Universidade Federal do ABC

PROFMAT

SAMUEL XAVIER RIBEIRO

UMA INTRODUÇÃO ÀS LÓGICAS CLÁSSICA E MODAL E ALGUNS MÉTODOS DE DEDUÇÃO

Santo André, 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

SAMUEL XAVIER RIBEIRO

UMA INTRODUÇÃO ÀS LÓGICAS CLÁSSICA E MODAL E ALGUNS MÉTODOS DE DEDUÇÃO

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL
DEFENDIDA PELO ALUNO SAMUEL XAVIER RIBEIRO,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. VINICIUS CIFÚ LOPES

Santo André, 2015

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André,________de________________de 2015.

Assinatura do autor:_______________________________________

Assinatura do orientador:__________________________________

Dedico este trabalho, primeiramente a Deus, por ter me dado forças e me ajudado nessa longa jornada, e à minha família por acreditar em minha capacidade e me apoiar em minhas escolhas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades, não somente por isso, mas pela minha vida, família e amigos.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes, pelo suporte, pelas suas correções e incentivos.

Aos professores do Profmat e à UFABC, pelo acolhimento.

Aos membros da banca por analisarem atenciosamente meu trabalho.

A minha esposa, Ana Claudia, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

À CAPES, pelo apoio financeiro durante todo o curso.

"Um raciocínio lógico leva você de A a B. A imaginação leva você a qualquer lugar que você quiser".

(Albert Einstein)

RESUMO

Iniciamos esse trabalho com uma breve introdução histórica para que o leitor tenha uma noção de quando e por que houve interesse em sistematizar os raciocínios lógicos desde Aristóteles até nossos dias. A seguir, apresentamos noções de linguagens, com seus símbolos e regras de formação, sintaxe dos cálculos proposicional e de predicados, funções e operações envolvendo o cálculo de predicados e aplicações (fórmulas matemáticas bem conhecidas). No terceiro capítulo introduzimos o conceito de semântica e apresentamos alguns procedimentos de prova como as tabelas-verdade, *tableaux* e dedução natural envolvidos nesses sistemas. No quarto capítulo apresentamos a Lógica Modal Alética, demonstrações de teoremas do sistema S5, semântica relacionada com mundos possíveis. Em seguida, apresentamos noções de lógicas modais não aléticas e no sexto capítulo, finalizamos esse trabalho com uma atividade que pode ser aplicada para alunos no Ensino Médio.

Palavras-chave: Lógicas não clássicas. Lógica Modal. Procedimentos de prova. Mundos possíveis.

ABSTRACT

We begin this work with a brief historical introduction to when and why there was interest in systematizing logical reasoning since Aristotle until our days. Next, we introduce notions of languages, with its symbols and forming rules, the syntax of propositional and predicate calculi, functions and operations involving the predicate calculus and applications (well known mathematical formulas). In the third chapter we introduce the concept of semantics and present some proof procedures as truth tables, tableaux and natural deduction involved in these systems. In the fourth chapter we present alethic Modal logic, proofs of theorems of the S5 system, and the semantics related to possible worlds. Then, we present notions of non-alethic modal logics. In the sixth chapter, we conclude with an activity that can be applied to high school students.

Keywords: non-classical Logics. Modal Logic. Proof procedures. Possible worlds.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

A Lógica é uma Ciência que tem evoluído muito ao longo dos anos, principalmente no século XX. A aproximação com a Matemática foi extremamente importante, pois resultou numa ferramenta que permite modelar problemas em várias áreas do conhecimento, sejam teóricos, tecnológicos e na Matemática de modo geral. Hoje a conhecemos como Lógica Matemática. Com as aplicações da Lógica, as demonstrações matemáticas começaram a ficar mais rigorosas. Nesse trabalho mostraremos como a linguagem da Lógica vem se transformando desde os antigos filósofos gregos, de modo que entenderemos como a organização dos raciocínios lógicos é importante na modelagem de sistemas reais nas Engenharias (Eletrônica, Produção, Elétrica, *Software*, etc.), Inteligência Artificial, etc. Nosso interesse em especial é mostrar que conceitos de Lógica clássica e não clássicas como a Modal podem (e precisam) ser trabalhados no Ensino Regular, principalmente no Ensino Médio, pois têm grandes aplicações até mesmo em problemas muito simples do Ensino Fundamental. Para uma introdução à história da filosofia e da lógica, de modo acessível, podemos citar Aristóteles (1987); um pouco mais de aprofundamento na história da filosofia, consultar Kneale and Kneale (1962, apud Coscarelli, 2008) e ao estudo da lógica clássica: Mendelson (1997), Oliveira (2010) e Kleene (2002). Para uma boa introdução à lógica modal, temos Coscarelli (2008) e Chellas (1980).

1

LÓGICA

1.1 O que é lógica

A lógica não é somente uma disciplina da filosofia. Ela é uma ciência independente, que estuda os métodos e princípios dos raciocínios. Ou seja, analisa como os argumentos foram construídos e tem interesse nas conclusões que resultam dos processos mentais (raciocínios). Os argumentos são as razões que nos levam a acreditar ou não na conclusão. A lógica estuda as inferências válidas, que são aquelas cujas conclusões são verdadeiras quando as premissas também o são. A lógica, que hoje é conhecida como *lógica tradicional*, é a lógica aristotélica.

Ao estudar as formas de argumentos, é comum separá-los em *dedutivos* e *indutivos.* A lógica *dedutiva* tem como objetivo estudar os raciocínios dedutivos, ou seja, dada uma linha de argumentação, a conclusão não pode ser falsa quando as premissas são verdadeiras. Por exemplo:

(Premissa 1) $\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(xy = 1))$

(Premissa 2) $3 \neq 0$

(Conclusão) $\exists y(3y = 1)$

A lógica contemporânea, denominada *lógica matemática*, tem características dedutivas. Hoje, consiste em vários sistemas lógicos e isso graças ao uso de linguagens artificiais, cuja ideia iniciou-se com Leibniz (1646-1716), obtendo uma forma mais completa com os trabalhos de Frege (1848-1925). É impossível pensar a lógica sem linguagens artificiais (Mortari, 2001, pp. 33,34,62).

A lógica *indutiva* estuda os raciocínios indutivos, que são aqueles que apresentam premissas verdadeiras, mas não garantem que as conclusões também o sejam. Podem ser *provavelmente verdadeiras.* Por exemplo:

a)

$$\begin{array}{c} \text{2 é primo.} \\ \text{3 é primo.} \\ \hline \text{4 é primo.} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c} \text{3 é primo.} \\ \text{5 é primo.} \\ \text{7 é primo.} \\ \hline \text{Todos ímpares são primos.} \end{array}$$

c) 31, 331, 3331, ... , 33333331 são primos $\Rightarrow$ 333333331 é primo. Na verdade, esse número não é primo (Singh, p.170).

d)

$$\begin{array}{c} \text{O medicamento X funcionou bem em ratos.} \\ \text{O medicamento X funcionou bem em macacos.} \\ \hline \text{O medicamento X funcionará bem em seres humanos.} \end{array}$$

Ainda que a premissa seja verdadeira, não implica logicamente a conclusão, mesmo que esta seja plausível.

1.2 Histórico

Aristóteles (384-322 a. C.) foi um filósofo grego e discípulo de Platão. Contribuiu grandemente para o desenvolvimento e sistematização da lógica, de modo a se tornar uma disciplina intelectual. Até pouco tempo a lógica aristotélica foi considerada ‘a lógica’. Para uma boa compreensão da vida e obra de Aristóteles, ver Aristóteles (1987).

É importante ressaltar que alguns pensadores já discutiam a validade dos argumentos, antes mesmo de Aristóteles. Na Grécia antiga os sofistas desenvolveram técnicas de retórica. Seus ensinamentos eram as estratégias de argumentação e como um argumento fraco poderia ser transformado em um argumento forte e vice-versa e como refutar um adversário, não se preocupando com as relações que as palavras tinham com as coisas.

Para mais detalhes sobre a história da filosofia, uma boa referência é Kneale and Kneale (1962, apud Coscarelli, 2008)

Surgem, então, as *categorias* (parte do *Organon*, que é um conjunto de tratados de lógica, escritos por Aristóteles) que irão classificar o ser: *substância,* que é *o ser* ou um *acidente*, que é um modo de ser (hoje: *elementos* e *predicados*).

Segundo Aristóteles, os acidentes podem representar: uma *quantidade*, uma *qualidade*, uma *relação*, um *lugar* (*onde*), um *tempo* (*quando*), uma *posição*, um *estado*, uma *ação* ou então uma *paixão*. As *categorias* influenciaram bastante o desenvolvimento da lógica. Outra distinção fundamental do ser é: *em ato* (já existe) e a virtualidade, *a potência* (que pode ser). Segundo a teoria aristotélica, a passagem da potência para o ato é o movimento. Esses assuntos já eram discutidos no século VI a.C., mas foi Aristóteles, no século IV, que reformulou a noção de ser, em sua obra as categorias. Podemos dizer que potência e ato têm, respectivamente, o sentido de "é possível" e "é necessário". A partir daí, surge com Aristóteles a Lógica Modal, tratando desses conceitos, como veremos no capítulo 4, após tratarmos da Lógica Proposicional Clássica e do Cálculo de Predicados.

A lógica, segundo Aristóteles, não seria parte da ciência e da Filosofia, mas apenas uma ferramenta, um instrumento (*organon*). Na sistematização das regras lógicas, Aristóteles dedicou-se à análise da linguagem corrente, sendo necessário o estudo dos sentidos das palavras empregadas nas discussões, a fim de se evitar equívocos, pois, além das falácias, existia também o problema dos homônimos e sinônimos, de modo que as frases poderiam ser entendidas de mais de uma maneira.

Os megáricos e os estoicos contribuíram para o desenvolvimento da lógica proposicional (como é conhecida hoje).

Na Idade Média apareceram trabalhos sobre lógica. O lógico Pedro Abelardo (1079-1142) forneceu contribuições originais para a lógica aristotélica. Seus trabalhos sobre esse assunto podem ser encontrados em sua obra *Dialectica*. Também escreveu noções básicas de teoria modal. Leibniz, Hume e Kant foram pensadores da Idade Moderna, cujas ideias sobre conceitos modais contribuíram para o desenvolvimento formal da lógica modal, no século XX (Gorsky, 2008, pp.12-15).

Gottlob Frege (1848-1925) e Bertrand Russel (1872-1970), filósofos e matemáticos, perceberam e mostraram que o silogismo de Aristóteles não era satisfatório para resolver muitos problemas da lógica. As sentenças (apresentadas por Aristóteles) 'Sócrates é um homem' e 'Todo homem é mortal' são um exemplo disso. Na primeira, o sujeito é particular e a palavra Sócrates não poderia ser predicado em nenhuma sentença, pois denota uma pessoa específica. Na segunda sentença, o sujeito é universal e poderia ser predicado em alguma sentença. Embora tenha notado isso, Aristóteles não achou que seria necessário distingui-las, pois, nesse problema, somente o segundo tipo faz parte do silogismo (é uma das proposições categóricas), mesmo que a primeira tenha sido importante na análise do problema. Mas, admitiu que os dois tipos de sujeito são da ordem da substância. Assim, a substância pode ser de dois tipos: individuais e universais (Coscarelli, 2008, p.29).

1.3 Silogismos

Consideraremos argumento como: um conjunto com pelo menos uma premissa e apenas uma conclusão. É preciso que exista relação entre as premissas para que de fato seja um argumento. Silogismo é um tipo especial de argumento, composto de duas premissas iniciais e uma conclusão. Então, o argumento seguinte é um silogismo.

$$\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(xy = 1))$$

$$3 \neq 0$$

$$\exists y(3y = 1)$$

A teoria do silogismo é considerada como o primeiro passo no desenvolvimento da lógica e um dos primeiros sistemas dedutivos já propostos.

As sentenças declarativas ou *proposições* aceitam somente os valores verdadeiro (**V**) ou falso (**F**). Uma sentença do tipo: $x+3=5$ pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do contexto. Para algum valor de x, como 2, será verdadeira; para outros, não. O mesmo acontece com a sentença $x+y > 5$. Também não é uma proposição, pois depende dos valores de x e y. As proposições abertas, como mencionamos, podem ser transformadas em proposições. Basta usarmos os quantificadores universal ($\forall$) ou existencial ($\exists$). Por exemplo, para transformarmos a sentença aberta $x+3=5$ em proposição, podemos escrever assim: $\exists x \in \mathbb{N}$, $x+3=5$.

Segundo a lógica formal aristotélica há dois princípios fundamentais para a análise da veracidade de uma sentença. Temos o *Princípio do terceiro excluído*, que garante que uma sentença deve ser verdadeira ou falsa (ou ela própria é verdadeira ou a sua negação é verdadeira) e o *Princípio da não contradição,* que assegura que uma sentença não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Aristóteles chamou de contraditórias a afirmação universal $\forall x P(x)$ e a negação particular $\exists x \neg P(x)$, pois uma é negação da outra. Da mesma forma, a negação universal $\forall x \neg P(x)$ e a afirmação particular $\exists x P(x)$ são contraditórias. A afirmação universal e a negação universal são chamadas de contrárias. Não podem, simultaneamente, serem verdadeiras, mas podem ser falsas ao mesmo tempo. A afirmação particular e a negação particular podem ser verdadeiras, simultaneamente, mas não podem ser falsas simultaneamente. São chamadas de subcontrárias. A afirmação particular é subalterna da afirmação universal. Se a afirmação universal é verdadeira, então a afirmação particular também é. A negação particular é subalterna da negação universal. Se a negação universal é verdadeira, então a negação particular também é.

2

LINGUAGENS

2.1 Histórico

No século XVII, ao estudar a lógica aristotélica, Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716) teve ideia de criar um alfabeto dos pensamentos humanos. A intenção era criar uma linguagem artificial que representasse a estrutura dos pensamentos do homem. Tinha interesse em criar um sistema universal de raciocínio, aplicável em toda área da ciência. É importante lembrarmos também, que apesar de Leibniz não ter teorizado essas ideias, aperfeiçoou uma máquina mecânica de somar e subtrair a qual usava o sistema de numeração binário, onde os números são representados como sequências de 1s e 0s (Berlinghoff; Gouvêa, 2010, pp.237,238). Seus trabalhos contribuíram para o desenvolvimento da Lógica Matemática e para a linguagem moderna para computadores.

A linguagem é um sistema de comunicação formada por símbolos ou sinais, com suas regras de combinação. O homem a utiliza para representar suas ideias e pensamentos. Pode ser visual, a qual é formada por símbolos ou sinais e formas (palavras, linguagem de sinais como LIBRAS e Braille) ou falada.

A língua materna (por exemplo, o português) é uma *linguagem natural*. As linguagens que permitem a transmissão de informações do ser humano a uma máquina são chamadas de *linguagens artificiais.*

Segundo o linguista Chomsky (1957, apud Mortari, 2001, p.31), uma linguagem pode ser definida como um *"conjunto finito ou infinito de sentenças, cada uma de comprimento finito e formada a partir de um conjunto finito de símbolos".*

Os símbolos indivisíveis da linguagem são também chamados de *átomos*. A partir destes, formamos as sentenças ou fórmulas.

Por exemplo, vamos utilizar o símbolo Σ para representar o conjunto de letras ou símbolos de uma linguagem e $\Sigma^* \overset{def}{=} \bigcup_{n \in N} \Sigma^n$ para representar o conjunto das sequências finitas de letras chamadas "palavras" mesmo se incluírem o espaço em branco ou outros sinais. Considere, também, que n seja o comprimento da *palavra* que é elemento de Σ^n e $L \subseteq \Sigma^*$, uma linguagem (conjunto específico de palavras) definida sobre Σ. Dado o alfabeto $\Sigma = \{1, 2, a\}$, quais são as palavras que podemos formar de comprimento 1, 2 e 3, a partir deste alfabeto?

Vejamos:

Comprimento 1: $\Sigma^1 = \{1, 2, a\}$.

Comprimento 2: $\Sigma^2 = \{11, 12, 1a, 21, 22, 2a, a1, a2, aa\}$

Comprimento 3: $\Sigma^3 = \{111, 112, 11a, 222, 221, 22a, ..., aaa\}$. Esse conjunto contém 27 palavras, pois, $3^3 = 27$.

Percebemos que: (quantidade de palavras de comprimento n) = (quantidade de símbolos do conjunto $\Sigma)^n$.

A menor linguagem definida sobre Σ é a linguagem vazia. Ela é diferente de $\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$, onde ε é a palavra vazia, formada por uma quantidade nula de símbolos.

Agora, vamos escrever uma linguagem L definida sobre $\Sigma = \{1, 2, a\}$, com a propriedade: "As palavras têm comprimento 2, com pelo menos um dos símbolos 1 e 2".

Desse modo, $L = \{11, 12, 1a, 21, 22, 2a, a1, a2\}$.

Nesse exemplo, já começamos a mencionar as regras de combinação dos símbolos para a construção da linguagem, ainda que de maneira bem simples.

A parte da Gramática que se ocupa da estrutura da linguagem é a *sintaxe*, ou seja, estuda a forma com que ocorre a combinação dos símbolos utilizados, independentemente dos significados. De um modo geral, as regras gramaticais são regras sintáticas.

O ramo da linguística que se ocupa do sentido ou significado das palavras (ou expressões linguísticas) é a *semântica*.

Veja mais alguns conceitos de linguagens em Ramos *et al* (2009).

2.2 Linguagens Artificiais (Formais)

A linguagem artificial facilita o estudo da lógica, pois substitui palavras por símbolos e utiliza regras sintáticas precisas.

Assim, com essa linguagem, Leibniz e seus discípulos acreditavam que tudo poderia ser descoberto e muitos problemas resolvidos.

No século XIX, George Boole apresenta um *cálculo lógico,* conhecido como *Álgebra booleana*, o qual contém um número infinito de formas válidas de argumento. Essa abordagem é a base dos sistemas de lógica de computadores. Augustus De Morgan (1806-1871), percebendo que a lógica e a matemática não poderiam caminhar separadas, muito contribuiu para aproximá-las, ou seja, tornar a lógica mais matemática (Berlinghoff , Gouvêa, 2010, p.238). Mas, foi somente em 1879 que Frege apresentou uma lógica simbólica ou matemática. Com a publicação da *Conceitografia*, Frege tinha interesse em sistematizar o raciocínio matemático e apresentar o que é uma demonstração matemática precisa. Naquela época, os matemáticos deixavam de demonstrar certos teoremas em suas demonstrações, de modo que estas não ficavam precisas (Mortari, 2001, p.29). Partindo de regras elementares, formalizou as demonstrações matemáticas. O resultado desse trabalho é o cálculo lógico denominado *cálculo de predicados,* cuja linguagem é constituída de *constantes*, *variáveis*, *operadores*, *símbolos relacionais*, *quantificadores* e *conectivos*.

2.3 Variáveis individuais e constantes

Na matemática*, variáveis* são letras que aparecem em uma sentença e podem ser substituídas por expressões ou valores pertencentes ao *domínio* de variação das mesmas.

Indivíduos são os sujeitos que pertencem a determinado domínio (ou universo do discurso). Podem ser objetos, pessoas, números, figuras geométricas, símbolos, etc.

Utilizaremos as letras $x, y, z, \ldots, x_1, y_1, z_1, \ldots$ para indicar variáveis e as letras $a, b, c, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots$, para indicar constantes, as quais designam indivíduos específicos. O uso de subscritos nos permite indicar um conjunto infinito de variáveis e constantes individuais.

2.4 Sintaxe do Cálculo (ou lógica) Proposicional

O conjunto dos símbolos do cálculo proposicional é $\Sigma = \{A, B, C, \ldots, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, (\ ,\ )\}$. As letras A, B, C, ... são letras sentenciais ou símbolos de predicado de aridade zero

Podemos formar fórmulas com estes símbolos, obedecendo à gramática da lógica proposicional. Os símbolos: $\wedge$(conjunção), $\vee$(disjunção), $\rightarrow$(implicação), $\leftrightarrow$(equivalência) e $\neg$(negação) são *conectivos lógicos* e os parênteses são *símbolos auxiliares*. Uma *expressão* do cálculo proposicional é uma sequência finita de elementos desse conjunto. Os *axiomas ou leis básicas* são expressões bem formadas da linguagem, que chamamos de *fórmulas*. Por exemplo: A, B, $A \vee B$, $C \leftrightarrow D$, $\neg(P \wedge Q)$, etc.

A linguagem proposicional é uma linguagem considerada um *subconjunto* da linguagem do cálculo de predicados. Sendo assim, entraremos em detalhes a respeito dessas linguagens na próxima seção. Antes, recomendamos uma leitura de Alves (2013). Nessa Tese de Mestrado, o cálculo proposicional é tratado de maneira bem acessível, de modo que o professor possa trabalhar com seus alunos no Ensino Fundamental e Médio, propondo algumas atividades para se aplicar na sala de aula. Uma sugestão para mais detalhes da lógica proposicional e de predicados é o texto de Mendelson (1997).

2.5 Predicados

Consideraremos predicado como algo que se diz a respeito do indivíduo.

Usaremos as letras maiúsculas A, B, C,..., A_1, B_1, C_1 ,...para indicar *constantes* ou *símbolos* de predicado. Na lógica *proposicional* são usados apenas símbolos de predicados zero-ário ou aridade zero, operadores e parênteses.

. A aridade ou o grau de um símbolo de predicado é um número natural que representa o número de indivíduos aos quais se aplica esse símbolo de predicado.

Predicado unário (aridade um) consiste em um símbolo de predicado seguido de *um* termo (termo representa indivíduos); predicado binário de *dois* termos, e assim por diante. Se tivermos o símbolo P representando a propriedade 'x é um número par ' e t representando 4, a sentença '4 é par' pode ser escrita assim: Pt . P é um exemplo de predicado unário.

Um predicado binário (ou *relação* binária) pode ser representado por meio de um conjunto de pares ordenados. Exemplo: Se o símbolo M representar a relação 'x é maior do que y' e a e b denotarem, respectivamente, 5 e 3, teremos Mab, ou seja, 5 > 3.

Temos, também, outros exemplos simples de relações que aparecem a todo o momento nos ensinos Fundamental e Médio. Vejamos:

x é positivo.

P é incidente em r.

$x = y$

$x^2 > 0$.

ABC ~ A'B'C'.

Dada uma relação binária R sobre um conjunto A e x, y e z elementos de A, temos que uma relação de x com y pode ser expressa por Rxy ou xRy. A relação é dita *simétrica* se xRy implica yRx; *reflexiva* se sempre xRx; *transitiva* se xRy e yRz simultaneamente implicam que xRz. A *relação de equivalência* é quando ocorrem, ao mesmo tempo, as 3 propriedades acima.

2.6 Funções e Operações

Uma *função* é um tipo particular de relação, em que cada elemento do domínio está associado a exatamente um único elemento do contradomínio. Por exemplo, se f é uma função de A em B então pode ser definida como uma relação R entre os conjuntos A (domínio) e B (contradomínio), de modo que $xRy \Leftrightarrow y = f(x)$.

Essa função denota-se por f : A$\rightarrow$B

Funções representam operações sobre os elementos de determinado domínio. As operações (soma, multiplicação, oposto, etc.) também são funções. Por exemplo, + **:** $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$.

Outro exemplo bem conhecido: A regra que associa a cada número natural n seu sucessor $n+1$ define uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $s(n) = n+1$.

2.7 Sintaxe do Cálculo de Predicados

Definição 2.7 Uma *linguagem de primeira ordem* consiste em:

(a) Um conjunto de variáveis individuais;

(b) Um conjunto enumerável de constantes individuais;

(c) Um conjunto de símbolos de predicado cada um com sua "aridade" especificada;

(d) Um conjunto de símbolos funcionais ou operações, cada um com sua "aridade" especificada;

(e) Quantificadores (existencial '$\exists$' e universal '$\forall$');

(f) Conectivos: negação ($\neg$), *conjunção* ($\wedge$), *disjunção* ($\vee$), *implicação* ($\rightarrow$) e equivalência ($\leftrightarrow$).

(g) Símbolos auxiliares (parênteses).

Os conectivos em (f) atuam sobre proposições, produzindo proposições (Oliveira, 2010, pp. 18,19). Exemplos: Se α e β são proposições, também o são:

(1) $\neg\alpha$ (lê-se: "**não** α")

O conectivo de negação é *unário*, pois é aplicado a *uma* fórmula ou sentença apenas, formando uma segunda. Esse conectivo é uma *função de verdade*, ou seja: se uma fórmula α é verdadeira, então $\neg\alpha$ é falsa; se α é falsa, então $\neg\alpha$ é verdadeira.

(2) $\alpha \wedge \beta$ (lê-se: "α **e** β ")

(3) $\alpha \vee \beta$ (lê-se: "α **ou** β")

(4) $\alpha \rightarrow \beta$ (lê-se: "**Se** , α **então** β " ou "α **implica** β").

O primeiro componente (α) da fórmula (4) é o *antecedente* e o segundo, o *consequente* (β). Além disso, α é condição **suficiente** para β e β é condição necessária para α (Oliveira, 2010, p. 19). Por exemplo:

Se $1+2+...+n = \dfrac{n.(n+1)}{2}$, **então** $1+2+...+n+(n+1) = [\dfrac{(n+1).(n+2)}{2}]$.

(5) $\alpha \leftrightarrow \beta$ ("α **se e somente se** β" ou "α **é equivalente a** β"). Por exemplo, 'x é *par, se e somente se, 2 divide* x'.

Os conectivos apresentados em (2), (3), (4) e (5) também são funções de verdade. Desse modo, é possível obter a valoração de uma fórmula, conhecendo-se o valor de suas fórmulas constituintes.

O símbolo de equivalência pode ser *definido* como uma implicação nas duas direções, ou seja, $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$. Dizemos que α é condição **necessária e suficiente** para β.

Com exceção do conectivo de negação, os outros apresentados acima são *binários.* São aplicados a *duas* fórmulas, gerando uma terceira fórmula. O uso de parênteses será usado sempre que necessário, para evitar ambiguidades quando envolverem os conectivos binários.

Note que $+$, $-$ e $\times$ são *símbolos funcionais* e não símbolos lógicos.

Os símbolos $\Leftrightarrow$ e $\Rightarrow$ são chamados de *símbolos do discurso* (só abreviam o português, no nosso caso). Abreviam, respectivamente, "se e somente se" e "se...,então").

(1º Exemplo) Considere um circuito elétrico com dois interruptores (int. 1 e int.2) e uma lâmpada, onde os três componentes estão ligados em série. Isso significa que, se existir uma corrente elétrica, esta terá somente um caminho, devendo passar necessariamente pela lâmpada e pelos interruptores. Nos extremos A e B foi

Exemplos de aplicações envolvendo os conectivos $\wedge$ e $\vee$ em circuitos elétricos

aplicada uma tensão adequada ao funcionamento da lâmpada (que está em perfeito estado, assim como os fios condutores). Para que a lâmpada acenda, os interruptores 1 **e** 2 têm de estar fechados. Sejam as proposições P: "O interruptor 1 está fechado" e Q: "O interruptor 2 está fechado". Também, não só podemos atribuir, como veremos que os valores **V** e **F** (calculados para $P \wedge Q$) coincidem, respectivamente, com "lâmpada acesa" e "lâmpada apagada". Antes de apresentarmos uma tabela com os cálculos envolvendo as posições dos interruptores, vejamos o esquema desse circuito:

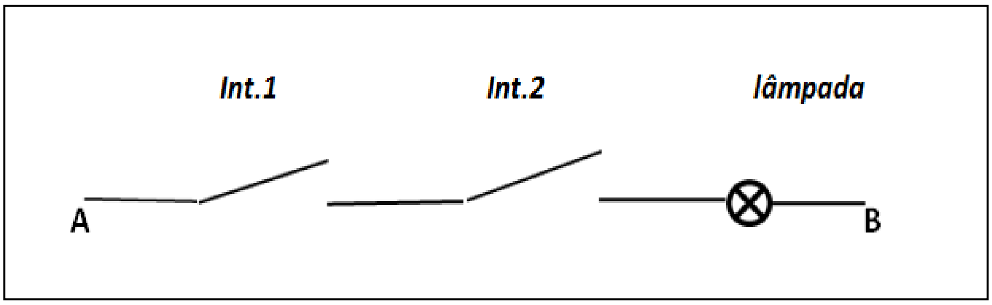


Figura 2.7: Interruptores ligados em série. (Os interruptores no desenho estão abertos).

Primeiramente, um interruptor é um dispositivo que pode assumir duas posições ou estados: *aberto* ou *fechado.* Quando ligado num trecho do circuito, determinará se a corrente passará ou não naquele trecho. Se estiver fechado a corrente passará por ele, caso contrário, não.

Representemos, agora, os possíveis estados dos interruptores na tabela seguinte, com os valores calculados e a situação da lâmpada (acesa ou apagada).

Sejam as proposições P: "O interruptor 1 está fechado" e Q : "O interruptor 2 está fechado". Assim, temos:

P	Q	$P \wedge Q$	"Situação da lâmpada"
V	***V***	***V***	**Acesa**
V	***F***	***F***	**Apagada**
F	***V***	***F***	**Apagada**
F	***F***	***F***	**Apagada**

Tabela 2.7: Resultados das possíveis situações da lâmpada, de acordo com as posições dos interruptores.

Essa situação nos mostra que é necessário que os dois interruptores estejam ligados ao mesmo tempo para que haja passagem da corrente elétrica e a lâmpada se acenda.

(2º Exemplo) Apresentamos, esquematicamente, um circuito elétrico com 2 interruptores (3 e 4) ligados em paralelo, onde os dois estão em série com uma lâmpada. Nesse caso, para que a lâmpada se acenda, dado que está em perfeitas condições e submetida à tensão para a qual foi projetada, basta que, ou o interruptor 3 ou o 4 esteja ligado.

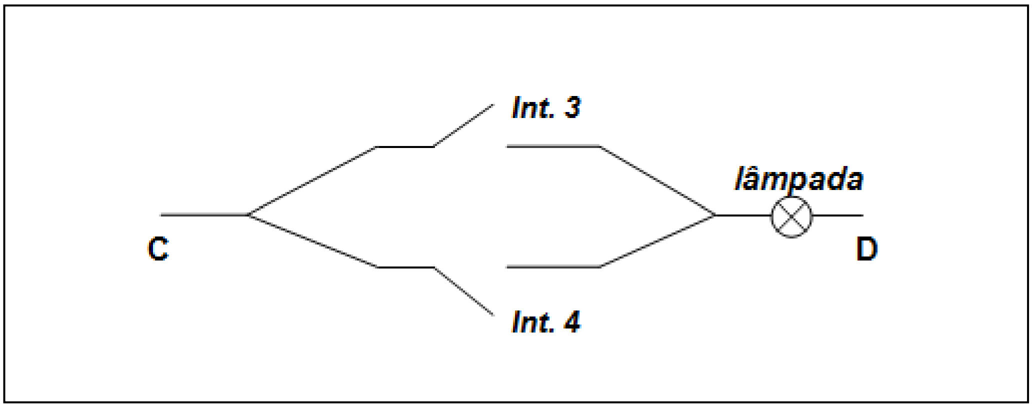


Figura 2.8 Interruptores ligados em paralelo. As posições dos interruptores indicam que estão abertos.

Na tabela seguinte as proposições R e S representam, respectivamente, "O interruptor 3 está fechado" e "O interruptor 4 está fechado". Usamos as valorações ***V*** para “interruptor fechado” e “lâmpada acesa” e ***F*** para “interruptor aberto” e “lâmpada apagada”.

R	S	$R \vee S$	“Situação da lâmpada”
V	**V**	**V**	**Acesa**
V	**F**	**V**	**Acesa**
F	**V**	**V**	**Acesa**
F	**F**	**F**	**Apagada**

Tabela 2.8 Resultados das possíveis situações da lâmpada de acordo com os estados dos interruptores.

Concluímos que a lâmpada não acenderá somente se os interruptores estiverem no estado aberto ao mesmo tempo. Sendo assim, pelo menos um deles deve estar ligado para acender a lâmpada.

Em 1937, o matemático americano Claude E. Shannon apresentou uma tese de mestrado no MIT (Massachusetts Institute of Technology) sobre circuitos de chaves e relês e suas relações com a lógica matemática. A base desse trabalho é o sistema chamado de álgebra booleana, onde os processos lógicos fundamentais são expressos em termos de 1s e 0s. As aplicações da álgebra booleana contribuíram para a automatização da produção industrial, pois esse sistema tornou-se a “*chave teórica para todos os circuitos pensantes*” (Berlinghoff , Gouvêa, 2010, p.232)

Nos exemplos dos circuitos elétricos apresentados, poderíamos ter usado, em vez de “**F** e **V**“, respectivamente, “**0** e **1**” . Utiliza-se, em alguns interruptores residenciais ou chaves de equipamentos elétricos e eletrônicos: “1” para “ligado” e “0” para “desligado”.

Daghlian (1995) mostra exemplos e vários exercícios de aplicações de lógica e álgebra booleana na eletrônica e computação. Outra sugestão de leitura é o texto de Castrucci (1975).

2.8 Termos

Definição 2.8 Numa linguagem de primeira ordem *L*, t é um termo se for obtido a partir das seguintes regras, aplicadas um número finito de vezes:

1) t é uma *constante* ou uma *variável* ou

2) $t = f(t_1,..., t_n)$, onde $t_1,..., t_n$ são termos e f é um símbolo funcional de aridade n, onde $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos escolares: x, y, 1, 25, $x-(y\times 25)$. Este foi formado a partir de x e $y\times 25$ (e o uso dos parênteses).

2.9 Fórmulas atômicas e gerais.

Definição 2.9 Uma fórmula representa uma proposição numa certa linguagem formal. É uma expressão bem formada da linguagem.

No cálculo proposicional temos dois tipos de fórmulas: *atômicas*, que serão representadas pelas letras sentenciais A, B, C,... e *gerais*, tais como $A \wedge B$, $\neg(A \rightarrow D)$, $(\neg A \wedge B) \rightarrow \neg A$,etc.

Uma fórmula *atômica* é a mais simples, pois ela é indivisível.

Podemos usar letras gregas minúsculas para representar fórmulas. Por exemplo, substituir '$A \wedge B$' por 'α'.

2.10 Linguagem de primeira ordem

Definição 2.10 Numa linguagem *L* de primeira ordem:

(a) $P(t_1,..., t_n)$ é uma *fórmula atômica* se, e somente se, P é um símbolo de predicado n-ário, $t_1,..., t_n$ são termos e $n \in \mathbb{N}$. Frequentemente, usa-se o símbolo de igualdade: $t_1 = t_2$ (é uma fórmula atômica).

(b) Se α e β *são* fórmulas, então $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são *fórmulas;*

(c) Se x é uma variável que ocorre numa fórmula α, então $\exists x\alpha$ e $\forall x\alpha$ são *fórmulas* e α é o escopo dos quantificadores; qualquer ocorrência de x em α é dita "ligada";

(d) Somente são fórmulas, em *L*, as expressões obtidas de (a), (b), (c) em um número finito de passos.

Exemplos: Se $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, são fórmulas, então α e β são *subfórmulas imediatas*. E α é *subfórmula* imediata das fórmulas $\exists x\alpha$ e $\forall x\alpha$.

No cálculo de predicados, o símbolo de predicado é colocado antes da constante ou da variável. Exemplo: Seja P a propriedade 'x é um número primo', ou seja, $\exists xPx$ e c constante para '2'. Assim, temos P (o símbolo de predicado é escrito antes da constante individual). A *expressão* Pc é uma *fórmula atômica*, mas, se b

representar ‘4’, então, teremos $\neg Pb$ verdadeira, pois 4 não é primo. A fórmula $\neg Pb$ não é atômica, pois apresenta o operador de negação. A fórmula atômica Pb é uma subfórmula imediata de $\neg Pb$.

Quando introduzimos os conectivos (obedecendo a sintaxe do cálculo de predicados): negação ($\neg$), conjunção ($\wedge$), disjunção ($\vee$), implicação ($\rightarrow$) ou equivalência ($\leftrightarrow$), teremos outras fórmulas. Exemplo: $(\exists xFx \wedge Gb) \rightarrow Qc$.

A fórmula $\exists xPx$ tem o quantificador agindo sobre a variável. Nesse caso, temos uma *fórmula geral*. As ocorrências de x *são ligadas* nessa fórmula. Por exemplo: $\exists x(2x-6=0)$ ou $\exists x(((x\times x)+x)+1)=0)$.

Na fórmula $(\forall x\forall yPxy \wedge Qy)$ temos uma ocorrência ligada de x e uma ocorrência ligada de y na primeira parte da fórmula. Na segunda parte, a ocorrência de y é chamada *livre*, pois o quantificador $\forall y$ não age sobre a fórmula Qy.

Exemplo mais geral: $\forall a\forall b\forall c[\neg(a=0)\wedge(b\times b>4\times a\times c)\rightarrow\exists x(a\times x\times x+b\times x+c=0)]$.

Parece que Leibniz tinha razão e que é possível escrever tudo em símbolos segundo regras bem rígidas.

Deve-se, também a Leibniz, o uso (ou ideia) de quantificadores.

3

PROCEDIMENTOS DE PROVA

3.1 Conceitos de semântica e procedimentos de prova

Primeiramente, quando falarmos de uma *lógica*, queremos dizer um *sistema de lógica*. Como mencionamos na seção 1.2, a lógica aristotélica foi considerada única (“a Lógica”) durante muito tempo. Hoje, temos muitos sistemas lógicos, cada um com suas regras de argumentação. O mesmo ocorreu com a Geometria Euclideana, que foi considerada “a Geometria” durante muito tempo. Atualmente, a Geometria não lida apenas com o sistema euclideano. Existem outras geometrias (Coscarelli, 2008, pp.13,14).

A lógica proposicional pode ser interpretada como uma parte (ainda que muito pequena) do cálculo de predicados. A linguagem proposicional não foi suficiente para representar muitas formas válidas de argumento. Havia a necessidade de uma lógica que permitisse demonstrações mais rigorosas e precisas de teoremas. O cálculo de predicados mostrou ser mais eficiente em relação ao proposicional, devido ao uso de variáveis individuais, constantes e quantificadores (Oliveira, 2010, pp.168,169).

No capítulo 2, falamos sobre a sintaxe das linguagens proposicional e de predicados, ainda que sucintamente. Veremos, agora, conceitos de semântica nessas linguagens artificiais.

Sabemos que a *validade* de um argumento é uma propriedade de raciocínios (relaciona premissas com a conclusão).

Podemos dizer que uma proposição (ou sentença) é verdadeira ou falsa, se soubermos o significado das palavras e da “*realidade”* (Por exemplo, a realidade matemática dada por uma Teoria de Conjuntos). Portanto, *verdade* é uma relação entre proposições e “realidade”.

A semântica se ocupa do significado das expressões linguísticas. Interpretar uma fórmula é dar a ela, e as suas fórmulas atômicas, algum tipo de significado (por exemplo: verdadeiro ou falso).

Uma abordagem da lógica, em termos de sintaxe, não está relacionada somente com símbolos e regras de formação, mas também com demonstrações de fórmulas sem envolver a semântica (seção 3.6).

Veja a noção de semântica tarskiana no texto de Oliveira (2010, p.168).

3.2 Valorações e tabelas - verdade

A forma mais simples de atribuir-se uma semântica para o cálculo proposicional é utilizando uma função de valoração *v* definida sobre o conjunto de todas as fórmulas de uma linguagem proposicional. Essa função atribui, a cada variável proposicional dessa linguagem, um dos valores de verdade do conjunto **{V,F}.** Sendo assim:

v: $\{P_1, P_2, ...\} \rightarrow$ **{V, F}**

Essa atribuição pode ser arbitrária, mas determina as valorações das fórmulas. Assim, o valor de uma fórmula pode ser determinado a partir dos valores de seus componentes (fórmulas atômicas).

Sejam α e β fórmulas dadas, então:

I. *v*($\neg\alpha$) = **V** $\Leftrightarrow$ *v*(α) = **F**.
II. *v*($\alpha \wedge \beta$) = **V** $\Leftrightarrow$ *v*(α) = *v*(β) = **V**.
III. *v*($\alpha \vee \beta$) = **V** $\Leftrightarrow$ *v*(α) = **V** ou *v*(β) = **V**.
IV. *v*($\alpha \vee \beta$) = **F** $\Leftrightarrow$ *v*(α) = *v*(β) = **F**.
V. *v*($\alpha \rightarrow \beta$) = **V** $\Leftrightarrow$ *v*(α) = **F** ou *v*(β) = **V**.
VI. *v*($\alpha \rightarrow \beta$) = **F** $\Leftrightarrow$ *v*(α) = **V** e *v*(β) = **F**.
VII. *v*($\alpha \leftrightarrow \beta$) = **V** $\Leftrightarrow$ *v*(α) = *v*(β) .

A tabela seguinte resume todas as combinações possíveis de valores:

P	$\neg P$	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

Por exemplo: Dadas as valorações $v(P)$ = **V** e $v(Q)$ = **F**, obtenha o valor da fórmula $(P \lor Q) \to \neg Q$:

$$\underbrace{\underbrace{(\underset{\mathbf{V}}{P} \lor \underset{\mathbf{F}}{Q})}_{\mathbf{V}} \to \underbrace{\neg \underset{\mathbf{F}}{Q}}_{\mathbf{V}}}_{\mathbf{V}}$$

Portanto, obtemos o valor $v(((P \lor Q) \to \neg Q))$ = **V** .

A tabela-verdade nos permite obter a validade de muitos argumentos. Através dela, podemos obter as valorações em todos os casos possíveis, que são em número 2^n, onde n é o número de fórmulas atômicas envolvidas.

A tabela-verdade para a fórmula $(P \lor Q) \to \neg Q$ fica assim:

P	Q	$\neg Q$	$P \lor Q$	$(P \lor Q) \to \neg Q$
V	**V**	**F**	**V**	**F**
V	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**V**

Concluímos que $(P \lor Q) \to \neg Q$ não é sempre verdadeira, de modo que $P \lor Q$ não implica $\neg Q$. Isto é, $\neg Q$ não é consequência necessária de $P \lor Q$ ou não “implica tautologicamente” (seção 3.4).

3.3 Tautologias, contradições e contingências.

As fórmulas nas quais todas as valorações (v) são *sempre verdadeiras*, independentemente dos valores das fórmulas atômicas que nelas ocorrem, são denominadas *tautologias*. Aquelas cujas valorações são *sempre falsas*, quaisquer que sejam as valorações das suas fórmulas atômicas, são denominadas *contradições*. A negação de uma tautologia é uma contradição. As fórmulas que apresentam pelo menos uma valoração **V** e pelo menos uma valoração **F** são chamadas de *contingências.*

Exemplos:

(a) $(Q \wedge \neg Q)$ é uma contradição.

Q	$\neg Q$	$(Q \wedge \neg Q)$
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**

Concluímos que o Princípio da não contradição $\neg(Q \wedge \neg Q)$ é uma tautologia.

(b) $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ é uma tautologia, conhecida como *Modus ponens*.

(c)

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \wedge (P \rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**F**	**V**

Desse modo, se valem P e $(P \rightarrow Q)$, então vale Q.

(b) $\neg((P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q)$ é uma contradição, pois é a negação da tautologia apresentada anteriormente.

(d) A fórmula $(P \vee Q) \rightarrow \neg Q$ é uma contingência (veja a tabela - verdade em 3.2).

As três tautologias (princípios fundamentais da lógica), mostradas a seguir, já eram reconhecidas por Aristóteles:

(a) *Princípio da identidade*: $A \rightarrow A$.

(b) *Princípio da não contradição:* $\neg(A \wedge \neg A)$

(c) *Princípio do terceiro excluído*: $A \vee \neg A$

Em vez de letras sentenciais, poderíamos ter usado nas tautologias acima as letras gregas α, β ou γ para representar quaisquer fórmulas e obter as mesmas conclusões.

Vejamos, na tabela abaixo, outra tautologia muito importante: *Silogismo hipotético.*

α	β	γ	$\alpha\to\beta$	$\beta\to\gamma$	$\alpha\to\gamma$	$(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\gamma)$	$((\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma)$
V	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**	**V**

3.4 Consequência e equivalência tautológica

Dadas as fórmulas α e β, dizemos que β é uma consequência tautológica de α (ou α implica tautologicamente β) se para toda valoração $v(\alpha)$ = **V** temos $v(\beta)$ = **V**. Simbolicamente $\alpha \models \beta$.

Se Γ é um conjunto de fórmulas, dizemos, também, que: $\Gamma \models \beta$ se, para qualquer valoração *v* de modo que $v(\alpha)$ = **V** para todo $\alpha \in \Gamma$, então $v(\beta)$ = **V**.

Uma fórmula α é *logicamente (ou tautologicamente) equivalente* a uma fórmula β se $v(\alpha) = v(\beta)$, qualquer que seja *v.*

O símbolo $\models$ é usado para abreviar o português. É um símbolo do discurso que substitui '*implica tautologicamente'*.

3.5 Procedimentos de prova por *tableaux* (árvores lógicas ou de *refutação*)

Quando falamos de árvores, em Matemática, imaginamos aquelas utilizadas em Análise Combinatória, no Ensino Médio. É justamente esse tipo de estrutura que utilizaremos aqui. Segundo Ramos et al. (2009, p.641), árvore é um "*tipo especial de grafo, com estrutura hierárquica. Utilizado para representar a estrutura sintática de sentenças em linguagens livres de contexto."*

As tabelas de verdade são ferramentas muito úteis na lógica proposicional. Elas mostram se determinada fórmula é ou não uma tautologia. Tornam-se ineficientes se o número de fórmulas atômicas envolvidas for muito grande. No cálculo de predicados funcionam bem com os operadores, mas não com os quantificadores.

Para uma linguagem de primeira ordem, não é simples analisarmos a validade ou invalidade de muitos argumentos por meio das valorações, como apresentamos até aqui. Precisaremos fazer uma interpretação recorrendo ao conceito de *estrutura*[1]*.* Mas, ainda assim, muitas vezes não temos como verificar todas as estruturas possíveis. Desse modo, precisamos de outros *procedimentos ou sistemas de prova.*

Desde a criação da lógica formal, o método mais usado nas demonstrações matemáticas foi o método axiomático no "estilo de Hilbert" (Costa, 2010, p.11). A lógica de Aristóteles (teoria dos silogismos) foi um dos primeiros sistemas dedutivos e axiomáticos já construídos. No século XX apareceram outros métodos de dedução, como o Sistema de Dedução Natural, desenvolvido por Gerhard Gentzen e Stanaslaw Jáskowski. Esse sistema utiliza *regras de inferência*, substituindo, assim, o uso de axiomas (Costa, 2010, p.15).

Os *tableaux* semânticos são sistemas dedutivos que, até chegarem à forma atual, tiveram a contribuição de Gentzen, Beth e Smullyan. Um *tableau* consiste em uma *árvore* binária de fórmulas valoradas. São utilizados para mostrar se uma fórmula é válida, começando supondo que ***não*** seja. Embora mais eficiente que as tabelas-verdade, esse procedimento têm suas limitações. É um *método de refutação*: se chegarmos a um absurdo com essa suposição, então a suposição inicial estava errada e a fórmula é válida. Caso contrário, a fórmula não é válida e é possível construir uma valoração onde a fórmula é falsa (na lógica proposicional).

O procedimento de prova por tableau consiste em simplificação de fórmulas, *desdobrando* a fórmula a ser examinada em subfórmulas, de modo que a fórmula *processada* não seja mais usada (no caso do cálculo proposicional). Chegando às fórmulas atômicas, tendo utilizado todas as outras fórmulas, observa-se se houve *inconsistência* (contradição). Quando isso acontece, dizemos que o ramo *fecha-se*. Acontecendo com todos os ramos, concluímos que a fórmula inicial é válida. Se pelo menos um deles ficar aberto, então a fórmula inicial não é válida.

[1] No capítulo 4 mostraremos um tipo de estrutura e de modelo, que permitirá atribuir uma semântica às lógicas modais. No momento, sugerimos uma leitura de Oliveira (2010, pp.169,170) que apresenta uma definição de estrutura no cálculo de predicados de primeira ordem.

3.5.1 Regras para a construção de *tableaux*

Sejam α e β fórmulas dadas, com suas valorações do lado esquerdo (**V** e **F**). Para cada conectivo e quantificador, seguem 2 regras:

(1ª)

$$\frac{\mathbf{V}\ \neg\alpha}{\mathbf{F}\ \alpha} \qquad \frac{\mathbf{F}\ \neg\alpha}{\mathbf{V}\ \alpha}$$

(2ª)

$$\frac{\mathbf{V}\ (\alpha\wedge\beta)}{\begin{array}{c}\mathbf{V}\ \alpha\\ \mathbf{V}\beta\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{F}\ (\alpha\wedge\beta)}{\begin{array}{cc}\swarrow & \searrow\\ \mathbf{F}\alpha & \mathbf{F}\beta\end{array}}$$

É importante observarmos que algumas valorações vêm uma embaixo da outra, como na fórmula valorada **V** $(\alpha\wedge\beta)$, que se ramificou em **V**α e **V**β. Foram colocadas uma embaixo da outra para representar **V** α "e" **V**β. E para a fórmula valorada **F** $(\alpha\wedge\beta)$ temos as ramificações nas fórmulas **F**α e **F**β, colocadas nas mesmas linhas. Esse tipo de ramificação significa **F**α "ou" **F**β. Nas construções de *tableaux*, essas notações são muito comuns. (Oliveira, 2010, p.103).

(3ª)

$$\frac{\mathbf{V}\ (\alpha\vee\beta)}{\begin{array}{cc}\swarrow & \searrow\\ \mathbf{V}\ \alpha & \mathbf{V}\beta\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{F}\ (\alpha\vee\beta)}{\begin{array}{c}\mathbf{F}\ \alpha\\ \mathbf{F}\beta\end{array}}$$

(4ª)

$$\frac{\mathbf{V}\ (\alpha\to\beta)}{\begin{array}{cc}\swarrow & \searrow\\ \mathbf{F}\ \alpha & \mathbf{V}\ \beta\end{array}} \qquad \frac{\mathbf{F}\ (\alpha\to\beta)}{\begin{array}{c}\mathbf{V}\ \alpha\\ \mathbf{F}\ \beta\end{array}}$$

(5ª)

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{V}\ (\alpha \leftrightarrow \beta)} \\ \hline \mathbf{V}\ \alpha & \mathbf{F}\ \alpha \\ | & | \\ \mathbf{V}\ \beta & \mathbf{F}\ \beta \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{F}\ (\alpha \leftrightarrow \beta)} \\ \hline \mathbf{V}\ \alpha & \mathbf{F}\ \alpha \\ | & | \\ \mathbf{F}\ \beta & \mathbf{V}\ \beta \end{array}$$

Seguem as 4 regras para as fórmulas quantificadas:

(1ª)

$$\frac{\mathbf{V}\ \forall x\alpha(x)}{\mathbf{V}\ \alpha(k)}$$

Essa regra significa que podemos substituir todas as ocorrências livres de x em α, por qualquer constante k. A fórmula universal verdadeira **V**$\forall x\alpha(x)$ pode ser utilizada quantas vezes forem necessárias.

(2ª)

$$\frac{\mathbf{F}\ \forall x\alpha(x)}{\mathbf{F}\ \alpha(k)}$$

Nesse caso, podemos substituir todas as ocorrências livres de x em α, contanto que a constante k não tenha aparecido no mesmo ramo em que a fórmula universal falsa **F**$\forall x\alpha(x)$ está agindo. A fórmula **F**$\forall x\alpha(x)$ pode ser usada apenas uma vez. Aqui k representa uma testemunha de que $\neg\forall x\alpha(x)$, ou seja, é um caso de x, como no Ensino Médio.

(3ª)

$$\frac{\mathbf{V}\ \exists x\alpha(x)}{\mathbf{V}\ \alpha(k)}$$

Quando tivermos **V** $\exists x\alpha(x)$ no ramo de um *tableau*, podemos substituir todas as ocorrências livres de *x* em *α* pela constante *k*, se esta não tiver aparecido no ramo onde **V** $\exists x\alpha(x)$ age. Esta só pode ser usada uma vez. Novamente, *k* representa uma testemunha de que $\exists x\alpha(x)$.

(4ª)

$$\frac{\textbf{F}\ \exists x\alpha(x)}{\textbf{F}\ \alpha(k)}$$

A fórmula do existencial falso **F** $\exists xPx$ representa: "ninguém tem a propriedade P". Portanto, podemos utilizar esta última regra quantas vezes for necessária. Basta substituirmos todas as ocorrências livres de x, em α, pela constante k.

1º Exemplo: Verifique se a fórmula $(P \wedge Q) \rightarrow Q$ é válida.

Primeiramente, suponha que $(P \wedge Q) \rightarrow Q$ é falsa. Verificando a tabela-verdade do conectivo $\rightarrow$, então $P \wedge Q$ deve ser verdadeira, enquanto Q é falsa. De $P \wedge Q$ verdadeira, devemos ter ambos P e Q verdadeiras. Obtivemos valores contraditórios para Q.

2º Exemplo: Verifique se a fórmula $\forall xQx \rightarrow (Qc \wedge Qd)$ é válida.

Suponha que a fórmula $\forall xQx \rightarrow (Qc \wedge Qd)$ é falsa. Por tratar-se de uma implicação, nesse caso $\forall xQx$ deve ser verdadeira, enquanto $(Qc \wedge Qd)$ é falsa. De $(Qc \wedge Qd)$ falsa, obedecendo às *regras de construção de tableaux*, obtivemos na mesma linha Qc, Qd falsas (significam **F**α "ou" **F**β). Usamos a fórmula $\forall xQx$, onde substituímos a varável x por c, obtendo assim, Qc verdadeira. O ramo esquerdo se fechou, pois obtivemos valores contraditórios para Qc. Usando novamente $\forall xQx$, substituímos x por d, no ramo direito e este também se fechou, pois havíamos obtido valor falso para Qd e agora verdadeiro, o que é uma contradição. Chegamos a absurdos nos dois lados. Logo, a fórmula é válida.

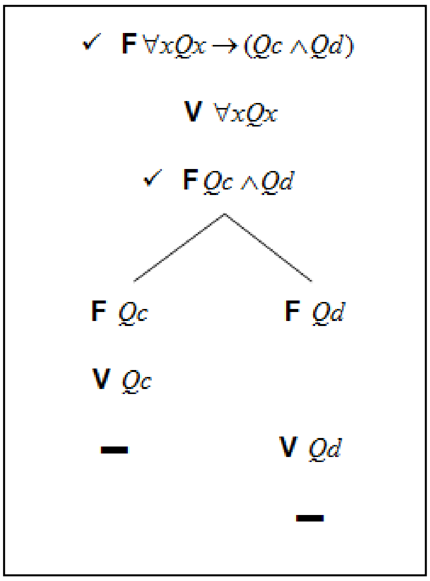
Vamos utilizar os símbolos na construção do *tableau* (no exemplo 2):

✓: Indica que a fórmula foi *usada.* Não pode ser usada novamente.

▬ : Indica que chegamos no final do *ramo* do *tableau*.

V e **F**: Indicam respectivamente, verdadeiro e falso.

Representando na forma de *tableau*, temos:



Os *tableaux* são mais eficientes do que as tabelas-verdade, pois permitem um resultado mais rápido, mas, em algumas situações, devido ao grande número de passos, o processo é muito trabalhoso.

3.6 Dedução natural

O método da dedução natural (ou derivação) utiliza um conjunto de *regras de inferência* às premissas envolvidas, encontrando conclusões intermediárias até chegar à final. A vantagem desse método é não depender da semântica para obter a validade de um determinado argumento.

Apresentamos apenas uma noção de dedução natural. Seria interessante uma leitura de alguns autores como Oliveira (2010), Prawitz (2006) e Mortari (2001), para melhor compreensão, até mesmo para comparar as diferentes notações e maneiras de derivação.

Definição 3.6 Se α é uma fórmula e Γ é um conjunto de fórmulas, dizemos que $\Gamma \vdash \alpha$, se existir uma dedução de α a partir de Γ. Essa dedução é uma sequência finita e ordenada de fórmulas, cada uma sendo ou uma **hipótese** (fórmula de Γ), ou tautologia proposicional, ou obtida das anteriores usando regras de inferência, e a última delas é α.

O símbolo $\vdash$ não é um símbolo lógico. Está sendo utilizado apenas para abreviar o português. Substitui, nesse trabalho, a expressão: ‘prova’.

3.6.1 Regras de inferência

Um número de regras é dito completo se para cada conectivo tivermos duas regras: uma para incluí-lo e outra para excluí-lo.

Na demonstração por dedução natural começamos enumerando as linhas à esquerda das fórmulas. Colocamos as premissas nas primeiras linhas, indicando tratar-se de premissas, à direita.

As linhas logo abaixo das premissas serão completadas à medida que formos aplicando as regras da dedução natural. Essas são as "conclusões intermediárias". Indicamos, à direita de cada linha, a regra e a(s) linha(s) que utilizamos.

Existem outras regras muito importantes, além das apresentadas aqui. Por exemplo: Modus Tollens, Silogismo Hipotético, Contradição, Contraposição, Leis de De Morgan, Dupla Negação, etc. Estas são *regras de inferências derivadas*. Porém, bastam ***Modus Ponens*** e **Generalização**. Assumindo-se o quantificador $\forall$ e os conectivos $\neg$, $\rightarrow$ como primitivos.

Estamos usando a seguinte notação: acima da linha horizontal temos a(s) premissa(s) e abaixo, a conclusão da regra.

(Diretas)

(1) *Modus Ponens (MP) ou Eliminação do condicional*

$$\frac{\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \end{array}}{Q}$$

(2) *Dupla Negação (DN)*

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

(3) *Conjunção (C) ou Introdução da Conjunção (I-$\wedge$)*

$$\frac{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}}{P \wedge Q}$$

(4) *Separação (S) ou Eliminação da Conjunção*

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}$$

(5) *Silogismo Disjuntivo (SD)*

$$\frac{\begin{matrix} P \vee Q \\ \neg P \end{matrix}}{Q} \qquad \frac{\begin{matrix} P \vee Q \\ \neg Q \end{matrix}}{P}$$

(6) *Condicionais para Bi condicionais (CB)*

$$\frac{\begin{matrix} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow P \end{matrix}}{P \leftrightarrow Q}$$

(7) *Bi condicional para condicionais (BC)*

$$\frac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q} \qquad \frac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$$

(8) *Expansão (E)*

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{Q}{P \vee Q}$$

Regras para quantificadores

Sejam α e β *esquemas* de fórmulas da lógica de predicados. Assim, temos:

1ª) Regra para eliminação do quantificador universal (Especialização)

$$\frac{\forall x \alpha(x)}{\alpha(x)}$$

Todas as ocorrências livres de x, em α, serão entendidas como x fixo, mas arbitrário.

2ª) Regra para introdução do quantificador universal (Generalização)

$$\frac{\alpha(x)}{\forall x \alpha(x)}$$

Após cálculos feitos com x arbitrário, mas fixado, conclui-se que o resultado vale para qualquer x.

3ª) Regra

para introdução do quantificador *existencial* ($I-\exists$)

$$\frac{\alpha(k)}{\exists x \alpha(x)}$$

Substituem-se todas as ocorrências de k por x, assumindo-se que x já não ocorre em α. k é uma constante, termo ou variável.

4ª) Regra para eliminação do quantificador existencial ($E-\exists$)

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha(k)\\ \exists x \alpha(x) \to \beta\end{array}}{\beta}$$

Substituem-se todas as ocorrências livres de x, em α, pela constante k, assumindo-se que k não ocorre em β e nem em hipóteses das quais β depende, exceto em $\exists x \alpha(x)$. Concluindo dessa hipótese, alguma fórmula β, na qual a constante k já não ocorre mais, reafirmamos β e descartamos a hipótese.

Também é importante mencionarmos uma regra de inferência conhecida como *Regra da Lógica Proposicional* (RLP):

RLP. $$\frac{\alpha_1 ,..., \alpha_n}{\beta}$$

Nessa regra, se cada uma das fórmulas α_1 ,..., α_n é um teorema e β é consequência tautológica de α_1 ,..., α_n, então, β também é teorema. Pode ser demonstrada assim: Como β é consequência tautológica ou usando o teorema da dedução a seguir, obtemos $\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (... \to \alpha_n \to \beta))...)$ como tautologia e basta usar MP *n vezes.*

No exemplo seguinte, temos o *silogismo hipotético*, que é uma tautologia (ver seção 3.3) muito conhecida:

(1) $\alpha \to \beta$

(2) $\beta \to \gamma$

(3) $\alpha \to \gamma$. Segue de (1) e (2) por silogismo hipotético. Aplicamos a regra da lógica proposicional.

Regras de Inferência hipotéticas

Essas não são regras usadas em deduções, mas a respeito de deduções.

Se a partir de uma fórmula α, que é a hipótese, derivarmos uma fórmula β (com os cuidados devidos em 1ª ordem), então podemos utilizar a fórmula $\alpha \to \beta$ e *descartar* α. Essa regra é conhecida como ***regra de prova condicional*** ou ***teorema da dedução***:

$\alpha \, , \, \Gamma \vdash \beta \;\Leftrightarrow \Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$

Esse teorema é apresentado em Kleene (2002, pp. 112-114).

Temos, também, a ***regra de redução ao absurdo*** **(RAA),** que consiste em supor $\neg\alpha$, quando queremos demonstrar α, ou seja:

$$\Gamma \, , \neg\alpha \;\vdash \bot \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \alpha \, .$$

O símbolo $\bot$ é uma abreviação para $\beta \wedge \neg\beta$ ($\top$ é uma abreviação para $\neg \bot$).

Demonstração da regra RAA:

Pelo teorema da dedução $\Gamma \;\vdash\; \neg\alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)$. Por tabela verdade, temos que $(\neg\alpha \to (\beta \wedge \neg\beta)) \to \alpha$ é uma tautologia.

Os exemplos seguintes estão no formato de prova no “estilo Hilbert”.

Exemplo 1: Sejam α, β, ϕ e γ fórmulas quaisquer da linguagem de predicados. Demonstrar que $\Gamma = \{\alpha \wedge \beta,\ \alpha \to \phi\} \vdash \phi \vee \gamma$.

Demonstração:

(1) $\alpha \wedge \beta$ Hipótese

(2) $\alpha \to \phi$ Hipótese

(3) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$ Tautologia

(4) α Segue de (3) e (1) por MP

(5) ϕ Segue de (2) e (4) por MP

(6) $\phi \to (\phi \vee \gamma)$ Tautologia

(7) $\phi \vee \gamma$ Segue de (6) e (5) por MP.

Percebemos facilmente que o conjunto de fórmulas desse exemplo deduz a fórmula $\phi \wedge \alpha$. A demonstração pode seguir igualmente a que acabamos de fazer, até a linha (5). Na linha (6) teremos a fórmula $\phi \wedge \alpha$ obtida de (5) e (4) pela regra da *introdução da conjunção*. Podemos notar, também, que o mesmo conjunto de fórmulas $\{\alpha \wedge \beta,\ \alpha \to \phi\}$ deduz a fórmula $\phi \vee \delta$, qualquer que seja a fórmula δ da linguagem de predicados. Basta continuarmos usando a regra da *Expansão* aplicada à linha (5) do exemplo1.

Exemplo 2: Vamos demonstrar que $\neg\forall x\beta \vdash \exists x\neg\beta$. (*Regra derivada para quantificadores*)

1. $\neg\forall x\beta$ Hipótese
2. $\neg\exists x\neg\beta$ Hipótese adicional para 6
3. $\neg\beta(k)$ Hipótese adicional para 6
4. $\exists x\neg\beta$ $I-\exists$, aplicado a 3
5. $\exists x\neg\beta \wedge \neg\exists x\neg\beta$ $I-\wedge$, aplicado a 4 e 2
6. $\neg\neg\beta(k)$ *RAA*, aplicado a 5 e 3
7. $\beta(k)$ *Dupla negação*, aplicado a 6
8. $\forall x\beta$ $I-\forall$, aplicado a 7
9. $\forall x\beta \wedge \neg\forall x\beta$ $I-\wedge$, aplicado a 8 e 1
10. $\neg\neg\exists x\neg\beta$ *RAA*, aplicado a 9 e 2
11. $\exists x\neg\beta$ *Dupla negação*, aplicado a 10.

3.6.2 Teoremas da Corretude (ou Correção) e Completude

Teorema da Corretude: Se $\Gamma \vdash \alpha$ então $\Gamma \models \alpha$. Esse é o teorema que justifica o uso da dedução natural.

Assuma $\Gamma \vdash \alpha$ e seja ϕ_1, ϕ_2,... , ϕ_n, uma demonstração de α a partir de Γ (donde $\phi_n = \alpha$). Suponha que todas as fórmulas de Γ sejam válidas. Provaremos que todas as fórmulas ϕ_i também são válidas, obtendo que α é válida, por **indução** em i, ou seja, assumindo que cada ϕ_j com $j < i$ é válida[2]. Há três casos a considerar:

1) Se $\phi_i \in \Gamma$, então ϕ_i é válida.

2) Se ϕ_i é consequência de ϕ_j, ϕ_k por MP, com $j, k < i$, então ϕ_j, ϕ_k são válidas e podemos escrever $\phi_k = \phi_j \rightarrow \phi_i$ (ou então $\phi_j = \phi_k \rightarrow \phi_i$). Pela tabela verdade de $\rightarrow$, sendo ϕ_j e $\phi_j \rightarrow \phi_i$ válidas, também ϕ_i deve ser válida.

3) Se ϕ_i é consequência de ϕ_j por Generalização, com $j < i$, então $\phi_i = \forall x \phi_j(x)$. Este é o caso mais interessante, porque deduz $\forall x \phi_j(x)$ a partir de um caso aparentemente particular $\phi_j(x)$. Porém, note que ϕ_j é válida e ocorre também como fórmula demonstrada pela prova ϕ_1, ϕ_2,... , ϕ_{j-1}, ϕ_j: observando-se as regras para quantificadores, vemos que x foi fixado para os cálculos em alguma ϕ_1, ϕ_2,... , ϕ_{j-1}, mas era **arbitrário**. É o mesmo caso das demonstrações matemáticas do Ensino Médio que começam com "Fixe x", mas como x é qualquer, o resultado demonstrado vale em geral. ■

Teorema da Completude: Se $\Gamma \models \alpha$ então $\Gamma \vdash \alpha$. Esse é um teorema mais complexo, que não pode ser demonstrado aqui porque requer a noção de estrutura. Contudo, ele mostra que a dedução natural "não deixa escapar nada" que possa ser provado. O teorema é apresentado por completo em Mendelson (1997, pp.84-93).

---

[2] $\Gamma \models \alpha$ significa, no cálculo proposicional que α é **V** em todas as linhas (valorações) tais que α é **V** para todo $\alpha \in \Gamma$.

4

LÓGICA MODAL

4.1 Lógica Modal Alética

No estudo da metafísica, Aristóteles já abordava noções modais (seção 1.2). Isso lhe permitiu resolver muitos problemas filosóficos. A distinção do ser entre ato e potência contribuiu para o desenvolvimento dessas ideias (Coscarelli, 2008, pp. 5,6).

A lógica modal é uma *ampliação* da lógica clássica. Adiciona operadores *intensionais*, ampliando a linguagem da lógica clássica, sem ter como objetivo substitui-la (esse é o objetivo dos sistemas de *lógicas alternativas*). Apesar de existirem alguns sistemas de lógica *modal* (*temporal, epistêmica, alética, deônticas etc.*), faremos apenas uma introdução à lógica modal *alética* e possíveis aplicações das mesmas. Em especial, apresentaremos alguns exemplos envolvendo demonstrações de fórmulas no sistema **S5**, que é um sistema axiomático, e algumas aplicações de lógica modal para o Ensino Médio.

A lógica modal alética estuda conceitos de *necessidade* e *possibilidade*. A palavra "alética" significa "verdade". Então, modalidades aléticas são modos da verdade.

Vejamos alguns exemplos de sentenças modais: "É duvidoso que...", "Acredita-se que...", "Sabe-se que...", etc.

A lógica modal temporal estuda conceitos de tempo: presente, passado e futuro. A lógica deôntica: obrigação e permissão e lógica epistêmica: conhecimento, crença, dúvida, *a priori* e *a posteriori.*

Uma proposição, além de ser *verdadeira ou falsa*, pode ainda ser *necessária* (necessariamente verdadeira) ou *impossível* (necessariamente falsa). Aristóteles e Teofrasto já haviam estudado esses conceitos. Formularam uma teoria dos silogismos modais, mas sabemos que apresenta algumas falhas[3]. O mesmo ocorreu com alguns filósofos megáricos e estoicos que também se ocuparam desse assunto.

O lógico medieval Pedro Abelardo (ver seção 1.2), escreveu noções básicas de

[3] Esse assunto foi abordado na dissertação de mestrado apresentada por Coscarelli (2008, pp. 9-13).

teoria modal, que se ocupa dos raciocínios sobre os advérbios da linguagem, onde esses advérbios descrevem o modo do *vir a ser* dos objetos.

O filósofo e matemático Leibniz estudou conceitos de necessidade e possibilidade e de *mundos possíveis*. Segundo ele, necessidade é o que é verdadeiro em todos os mundos possíveis e possibilidade é o que é verdadeiro em algum mundo possível. O filósofo Saul Aaron Kripke, em seu trabalho, concebe a ideia de *modelo de mundos possíveis* para a lógica modal, também conhecida como *modelo de Kripke*. Grande parte das lógicas modais baseia-se na *Lógica* ***K***, assim chamada em homenagem a Kripke.

Somente no século XX foi que começaram a aparecer sistemas de lógica modal. Em 1918, Clarence Irving Lewis[4] escreveu sobre *lógica modal proposicional* e, em 1946, Ruth B. Marcus escreveu sobre o *cálculo modal de predicados*.

A lógica modal é muito utilizada na análise semântica, em razão de as representações dos conectivos modais permitirem expressar **advérbios**, enquanto a lógica clássica não pode fazê-lo. Atualmente, algumas das suas aplicações estão na área de Ciência da Computação, Engenharia de *Software*, Linguística Computacional, etc.

4.2 Os novos Operadores

A lógica modal é obtida acrescentando-se à linguagem da lógica clássica os operadores modais □ e ◊, com a seguinte interpretação: Considere uma proposição A. Então lemos:

(1) $\Box A$: "É necessário que A" (ou "necessariamente A").

(2) $\Diamond A$: "É possível que A" (ou "possivelmente A").

Assim, se α é uma fórmula, $\Box\alpha$ e $\Diamond\alpha$ também são fórmulas.

Desse modo, $\Box A$ significa que "não é verdade que $\neg A$ seja possível". Simbolicamente temos:

$\Box A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$.

Por exemplo:

$\Box$(x *é par*) $\leftrightarrow$ $\neg\Diamond$(x *é ímpar*)

[4] Na verdade, o interesse original de Lewis era investigar uma forma de implicação mais rigorosa que a da lógica clássica e não conceitos de necessidade e possibilidade (Mortari, 2001, pp. 357-359).

Por outro lado, $\Diamond A$ significa "não é verdade que obrigatoriamente $\neg A$ ocorre". Simbolicamente: $\Diamond A \leftrightarrow \neg \Box \neg A$. Essa proposição é chamada "definição de ◊" e abreviada Df◊.

Finalmente, o conceito de contingência (∇) é relevante em alguns estudos e podemos defini-la em termos da conjunção, negação e possibilidade. Isto é:

$\nabla \alpha \equiv \Diamond \alpha \wedge \Diamond \neg \alpha$ (significa que α é possível e sua negação também o é).

Uma proposição é necessariamente verdadeira se, e somente se, é verdadeira e não contingente. Simbolicamente: $\Box P \leftrightarrow (P \wedge \neg \nabla P)$.

4.3 Mundos Possíveis

Primeiramente, os operadores ◊ e □ não são funções de verdade, pois dados os valores de verdade de uma proposição α, não podemos inferir qual é o valor de verdade obtidos quando os aplicamos a α.

Dada a fórmula $x < 4$, nada podemos afirmar sobre sua valoração (**V** ou **F**), pois depende do valor de x. Isso está relacionado com *conjuntos de mundos possíveis*. Assim como: "*Hoje o dia está ensolarado"*, não podemos dizer se a sentença é verdadeira ou falsa, pois depende do *lugar* e da *data* da afirmação. É bom lembrar que tempo e lugar são advérbios e que a lógica modal, em suas variantes, consegue expressá-los.

Um mundo possível pode ser uma situação ou um *estado,* em programas de computador, ou um instante, como veremos em lógica modal temporal. Mundos possíveis podem representar *propriedades, proposições, estados de coisas, etc.* (Jacinto, 2013, p.17). Mundo *atual* pode estar relacionado à ideia de lugar em um dado momento. Alguns filósofos o consideram sem distinção de qualquer outro mundo possível.

Existem divergências sobre o conceito de mundos possíveis. Uma boa apresentação desse assunto pode ser encontrada em Branquinho (2013).

Não é possível, através de uma tabela, fazer uma semântica para as lógicas modais. A semântica que poderemos obter está relacionada com a noção de *mundo possível*, que será tratado, aqui, como ponto ou ente primitivo.

Sejam: W um conjunto de mundos possíveis; Λ uma função (de valoração) do conjunto de pares de todas as fórmulas e mundos. Podemos escrever **M** $=$

$\langle W, \Lambda \rangle$ e então **M** é um **modelo de mundos** possíveis. Qualquer que seja o mundo m em W, onde $W \neq \phi$, teremos:

(a) $\Lambda(\neg\alpha, m) =$ **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha, m) =$ **F**;

(b) $\Lambda(\alpha \wedge \beta, m) =$ **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha, m) = \Lambda(\beta, m) =$ **V**;

(c) $\Lambda(\alpha \vee \beta, m) =$ **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha, m) =$ **V** ou $\Lambda(\beta, m) =$ **V**;

(d) $\Lambda(\alpha \rightarrow \beta, m) =$ **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha, m) =$ **F** ou $\Lambda(\beta, m) =$ **V**;

(e) $\Lambda(\alpha \leftrightarrow \beta, m) =$ **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha, m) = \Lambda(\beta, m)$;

(f) $\Lambda(\Box\alpha, m) =$ **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha, p) =$ **V** para *todo* $p \in W$;

(g) $\Lambda(\Diamond\alpha, m) =$ **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha, p) =$ **V** para *algum* $p \in W$ **.**

De (a) a (e), as valorações obtidas não mudam em relação aos valores obtidos na linguagem proposicional. O que temos aqui é o parâmetro m que indica um mundo (fixo). Sendo assim, uma fórmula é verdadeira em um determinado mundo e não verdadeira, somente. O valor de $\Box\alpha$ ou $\Diamond\alpha$ no mundo m depende do valor de α nos outros mundos. Assim, uma proposição será necessária em um mundo se for verdadeira em todos os mundos no modelo e será possível se for verdadeira em pelo menos um dos mundos no modelo, embora possa ser falsa no mundo em questão.

Dizemos que α é uma fórmula válida, num modelo de mundos possíveis **M** se, e somente se, é verdadeira para todo mundo em **M**, ou seja,

M $\models \alpha \Leftrightarrow \Lambda(\alpha, m) =$ **V** para todo $m \in W$.

Exemplo 1:

Seja **M** um modelo em que W é um conjunto com três mundos possíveis: m_1, m_2 e m_3. Sejam α e β fórmulas dadas. Se α é verdadeira em m_1, mas falsa em m_2, então $\Box\alpha$ será falsa em qualquer mundo, inclusive m_1; $\Diamond\alpha$ será verdadeira em qualquer mundo, até mesmo em m_2. Se, nos três mundos β é verdadeira, então $\Box\beta$ será verdadeira nos três mundos e também $\Diamond\beta$ será verdadeira.

4.3.1 Modelo de Kripke

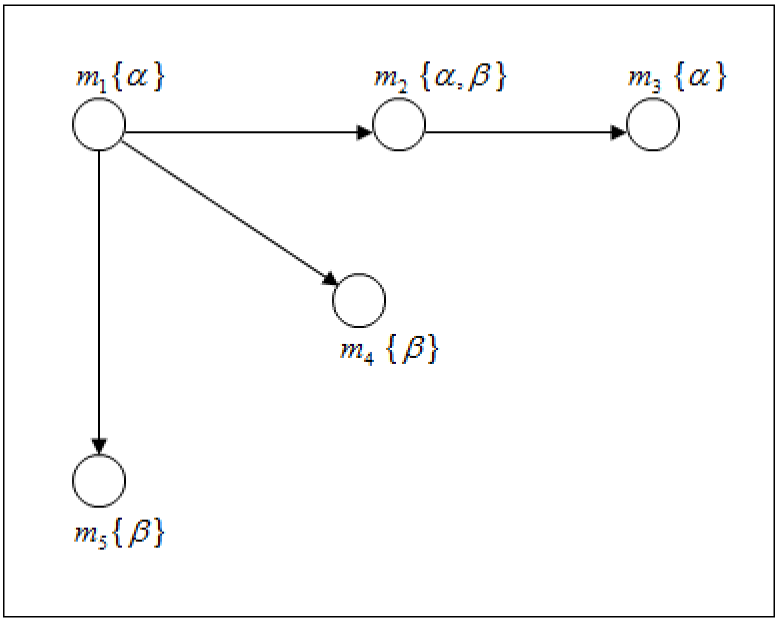
Na formulação acima, se α é uma fórmula válida, então α é verdadeira para todo mundo no modelo. Esta subseção apresenta o conceito de *relação de* *acessibilidade* entre os mundos possíveis para definir uma fórmula válida, mas não utilizaremos tal conceito neste trabalho, exceto na seção 4.5.

Por exemplo, os estados de um computador podem ser acessados por meio de um programa. O programa, nesse caso, é a relação de acessibilidade e os estados, os mundos possíveis.

Vimos que um modelo M pode ser escrito por meio do par $\langle W, \Lambda \rangle$. Agora, acrescentaremos a relação R, obtendo a estrutura M = $\langle W, \Lambda, R \rangle$, onde R é uma relação binária de acessibilidade entre mundos possíveis. Dizemos que $m_2 \in W$ é acessível a partir de $m_1 \in W$, se e somente se, $(m_1, m_2) \in R$.

Com a introdução de relação de acessibilidade entre os mundos possíveis, uma fórmula $\Box\varphi$ é verdadeira em um mundo m se for verdadeira em todos os mundos *acessíveis* a partir de m, mesmo que não seja verdadeira em algum outro mundo.

O diagrama seguinte representa a estrutura M = $\langle W, \Lambda, R \rangle$, onde α e β são fórmulas dadas, que recebem o valor V em cada vértice em que aparecem; m_1, m_2, m_3, m_4, e m_5 são os mundos possíveis (representados nos vértices dos grafos) com a lista de fórmulas válidas em cada um deles. As setas representam as relações de acessibilidade entre os mundos.



Portanto, $W = \{ m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \}$ e a relação de acessibilidade $R = \{ (m_1, m_2), (m_1, m_4), (m_1, m_5), (m_2, m_3) \}$. Dizemos que m_1 "enxerga" m_2, m_4 e m_5, e que m_2 "enxerga" m_3.

Sendo assim, podemos escrever as seguintes valorações:

$\Lambda(\alpha, m_1) =$ **V**, $\Lambda(\beta, m_1) =$ **F**

$\Lambda(\alpha, m_2) =$ **V**, $\Lambda(\beta, m_2) =$ **V**

$\Lambda(\alpha, m_3) =$ **V**, $\Lambda(\beta, m_3) =$ **F**

$\Lambda(\alpha, m_4) =$ **F**, $\Lambda(\beta, m_4) =$ **V**

$\Lambda(\alpha, m_5) =$ **F**, $\Lambda(\beta, m_5) =$ **V**

Escrevendo $\Lambda(\alpha) = \{ m \in W / \Lambda(\alpha, m) = \mathbf{V} \}$ (conjunto dos mundos onde vale α), concluímos que $\Lambda(\alpha) = \{m_1, m_2, m_3\}$ e $\Lambda(\beta) = \{m_2, m_4, m_5\}$ e:

M, $m_1 \models \neg \Box \alpha$, pois α não é verdadeira em todos os mundos acessíveis a partir de m_1.

M, $m_1 \models \neg \Box \neg \alpha$, pois α é verdadeira em pelo menos um mundo acessível a partir de m_1.

M, $m_1 \models \Diamond \alpha$, pois α é verdadeira em pelo menos um mundo acessível a partir de m_1.

M, $m_1 \models \Diamond \Box \alpha$, pois $\Box \alpha$ é verdadeira em pelo menos um mundo acessível a partir de m_1 ($\Box \alpha$ é verdadeira em m_2).

M, $m_1 \models \Box \beta$, pois β é verdadeira em todos os mundos acessíveis a partir de m_1. Logo, **M**, $m_1 \models \Diamond \beta$.

4.4 Sistema Normal Alético

Segundo Aristóteles, de uma implicação necessária e premissa necessária teremos uma consequência necessária (Coscarelli, 2008, p.18). O axioma K: $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box \alpha \to \Box \beta)$ representa essa propriedade de extrema importância para nosso estudo, pois os sistemas que iremos estudar tem esse axioma como base.

O "sistema ***K***" constitui-se dos axiomas Df.$\Diamond$ e K ("Lei de Aristóteles") e tautologias da Lógica Proposicional. Acrescentam-se, também, como regras de inferência: regra da necessitação (explicaremos essa regra logo a seguir) e *Modus*

Ponens. Um sistema alético normal é uma extensão do sistema ***K***. Então ***K*** é considerada a mais fraca das lógicas modais normais. Esse sistema modal normal mínimo foi estabelecido por Saul Kripke[5].

4.4.1 Sistema *S4*

Primeiramente, vamos falar do sistema ***T***. O sistema ***T*** é normal, pois é uma extensão do sistema ***K*** pelo acréscimo do axioma T: $\Box\alpha \rightarrow \alpha$. O sistema ***T*** também é conhecido como sistema ***KT*** (Coscarelli, 2008, p.22).

O sistema ***S4*** é normal, pois é uma extensão de ***K***. Esse nome "***S4***" foi dado por Lewis. É também conhecido como sistema ***KT4***, pois é uma extensão do sistema ***T*** pelo acréscimo do axioma 4 ("Axioma da Introspecção Positiva") : $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$. O sistema **S4** serve de modelo para a Lógica Intuicionista. (Coscarelli, 2008, p.28).

Por extenso, a linguagem do sistema ***S4*** consiste nos seguintes axiomas e regras:

(a) Tautologias da Lógica Proposicional

(b) Df◊. $\Diamond\alpha \leftrightarrow \neg\Box\neg\alpha$ ("Definição de ◊")

(c) Axioma K: $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$ ("Lei de Aristóteles" ou "Axioma da Distribuição")

(d) Axioma T: $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ ("Axioma do Conhecimento" ou "Axioma da Verdade")

(e) Axioma 4: $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ ("Axioma da Introspecção Positiva")

Modus ponens: Se $\vdash \alpha$ e $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, então $\vdash \beta$.

Regra da Necessitação: Se $\vdash \alpha$, então $\vdash \Box\alpha$

Já conhecemos *modus ponens* e, quanto à necessitação, vale uma observação análoga que fizemos para a generalização (se $\vdash \phi(x)$ então $\vdash \forall x \phi(x)$): uma prova de α será válida em qualquer mundo, então α valerá em qualquer mundo, daí concluímos que $\Box\alpha$.

Exemplo: Demonstrar que o princípio T: $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ é válido.

Primeiramente, suponha que não seja, isto é, que $\Box\alpha \rightarrow \alpha$ seja falso em algum mundo *m* de algum modelo **M**. Sendo assim, nesse mundo *m*, $\Lambda(\Box\alpha, m) =$ **V** e

[5] A dissertação de mestrado de Costa (2010) trata de Sistemas de Lógica Modal em Dedução Natural. Um dos assuntos abordados é a apresentação de uma hierarquia de sistemas de lógica modal em dedução natural do sistema ***K*** ao sistema ***S5***.

$\Lambda(\alpha, m)$ =**F**. De $\Lambda(\Box\alpha, m)$ =**V**, concluímos que α *é* verdadeira em todos os mundos do modelo **M**, incluindo *m*. Logo, $\Lambda(\alpha, m) =$ **V**. Temos uma contradição, pois antes afirmamos que $\Lambda(\alpha, m) =$ **F**.

4.4.2 Sistema *S5*

O sistema ***S5*** (ou ***KT5***) é obtido acrescentando-se o axioma 5: $\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$ ao sistema ***T*** . O axioma 5 é conhecido com o “Axioma da Introspecção Negativa”. Esse sistema é considerado o mais forte entre os sistemas obtidos, quando acrescentados um ou mais axiomas ao sistema ***K***.

Axiomas de ***S5*** :

(1) Todas as tautologias da lógica proposicional clássica

(2) K. $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

(3) Df◊. $\Diamond\alpha \leftrightarrow \neg\Box\neg\alpha$

(4) T. $\Box\alpha \to \alpha$

(5) 5. $\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$

MP. Se $\vdash\alpha$ e $\vdash \alpha \to \beta$, então $\vdash\beta$.

RN. Se $\vdash\alpha$, então $\vdash\Box\alpha$

Podemos demonstrar que o axioma T é equivalente a $\Box P \leftrightarrow (P \wedge \neg\nabla P)$. Fazendo isso, assumimos como teorema essa última definição de necessidade em *termos de contingência*[6].

4.4.3 Regras de derivação a partir de S5

Embora existam outras regras de dedução, vamos apresentar apenas duas.

Regra 1 (RD1): Se $\vdash\alpha \to \beta$, então $\vdash \Box\alpha \to \Box\beta$

Demonstração:

(1) $\alpha \to \beta$	Hipótese ($\alpha \to \beta$ é um teorema)
(2) $\Box(\alpha \to \beta)$	De (1), por RN
(3) $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$	Axioma K
(4) $\Box\alpha \to \Box\beta$	Segue de (2) e (3) por MP ■

Obtivemos a linha (2) de (1) porque, por hipótese, a fórmula $\alpha \to \beta$ é um

[6] (Coscarelli, 2008, pp.20,21)

teorema. Caso contrário, não poderíamos ter aplicado a regra da necessitação em (1) para obtermos a fórmula $\Box(\alpha \to \beta)$.

Regra 2 (RD2): Se $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, então $\vdash \Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta$

Demonstração:

(1) $\alpha \leftrightarrow \beta$	Hipótese ($\alpha \leftrightarrow \beta$ é um teorema)
(2) $(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\alpha \to \beta)$	De (1), tautologia proposicional
(3) $(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\beta \to \alpha)$	De (1), tautologia proposicional
(4) $\alpha \to \beta$	De (1) e (2), por MP
(5) $\beta \to \alpha$	De (1) e (3), por MP
(6) $\Box(\alpha \to \beta)$	De (4), por RN
(7) $\Box(\beta \to \alpha)$	De (5), por RN
(8) $\Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$	Axioma K
(9) $\Box(\beta \to \alpha) \to \Box\beta \to \Box\alpha$	Axioma K
(9) $\Box\alpha \to \Box\beta$	De (6) e (8), por MP
(10) $\Box\beta \to \Box\alpha$	De (7) e (9) por MP
(11) $\Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta$	De (9) e (10), pela lógica proposicional. ■

4.4.4 Demonstrações de alguns teoremas de S5 usando o método da dedução natural

O teorema T$^{\Diamond}$ (ou T◊) do ***S5*** pode ser demonstrado usando a regra de inferência *modus ponens* e tautologias da lógica proposicional clássica. Com a RLP (ver seção 3.6) fica mais simples, mas esconde muitas informações. Veja essa demonstração em Chellas (1980, p.16). Para uma didática melhor, preferimos o modo mais longo.

Queremos demonstrar o **teorema** T$^{\Diamond}$**:** $P \to \Diamond P$:

(1) $\Box\neg P \to \neg P$	Axioma T (substituímos α por $\neg P$).
(2) $(\Box\neg P \to \neg P) \to (P \to \neg\Box\neg P)$	Tautologia proposicional (contra positiva).
(3) $P \to \neg\Box\neg P$	Segue de (1) e (2) por MP
(4) $\Diamond P \leftrightarrow \neg\Box\neg P$	Df◊

(5) $(\Diamond P \leftrightarrow \neg\Box\neg P) \rightarrow (\neg\Box\neg P \rightarrow \Diamond P)$ Tautologia proposicional (bi condicional)

(6) $\neg\Box\neg P \rightarrow \Diamond P$ Segue de (4) e (5) por MP

(7) $(P \rightarrow \neg\Box\neg P) \rightarrow ((\neg\Box\neg P \rightarrow \Diamond P) \rightarrow (P \rightarrow \Diamond P))$ Tautologia (transitividade)

(8) $(\neg\Box\neg P \rightarrow \Diamond P) \rightarrow (P \rightarrow \Diamond P)$ Segue de (3) e (7) por MP.

(9) $P \rightarrow \Diamond P$ Segue de (6) e (8) por MP ■

A técnica da **substituição** (aplicada em (1)) consiste em substituir, uniformemente, uma variável ou subfórmulas por outra fórmula. Significa que se o fizermos num teorema, obteremos outro teorema. Por exemplo: $\Box\alpha \rightarrow \neg\Diamond\neg\alpha$. No lugar de α, em tudo, podemos ter $\neg\beta$ obtendo $\Box\neg\beta \rightarrow \neg\Diamond\beta$, ou ainda $\beta \rightarrow \gamma$, de modo que $\Box(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg\Diamond(\beta \wedge \neg\gamma)$. A segunda parte desta última fórmula resultou da substituição de α por $\beta \rightarrow \gamma$, de modo que o consequente da original ficou assim: $\neg\Diamond\neg(\beta \rightarrow \gamma)$, mas, pela tabela-verdade de $\rightarrow$ concluímos que $\neg(\beta \rightarrow \gamma)$ é equivalente a $(\beta \wedge \neg\gamma)$.

Na verdade, essa substituição ocorre em todo tipo de linguagem. Por exemplo: na frase "O homem *rouba*", poderíamos substituir "*rouba*" por "*toma posse dos bens alheios"*, ficando assim: "O homem *toma posse dos bens alheios*".

O método da substituição é utilizado desde o Ensino Fundamental, nas análises sintáticas e resoluções de sistemas com 2 ou mais equações. No ensino médio, encontramos várias situações envolvendo substituições. Vejamos outro exemplo bem conhecido.

Sejam f e g funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = x - 2$. Para obtermos $f(g(1))$ basta substituirmos x por $g(x)$ em $f(x)$, ficando assim: $f(g(x)) = (g(x))^2 - g(x) - 2$. Como $g(1) = -1$, teremos $f(g(1)) = f(-1) = 0$.

É importante observarmos que $f(x^2) \neq (f(x))^2$. Por exemplo: sejam f e g funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$. Nesse caso, $f(x^2) = x^2 + 1$. A função definida por $(f(x))^2$ é a função *composta* de g com f definida por $g(f(x)) = (x+1)^2$.

Sugerimos, para mais detalhes de números e funções reais, o texto de Lima (2013) da Coleção PROFMAT.

Mesmo que não mencionemos, aplicaremos a substituição uniforme em mais alguns exemplos, nas próximas demonstrações.

Podemos provar mais uma fórmula válida em ***S5***: $P \rightarrow \Box \Diamond P$, conhecida como *Axioma de Brouwer ou Axioma* B (“Axioma”, aqui, é o nome tradicional, mas trata-se de um Teorema em ***S5***). Usaremos o teorema que acabamos de demonstrar (T◊).

Demonstração: axioma B: $P \rightarrow \Box \Diamond P$.

(1) $\Diamond P \rightarrow \Box \Diamond P$ Axioma 5

(2) $P \rightarrow \Diamond P$ Teorema T◊

(3) $P \rightarrow \Box \Diamond P$ RLP aplicado a (1) e (2) ■

Usaremos as regras RD1 e RD2 **(**Se $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, então $\vdash \Box \alpha \leftrightarrow \Box \beta$), (demonstrada na subseção 4.4.3) e o teorema 5◊ : $\Diamond \Box P \rightarrow \Box P$ para provarmos os teoremas 4 : $\Box P \rightarrow \Box \Box P$ e Df□: $\Box P \leftrightarrow \neg \Diamond \neg P$ (“definição de □”). Uma demonstração do teorema 5◊ pode ser encontrada em Mortari (2001, p.368).

Demonstração. (axioma 4: ($\Box P \rightarrow \Box \Box P$)).

(1) $\Diamond \Box P \rightarrow \Box P$ Teorema 5◊

(2) $\Box \Diamond \Box P \rightarrow \Box \Box P$ RD1 aplicado a (1)

(3) $\Box P \rightarrow \Box \Diamond \Box P$ Axioma B

(4) $\Box P \rightarrow \Box \Box P$ RLP aplicado a (2) e (3) ■

Escrevemos “Axioma” B em (3), mas na verdade B é um teorema do sistema **S5.**

Demonstração do axioma Df□: ($\Box P \leftrightarrow \neg \Diamond \neg P$).

(1) $\Diamond \neg P \leftrightarrow \neg \Box \neg \neg P$ Df◊

(2) $\Box \neg \neg P \leftrightarrow \neg \Diamond \neg P$ RLP aplicado a (1)

(3) $P \leftrightarrow \neg \neg P$ (Dupla negação)

(4) $\Box P \leftrightarrow \Box \neg \neg P$ RD2 aplicado a (3)

(5) $\Box P \leftrightarrow \neg \Diamond \neg P$ RLP aplicado a (2) e (4) ■

Demonstraremos agora que a fórmula $(\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha) \wedge (\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha)$ implica o axioma 5 de ***S5***. Então, temos:

(1) $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ (axioma B a partir da hipótese, porque a prova de B usou 5)

(2) $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\Diamond\alpha$ (segue de (1), substituindo α por $\Diamond\alpha$)

Poderíamos ter começado, em vez da fórmula em (1), pela fórmula em (2). Bastaríamos justificar assim: "Axioma B, substituindo α por $\Diamond\alpha$".

(3) $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ (axioma 4)

(4) $\Box\neg\alpha \rightarrow \Box\Box\neg\alpha$ (segue de (3), substituindo α por $\neg\alpha$)

Poderíamos ter começado, em vez da fórmula em (3), pela fórmula em (4). Justificaríamos assim: "Axioma 4, substituindo α por $\neg\alpha$".

(5) $\neg\Box\Box\neg\alpha \rightarrow \neg\Box\neg\alpha$ (segue de (4) pela lógica proposicional)

(6) $\neg\Box\Box\neg\alpha \leftrightarrow \neg\Box\neg\neg\Box\neg\alpha$ (dupla negação)

(7) $\neg\Box\neg\neg\Box\neg\alpha \rightarrow \neg\Box\neg\alpha$ (segue de (5) e (6) por silogismo hipotético)

(8) $\Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ (segue de (7) por Df$\Diamond$)

(9) $\Box\Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ (segue de (8), aplicando a regra de derivação RD1)

(10) $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ (segue de (2) e (7) pela lógica proposicional). ■

O que acabamos de mostrar é que a extensão de ***T*** pelo acréscimo dos axiomas 4 e B tem o axioma 5 como teorema. Isso quer dizer que ***S5*** é a menor extensão de ***T*** que inclui, como teoremas, os axiomas 4 e B. (Coscarelli, 2008, p.24).

Vários exercícios envolvendo demonstrações de teoremas no sistema **S5** podem ser encontrados em Chellas (1980, pp.10,11,21,22).

4.4.5 Demonstração de alguns teoremas de S5 usando o método dos *tableaux*

No capítulo 3 vimos o procedimento de prova usando os tableaux semânticos, para verificar a validade de fórmulas. O método usado na lógica modal é parecido, porém, envolve as regras para operadores modais.

Sejam: α uma fórmula dada, m_1 e m_2 mundos possíveis de um modelo. Temos as seguintes regras para a construção de *tableaux* na lógica modal proposicional:

(1ª) **Negação da necessidade**

$$\frac{m_1 : \neg\Box\alpha}{m_1 : \Diamond\neg\alpha}$$

Se α não é necessária, concluímos que é possível que α não seja verdadeira em algum mundo. Pode não ser verdadeira em m_1.

(2ª) **Negação da possibilidade**

$$\frac{m_1 : \neg\Diamond\alpha}{m_1 : \Box\neg\alpha}$$

Se α não é possível, concluímos que, necessariamente, α é falsa em qualquer mundo.

(3ª) **Eliminação da necessidade**

$$\frac{m_1 : \Box\alpha}{m_2 : \alpha}$$

Se necessariamente α é verdadeira em um mundo, então α é verdadeira em todos. Aqui m_2 é qualquer.

(4ª) **Eliminação da possibilidade**

$$\frac{m_1 : \Diamond\alpha}{m_2 : \alpha}$$

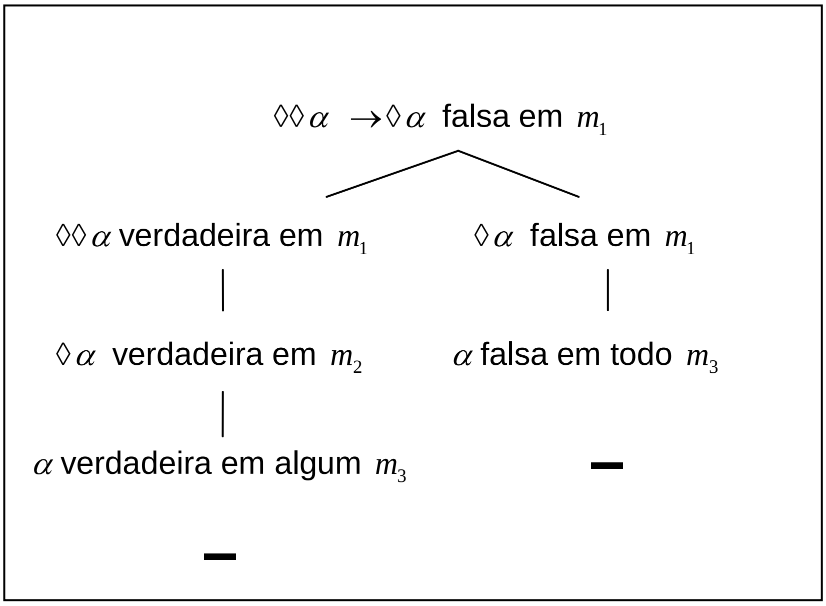
Aqui m_2 é específico para cada α, onde α valer.

Exemplo 1. Demonstrar, por meio de *tableau*, que a forma de argumento apresentada a seguir é válida.

$4\Diamond : \Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ [recíproca de S4: transitividade]

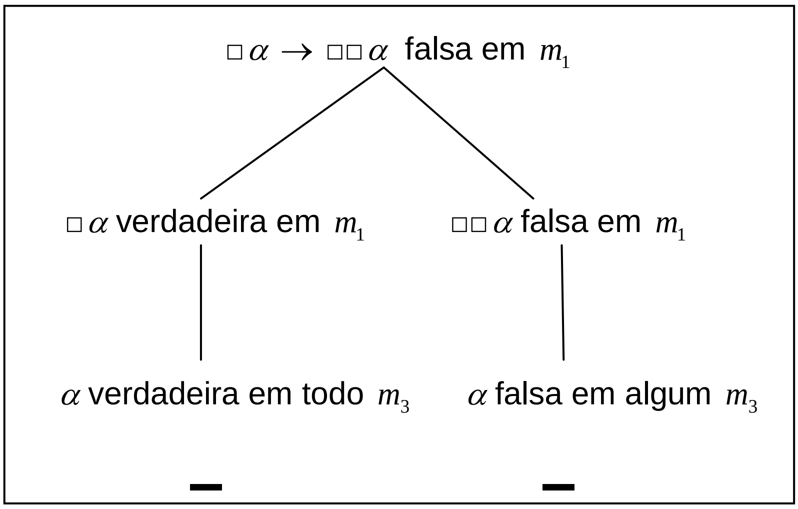
Primeiramente, suponha que $\neg\Diamond\alpha$ no mundo m_1, de determinado modelo. Assim, teremos $\Box\neg\alpha$ em todos os mundos, pela negação da possibilidade. Disso concluímos que α é falsa em todos os mundos do modelo em questão. De $\Diamond\Diamond\alpha$ verdadeira, podemos inferir $\Diamond\alpha$. Assim, num mundo m_3, teremos α. Vimos acima que α é falsa em todos, mas α é verdadeira em m_3, contradição.

Vejamos na forma de árvore:



Exemplo 2. Demonstrar o princípio 4: $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$. Esse é o axioma do sistema ***S4***, denominado “axioma da introspecção positiva”.

Começamos supondo que a fórmula inicial é falsa. Assim, o antecedente é verdadeiro e o consequente falso:



Temos uma contradição, pois acima obtivemos α e $\neg\alpha$ no mesmo mundo m_3.

(O *tableau* fechou-se, pois obtivemos α e $\neg\alpha$ no mesmo mundo m).

4.5 Possibilidade relativa e relações

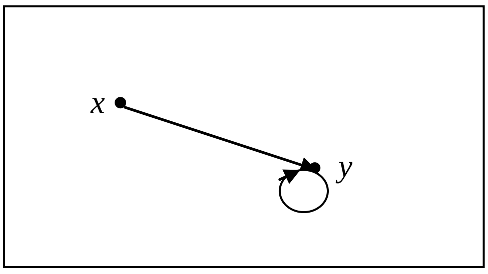
Esta seção trabalha com os modelos de Kripke em 4.3.1.

Primeiramente, possibilidade relativa envolve uma relação entre mundos possíveis. As relações, segundo suas diferentes propriedades, podem ser: Serial, Reflexiva, Simétrica, Transitiva e Euclideana. Os sistemas de lógica modal dependem dessas propriedades de relação, para que sejam definidas suas validades.

Seja W um conjunto cujos elementos são os pontos x, y e z (ver seção 4.3) e R uma relação entre os elementos de W. Sendo assim, apresentamos a seguir as possíveis relações e algumas fórmulas válidas, segundo essas relações.

(1) Serial:

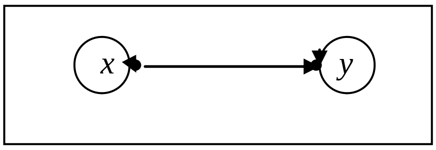
$\forall x \exists y \in W(xRy)$



A fórmula D: $\Box\alpha \to \Diamond\alpha$ é válida se considerarmos os modelos onde a relação (R) é serial.

Sejam **M**$= \langle W, \Lambda, R\rangle$ um modelo serial e x um ponto nesse modelo. Suponha que $\Lambda(\Box\alpha, x) =$ **V**, o que é suficiente para mostrar que $\Lambda(\alpha, y) =$ **V**, para todo y em **M**, tal que xRy. A relação é serial, assim existe um *y* em **M**, de modo que xRy, donde $\Lambda(\alpha, y) =$ **V** nos garante $\Lambda(\Diamond\alpha, x) =$ **V.** Portanto, a fórmula D é válida na classe de modelo serial.

(2) Reflexiva: $\forall x \in W(xRx)$



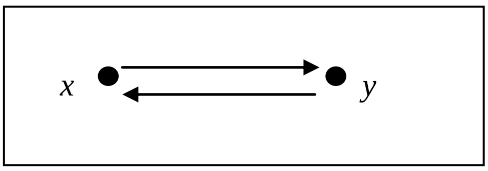
O axioma T: $\Box\alpha \to \alpha$ é válido se a relação de acessibilidade é reflexiva.

O sistema ***M*** foi construído sobre o sistema ***T*** (seção 4.4). Pode ser demonstrado que o sistema ***M*** se baseia numa estrutura reflexiva. Essa demonstração encontra-se em Coscarelli (2008,p.59).

Outras demonstrações envolvendo propriedades das relações nas caracterizações dos sistemas modais, aqui estudadas, podem ser encontradas em Chellas (1980, pp. 80,81).

(3) Simétrica:

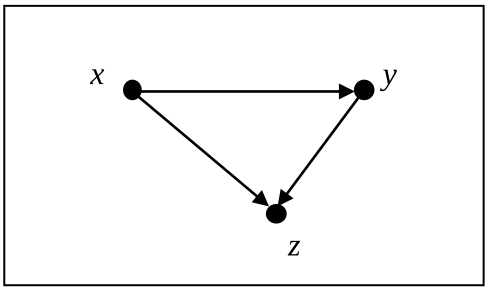
$\forall x \forall y \in W(xRy \to yRx)$



O axioma B é válido se a relação de acessibilidade é simétrica.

(4) Transitiva:

$\forall x \forall y \forall z \in W((xRy \wedge yRz) \to xRz)$

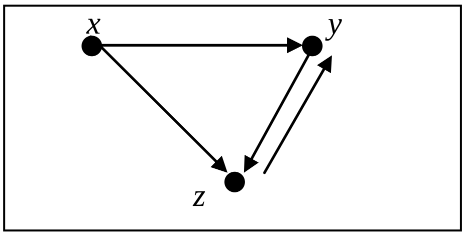


Por exemplo: $((x < y) \wedge (y < 10)) \rightarrow (x < 10)$.

O axioma 4 é válido nas classes de modelos onde a relação é transitiva.

(5) Euclideana:

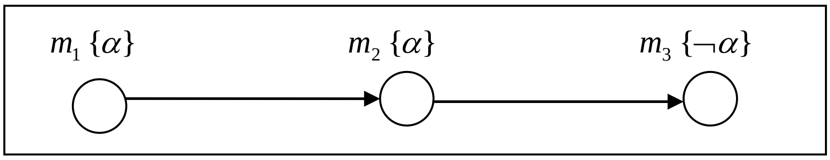
$\forall x \forall y \forall z \in W((xRy \wedge xRz) \rightarrow yRz)$



O axioma 5 é válido se a relação no modelo é euclideana.

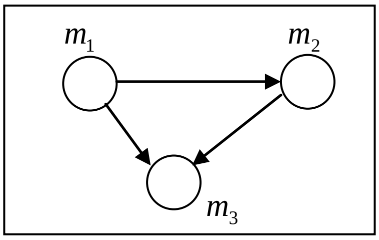
Sendo assim, vejamos os exemplos seguintes, onde envolve a transitividade em um deles.

Exemplo 1. Sejam m_1, m_2 e m_3 os mundos possíveis e α uma fórmula de um modelo. Observe a estrutura seguinte:



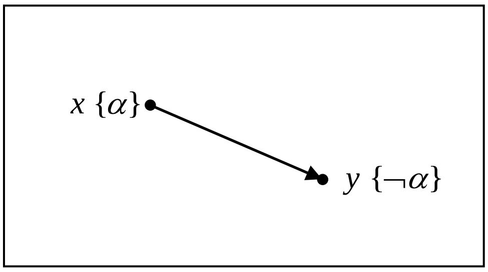
Somente o mundo m_2 é acessível a m_1 e, como nos dois mundos α é verdadeira, temos que $\Box\alpha$ é verdadeira em m_1. Em m_2, $\Box\alpha$ é falsa, pois α é falsa em m_3, que é um mundo acessível a partir de m_2.

Exemplo 2. Sejam m_1, m_2 e m_3 os mundos possíveis e α uma fórmula de um modelo. Observe a estrutura seguinte:



Nesse caso temos uma relação transitiva, onde o axioma 4: $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$ é válido.

Exemplo 3. A fórmula T◊: $\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$ é válida no modelo seguinte?



Percebemos que a relação de acessibilidade *não* é reflexiva. A fórmula não é válida, mesmo que α seja verdadeira em x. Isso é devido não existir qualquer ponto acessível a partir de x no qual α seja verdadeira. Aqui, x não é acessível a partir dele próprio.

5

OUTROS SISTEMAS

5.1 Outros sistemas de Lógicas Modais

Existem outras lógicas modais com estruturas parecidas com as lógicas modais aléticas. São ampliações da lógica clássica também, pois somente acrescentam operadores intensionais. Abordaremos, de modo bem resumido, algumas delas.

5.2 Lógica Temporal

Esses sistemas lógicos relacionam as ideias de necessidade e possibilidade com as ideias de tempo. Uma proposição pode ser verdadeira num certo instante, mas falsa em outro instante. São definidos os operadores:

G : "será sempre o caso que..." (ideia de "sempre no futuro".)

F : "será o caso que..." (ideia de "alguma vez no futuro". A letra "F" é de "*future*")

H : "foi sempre o caso que..."

P : "foi o caso que..." ("P" de "*past*")

É fácil notar que os operadores G e H correspondem ao operador $\Box$ da lógica modal alética e os operadores F e P correspondem ao operador $\Diamond$ da logica modal alética. F e P podem ser definidos a partir de G e H. Seja α uma fórmula dada:

$F\alpha \leftrightarrow \neg G \neg\alpha$

$P\alpha \leftrightarrow \neg H \neg\alpha$

Assim como nas lógicas aléticas, a semântica utilizada na lógica temporal é a de mundos possíveis. Os mundos possíveis são os *instantes* e a relação de acessibilidade envolve o tempo, portanto, é uma relação temporal. Dados dois instantes t_1 e t_2, dizemos que t_2 é acessível a t_1 se t_1 é anterior a t_2.

Seja α uma fórmula dada, t um instante qualquer e Λ uma função de valoração. As condições de verdade para essa fórmula, nesse sistema lógico ficam assim:

$\Lambda(G\alpha,t)$ = **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha)$ = **V** em todos os instantes posteriores a t;

$\Lambda(H\alpha,t)$ = **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha)$ = **V** em todos os instantes anteriores a t;

$\Lambda(F\alpha,t)$ = **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha)$ = **V** em algum instante posterior a t;

$\Lambda(P\alpha,t)$ = **V** $\Leftrightarrow \Lambda(\alpha)$ = **V** em algum instante anterior a t.

5.2.1 Sistema básico da lógica temporal

A base do sistema temporal é o sistema ***KT***. Nesse sistema é adotado o axioma K para os operadores G e H, e também são acrescentados mais dois axiomas que controlam as interações entre os operadores de passado e futuro.

Temos, assim, os seguintes axiomas e regras:

(1) Axiomas da distribuição:

$\mathrm{G}(\alpha \to \beta) \to (\mathrm{G}\alpha \to \mathrm{G}\beta)$

$\mathrm{H}(\alpha \to \beta) \to (\mathrm{H}\alpha \to \mathrm{H}\beta)$

(2) Axiomas de interação:

$\alpha \to GP\alpha$

$\alpha \to HF\alpha$

Regra da necessitação:

Se α é teorema de ***K*** então $G\alpha$ e $H\alpha$ também são teoremas de ***K***.

5.3 Lógicas epistêmicas

A lógica epistêmica também é um tipo de lógica modal que lida com certezas de sentenças. *Episteme* é uma palavra do grego e significa *conhecimento*. Esse sistema tem aplicações em várias áreas, por exemplo, Filosofia, Economia, Inteligência Artificial, etc.

A semântica utilizada é a do modelo de mundos possíveis. A sintaxe baseia-se nos operadores:

K*:* "sabe-se que..." ("K" *de "know"*)

Por exemplo: $K\alpha$: "Conhece-se α"

B*:* "acredita-se que...".("B" de *"believe"*)

Axiomas

Axioma *K ou axioma da distribuição*

$(K\alpha \wedge K(\alpha \to \beta)) \to K\beta$: Se conhecemos α e sabemos que $\alpha \to \beta$, então conhecemos β.

(1) Axioma *T ou axioma da verdade*

$K\alpha \to \alpha$: Conhecemos α, então α deve ser verdadeira.

Note que não se inclui $B\alpha \to \alpha$ como axioma.

(2) Axioma 4 ou *axioma da introspecção positiva*

$K\alpha \to KK\alpha$

(3) Axioma 5 ou *axioma da introspecção negativa*

$\neg K\alpha \to K\neg K\alpha$

(4) *Regra da generalização* ou *axioma N.*

Se **M** $\models \alpha$ então **M** $\models K\alpha$. Ou seja, se α é verdadeira em todos os mundos de **M,** α deve ser conhecida em todos os mundos.

5.4 Lógicas Deônticas

Essas lógicas lidam com as ideias de *dever (obrigação)* e *permissão*. Também são extensões da lógica clássica ao adicionar operadores intensionais. Os operadores desse sistema são:

O: "é obrigatório que..." . Esse operador representa o conceito de necessidade deôntica. É um operador primitivo.

Por exemplo, $O\alpha$ significa "é obrigatório que α".

P: "é permitido que..."

F: "é proibido que..." (F de "*forbidden*")

Expressões envolvendo os operadores deônticos:

(a) É proibido fumar.

(b) Sentido obrigatório.

(c) Ultrapassagem permitida.

Vejamos as equivalências envolvendo os operadores O, P e F. Seja α uma fórmula dada. Assim, temos que:

$P\alpha \leftrightarrow \neg O \neg \alpha$: "a fórmula α é permitida" equivale dizer que "não é obrigatório $\neg\alpha$".

$F\alpha \leftrightarrow O\neg\alpha$

Axioma D: $O\alpha \to P\alpha$

As lógicas deônticas possuem o axioma D, mas, não possuem o axioma T. Elas podem ser elaboradas sobre o sistema ***D*** ou ***KD***, que é uma extensão do sistema ***K***. A semântica usada nesse sistema é a de mundos possíveis também. As diferenças estão nos princípios que podem valer em alguns casos e não em outros.

5.4.1 Sistema *D**

O sistema deôntico ***D**** baseia-se na lógica proposicional, na seguinte regra de inferência

$$\frac{(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A}{(OA \wedge ... \wedge OA_n) \rightarrow OA} \quad (n \in \mathbb{N}),$$ e no axioma $\neg(OA \wedge O\neg A)$.

A regra e o axioma acima podem ser vistos em Chellas (1980, p.190), respectivamente, como "ROK e OD*".

No capítulo 4 não mencionamos a regra de inferência que expressa uma regra geral de consequência modal:

$$\frac{(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow A}{(\Box A \wedge ... \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box A} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Essa regra significa que uma proposição é necessária se é uma consequência de um conjunto de proposições, onde cada uma delas é necessária. A demonstração dessa regra pode ser encontrada em Chellas (1980, p.19).

(É fácil notarmos que para $n = 0$ teremos um caso especial: a regra de necessitação. Para $n = 1$ teremos a regra RD1, que demonstramos na subseção 4.4.3).

Sendo assim, podemos interpretar a regra de inferência do sistema deôntico em questão, mudando apenas o operador $\Box$ para O.

O axioma $\neg(OA \wedge O\neg A)$ significa ‘ não é verdade que A é obrigatório e $\neg A$é obrigatório ao mesmo tempo’.

O Sistema Deôntico ***S5*** é obtido acrescentando-se os axiomas O4 e O5.

O4: $OA \rightarrow OOA$

O5: $\neg OA \rightarrow O\neg OA$

Para mais detalhes sobre Lógica Deôntica ver Chellas (1980, pp. 190-203).

6

ATIVIDADES

6.1 Sugestão de Atividades envolvendo conceitos de Lógica Clássica e Modal para alunos do Ensino Médio

Finalmente, temos ideia da importância da lógica, da forma que se iniciou a sua sistematização e sua aplicação nas demonstrações matemáticas. Além disso, sabemos que a lógica tem aplicação em todas as áreas do conhecimento humano. Ela nos ensina a raciocinar corretamente em todas as áreas. Permite analisar uma situação-problema e criar estratégias para resolvê-la, além de contribuir grandemente nas interpretações de textos, na elaboração de redações, etc.

Nesta primeira parte das atividades propostas (Parte I), apresentaremos exercícios de Português do Ensino Médio, que envolvem em sua estrutura elementos da linguagem que vimos neste trabalho. Na parte II, apresentaremos exercícios que envolvem interpretação e tradução do Português para a linguagem matemática e vice-versa.

O objetivo destes primeiros exercícios não é escrevê-los numa linguagem matemática, mas sim, mostrar que leitura, análise, interpretação e produção de textos (por menores que sejam) necessitam da lógica. Enfatizaremos análises textuais, numa abordagem sintática. Se necessário, faremos a tradução de algumas sentenças para a linguagem simbólica, para não perdermos o foco dessa dissertação. Todos os exercícios são seguidos de respostas e comentários.

Em relação à leitura, interpretação e produção textual, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) cita cinco competências gerais comuns a todas as áreas do conhecimento. São entendidas como desdobramentos da **competência leitora e escritora** (Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2010, pp.18-20):

I) Dominar a norma-padrão da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica.

II) Construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos históricos-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
III) Selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
IV) Relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
V) Recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaborar propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Na organização dos conteúdos disciplinares, a Matemática está separada das outras disciplinas, mas é importante que trabalhem conjuntamente, principalmente com Linguagens e Códigos, pois a Matemática trabalha com sistemas simbólicos, que são instrumentos de conhecimento e de construção da realidade. Segundo o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo:

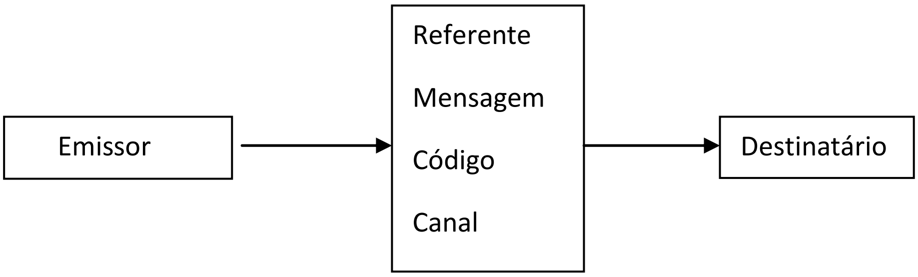
> “Certamente, faria sentido incluí-la na área de Linguagens e Códigos, uma vez que, com a língua materna, a Matemática compõe o par de sistemas simbólicos fundamentais para a representação da realidade, para a expressão de si e compreensão do outro, para a leitura em sentido amplo, tanto de textos quanto do mundo dos fenômenos”. (Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2010, p.25).

Sendo assim, apresentaremos alguns exercícios que foram desenvolvidos com o auxílio de uma professora de Português de uma escola da Rede Estadual de São Paulo, que trabalha no Projeto Sala de Leitura.

PARTE I

Antes de iniciarmos, de fato, a atividade, é importante que façamos uma breve revisão de alguns conceitos.

Primeiramente, texto é *qualquer sequência falada ou escrita que constitua um todo unificado e coerente dentro de uma determinada situação discursiva*. Na construção de textos, temos seis elementos que determinam sua significação. Esquematicamente, temos:



Dependendo do sentido dado a esses fatores da comunicação, teremos as **funções de linguagem**: *referencial, conativa, emotiva, metalinguística, fática* e *poética*. Para mais detalhes sobre o assunto sugerimos uma leitura de Terra e Nicola (2004 pp.16-32).

Durante todo o trabalho de lógica, abordamos apenas as sentenças declarativas, pois apesar de algumas sentenças apresentarem sentido completo, não são admitidas em argumentos. Por exemplo: “*Que horas são?*” ou: “*Socorro*!”.

Percebemos que essas expressões têm sentido completo e são muito utilizadas na nossa comunicação. Esse tipo de enunciado, com sentido completo, é chamado de **frase**. Assunto estudado nas aulas de Português.

As **orações** são frases estruturadas a partir de um sujeito e de um predicado (Toda oração contém um verbo). Sujeito e predicado são **termos essenciais** da oração. Nem toda frase é uma oração e nem toda oração é uma frase. Além disso, esta última pode ter uma ou mais orações. Por exemplo, “*É necessário que você viaje”*, tem duas orações: “*É necessário”* e *“que você viaje”.*

Os complementos verbais (objetos direto e indireto) e nominais e o agente da passiva são **termos integrantes**. Os **termos acessórios** são: Adjunto adnominal, adjunto adverbial e aposto. **Vocativo** é um termo usado para chamar a atenção.

Atividade (1) - Qual é a função da linguagem predominante na sentença:

(a) ‘Vocativo’ é um termo usado para chamar a atenção.

Nesse caso, temos uma função metalinguística ou metalinguagem. O português é a sua própria metalinguagem. Falamos do português usando o português.

(b) ‘$\forall x(Fxj \rightarrow Ex)$’ é uma fórmula do cálculo de predicados.

Novamente, o português é a linguagem com a qual falamos, então é a metalinguagem.

Utilizamos a metalinguagem durante todo o tempo na elaboração dessa dissertação. O português, acrescido de alguns símbolos, foi nossa metalinguagem.

Atividade (2) - Identificar o sujeito e o predicado nas orações.

(Estes exercícios têm um significado muito importante dentro do estudo da lógica, pois estão relacionados com o cálculo de predicados, que abordamos nesse trabalho).

a) Minha primeira escola ficava próxima a minha casa.

Minha primeira escola é o sujeito da oração. É o tema do que se vai comunicar.

O predicado da oração é: *ficava próxima a minha casa,* pois é a declaração que se refere ao tema.

b) Eu comi gulosamente macarrão.

Sujeito: *Eu*

Predicado: *comi gulosamente macarrão.*

A tradução dessa expressão para uma linguagem simbólica poderia ser assim:

Seja a proposição Mx: x comeu gulosamente macarrão e a constante k: Katia. Assim, temos:

Mk: Katia comeu gulosamente macarrão.

c) Todo filho de Maria é cantor.

Sujeito: *Todo filho de Maria*

Predicado: *é cantor*.

Essa sentença tem a forma de uma universal afirmativa. Podemos começar a formalizá-la assim:

$\forall x$ (x é filho de Maria $\rightarrow x$ é cantor).

Agora, usaremos a constante individual m para 'Maria', e $F(xy)$ para 'x é filho de y' e $C(x)$ para 'x é cantor '. Assim:

. $\forall x(Fxm \rightarrow Cx)$

Não estenderemos esse assunto, mas é bom lembrarmos que existem três tipos de predicado (*verbal, nominal e verbo-nominal*) e seria interessante um estudo mais detalhado. Deixaremos aqui como sugestão para futuras atividades.

Os **advérbios** e **conjunções** são outros conceitos de extrema importância no nosso trabalho. Para relembrarmos:

Advérbios: são palavras que modificam o verbo, o adjetivo ou outro advérbio, exprimindo ou acrescentando-lhe uma circunstância (modo, tempo, lugar, intensidade, etc.). Por exemplo, na frase: '*O trem chegou tarde'*, a palavra *tarde* é um *advérbio de tempo.*

Conjunções: são palavras que ligam orações ou termos semelhantes, de mesma função, relacionando logicamente as ideias envolvidas.

Desse modo, podemos aplicar outras atividades, envolvendo esses conceitos e relacionando-as com a lógica, objeto de estudo, dessa dissertação. A saber:

Atividade (3) - Classifique a conjunção presente no texto de Carlos Drummond de Andrade:

Cota zero

Stop.

A vida parou

ou foi o automóvel?

Nesse caso, temos a conjunção alternativa *ou* ligando as orações.

A conjunção alternativa *ou* pode ter, em português, dois sentidos: *inclusivo* (pode ocorrer as duas coisas) e *exclusivo* (ou ocorre uma coisa, ou ocorre a outra). É mais comum, no dia a dia, seu uso no sentido exclusivo. No cálculo de predicados, o *ou* normalmente é usado no sentido inclusivo e, como vimos na seção 2.7, o símbolo usado para representá-lo é $\vee$, que chamamos de *conectivo de disjunção*.

Atividade (4) – Qual é a conjunção presente na oração:

Ninguém esperava, mas ele acabou confessando o crime.

Temos, nesta frase, a palavra "*mas"* que é uma conjunção adversativa. É muito comum as pessoas confundirem-na com o advérbio "*mais"* (advérbio de intensidade).

No cálculo de predicados usamos o símbolo $\wedge$ para representar essa conjunção.

Atividade (5) – Escreva uma oração subordinada condicional.

Temos, por exemplo, a oração: *Caso os bancos entrem em greve*, o pagamento será adiado.

Podemos escrever a oração acima utilizando G para representar ‘caso os bancos entrem em greve’ e A para ‘ o pagamento será adiado. Teremos então, a fórmula $G \to A$. Na tabela verdade, a fórmula é falsa somente se G for verdadeira e A for falsa.

(Exercício adaptado de Terra e Nicola (2004, p.253)).

Faça uma leitura do diálogo e responda à pergunta a seguir:

– Vire à direita aqui.

– Não; vire à esquerda.

Que palavra(s) pode(m) ser classificada(s) como advérbio?

Na primeira fala, temos a locução adverbial de lugar: *à direita* e *aqui*, um advérbio de lugar. Na segunda fala, a palavra *não* é um advérbio de negação e modifica a sentença anterior e temos também uma locução adverbial de lugar: *à esquerda*.

PARTE II

Esta parte das atividades envolve aplicações da lógica com foco na linguagem simbólica, mas é óbvio que o português estará presente, mesmo que seja como uma metalinguagem.

Apresentaremos exercícios acompanhados das soluções ou comentários. Esses exercícios podem ser aplicados para o Ensino Médio e até mesmo para o nível Superior (por exemplo, nos cursos de licenciatura). Alguns deles foram aplicados em concursos públicos.

(1) Demonstre por *contraposição* que, dado um número natural n, se o quadrado de n for par, então n também é par.

(2) A proposição P: “É necessário que toda ação tenha a sua reação” é equivalente a:

(a) É necessário que alguma ação não tenha a sua reação.

(b) Não é possível que alguma ação não tenha a sua reação.

(c) É possível que alguma ação não tenha a sua reação.

(d) Não é necessário que alguma ação tenha a sua reação.

(3) Qual das seguintes representações simbólicas pode representar a sentença: Para todo x, x é um quadrado, se e somente se, é retângulo e losango?

(I) $\forall x(Qx \leftrightarrow (Rx \wedge Lx))$

(II) $\forall x(Qx \leftrightarrow (Rx \vee Lx))$

(4) Interprete as seguintes formas proposicionais:

(a) $\Box(P \to Q)$

(b) $\Box\ P \to Q$

(c) $P \to \Box Q$

(d) $\neg\Box\neg P \to \Diamond P$

(e) $\Box\ A \leftrightarrow \neg\Diamond\neg A$

(5) Sejam r_1 e r_2 retas de um plano Π.Sendo assim, interprete a fórmula $\Box((r_1 \mathbin{//} r_2) \to (r_1 \cap r_2 = \varnothing)) \to (\Box(r_1 \mathbin{//} r_2) \to \Box(r_1 \cap r_2 = \varnothing))$. Qual é esse axioma?

(6) Sejam as proposições $P(x)$: x é um número primo e $Q(x)$: x admite apenas dois divisores positivos. Traduzir para uma linguagem formal, a seguinte sentença: Necessariamente, para todo número x, se ele é primo, então admite apenas dois divisores positivos.

(7) Sejam x e y variáveis dadas, cujo domínio é o conjunto dos reais. Escreva **V** para as sentenças verdadeiras e **F** para as falsas:

(a) $\exists x(x + y = 0)$

(b) $\forall y \exists x(x+y=0)$

(c) $\forall x \exists y xy(y-1=0)$

(d) $\forall x(x+y=0)$

(e) $\exists x \forall y(x+y=0)$

(8) Escrever uma fórmula equivalente à negação da fórmula $\forall x(x \geq 7)$, usando a linguagem simbólica (segundo a Teoria das Ordens Lineares)..

(9) Verifique se o argumento a seguir é válido ou inválido. A primeira fórmula é a premissa 1 e a segunda, a premissa 2. Abaixo da linha horizontal vem a conclusão.

$$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$$

$$\neg \gamma$$

$$\neg \alpha \vee \neg \beta$$

(10) Analise a expressão: Se Carlos está em casa, então necessariamente é possível que Carlos esteja em casa.

(a) Escreva uma fórmula modal para expressá-la.

(b) Qual é o nome dessa fórmula?

Resolução dos exercícios de (1) a (10) – Parte II

(1) Sejam as proposições Verifique se o argumento a seguir é válido ou inválido. A primeira P: n^2 é par e Q: n é par. Queremos mostrar que $P \rightarrow Q$. Por contraposição, temos que $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$. Demonstraremos que se n não é par, então n^2 não é par.

Simbolicamente: $(\neg Q \rightarrow \neg P)$. Suponhamos, então que o número natural n é ímpar. Por definição de número ímpar, existe um número m natural tal que $n = 2m+1$. Assim, temos $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1 = 2k + 1$. Logo, n^2 é ímpar. Demonstramos $\neg Q \rightarrow \neg P$, que é equivalente a $P \rightarrow Q$.

(2) (b) Não é possível que alguma ação não tenha a sua reação.

(3) (I)

(4) (a) $\square(P \to Q)$: Necessariamente, se P então Q.

(b) $\square P \to Q$ Se necessariamente P, então Q.

(c) $P \to \square Q$: Se P, então necessariamente Q.

(d) $\neg\square\neg P \to \lozenge P$: Se não é verdade que obrigatoriamente $\neg P$ ocorreu, então é possível que P ocorra.

(e) “Necessariamente A” é equivalente a “não é verdade que $\neg A$ seja possível”.

(5) Se necessariamente, $r_1 // r_2$ implica $r_1 \cap r_2 = \varnothing$, então, necessariamente $r_1 // r_2$ implica em necessariamente $r_1 \cap r_2 = \varnothing$. Esse é o axioma K.

(6) $\square(P \to Q)$.

(7) (a) **V** (embora contingente em y) (b) **V** (c) **V** (d) Contingente em y

(e) **F**

(8) $\neg\forall x(x \geq 7) \leftrightarrow \exists x(x < 7)$

(ordem linear ou total)

(9) Consideremos as premissas verdadeiras. Assim, temos que a premissa 2 é verdadeira, portanto γ é falsa. Se a primeira premissa é uma implicação verdadeira, com o consequente γ falso, o antecedente $\alpha \wedge \beta$ deve ser falso também. Então α é falsa ou β é falsa. Logo, a conclusão $\neg\alpha \vee \neg\beta$ é verdadeira. Portanto, a fórmula é válida.

(10) Seja “P”: “Carlos está em casa”. Assim, temos: $P \to \square\lozenge P$. Esse é o axioma B.

6.2 Atividades complementares.

1) Escrever usando uma linguagem simbólica:

(a) Se Carlos é um aluno e é estudioso, então será promovido.

Vamos utilizar $A(x)$ para ‘x é aluno ’, $E(x)$ para ‘x é estudioso’, $P(x)$ para ‘x será promovido’ e c para ‘Carlos’. Assim, temos:

$(Ac \wedge Ec) \to Pc$

(b) Alguém se feriu.

Usando $F(x,y)$ para 'x feriu y', temos: $\exists x(xFx)$.

É importante lembrar que o *se* da oração acima é um pronome reflexivo.

(c) Mariana é bonita, mas não é vaidosa.

Usando $B(x)$ para 'x é bonita ', $V(x)$ para 'x é vaidosa' e m para 'Mariana', a fórmula fica assim: $Bm \wedge \neg Vm$.

(d) Não é possível que exista um animal que não seja um animal.

Seja $A(x)$: x é um animal. Assim: $\neg \Diamond \exists x(Ax \wedge \neg Ax)$

(e) Necessariamente, toda casa amarela é amarela.

Vamos usar $C(x)$ para 'x é uma casa' e $A(x)$ para 'x é amarela'. A fórmula fica assim:

$\Box \forall x((Cx \wedge Ax) \rightarrow Ax)$

(f) Necessariamente, todo carro velho é carro.

$\Box \forall x((Cx \wedge Vx) \rightarrow Cx)$

(g) Se fevereiro tem 30 dias e 2 é um número primo, então fevereiro não tem 30 dias.

Sejam P : Fevereiro tem 30 dias e Q: 2 é um número primo.

$(P \wedge Q) \rightarrow \neg P$

2) Sejam as proposições P: Está ventando e Q: Está frio. Escrever em português as expressões seguintes:

(a) $P \vee \neg Q$

(b) $P \rightarrow Q$

(c) $\neg P \wedge \neg Q$

(d) $P \leftrightarrow Q$

(e) $(P \vee \neg Q) \leftrightarrow (Q \wedge \neg P)$

3) Dada a expressão " x é a capital do Brasil ", onde o domínio da variável x é o conjunto das cidades da América do Sul. Escreva duas proposições, uma verdadeira e uma falsa, substituindo a variável x por um valor do seu domínio.

Brasília é a capital do Brasil. (**verdadeira**)

Buenos Aires é a capital do Brasil.(**falsa**)

4) Simbolize as proposições:

(a) Toda mulher é vaidosa.

(b) Algumas mulheres são vaidosas.

(c) Nenhuma mulher é vaidosa.

(d) Algumas mulheres não são vaidosas.

(e) Somente as mulheres são vaidosas.

(f) Todos são vaidosos, exceto as mulheres.

(g) Algumas mulheres não são bonitas, mas são vaidosas.

Primeiramente, vamos considerar:

Domínio: pessoas; $M(x)$: x é mulher; $V(x)$: x é vaidoso (a) e $B(x)$: x é bonito(a). Assim, temos:

(a) $\forall x(Mx \rightarrow Vx)$

(b) $\exists x(Mx \wedge Vx)$

(c) $\forall x(Mx \rightarrow \neg Vx)$ ou $\neg \exists x(Mx \wedge Vx)$

(d) $\exists x(Mx \wedge \neg Vx)$

(e) $\forall x(Vx \rightarrow Mx)$

(f) $\forall x(Mx \vee Vx)$

(g) $\exists x((Mx \wedge \neg Bx) \wedge Vx)$

5) Seja a proposição: Se Marcos é culpado, então Paulo é inocente.

Escreva a *inversa*, a *recíproca* e a *contra positiva* dessa proposição.

Inversa: Se Marcos não é culpado, então Paulo não é inocente.

Recíproca: Se Paulo é inocente, então Marcos é culpado.

Contra positiva: Se Paulo não é inocente, então Carlos não é culpado.

6) Verifique se as proposições são verdadeiras ou falsas:

(a) $\neg(2 \leq 1)$

Verdadeira

(b) $(2+3)^3 = 2^3 + 2^3$

Falsa

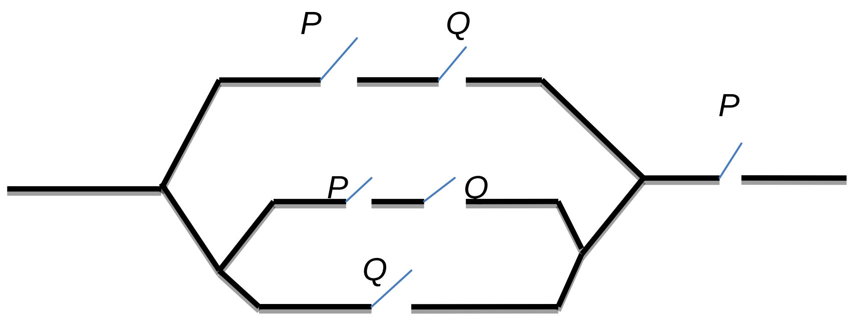
(c) $\neg(5^2 \times 5^4 = 5^8)$

Verdadeira

(d) (São Paulo é a capital do Brasil) $\vee (\sqrt{9} = 3)$. Verdadeira

(e) $\forall x \in [0,+\infty[\exists y \in \mathbb{R}\, (y^2 = x)$ Verdadeira

7) Escreva uma expressão relativa ao circuito e simplifique-a (construa uma tabela e o esquema de um novo circuito).



P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee ((P \wedge Q) \vee Q))$	$((P \wedge Q) \vee ((P \wedge Q) \vee Q)) \wedge P$
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**F**	**F**

A última coluna da tabela representa o circuito e é equivalente à terceira coluna. Assim, temos que: $((P \wedge Q) \vee ((P \wedge Q) \vee Q)) \wedge P) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$. Desse modo, temos o novo circuito:

8) Formalize o seguinte argumento:

Se Maria tem aquário, então gosta de criar peixe. Se ela gosta de criar peixe, então não come frutos do mar. Logo, se Maria tem aquário, então não come frutos do mar.

Podemos formalizar esse argumento usando $A(x)$, $P(x)$ e $F(x)$ para simbolizar, respectivamente, ‘x tem aquário’, ‘x gosta de criar peixe’, ‘x gosta de frutos do mar e m para representar Maria.

$Am \to Pm$, $Pm \to \neg Fm \vdash Am \to \neg Fm$

A dedução pode ser feita assim no “estilo Hilbert”:

1. $Am \to Pm$ Hipótese

2. $Pm \to \neg Fm$ Hipótese

3. Am Hipótese adicional

(Hipótese adicional é uma *suposição temporária*)

4. Pm Segue de 1 e 3 por *Modus ponens*

5. $\neg Fm$ Segue de 2 e 4 por *Modus ponens*

Concluímos que, se temos Am, então temos $\neg Fm$.

6. $Am \rightarrow \neg Fm$ Segue de 3 a 5 pelo Teorema da Dedução.

Os exercícios 9 e 10 são **questões de concursos públicos**.

9) (Gestor-2000) Dizer que "André é artista ou Bernardo não é engenheiro" é logicamente equivalente a dizer que:

a) André é artista se e somente se Bernardo não é engenheiro.

b) Se André é artista, então Bernardo não é engenheiro.

c) Se André não é artista, então Bernardo é engenheiro.

d) Se Bernardo é engenheiro, então André é artista.

e) André não é artista e Bernardo é engenheiro.

Podemos usar A para 'André é artista' e B para 'Bernardo é engenheiro'. Então o argumento fica formalizado assim: acima: $A \vee \neg B$, que é equivalente, segundo a tabela verdade, a fórmula $\neg A \rightarrow \neg B$. Aplicando a contraposição nesta última fórmula, temos $(\neg A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$. O item correto é (d).

10) (TFC-SFC-2000) Ou Anaís será professora, ou Anelise será cantora, ou Anamélia será pianista. Se Ana for atleta, então Anamélia será pianista. Se Anelise for cantora, então Ana será atleta. Ora, Anamélia não será pianista. Então:

a) Anaís será professora e Anelise não será cantora.

b) Anaís não será professora e Ana não será atleta.

c) Anelise não será cantora e Ana será atleta.

d) Anelise será cantora ou Ana será atleta.

e) Anelise será cantora e Anamélia não será pianista.

Usando A para 'Anaís será professora', B para 'Anelise será cantora', C para 'Anamélia será pianista' e D para 'Ana será atleta'.

As premissas envolvidas são:

Premissa 1 $A \vee B \vee C$

Premissa 2 $D \rightarrow C$

Premissa 3 $B \rightarrow D$

Premissa 4 $\neg C$

Das premissas 4 e 2, podemos concluir que $\neg D$ é verdadeira, de modo que (na premissa 3) $\neg B$ é verdadeira. Nessas condições, A e $(A \wedge \neg B)$ são verdadeiras. O item (a) é o correto.

Finalizamos esse trabalho sugerindo uma leitura dos textos didáticos da Coleção PROFMAT, que são relevantes para a formação do professor da Escola Básica e também para os alunos do Ensino Médio. Essa coleção contém temas da Matemática expostos de maneira bem didática, visando o aperfeiçoamento dos professores e servindo de suporte para os alunos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

B

BIBLIOGRAFIA

ALVES, K. H. F. *Iniciação à Lógica na Educação Básica*. Dissertação de mestrado. Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2013. (Aluno do PROFMAT).

ARISTÓTELES. *Tópicos; Dos argumentos sofísticos.* Seleção de textos de José Américo Motta Pessanha; tradução de Leonel Vallandro e Gerd Bornhein da versão inglesa de W. A. Pickard. São Paulo: Nova Cultural, 1987.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CASTRUCCI, B. *Introdução à lógica matemática.* São Paulo: Nobel, 1975.

CHELLAS, B. F. *Modal Logic: an Introduction.* Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

CHOMSKY, N. *Syntactic Structures*. The Hague: Mouton, 1957.

COSCARELLI, B. C. *Introdução à Lógica Modal*. Dissertação de mestrado. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2008. Extraído do *site*: <www.teses.usp.br/teses/disponíveis/45/45131/tde-17062009-161423/pt-br.php>. Acesso em: 10 nov. 2015.

COSTA, D. G. *Sistemas de lógica modal em dedução natural*. Dissertação de mestrado. Rio Grande do Norte: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2010. Extraído do *site*: <www.cchla.ufrn.br/ppgfil/mestrado/dissertações/david_gomes_costa.pdf >. Acesso em: 10 nov. 2015

DAGHLIAN, J. *Lógica e álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1995.

GORSKY, S., B. *Semântica algébrica para as lógicas modais e seu interesse filosófico.* Dissertação de mestrado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2008. Extraído do *site*: www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000426950

JACINTO. B. *Mundos Possíveis*. Lisboa: Editora Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa, 2013.

KLEENE, S. C. *Mathematical Logic*. Mineola: Dover Publications, 2002.

KNEALE, W., KNEALE, M. *The Development of Logic*. Clarendon Press, 1962.

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. 1. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

MENDELSON, E. *Introduction to Mathematical Logic.* 4.ed. London: Chapman & Hall, 1997.

MORTARI, C. A. *Introdução à Lógica.* São Paulo: Editora UNESP, 2001.

OLIVEIRA, A. F. *Lógica & Aritmética: Uma introdução à lógica matemática e computacional.* 3.ed. Lisboa: Gradiva, 2010.

PRAWITZ, D. *Natural deduction: a proof-theoretical study*. Mineola: Dover Publications, 2006.

RAMOS, M. V. M.; NETO, J. J.; VEGA, Í, S. *Linguagens formais: teoria, modelagem e implementação*. Porto Alegre: Bookman, 2009.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. São Paulo: SEE, 2010.

SINGH, S. *O Último Teorema de Fermat*. Tradução de Jorge Luiz Calife. 9.ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2002.

TERRA, E.; NICOLA, J. D. *Português de olho no mundo do trabalho: volume único*. São Paulo: Scipione, 2004. (Coleção de olho no mundo do trabalho)