementar o professor pode pedir aos alunos que desenhem estas figuras em papel que possam recortar. Posteriormente os alunos devem fazer dobragens de modo a confirmar os resultados obtidos.

O professor pode ainda distribuir outras figuras e polígonos para que com o manuseio do espelho e com dobragens, os alunos identifiquem os eixos de simetria

- Atividades 5 e 6:

  Na atividade 5 professor deve incentivar os alunos a encontrar várias soluções para cada item, ressaltando que as imagens podem ser resultado de uma composição de várias isometrias.

  Nas atividades 5 e 6 os alunos poderiam copiar a figura em um papel vegetal e manuseá-lo de modo confirmar seus resultados.

- Atividades 7 e 8:

  Nesta atividade os alunos poderiam copiar a figura em um papel vegetal de modo a facilitar a visualização das isometrias aplicadas em cada um dos frisos.

  Nos itens em que houver reflexão, os alunos precisam identificar se o eixo desta é paralelo ou perpendicular à direção da translação.

  Os alunos podem discutir seus resultados em grupo e, posteriormente, classificar cada um dos frisos (atividade 8).

3.3 RESULTADO DAS ATIVIDADES

ATIVIDADE 1:

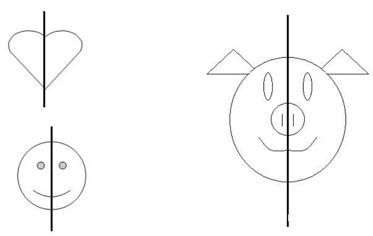


Figura 60: Resultado da Atividade 1

ATIVIDADE 2:

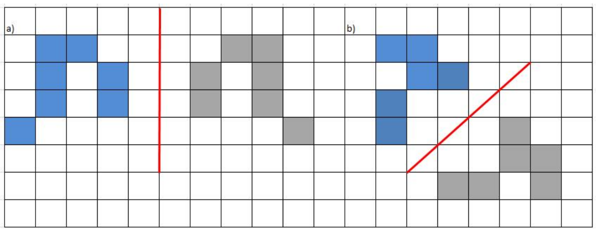


Figura 61: Resultado da Atividade 2

ATIVIDADE 3:

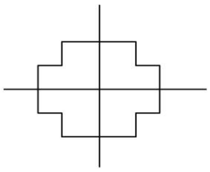


Figura 62: Resultado da Atividade 3

ATIVIDADE 4:

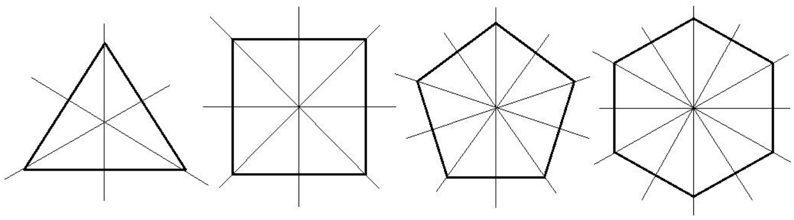


Figura 63: Resultado da Atividade 4

ATIVIDADE 5:

Possível solução:

a) Reflexão

b) Translação

c) Rotação de meia volta

d) Reflexão

e) Reflexão transladada

f) Reflexão

ATIVIDADE 6:

a) 2, 5 e 7

b) 4, 8 e 11

c) 10

ATIVIDADE 7:

a) translação

b) translação e reflexão

c) reflexão transladada

d) rotação de meia volta

e) translação e reflexão

f) translação, reflexão e rotação de meia volta

g) translação e rotação de meia volta

ATIVIDADE 8:

a) $\mathcal{F}_1$

b) $\mathcal{F}_1^1$

c) $\mathcal{F}_1^3$

d) $\mathcal{F}_2$

e) $\mathcal{F}_1^2$

f) $\mathcal{F}_2^1$

g) $\mathcal{F}_2^2$

BIBLIOGRAFIA

[1] ALVES, Sérgio.; GALVÃO.; *UM ESTUDO GEOMÉTRICO DAS TRANSFORMAÇÕES* , SÃO PAULO, IME-USP, 1996.

[2] FRAMER, DAVID.; W.; *GROUPS AND SYMMETRY: A GUIDE TO DISCOVERING MATHEMATICS* , 1995.

[3] MARTIN, G.; E; *TRANFORMATION GEOMETRY, AN INTRODUCTION TO SYMMETRY*, SPRINGER -VERLAG, 1982.

[4] MEYER; WALTER.; *GEOMETRY AND ITS APLICATIONS* , NEW YORK, BURLINGTON,MA: EUSERIER ACADEMIC PRESS, 2006.

[5] MCTM Addenda Series/Grades 9-12; *GEOMETRY FROM MULTIPLE PERPECTIVES*, SÃO PAULO, IME-USP, 1996.

[6] SOUZA, BARBARA.; MARQUES.; *SIMETRIA NA ARTE ISLÂMICA*,Projeto de Ensino de Matemática, IME-USP, 2003 .

[7] WEYL,; HERMAN.; *SIMETRIA*, Tradução de Victor Baranaukas, SãO PAULO, EDUSP, 1997.

[8] www.mathdl.org/images/upload_library/4/vol1/architecture/Math/math.html. Acessado em 06/2014

[9] www. mathmuse.sci.ibaraki.ac.jp/pattrn/PatternE.html. Acessado em 06/2014

[10] www.mrbeaudry.com/frieze.html. Acessado em 06/2014

[11] Professores das turmas piloto do 6.º ano de escolaridade; Reflexão, Rotação e Translação, Proposta de conjunto de tarefas para o 2.º ciclo, 2010. Disponível em http://www.trabalhosfeitos.com/ensaios/Geometria/470079.html. - Acessado em 04/2015