UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

MARIANA CAPELIN FABRICIO

A CONFIGURAÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES E SIMETRIA PARA A CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

SOROCABA
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

MARIANA CAPELIN FABRICIO

A CONFIGURAÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES E SIMETRIA PARA A CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Mariana Capelin Fabricio
ORIENTADOR: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS – UFSCar
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

MARIANA CAPELIN FABRICIO

A CONFIGURAÇÃO DE POLÍGONOS REGULARES E SIMETRIA NA CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional.

Orientação: Prof. Dr. Paulo César Oliveira

SOROCABA
2016

O êxito de um professor de Matemática deve ser medido pela quantidade de alunos que, ao longo da vida, ele ensinou a pensar por si mesmos e não pelo volume de fórmulas que os fez memorizar.

Gilberto G. Garbi

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

Capelin Fabricio, Mariana

A configuração de polígonos regulares e simetria na construção de mosaicos no 6º ano do ensino fundamental / Mariana Capelin Fabricio. -- 2016.

109 f. : 30 cm.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal de São Carlos, campus Sorocaba, Sorocaba

Orientador: Paulo César Oliveira

Banca examinadora: Antônio Noel Filho, Adriana Correia de Almeida Batista

Bibliografia

1. Mosaicos. 2. Polígonos regulares. 3. Transformações geométricas. I. Orientador. II. Universidade Federal de São Carlos. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pelo Programa de Geração Automática da Secretaria Geral de Informática (SIn).

DADOS FORNECIDOS PELO(A) AUTOR(A)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado da candidata Mariana Capelin Fabrício, realizada em 31/05/2016:

Paulo César Oliveira

Prof. Dr. Paulo Cesar Oliveira
UFSCar

Prof. Dr. Antonio Noel Filho
UNISO

Adriana Correia Almeida Batista

Profa. Dra. Adriana Correia de Almeida Batista
IFSULDEMINAS

Dedico este trabalho a meu pai, que estará sempre presente em mim, em minha vida, em meu pensamento e em meu coração. E hoje, você é minha fonte de saudade. Sempre sua filha.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à Deus que me encontrou no meio desta caminhada, para me dar apoio em todos os momentos.

Agradeço a meu pai, que sempre me incentivou a estudar, desde de muito cedo, e que sempre acreditou que eu era capaz de conquistar tudo o queria. Ele foi meu grande incentivador, me mostrando o quanto era maravilhoso obter o conhecimento, seja ele qual fosse. Sei que estaria feliz de me ver terminando esta pesquisa.

Agradeço a minha mãe, que esteve comigo em todos os momentos de minha vida, me ajudando e apoiando sempre, assim como toda a minha família.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Paulo César Oliveira que me aceitou como orientanda, mesmo com o pouco tempo que teria para esta pesquisa, aceitando mais este desafio, e me apoiando do início ao fim.

Agradeço ao meu querido marido Reynaldo, que sempre esteve do meu lado, compartilhando todos os momentos deste mestrado, as alegrias e as tristezas, que me deu apoio nos momentos de crise, e que sempre me ajudou nas minhas dificuldades.

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos a implementação de uma proposta para o ensino de transformações geométricas no plano utilizando a construção de mosaicos. A proposta procura integrar a geometria com mosaicos construídos através de transformações geométricas, tendo como objetivo analisar a aprendizagem dos alunos submetidos a uma conexão matemática envolvendo transformações geométricas e a construção de mosaicos com polígonos regulares. Para isso, esta pesquisa analisou a mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica produzidos por uma turma de 31 alunos de 6º ano, envolvidos na resolução de tarefas matemáticas, de acordo com o tema já anunciado. O trabalho foi desenvolvido com base nos princípios da teoria de registros de representação semiótica de Raymond Duval (2009), com a colaboração de João Pedro da Ponte, e contou com a análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e os volumes do Caderno do Professor como material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) que nos forneceram a seguinte questão de investigação: quais as contribuições das nossas tarefas para o ensino-aprendizagem de transformações geométricas a partir do 6º ano do Ensino Fundamental? Para atender aos nossos propósitos de investigação, desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa, na qual a análise interpretativa da produção escrita de nossos alunos bem como as interlocuções ocorridas em sala de aula, subsidiaram os resultados apresentados neste relatório.

Palavras-chave: ensino fundamental, mosaicos, polígonos regulares, transformações geométricas, isometria.

ABSTRACT

In this thesis we present the implementation of a proposal for teaching geometric transformations in the plane using the building mosaics. The proposal seeks to integrate geometry with mosaics constructed by geometric transformations, and to analyze the learning of students subjected to a mathematical connection involving geometric transformations and building mosaics with regular polygons. For this, this research examined the mobilization and coordination of different semiotic representation registers produced by a group of 31 students of 6th year, involved in solving mathematical tasks, according to the theme already announced. The work was developed with the principles of theory of semiotic representation registers of Raymond Duval (2009), with the collaboration of João Pedro da Ponte, and included the analysis of the National Curriculum Parameters (BRAZIL,1998) and the volumes of professor notebook as collateral to Curriculum State of Sao Paulo (SAO PAULO, 2010) that provided in the following research: which the contributions of our tasks for the teaching and learning of geometric transformations from the 6th grade of elementary school? To serve our purposes of research, we developed a qualitative research, in which the interpretative analysis of the written production of our students well as the dialogues that took place in the classroom, subsidized the results presented in this report.

Keywords: elementary school, mosaics, regular polygon, geometric transformations, isometrics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Lista de Tabelas

Sumário

1. INTRODUÇÃO

A realização desta pesquisa consolida mais uma etapa de evolução e continuidade na carreira desta professora-pesquisadora da sala de aula. Na linha do tempo, minha trajetória docente começou precocemente com o ingresso na UNISO (Universidade de Sorocaba) para cursar Licenciatura em Matemática em 2010.

Nesse mesmo ano, com 18 anos, comecei a lecionar em escolas públicas das escolas estaduais de Sorocaba. No processo de formação inicial, em parceria com o exercício da docência, a constituição deste ser professor foi permeada de reflexões sobre as problemáticas do ensino da matemática. Mais especificamente, na busca por uma aula de melhor qualidade, para que os alunos se sentissem mais interessados em participar. Também estava interessada em compreender as dificuldades apresentadas nas resoluções erradas das tarefas propostas.

Com isto, notei que os alunos tinham muita dificuldade de entender o porquê de estarem aprendendo determinado conteúdo. Uma pergunta corriqueira em sala de aula ‘quem inventou aquilo?’ era uma manifestação dos alunos que sentiam necessidade de entender fatos que antecederam a formalização dos conceitos matemáticos. Estas situações vividas em sala de aula motivaram a realização do trabalho de conclusão de curso (TCC) com a temática do ensino por meio da história da matemática.

Após a graduação, em 2013, comecei a ministrar aulas de matemática em escolas particulares, além de assumir o cargo de professora efetiva da rede pública do Estado de São Paulo, lecionando para turmas do Ensino Fundamental II, em Sorocaba (SP).

No mesmo ano, ingressei em um programa de Pós Graduação lato sensu em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, ofertado pela Universidade Federal Fluminense (UFF-RJ). O tema da monografia articulou a história da matemática com a utilização do software Wingeon para a construção e verificação da Relação de Euler.

Concomitante ao desenvolvimento desta Pós Graduação, ingressei no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) na UFSCar – Sorocaba, em 2014. No decorrer das disciplinas desse curso fomos incentivados a estudar matemática pura e aplicada, por isso, inicialmente tive a ideia de desenvolver a dissertação na área da matemática aplicada. No entanto, no momento em que comecei cursar a disciplina de Avaliação Educacional (código MA42), cujo professor foi também o orientador desta pesquisa, senti motivada a direcionar a dissertação para o campo da Educação Matemática.

Nesta nova empreitada comecei a participar das atividades do GEPLAM (Grupo de Estudos e Planejamento de Atividades Matemáticas) no decorrer de 2015, em um período de discussões sobre o ensino-aprendizagem do conceito de simetria para o 6º ano do Ensino Fundamental II, o qual foi tema do desenvolvimento de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) de um membro do grupo.

Dado meu interesse inicial por esse conceito, houve uma proposta por parte do orientador desta pesquisa em articular simetria com a construção de mosaicos, o qual foi tema da dissertação de Miranda (2014), também membro do GEPLAM.

Miranda (2014) teve como objetivo, em sua pesquisa, analisar como um ensino que prioriza tarefas de natureza exploratório-investigativas pôde contribuir para a geração e/ou mobilização de conceitos geométricos em alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Mais especificamente, as tarefas contidas no trabalho de campo dessa dissertação, contemplaram a aprendizagem de conceitos geométricos envolvidos na composição de mosaicos com polígonos regulares. Com as experiências vivenciadas, os alunos passaram a elaborar registros escritos mais claros e utilizaram a linguagem matemática com maior domínio de termos matemáticos, em especial, os geométricos. Além disso, demonstraram se apropriar e/ou ampliar conceitos figurais como ângulos, retas, polígonos regulares e mobilizaram tais conhecimentos durante a exploração das propriedades e relações desses objetos.

Miranda (2014, p.19) Utilizou a expressão ‘exploratório-investigativas’ em sua pesquisa, com base em:

> Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) que empregam este termo para descrever tarefas mais apropriadas a alunos com pouca experiência em investigações matemáticas. Nas tarefas exploratórias, o que importa é busca por possibilidades e principalmente o desenvolvimento dos processos de argumentação e comunicação. Caso a tarefa avance para uma investigação, terá um ganho cognitivo ainda maior para os alunos, favorecendo os processos de justificação e prova.

No ano letivo de 2015 ministrei a disciplina de matemática apenas para turmas de 6º ano do Ensino Fundamental, na condição de professora efetiva de uma unidade escolar da rede pública de Sorocaba. Em processo de constituir-se como ‘ser professora-pesquisadora’ avaliei positivamente a viabilidade de desenvolver a dissertação de Mestrado com uma proposta de ensino-aprendizagem de construção de mosaicos para o 6º ano, utilizando o conceito de simetria nas diferentes transformações no plano (reflexão, rotação e translação).

A redação desta dissertação sofreu, a partir do próximo parágrafo, uma mudança da primeira pessoa do singular para a primeira pessoa do plural, por entendermos que o ritual de escrita acadêmica, muitas vezes, apresentada de forma linear para o leitor, é um processo de reflexões oriundo de leituras, debates e interlocuções com pessoas envolvidas direta e/ou indiretamente com o desenvolvimento da pesquisa. Apesar da autoria e responsabilidade pelos atos de pesquisar, a investigação não é mais individual. Há uma coletividade de debates e reflexões que vai sendo tecida, página a página, de forma singular.

A seguir, apresentamos para o leitor, o objetivo da pesquisa, a formulação da questão de investigação e uma síntese dos capítulos deste relatório; que constituíram o referencial teórico-metodológico para a busca por resposta aos nossos propósitos de pesquisa.

O objetivo dessa pesquisa é analisar a aprendizagem dos alunos submetidos a uma conexão matemática envolvendo transformações geométricas e a construção de mosaicos com polígonos regulares.

Para isso esta pesquisa analisou a mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica produzido por uma turma de 31 alunos de 6º ano, envolvidos na resolução de tarefas matemáticas, de acordo com o tema já anunciado.

A análise dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e os volumes do Caderno do Professor como material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) foram fundamentais para a sistematização da questão de investigação: *quais as contribuições das nossas tarefas para o ensino-aprendizagem de transformações geométricas a partir do 6º ano do Ensino Fundamental?*

Para atender aos nossos propósitos de investigação, desenvolvemos uma pesquisa de natureza qualitativa, na qual a análise interpretativa da produção escrita de nossos alunos bem como as interlocuções ocorridas em sala de aula, subsidiaram os resultados apresentados neste relatório.

Organizamos a apresentação da dissertação de Mestrado em seis capítulos, dentre os quais consideramos a Introdução como primeiro capítulo.

No capítulo 2 abordamos o conceito de simetria, seu propósito educacional nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e a abordagem deste tema e da construção de mosaicos nos diferentes volumes dos Cadernos do Professor de matemática para o Ensino Fundamental II. Dedicamos também à apresentação de nossa revisão bibliográfica sobre o tema transformação no plano envolvendo a construção de mosaicos.

No capítulo 3 apresentamos a teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, bem como os processos de raciocínio, representação e significação que utilizamos como modelo de análise; com base nas contribuições de João Pedro da Ponte e seus colaboradores.

No capítulo 4 apresentamos as etapas do percurso metodológico da pesquisa, apresentando uma caracterização do contexto escolar e dos alunos participantes da pesquisa, assim como uma descrição das fases do trabalho de campo para a produção de informações.

No capítulo 5 redigimos a análise da produção de informações geradas pelos alunos do 6º ano, a partir dos registros escritos das suas atividades matemáticas.

Nas Considerações Finais, descrevemos nossas reflexões sobre o processo de pesquisa desenvolvido, as contribuições para a educação paulista e para novas pesquisas em Educação Matemática.

2. UM OLHAR ENVOLVENDO O CONCEITO DE TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Neste capítulo apresentamos o conceito de transformações geométricas e suas implicações no tratamento escolar tanto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), quanto nos vários volumes do Caderno do Professor. Em relação a este material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) também apresentamos uma descrição do que é proposto para a construção de mosaicos, tendo em vista que nosso propósito de ensino-aprendizagem segue uma perspectiva intradisciplinar (conexão entre conteúdos de um mesmo componente curricular).

2.1 As transformações geométricas no plano

Considerando que esta conexão envolve a produção de mosaicos de acordo com transformações no plano (reflexão, translação e rotação), inicialmente apresentamos algumas definições e considerações, cujas enunciações apoiam-se em Rezende e Queiroz (2000) e Nasser, Sousa e Pereira (2004)

Quando pensamos na expressão ‘transformações geométricas’, usualmente, podemos associar a palavra transformação ao significado mudança. Logo, ao falar em “transformação geométrica”, estamos falando em mudanças em figuras geométricas (Nasser, Sousa e Pereira, 2004, p.2).

No contexto da educação básica a transformação geométrica pode deslocar um objeto de uma posição inicial a uma posição final sem alterar sua forma ou tamanho, o que designamos de isometria. O caso em que uma transformação não preserva as dimensões, mas mantém a mesma forma é denominada de homotetia, cuja característica é a semelhança entre a figura inicial e a figura final, após a transformação geométrica.

No contexto desta pesquisa enfatizamos a isometria; porém, vamos enunciar o que é uma transformação geométrica. É necessário definir que mudança geométrica é esta aplicada a uma figura inicial:

> Definimos uma transformação *T* no plano α como uma função bijetora *T:* $\alpha \rightarrow \alpha$*,* isto é, uma função tal que:
> a) a pontos distintos P e Q de α, *T* associa imagens distintas *T*(P) *e T*(Q) de α;
> b) para cada ponto Y de α, existe um único ponto X em α tal que Y = T(X).
> Se *F* é uma figura contida em α, a *imagem de F pela transformação T* é definida como T (*F)* = {T(P), P∈*F*} (REZENDE E QUEIROZ, 2000, p.213).

As isometrias, por sua vez, conforme Rezende e Queiroz (2000, p.214), "são transformações no plano que preservam distâncias, isto é, se $T : \alpha \rightarrow \alpha$ é uma isometria, para qualquer par de pontos A e B de α vale a relação $d\big(T(A), T(B)\big) = d(A, B)$ ou, simplesmente, $T(A)T(B) = AB$".

Não é nosso propósito apresentar a demonstração das propriedades destacadas a seguir mas, a mesma pode ser encontrada em Rezende e Queiroz (2000, p.214-215).

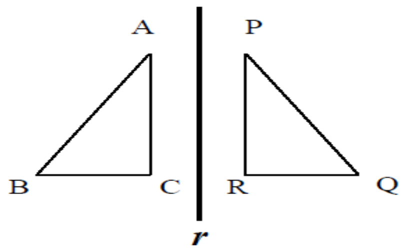
Uma isometria $T : \alpha \rightarrow \alpha$ possui as seguintes propriedades:

a) *T* leva pontos colineares em pontos colineares; consequentemente, *T* leva retas em retas e leva ângulos em ângulos.
b) *T* preserva medidas de ângulos, assim como, o paralelismo entre retas.

Como isometrias, vamos destacar a reflexão, translação e rotação.

A reflexão em relação a uma reta r (eixo de simetria) do plano, caracteriza-se por obter uma nova figura isométrica à figura original, devido ao fato de manter invariantes os comprimentos e a forma da figura. Porém, ao designarmos na figura original um determinado sentido ele aparece invertido na figura final, ou seja, a reflexão altera a orientação dos pontos do plano, conforme ilustração a seguir:

Figura 1: Reflexão em relação a reta r.

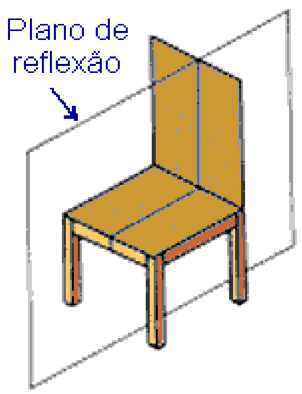


Fonte: Nasser, Sousa e Pereira (2004, p.4)

Em termos de definição, dada uma reta r, uma figura é obtida de outra por uma reflexão de eixo r se cada ponto da figura original (por exemplo, os vértices do triângulo ABC) está na mesma perpendicular a r que o ponto P correspondente da figura refletida. Os pontos A e P, por exemplo, distam igualmente de r, e situam-se em semi-planos distintos em relação a r. (NASSER, SOUSA E PEREIRA, 2004)

No caso de um objeto tridimensional, o elemento de simetria é um plano de reflexão. Vamos observar a figura a seguir:

Figura 2: Reflexão no espaço tridimensional.

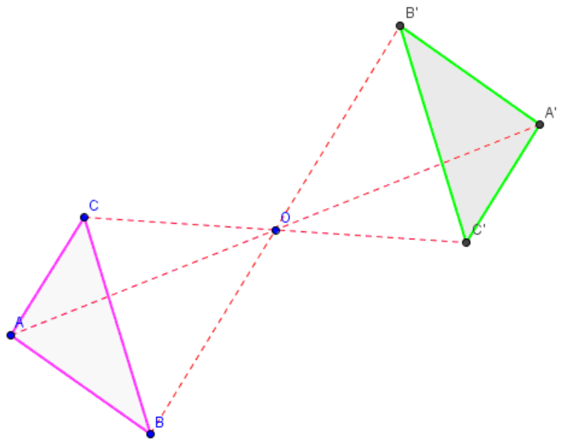


Fonte: http://www.seara.ufc.br/especiais/fisica/simetria/simetria1.htm

Se pudéssemos colocar um espelho plano na posição do plano visto nesta figura, geraria uma imagem que reproduz o objeto todo. Fizemos um alerta no item 2.2 deste capítulo, sobre a ausência em materiais didáticos de mencionar se será considerado para análise da propriedade de simetria a foto (representação bidimensional) ou o objeto em si (espaço tridimensional).

Temos também a simetria de reflexão em relação a um ponto que é a transformação de uma figura a outra congruente a ela passando por um ponto de reflexão, é construir um segmento de reta saindo do vértice da figura tendo como ponto médio o ponto de reflexão O, conforme ilustração a seguir:

Figura 3: Construção de pontos simétricos a partir dos vértices do triângulo.



Fonte: http://sites.unifra.br/Portals/13/CD_Recursos2010/gicele/sessao_5_1.html

O triângulo ABC foi refletido através do ponto O, de modo que este ponto foi considerado como ponto médio de BB', AA' e CC'. Este processo de construção pode ser visualizado em cartas de baralho, como a que destacamos a seguir:

Figura 4: Rei de Copas.

Fonte: http://noobtotest.blogspot.com.br/2010_11_01_archive.html

A simetria de rotação ocorre quando fazemos uma correspondência entre um ponto A com um ponto A' mantendo as distâncias ao ponto O (no qual chamamos de centro de rotação). Esta correspondência é realizada em uma determinada quantidade de graus, e o giro pode ser em sentido horário ou anti-horário.

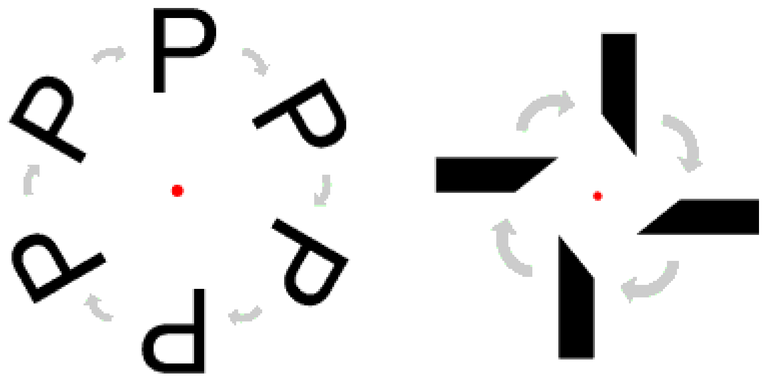
Para a definição de rotação necessitamos da noção de ângulo orientado:

> Seja O um ponto do plano e θ um número real com $-180 < \theta \leq 180$. A rotação de centro O e ângulo θ é a isometria $\Delta_{O,\theta}\colon\ \alpha \to \alpha$, que deixa fixo o ponto O e leva o ponto X de α, $X \neq O$, no ponto $X' = \Delta_{O,\theta}(X)$, tal que $OX = OX'$ e a medida do ângulo orientado $\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OX'}\right)$ é igual a θ, se

> $\theta \neq O$ e $\theta \neq 180$. Além disso, $OX' = OX$, sendo O o ponto médio de $\overline{XX'}$, se $\theta = 180$; e $X' = X$ se $\theta = O$. (REZENDE E QUEIROZ, 2000, p.224).

Podemos observar esta transformação no plano com a seguinte ilustração:

Figura 5: Rotação em torno de um ponto.



Fonte:http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap21s3.html

Nas imagens acima temos a rotação da letra P em torno de um ponto à 60° no sentido horário, e também a rotação de um trapézio no sentido horário mas com um ângulo de 90°.

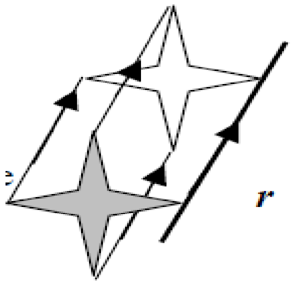
Quando realizarmos a simetria de rotação com exatamente 180º teremos a mesma situação que uma simetria de reflexão em relação a um ponto.

A noção de translação está diretamente relacionada com o conceito de vetor, que significa transportar. A translação de uma figura é o deslocamento de todos os seus pontos por segmentos paralelos, que tenham mesma distância e direção. Para essa simetria, temos o seguinte conceito moderno dessa simetria apresentado por Resende (2000):

> Sejam A e B pontos distintos do plano α. A translação $T_{AB} : \alpha \to \alpha$ é a isometria no plano α, que leva um ponto X de α no ponto $T_{AB}(X) = X'$, tal que ABX'X é um paralelogramo, se A, B e X não são colineares. Se A, B e X são colineares, então T_{AB} é tal que $\overline{XX'}$ está na reta AB e os segmentos AX' e BX têm o mesmo ponto médio. (REZENDE E QUEIROZ, 2000, p.221).

"A imagem de uma figura por translação mantém sua forma e tamanho" (NASSER, SOUSA E PEREIRA, 2004, p.7), conforme exemplo a seguir:

Figura 6: Translação

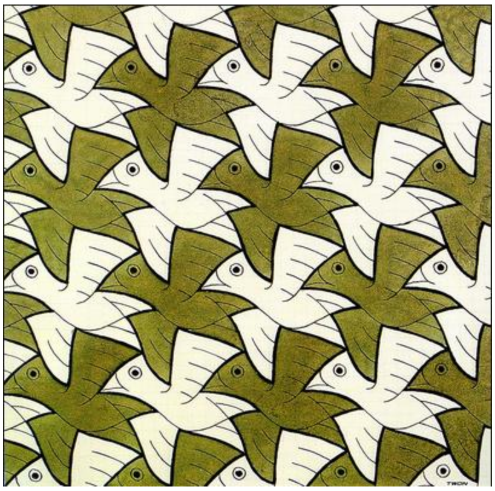


Fonte: Nasser, Sousa e Pereira (2004, p.7)

No que diz respeito à Geometria das Transformações, Maurits Cornelis Escher (1898-1972), foi um artista alemão que se utilizou muito as simetrias de reflexão, rotação e translação em suas obras. Um excelente material brasileiro produzido sobre este artista é o Mundo Mágico de Escher, o qual foi inserido em nossas referências bibliográficas.

A seguir reproduzimos uma imagem de um dos seus inúmeros trabalhos:

Figura 7: Obra de Escher



Fonte:
http://mandrake.mat.ufrgs.br/~mat01074/20072/grupos/mari_paula/simetria/isomerias1.htm

Na pintura acima, podemos observar a simetria por translação no momento em que as asas e bicos dos pássaros se encaixam perfeitamente na pavimentação do plano; o que traz uma beleza matemática para a obra.

2.2.O conceito de transformação no plano nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Aprender e ensinar Matemática no Ensino Fundamental II na perspectiva dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) pressupõe a análise da tríade aluno-professor-saber. O professor deve desempenhar o papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, levando em conta, que tornar o saber matemático acumulado em um saber escolar exige um tratamento deste conhecimento de modo a transformá-lo em informação (BRASIL, 1998).

No bloco temático Espaço e Forma, destacamos para o 6º e 7º ano

> a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998, p.51)

Em termos de conceitos e procedimentos as orientações deste documento curricular (BRASIL, 1998) contemplaram a classificação de figuras bidimensionais e tridimensionais segundo diversos critérios, entre eles, pela determinação dos eixos de simetria de um polígono. No caso dos objetos tridimensionais devemos utilizar planos de simetria. Ainda em relação ao conceito de simetria vale destacar as isometrias de reflexão, translação e rotação, além da identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, ângulos e comprimentos).

Para o oitavo e nono ano do Ensino Fundamental não observamos uma amplitude no estudo de simetria, conforme fragmento a seguir:

> Construindo figuras a partir de reflexão por translação, por rotação, de uma figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). (BRASIL, 1998, p.86)

Na seção orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, destacamos que “o estudo das transformações isométricas (transformações do plano euclidiano que conservam comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) é um excelente ponto de partida para a construção das noções de congruência” (BRASIL, 1998, p.124). Além disso, recomenda-se que o conceito seja também observado em situações cotidianas, enfatizando que em inúmeros casos temos aproximações de planos simétricos e nas respectivas representações planas tais planos reduzem a eixos de simetria.

Extrapolando o contexto geométrico, nos Parâmetros Curriculares Nacionais há a associação do conceito de simetria com eventos probabilísticos equiprováveis:

> Ao se realizarem experiências para calcular probabilidades, é interessante utilizar materiais manipulativos que permitam explorar a propriedade da "simetria" (dados, moedas), como também os que não possuem essa "simetria" (roletas com áreas desiguais para os números). (BRASIL, 1998, p.137)

Neste documento curricular a orientação didática para o conceito de simetria é que o mesmo seja desenvolvido via conexões internas (intradisciplinar) entre os blocos temáticos.

2.3. O conceito de transformação no plano no Caderno do Professor

O Currículo do Estado de São Paulo foi homologado em 2010 com o objetivo de ser concebido como um modelo curricular para as escolas de educação básica da rede estadual, ou seja, Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Este documento foi dividido em quatros grandes blocos: Ciências da Natureza, Ciências Humanas, Linguagens e Códigos e Matemática e suas Tecnologias. Como complemento à matriz curricular, temos o Caderno do Professor; o qual apresenta orientações didático-pedagógicas e traz como base o conteúdo do Currículo Oficial do Estado de São Paulo.

O Currículo de Matemática foi organizado em três grandes blocos temáticos: Números, Geometria e Relações. Estes blocos têm características especificas, mas que se unem uns aos outros (SÃO PAULO, 2010).

No bloco temático Números, o tratamento envolve as noções de contagem, medidas e representações simbólicas, tanto de grandezas existentes, quanto as imaginárias. Neste bloco podemos observar que a abordagem é focada na representação algébrica das operações fundamentais, além da noção de número e as relações de equivalência e ordem.

No segundo bloco Relações, temos as noções de medidas com a ideia de aproximação, relações métricas, relações de interdependência, proporcionalidade e ideia de função.

E, finalmente, temos o de Geometria, o qual contempla o nosso tema de pesquisa (conceito de simetria). Este bloco está focado na percepção, concepção, construção e representação; a percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais; a construção de formas geométricas e a concepção de espaço para a compreensão do nosso mundo.

No que diz respeito ao conceito de simetria, recorremos ao Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2010, p.51-52), por ser um material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo, o qual

> busca-se apresentar cada tema de uma maneira especialmente significativa do ponto de vista de seu valor formativo e construir uma articulação entre os diversos temas, de modo que se auxiliem mutuamente, ao mesmo tempo em que propiciem interfaces amigáveis com as outras disciplinas.

Na nova edição 2014-2017, os Cadernos do Professor e do Aluno são organizados em dois volumes semestrais para cada ano do Ensino Fundamental II. “Ao longo dos volumes, são apresentadas, além de uma visão panorâmica de seu conteúdo, oito Situações de Aprendizagem, que pretendem ilustrar a abordagem sugerida, instrumentando o professor para sua ação em sala de aula” (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 7).

O tema simetria envolvendo determinação de eixos de simetria as transformações no plano, foram abordados nos seguintes materiais: segundo volume do Caderno do Professor para o 6º Ano, o volume 1 do Caderno do Professor para o 7º Ano.

A discussão da simetria via conceito de lugar geométrico, no caso, a circunferência; teve destaque no segundo volume do Caderno do Professor para o 7º Ano.

Finalmente, no segundo volume do Caderno do Professor para o 8º Ano, o foco de abordagem do conceito de simetria foi feito a partir do recurso de representar figuras planas por meio de coordenadas cartesianas.

A seguir vamos nos deter na descrição sobre a proposta do estudo da simetria articulada com a construção de mosaicos utilizando polígonos regulares, tendo em vista, nosso objeto matemático voltado para o 6º ano do Ensino Fundamental.

O segundo volume do caderno do 6º ano contém tarefas envolvendo a identificação de eixos de simetria, bem como investigações de simetria axial de figuras geométricas. Destacamos o seguinte enunciado como exemplo: "Verifique se as letras maiúsculas e de forma do seu nome podem ser escritas por reflexão com o auxílio de um espelho, ou seja, informe qual(is) tem eixo de simetria" (SÃO PAULO, 2014-2017, p.25).

Neste volume as situações de aprendizagem, por um lado, envolveram propostas de tarefas com espelhos para a investigação de simetria de reflexão, como meio facilitador da compreensão de suas propriedades e de suas representações. Por outro lado, houve propostas de tarefas utilizando materiais manipulativos com as seguintes finalidades pedagógicas:

Tabela 1: Utilização de materiais manipulativos.

Tipo	Caracterização	Finalidade
Poliminós	Figuras planas formadas pela justaposição de certo números de quadrados iguais, de maneira que um lado inteiro de um quadrado fique em contato com um lado inteiro de outro quadrado	Simetria de reflexão e rotação
Geoplano	Feito em base de madeira e com pregos nos pontos de cruzamento da malha. Para a manipulação do geoplano conjuntos de elásticos, de preferência de cores diferentes	Identificação de simetria nas figuras geométricas
Malha	Pode ser quadriculada, formada por triângulos ou losangos para a construção de mosaicos.	Identificação de simetria nas figuras geométricas; simetria de reflexão e translações no plano.
Mosaico	Construção de mosaicos a partir de uma 'peça básica' (modelo) com critérios pré-	Valor estético e artístico nas atividades de

	definidos pelo professor: simetria de giro de um quarto de volta dado na ‘peça básica’, por exemplo.	construção, bem como o desenvolvimento de habilidades de identificação e criação de padrões e regularidades.

Fonte: elaborado pela pesquisadora

No que diz respeito à utilização de malhas, para o 6º ano, “o que interessa é a possibilidade de exploração das malhas e a descoberta de relações e propriedades de forma experimental” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.47).

Em relação à ‘peça básica’ que citamos no quadro há muitos desdobramentos que podem ser conduzidos em termos de construção de mosaicos. Um deles é a fusão de imagens em um mesmo desenho, técnica muito utilizada por Maurits Cornelis Escher em seus trabalhos, “com elementos que se opõem ou complementam (dia e noite, pássaros e peixes, escuro e claro, felicidade e tristeza, etc)” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.51).

O primeiro volume do Caderno do Professor para o 7º ano trouxe a orientação de que a ideia de simetria deve ser explorada “por meio de duas interpretações possíveis: simetria axial (ou simetria bilateral, ou ainda simetria de reflexão) e simetria de rotação (ou simetria rotacional)” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.58).

No referido caderno encontramos a definição das simetrias mencionadas aqui, no parágrafo anterior, como transformações no plano. No entanto, no montante de tarefas apresentadas entre as páginas 59 e 62, há ilustrações envolvendo o espaço tridimensional, logo se faz necessário mencionar se a propriedade de simetria será avaliada com referência a foto (espaço bidimensional) ou ao objeto em si (espaço tridimensional). Um dos casos é com relação à imagem da Igreja de São Francisco de Assis, Ouro Preto (MG), conforme figura a seguir:

Figura 8: Simetria axial.

Fonte: Caderno do 7º ano, v.1 (SÃO PAULO, 2014-2017, p.59)

Como orientação ao professor no referido caderno, destacamos que é esperado “que o aluno seja capaz de identificar o eixo de simetria” na imagem. Como procedimento para a indicação da simetria, segue: “traçar uma linha vertical passando exatamente pelo centro da Igreja” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.59). Ressaltamos que esta orientação é adequada se estamos considerando a fachada frontal da igreja. Se considerarmos a construção em si, teremos que mencionar o plano de simetria para tal análise.

Ainda com relação a este volume do Caderno do Professor recomenda-se o uso das malhas quadriculadas ou malhas de pontos como material para propor tarefas “em que o aluno tenha de desenhar figuras com simetria, completar figuras para que tenham simetria ou, ainda, exercitar movimentos de reflexão, translação e rotação de figuras no plano” (SÃO PAULO, 2014-2017, p.62).

No volume 1 do Caderno do Professor (7º ano) foi contemplado o estudo de polígonos envolvendo os seguintes conteúdos: soma de ângulos internos, definição de polígonos regulares. Estes dois conteúdos foram aplicados experimentalmente em tarefas envolvendo a construção de mosaicos. O objetivo era que os alunos verificassem que triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos, são os únicos polígonos regulares que pavimentam o plano.

No sexto ano os alunos aprenderam a utilizar o transferidor, descobrindo como construir e medir determinados ângulos, o que possibilitou um aprendizado da simetria de rotação.

Como trabalhamos com o Caderno do professor e do Aluno em nossa escola, desenvolvemos as tarefas envolvendo o uso da malha quadriculada, articulada com as questões de simetria de reflexão e translação.

Neste sentido, proporcionamos aos nossos alunos das quatro turmas de sexto ano, os conhecimentos prévios para a construção dos mosaicos com polígonos regulares, aplicando as transformações geométricas no plano.

2.4 A contribuição da produção acadêmica no estudo de transformações no plano

Em termos de teses e dissertações, o estudo bibliográfico realizado por Miranda (2014) com base no banco de dados publicado na Revista Zetetiké, no período de 2000 a 2011, revelou apenas três dissertações que pesquisaram a construção de mosaicos com polígonos regulares feitos por alunos do Ensino Fundamental II.

Revisamos a base de dados utilizada por Miranda (2014) e recorremos ao banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior – CAPES (http://www.capes.gov.br/) e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD (http://bdtd.ibict.br/) para a captação das pesquisas para nossa revisão bibliográfica. Para a triagem dos trabalhos utilizamos o uso de palavras-chave escolhidas de acordo com os propósitos de pesquisa já explicitados: transformações geométricas, mosaico, geometria, arte, simetria, isometria e pavimentação.

A busca gerou apenas quatro dissertações oriundas de mestrados profissionalizantes: duas em Ensino de Matemática (MEDEIROS (2012), RODRIGUES (2012)) e duas em Matemática em Rede Nacional (ALVES (2014), ROSSI (2014)).

A seguir apresentamos informações que julgamos relevantes em relação a cada uma das referidas pesquisas: objetivo da pesquisa, fundamentação teórica, foco temático, percurso metodológico, resultados e contribuições para o processo ensino-aprendizagem.

Medeiros (2012) desenvolveu sua dissertação de mestrado integrando Geometria e Arte através da construção de pavimentações do plano e de mosaicos de Escher realizadas por professores do ensino fundamental. O trabalho de campo envolveu a oferta de uma oficina para que os professores pudessem aprender sobre Geometria Dinâmica e sobre as novas formas de trabalhar com os alunos a Geometria escolar.

Em termos de pesquisa, a autora buscou responder a seguinte questão: “de que forma professores de Matemática se apropriam do software GeoGebra para trabalhar com mosaicos e transformações geométricas?” (MEDEIROS, 2012, p. 13)

O percurso teórico traçado pela autora pautou-se na descrição sobre as contribuições da teoria de Vygotsky e de Duval para o pensamento matemático. Medeiros (2012, p.31) interpretou a teoria de Duval como

> um refinamento das ideias de Vygotsky quanto á mediação por meio de registros, a importância da interiorização desses registros sob a forma das diferentes apreensões, e a utilização da tecnologia com registros dinâmicos se inserindo no processo de aprendizagem que acontece na zona de desenvolvimento proximal.

De acordo com a pesquisadora, em diversos momentos da oficina foi necessária intervenções, as quais foram feitas atuando na zona de desenvolvimento proximal das participantes, “ou seja, fazíamos intervenções necessárias, para que o conhecimento, que era potencial nas professoras-alunas, se transformasse em real” (MEDEIROS, 2012, p.121).

Medeiros (2012) desenvolveu sua pesquisa qualitativa via proposta de capacitação docente, sob a forma de oficina, proporcionando para sete professoras atuantes em escolas públicas da rede municipal de Sombrio (SC), a familiarização com o software GeoGebra.

Dentre as tarefas desenvolvidas na oficina com as professoras, houve a realização de uma prática com seus alunos, na qual o professor deveria criar uma situação de aprendizagem para a sua aula. Os conteúdos tratados nos encontros com as professoras foram as transformações geométricas no plano (reflexão, translação, rotação) por meio da construção de mosaicos, mosaicos de Escher e pavimentações, fazendo uso da geometria dinâmica.

A análise da produção de informações geradas pelos professores (filmagens, gravações das produções feitas no software e protocolos de construção) revelou que a introdução do software “exigiu que as professoras repensassem suas práticas docentes frente às inovações no uso da Tecnologia Informática” (MEDEIROS, 2012, p.123).

A pesquisa apresentou como contribuições para o ensino as atividades realizadas em conjunto, a interação social, o compartilhamento de experiências, as discussões, e os questionamentos que possibilitaram ‘novas’ formas de aprendizagem. Mais especificamente na perspectiva de Vygotsky, a troca de experiência e a interação entre professoras e a pesquisadora fizeram com que as participantes pudessem internalizar os conhecimentos tratados na oficina.

Medeiros (2012, p.120) ressaltou que “essas indagações e discussões são fundamentais, uma vez que nesta perspectiva, a linguagem exerce um papel de construtora impulsionadora do pensamento”.

O software GeoGebra oportunizou para as professoras participantes da oficina a distinção entre desenho e figura por meio das construções, nas quais elas puderam verificar as propriedades do objeto matemático. Na perspectiva de Duval (2011) o software permitiu a mobilização de diferentes registros semióticos na geometria: discursivo e figural. As professoras-alunas utilizaram os dois tipos de transformação semiótica: os tratamentos e as conversões.

A transformação de tratamento ocorreu quando foi executado “mudanças nas figuras nos mosaicos em movimento no estilo de Escher” (MEDEIROS, 2012, p.121). As conversões ocorreram, por exemplo, nas apreensões em geometria:

> de forma *sequencial*, na qual a professora-aluna reproduziu mosaicos no GeoGebra a partir de um roteiro; *perceptiva*, quando realizou a interpretação das formas das figuras nos mosaicos; *discursiva,* no momento em que interpretou os elementos das figuras, articulando com os enunciados nas atividades e compreendendo as propriedades dos objetos construídos (MEDEIROS, 2012, p.121)

A pesquisa de Rodrigues (2012) teve como objetivo examinar as possibilidades e potencialidades das Transformações Geométricas no Ensino Fundamental, assunto este considerado pela autora, como pouco abordado nos currículos no referido nível de ensino.

A motivação por pesquisar este assunto decorreu do seu desconhecimento quanto à pertinência deste conteúdo na educação básica, dado que no exame de seleção que classificou-a para uma vaga no Mestrado havia uma questão associando este tema com uma gravura da obra de Maurits Cornelis Escher.

Para investigar as possibilidades e a viabilidade do estudo das Transformações Geométricas no Ensino Fundamental foram realizadas duas experiências de ensino: uma com um grupo de professoras atuantes nos anos iniciais do Ensino Fundamental e outra para uma turma de alunos do 6º ano do mesmo nível de ensino.

Em relação às professoras, Rodrigues (2012, p.146) apurou que elas “tiveram alguma dificuldade em termos de nomenclatura, realização de movimentos e exploração espacial”. Em termos de potencialidade, as professoras reconheceram relações desse tema com outros tratados em suas salas de aula. Também destacaram o caráter estético da proposta, tendo em vista o uso de cores, figuras e formas, como sendo uma abordagem da Matemática.

Em relação aos alunos, este grupo, inicialmente não reconheceu a proposta de ensino da pesquisadora como relacionada ao estudo da Matemática. Porém, no decorrer do desenvolvimento das tarefas com as transformações geométricas, foi possível “estabelecer um outro modo de pensar matemática, mais flexível, mais criativo e, principalmente, com mais autonomia" (RODRIGUES, 2012, p. 147).

Essa nova relação estabelecida dos alunos com o conhecimento fez com que eles percebessem que a matemática não se restringe a "contas com lápis e papel, ela, agora, inclui movimentos, deformações, ampliações, desenhos, arte,... Ou seja, algo mais dinâmico que quebrou a rigidez da Matemática e que permitiu que ela *tocasse* os estudantes" (RODRIGUES, 2012, p. 147).

Como resultado da proposta de ensino, Rodrigues (2012) produziu um livro paradidático intitulado Matemática das transformações.

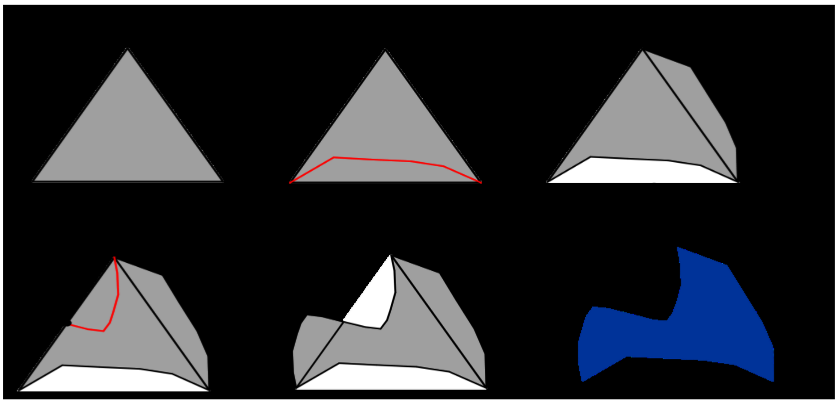
Alves (2014) teve como objetivo em sua pesquisa, facilitar o processo de ensino e aprendizado de simetria tendo como inspiração as obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher. Segundo a autora, em suas obras, Escher associou à arte uma forma de contextualizar a Matemática.

Alves (2014, p. 30) recorreu a uma das técnicas de produção das obras de Escher para produzir uma sequência didática para a produção de tesselações (pavimentações no plano):

> (...) basta retirar uma parte de um lado do polígono e fixar de outro lado, repete-se esta operação seguindo sempre o mesmo processo, até que se obtenha a figura desejada. Como o critério para construção foi o mesmo e partiram de polígonos que possuem a mesma área, elas se encaixam perfeitamente, compondo a tesselação do plano. Para cada tipo de transformação, existe uma técnica diferente, ou seja, um lugar exato onde deve ser fixado o pedaço retirado, para que ocorra a isometria desejada na tesselação.

Alves (2014) apresentou algumas técnicas que podem ser utilizadas para recriar as obras do artista holandês como, por exemplo, a translação para geração da figura base a partir do triângulo, utilizada na construção da tesselação. Reproduzimos a seguir uma figura da dissertação desta pesquisadora que ilustra uma sequencia de desenhos para determinar a figura de base inicial para a tesselação.

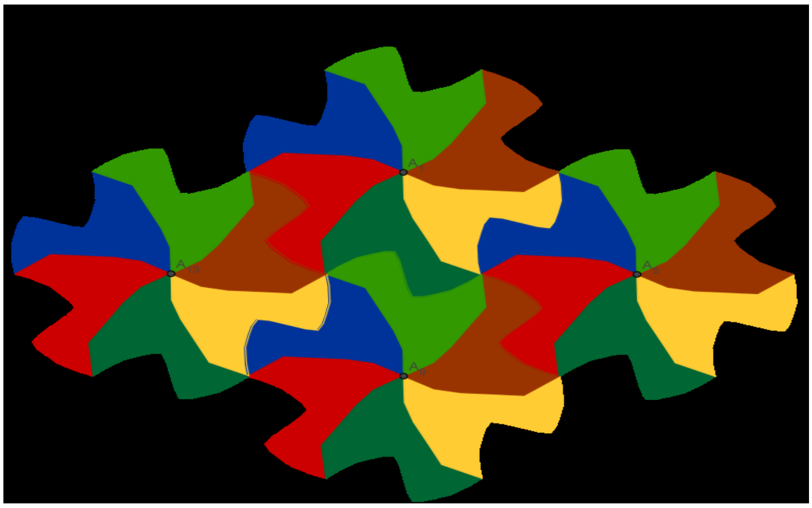
Figura 9: Tesselação como base em triângulo.



Fonte: Alves (2014, p.33):

A translação deste elemento, denominado base inicial, encaixando um nos outros, seguindo uma grade translacional de tesselação hexagonal, gerou a seguinte tesselação.

Figura 10: Pavimentação no plano (tesselação).



Fonte: Alves (2014, p. 34)

Em termos de relato de pesquisa, Alves (2014) não apresentou uma questão de investigação, assim como o referencial metodológico da pesquisa. O que temos em sua dissertação é um plano de aulas e um relato de prática de sala de aula envolvendo uma turma de 1ª série e outra de 2ª série do Ensino Médio.

Na leitura da descrição das aulas, cujo professor das turmas não era a pesquisadora; destacamos a ausência de informações sobre a parceria entre o docente e a pesquisadora, sobre as turmas, assim como o relato sobre a inclusão da tesselação nos conteúdos pré-determinados para o ano letivo.

Alves (2014, p.62) relatou em suas considerações finais que

> O impacto do trabalho nas turmas foi muito grande e positivo, comprovando que a atividade foi significativa e prazerosa para todos os envolvidos. Os alunos relataram que nem sonhavam com a existência de tanta Matemática por trás das obras de Maurits Cornelis Escher, para eles era tudo mágico e inalcançável e ficaram maravilhados por também serem capazes de produzir obras de arte.
>
> Desta maneira acredita-se que este trabalho venha contribuir para mostrar que a Matemática não está fechada em si mesma, que podemos contextualizá-la com as Artes, de uma maneira intrigante e desafiadora, tentando assim responder de forma prazerosa a eterna pergunta: Para que serve a tal da Matemática?

Rossi (2014) apresentou uma proposta de atividades voltadas ao ensino de isometria utilizando mosaicos, em especial os mosaicos de Escher, que são resultados de pavimentações do plano que possuem um padrão.

Na leitura desta dissertação não encontramos argumentos da pesquisadora para a construção da problemática de pesquisa. O que podemos destacar é que a escolha "do assunto isometria surgiu através dos seguintes questionamentos: como ela vem sendo ensinada em nossas escolas? Ela está relacionada com outros assuntos matemáticos? O que seu ensino/aprendizagem possibilita?" (ROSSI, 2014, p.11)

O objetivo de sua pesquisa foi criar uma estratégia diferenciada para ensinar os alunos, que hoje em dia demonstram falta de interesse nas aulas tradicionais, e fazer com eles aprendam através de atividades lúdicas.

Rossi (2014) propôs um conjunto de tarefas sobre isometrias para serem aplicadas, de preferência, no 7º ano do Ensino Fundamental. A primeira tarefa teve como objetivo analisar quais polígonos regulares pavimentam o plano. A segunda tarefa teve como objetivo pintar regiões poligonais para obterem os mosaicos com simetria. A terceira tarefa teve como objetivo identificar os tipos de simetrias nos trabalhos de Escher.

Neste sentido, o relato de Rossi (2014) não possui um percurso metodológico e em suas considerações finais, a autora esboça apenas suas expectativas quanto a uma possível aplicação de suas tarefas em sala de aula. Por fim, o relato de pesquisa não apresenta argumentos que permitam responder as indagações registradas no início de seu relatório.

As quatro dissertações de mestrado (MEDEIROS (2012), RODRIGUES (2012), ALVES (2014) e ROSSI (2014)) têm, em comum, a relação estabelecida entre geometria e arte; sob a perspectiva de estudo das obras de Escher.

Levando em conta o contexto de nossa dissertação de Mestrado, apenas a pesquisa de Medeiros (2012) apresentou um referencial teórico comum ao nosso, ou seja, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Vale também destacar que apenas a dissertação de Rodrigues (2012) apresentou um trabalho de campo envolvendo alunos do Ensino Fundamental, especificamente, uma turma de 6º ano.

Nossa pesquisa também abordou mosaicos, porém, não tratamos o assunto numa perspectiva interdisciplinar, ou seja, na relação entre arte e geometria. Abordamos a construção de mosaicos sob a ótica das conexões internas da matemática, mais especificamente, sua construção envolveu apenas polígonos regulares e o seu modelo (peça básica) ficou condicionado à aplicação das isometrias do plano (reflexão, translação e rotação).

3. OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA EM GEOMETRIA

Neste capítulo apresentamos uma introdução sobre a teoria do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval; a teoria das representações semióticas. Dedicamos a abordar os tipos de transformações de representações semióticas, bem como peculiaridades desta teoria para a geometria.

3.1. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica

A semiótica é "a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significado e sentido" (SANTAELLA, 2002, p.13). No caso da matemática, a comunicação extrapola o uso da língua materna, principalmente via registros escritos, pois nos comunicamos também por meio de gráficos, tabelas, simbologias algébricas, figuras geométricas, entre outras formas, as quais são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes.

De acordo com Duval (2012b), para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose (apreensão ou a produção de uma representação semiótica). A primeira delas é a formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado, como é o caso do desenho de uma figura geométrica. A segunda é o tratamento de uma representação, o qual é uma transformação interna desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. A reconfiguração que consiste no fracionamento de uma figura inicial é um tipo de tratamento envolvendo uma das numerosas operações que gera o registro das figuras. Finalmente, a conversão é uma transformação externa ao registro da representação a converter. Duval (2012b, p. 273) exemplifica a ilustração como uma "conversão de uma representação linguística em uma representação figural".

A teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2009, 2014) é um dos pilares teóricos-metodológicos utilizados nas produções acadêmicas vinculadas ao Grupo de Estudos e Planejamento de Aulas de Matemática (GEPLAM), por concentrar seus estudos na aprendizagem da matemática, segundo os aspectos cognitivos para a compreensão da mesma. Do ponto de vista cognitivo, o processo de aprendizagem requer a mobilização de diferentes registros semióticos de representação para que não haja confusão entre o objeto matemático e a representação do mesmo, bem como, a coordenação entre os diferentes registros.

Raymond Duval (2009) afirma que não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem se recorrer à noção de representação. A natureza dessa representação é semiótica e, de um modo geral, precisamos considerar a tríade: signo que é relacionado a um objeto concreto, para a especificidade matemática, o símbolo (signo) representa o objeto abstrato por meio da ação do sujeito do conhecimento (significante ou conceito).

A palavra abstrato diz respeito ao fato de que o objeto matemático não é perceptível, mas seu acesso se dá por meio de representações semióticas. Com efeito, outro argumento se constrói, desta vez em relação ao binômio objeto-representação: "não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação" (Duval, 2009, p14). Há uma ênfase para a necessidade de não confundir os objetos matemáticos com suas representações, pois diversas representações podem estar associadas ao mesmo objeto matemático.

Se considerarmos a simetria como uma propriedade que está presente em diversas representações de objetos matemáticos, podemos representar, por exemplo, no plano cartesiano o simétrico de um ponto em relação ao eixo y. Este registro de representação não tem o mesmo conteúdo que o registro semiótico via par ordenado, ou seja, $(a, b) \rightarrow (a, -b)$.

A teoria dos registros de representação desenvolvida por Raymond Duval estabelece que, para um indivíduo desenvolver o funcionamento do seu pensamento na aquisição de um conhecimento matemático é necessário tanto diferenciar uma noção científica dos registros semióticos que a representam, quanto conhecer a funcionalidade desses registros. Neste contexto, ocorre no funcionamento cognitivo do pensamento humano, aquisições funcionais relativas tanto aos sistemas orgânicos, disponíveis desde o nascimento, como a audição, a visão, o tato e a memória; quanto aos sistemas semióticos, usados para se comunicar e também para organizar e tratar as informações.

Com isso, numa atividade de aquisição de conhecimento matemático, tem que ser levados em conta dois componentes: os seus próprios conteúdos, nos quais existem métodos e processos para descobrir e estabelecer resultados e, o cognitivo, que segundo Duval (2009), a identificação de uma noção matemática com seus registros de representação semióticos pode constituir-se num dos problemas centrais da aprendizagem dessa noção.

Um registro de representação semiótico de um objeto matemático pode ser um símbolo, uma figura ou a língua natural. Cada tipo de registro apresenta um conteúdo diferente estabelecido pelo sistema no qual ele foi produzido.

A apreensão das características diferentes só terá sucesso quando o indivíduo que aprende for capaz de efetuar transformações nos registros, seja na forma de tratamento (operações internas a um mesmo registro, como por exemplo, "completar uma figura segundo critérios de conexidade e de simetria" (DUVAL, 2003, p.16)) e/ou na coordenação de registros que garantam a atividade de conversão (passagem de um registro a outro, com mudança na forma pela qual determinado registro é representado). Por exemplo: a ilustração é uma conversão de uma representação linguística em uma figura.

Desse modo, quando o aluno é capaz de coordenar espontaneamente os vários registros de representação de um mesmo objeto, significa que ocorreu de fato uma aprendizagem de determinado conceito, no caso, a simetria.

A seguir dedicamos a descrever conceitos que se referem às apreensões figurais, com o objetivo de subsidiar a análise da produção de informação desta pesquisa.

3.2. Os registros de representação semiótica em geometria

As tarefas escolares em geometria apresentam grande originalidade em relação aos outros ramos da matemática por dois motivos: por um lado, os problemas de geometria exigem uma forma de expressão intermediária entre a língua natural e a linguagem matemática; devido a forma de raciocínio ligada à uma axiomática que se desenvolve pelo registro da língua natural. “Por outro lado, a heurística de problemas de geometria refere-se a um registro de representações espaciais que originam formas de interpretações autônomas”: apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial das figuras. (DUVAL, 2012a, p.119)

A resolução de tarefas em geometria depende da conscientização da oposição entre as formas de apreensão perceptiva, operatória e discursiva das figuras. Seja qual for a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: a apreensão perceptiva que é o reconhecimento visual imediato da forma e outra controlada, que torna possível a aprendizagem; a apreensão (interpretação) discursiva dos elementos figurais.

Uma figura segundo Duval (2011, p.91) “é identificada pelas propriedades que não vemos porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade (itálico do autor). Essas propriedades só podem ser aprendidas por conceitos, isto é, os termos definidos nos enunciados”. O desenho (expressão gráfica), por sua vez, é uma “configuração particular que se mostra no papel, no quadro negro ou no papel do computador”.

Os elementos figurais podem ser representações visuais tridimensionais (cubo, pirâmide, esfera, entre outros), bidimensionais (polígonos, círculos, entre outros), unidimensionais (retas, curvas, entre outras) ou adimensionais (pontos notáveis como vértice, intersecção ou extremidade). A interpretação discursiva destes elementos figurais deve ser feitas através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses, tomando por base o conteúdo do enunciado. No entanto, Duval (2012a, p.123) adverte uma atitude comum dos alunos diante de uma tarefa geométrica: “eles leem o enunciado, constroem a figura e, em seguida, concentram-se na figura sem retornar ao enunciado".

Esta advertência reforça o fato de que uma transformação de registro, em geometria, não envolve apenas a mudança de registro. É necessário que os tratamentos figurais e discursivos se efetuem simultaneamente e de maneira interativa, ou seja, deve haver uma coordenação entre as transformações de representações semióticas envolvendo os tratamentos realizados na língua natural e na figura.

Segundo Duval (2012a, p.123) a apreensão operatória depende das modificações que uma figura pode sofrer:

a) Mereológica: envolve a operação de reconfiguração que consiste no fracionamento de uma figura inicial que são subfiguras da figura dada;

b) Ótica: envolve a transformação de uma figura em outra considerada imagem;

c) Posicional: trata-se do deslocamento ou rotação em relação a um referencial.

No caso da apreensão mereológica, podemos citar a reconfiguração como procedimento para o cálculo das áreas de figuras planas; no caso ótico temos a homotetia como exemplo e, na apreensão posicional podemos enquadrar as transformações no plano.

A apreensão sequencial é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura.

Em síntese, Duval (2014, p.37) afirma que o acesso aos objetos matemáticos, inclusive geométricos, "não é jamais empírico, é semiótico, o que não quer dizer teórico. Isto significa que a atividade matemática exige a utilização de *muitos sistemas de representação semióticos* e, também, a língua natural, mesmo que não sirva para calcular" (itálico do autor).

No caso da geometria estabelece-se que toda atividade geométrica requer um diálogo contínuo entre visualização (registro figural) e o discurso (registro na língua natural, dado o contexto da geometria euclidiana plana). Em termos de registro na língua natural, Duval (2012a, 2012b) interessa-nos o desenvolvimento do conceito de transformação no plano e as propriedades simétricas utilizadas nas figuras desenhadas.

4. O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Destinamos este capítulo para apresentar a opção metodológica, bem como o planejamento e aplicação de tarefas matemáticas para nossos alunos de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma unidade escolar da rede pública estadual do município de Sorocaba (SP), no qual assumimos o papel de professores-pesquisadores dos sujeitos da pesquisa.

4.1 Escolha da metodologia de pesquisa

Para responder a questão ‘quais as contribuições das nossas tarefas para a aprendizagem de transformações geométricas a partir do 6º ano do Ensino Fundamental?’; norteadora desta pesquisa, a opção metodológica adequada é a pesquisa qualitativa por estarmos interessados em processos de raciocínio, representação e significação. Mais precisamente, estamos interessados em saber como nossos alunos interpretaram as tarefas propostas e, consequentemente, que atividades matemáticas são produzidas neste processo.

O percurso qualitativo desta pesquisa é permeado pela modalidade de estudos naturalistas ou de campo, especificamente, uma pesquisa de intervenção (NACARATO et al, 2005). A produção de informações para nossa pesquisa foi obtida via registros escritos das atividades desenvolvidas pelos alunos em sala de aula ou extra-classe e anotações em diário. Trata-se de uma pesquisa de intervenção, devido à presença do professor-pesquisador na análise da aprendizagem dos conteúdos e temas já mencionados.

Nas próximas seções apresentamos características do contexto investigado: a escola, a turma do 6º ano e as tarefas planejadas e aplicadas na sala de aula.

4.2 O contexto escolar

A Escola Estadual Professor Júlio Bierrenbach Lima está localizada na cidade de Sorocaba, no estado de São Paulo, e abrange Ensino Fundamental II no período da tarde e Ensino Médio no período da manhã.

A escola possui 16 salas de aula (4 equipadas com televisores), laboratório de informática, laboratório de ciências/química, sala de vídeo, biblioteca, quadra poliesportiva coberta, cozinha, refeitório, sala de professores, secretaria, sala da direção, sala da vice direção, sala da coordenação e sala de multimeios.

A equipe gestora é formada por um diretor, um vice diretor e um coordenador para cada ciclo (Fundamental II e Médio). A instituição de ensino fica localizada em um bairro tradicional de Sorocaba que não possui muitas crianças; desta forma os alunos são em sua grande maioria de outras localizações da cidade. Isto ocorre, porque muitos discentes optam por deslocar uma distância maior em busca da nossa escola que possui um bom desempenho nas avaliações externas.

A referência de desempenho atualmente é a avaliação das escolas estaduais por meio do índice IDESP (Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo), o qual é calculado com base no desempenho dos alunos na avaliação do SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) e aplicado para turmas do 5º ano e 9º ano do Ensino Fundamental e 3º série do Ensino Médio, nas disciplinas de língua portuguesa e matemática.

A seguir apresentamos o índice de desempenho de nossa escola em 2014, superior à média estadual, municipal e da diretoria de ensino de Sorocaba:

Tabela 2: Idesp 2014 - Rede Estadual.

	Escola	**Município**	**Estado**
9º Ano E. F.	3,57	2,86	2,62
3º Série E. M.	2,81	2,13	1,93

Fonte: http://idesp.edunet.sp.gov.br/boletim_escola2014.asp?ano=2014

A escola também conta com diversos projetos educacionais, como o projeto de ciências em parceria com alunos da UNESP (Campus Sorocaba), projetos de meio ambiente, projetos culturais como saraus, entre outros.

Como docente a professora-pesquisadora ministrou a disciplina de matemática apenas para os 6º anos do Ensino Fundamental, na condição de professora efetiva da unidade escolar há dois anos.

Utilizamos em sala de aula o livro didático ‘Vontade de Saber Matemática’ e os Cadernos do Professor e do Aluno disponibilizados para a educação pública do Estado de São Paulo. O livro didático é inserido como apoio na apresentação dos conteúdos a serem tratados em sala de aula. Já os referidos Cadernos são utilizados para as tarefas propostas em sala de aula, assim como lição de casa.

A turma do 6º ano “D” que forneceu a produção de informações para a análise da fase empírica desta pesquisa era composta por 31 alunos. Dentre as quatro turmas do 6º ano, escolhemos esta por ser muito participativa, uma turma que se envolve nas tarefas, tanto em termos de desenvolvimento das suas atividades matemáticas quanto nas interações no decorrer da resolução. No entanto, as mesmas tarefas foram aplicadas para todas as turmas. Na sequência descrevemos o conteúdo de cada uma das fases da parte empírica de nossa pesquisa.

4.3 O cenário do trabalho de campo

A parte empírica de nossa pesquisa envolveu cinco fases. O desenvolvimento das três últimas proporcionou a produção das informações, as quais foram submetidas á análise que apresentamos no capítulo 5.

4.3.1 Primeira fase: visita à Universidade de Sorocaba (UNISO)

Para dar início às atividades com os alunos das turmas do 6º ano, programamos uma visita ao Laboratório de Educação Matemática da UNISO, coordenado pelo professor Dr. Antonio Noel Filho. O objetivo desta visita foi proporcionar aos alunos um olhar sob a geometria a partir da manipulação de materiais didáticos como instrumentos, jogos, figuras geométricas, tangram e mosaicos.

Tivemos a oportunidade de partilhar com os alunos algumas orientações dadas por Lorenzato (2006) em seu livro, que a utilização de todo e qualquer recurso didático exige cuidados básicos por parte do professor. Entre eles, destacamos a necessidade de garantir um tempo para que os alunos conheçam o material, ou seja, inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente.

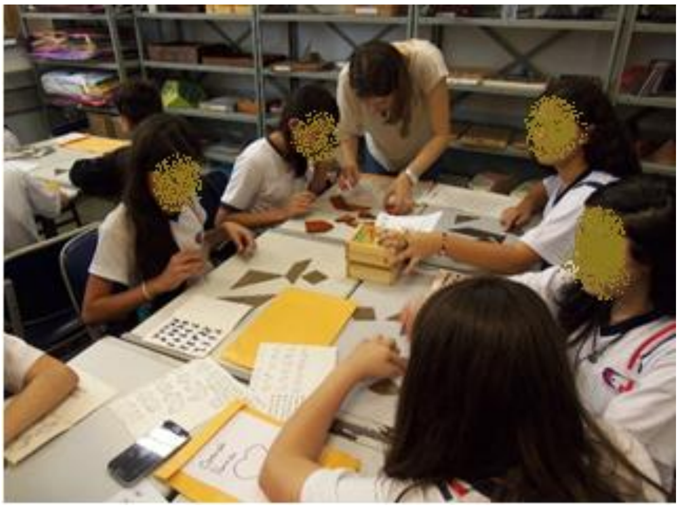
Outros aspectos a destacar foi o incentivo para a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos. Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das tarefas por meio de perguntas ou solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas.

Como o trabalho de pesquisa estava relacionado com simetria e mosaicos; foi priorizado que os alunos conhecessem os mosaicos e se envolvessem com eles; desta forma quando fossem cria-los em sala de aula eles já teriam uma certa familiaridade com o material.

Os mosaicos da UNISO são em grande parte relacionados com tipos diferentes de trangram, tendo uma grande diversidade de formas e tamanhos em suas peças, o que proporcionou a interação dos alunos com os diferentes tipos de mosaicos.

A foto a seguir ilustra um momento dessa produção de atividade matemática sob a supervisão da professora-pesquisadora:

Figura 11: Manipulação dos materiais didáticos.



Fonte: arquivo da pesquisadora

4.3.2 Segunda fase: abordagem das isometrias no plano

Antes de realizar as tarefas propostas na 3ª fase, utilizamos os materiais usuais (Caderno do Aluno e o livro didático) em sala de aula com o objetivo de capacitar os alunos para conceitos atrelados à ideia de simetria.

Inicialmente, disponibilizamos ensinar os alunos a utilizar instrumentos matemáticos como a régua e o transferidor. A régua os alunos já manipulavam, mas ainda se confundiam no momento de fazer as medições, já o transferidor houve um pouco mais de dificuldades, pois muitos nunca haviam trabalhado com um, por isso foi ensinado como medir ângulos e também construí-los.

Em seguida, iniciamos a introdução das transformações geométricas, tomando por base o livro didático. Neste material, a única propriedade de simetria abordada foi a reflexão, e mesmo assim, não é nomeado desta forma. Realizamos as tarefas propostas no livro, sendo que a maior parte se destinava a reconhecer figuras simétricas, outras tarefas visavam encontrar qual figura seria simétrica a uma figura inicial e, por fim, uma tarefa com o objetivo de trabalhar o uso da malha quadrangular.

Para complementar o conteúdo do livro didático, solicitamos aos alunos que realizassem uma pesquisa sobre a simetria de rotação e simetria de translação, com base em publicações na internet ou livros. Posteriormente, reservamos uma aula para reunir os resultados das pesquisas dos alunos e para a exposição e sistematização dessas outras propriedades de simetria.

Com os conceitos abordados realizamos as tarefas do Caderno do aluno. No que diz respeito à reflexão, tal material continha três tarefas utilizando a imagem do espelho para que os alunos encontrassem a reflexão, não utilizando as malhas; algo que está muito focado em toda a apostila e que poderia ser muito interessante e proveitoso para os alunos. Discutimos também três tarefas envolvendo a propriedade de translação com mosaicos, sem a utilização da nomenclatura simetria ou translação, mas realizado em malhas utilizando o conceito de construir um mosaico utilizando uma peça básica.

Finalizada a resolução das tarefas no caderno do Aluno passamos para a fase da aplicação das tarefas.

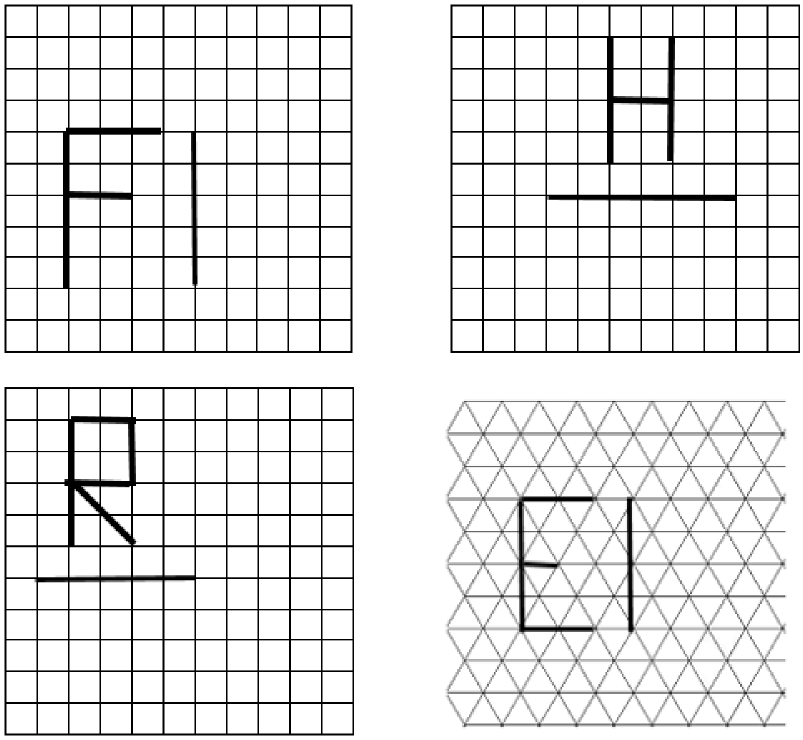
4.3.3 Terceira fase: aplicação de tarefas envolvendo as isometrias na malha quadrangular e triangular.

Nessa etapa realizamos a primeira aplicação de tarefas no decorrer de quatro aulas, com o objetivo de verificar se os alunos compreenderam as propriedades de simetria e suas habilidades para representá-la na malha quadrangular/triangular.

Apresentamos a seguir o conjunto de tarefas e as respectivas competências e habilidades almejadas na resolução das tarefas.

1) Desenhe a imagem de cada figura abaixo, pela reflexão de eixo r indicado.

Figura 12: Atividade 1.

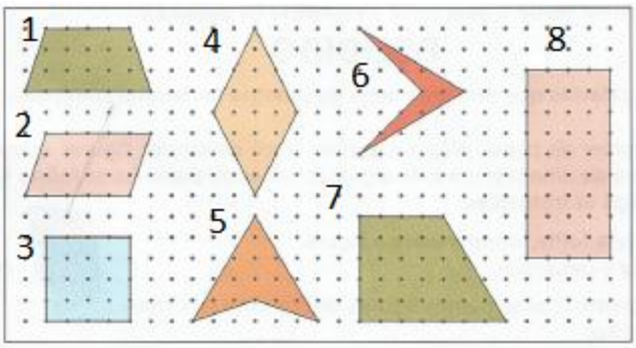


Fonte: arquivo da pesquisadora

Descreva o processo de realização da tarefa e as características observadas.

2) Observe os quadriláteros, e responda:

Figura 13: Atividade 2.



Fonte: *Reis e Trovon, 6o ano, 2010, p. 56-57.*

a) Complete a tabela de acordo com os quadriláteros acima:

Tabela 3: Atividade 2.

Aqueles que não têm nenhuma linha de simetria	

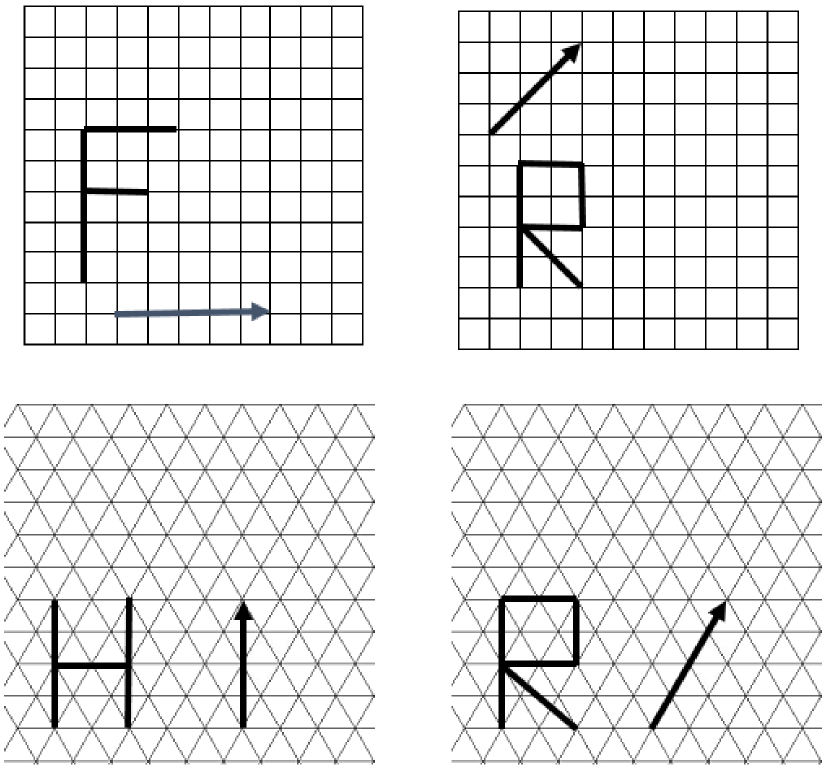
Aqueles que têm exatamente uma linha de simetria	
Aqueles que têm exatamente duas linhas de simetria	
Aqueles que têm exatamente três linhas de simetria	
Aqueles que têm exatamente quatro linhas de simetria	
Aqueles que têm mais de quatro linhas de simetria	

Fonte: Reis e Trovon, 6o ano, 2010, p. 56-57.

b) Olhe para os quadriláteros que têm quatro linhas de simetria. O que você pode dizer a respeito deles?
c) Olhe para os quadriláteros que têm duas linhas de simetria. O que você pode dizer a respeito desses dois tipos de quadriláteros com duas linhas de simetria?

3) Desenhe as imagens das figuras pela translação de direção, sentido e amplitude indicados pela seta.

Figura 14: Atividade 3.

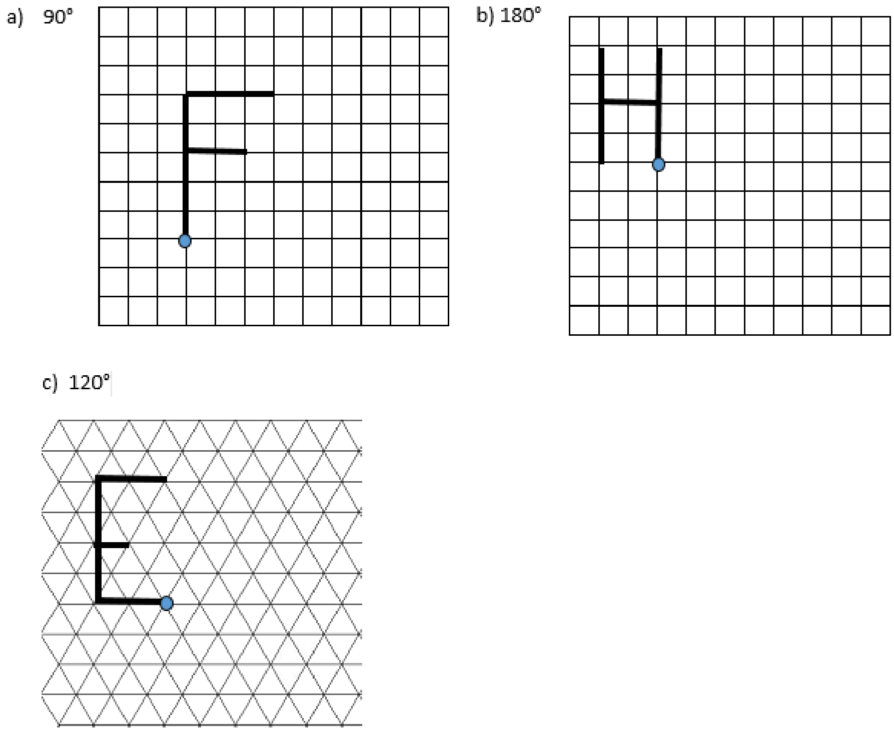


Fonte: arquivo da pesquisadora

Descreva o processo de realização da tarefa e as características observadas.

4) Desenhe as imagens das figuras pela rotação no sentido horário, de acordo com o ângulo indicado em cada uma:

Figura 15: Atividade 4.

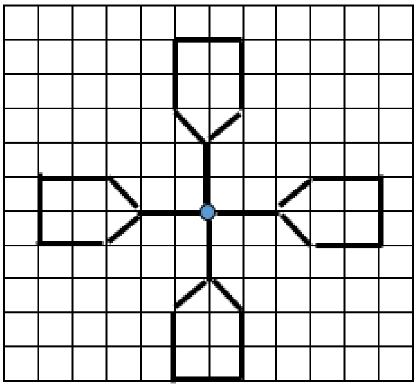


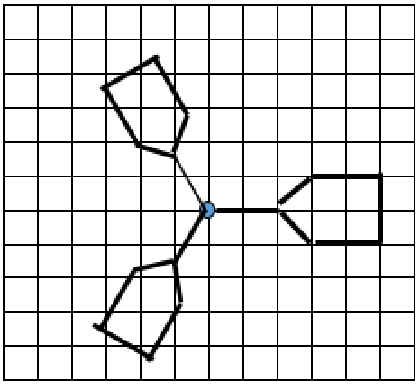
Fonte: arquivo da pesquisadora

Descreva o processo de realização da tarefa e as características observadas.

5) Vamos observar as pás de um ventilador de teto. Se o ventilador possui 4 pás, qual é o ângulo de rotação que uma pá descreve até ocupar o lugar que a pá seguinte ocupava? Esse ângulo de rotação é o mesmo no caso do ventilador de 3 pás?

Figura 16: Atividade 5.





Fonte: arquivo da pesquisadora

Nas tarefas 1,3 e 4 buscamos analisar se os alunos conseguiam realizar a construção dos tipos de simetrias através das informações pedidas, utilizando corretamente as distâncias na reflexão e observando a direção na simetria de translação, utilizando de forma correta o transferidor para medir o ângulo pedido na simetria de rotação.

Na tarefa 2, tínhamos como objetivo instigar o aluno para além da simetria de reflexão, pois ele teria que encontrar todos os eixos de simetria e ainda observar semelhanças e diferenças entre os quadriláteros para poder responder as perguntas.

Na tarefa 5, apresentamos um esquema de dois ventiladores e pedimos para que os alunos observassem a rotação deles. Queríamos que os alunos percebessem a diferença no ângulo de rotação das figuras.

4.3.4 Quarta fase aplicação da tarefa envolvendo a condição de existência para um mosaico

Feito o tratamento das transformações geométricas, abordamos a construção de mosaicos. O objetivo era que os alunos entendessem quais são as regras para se formar um mosaico, para que pudessem criar um mosaico. Pedimos que utilizassem polígonos regulares, verificassem quais combinações seriam possíveis, e por fim explicassem porque foi possível construir essas combinações.

Foi distribuído para os alunos, uma folha contendo uma grande quantidade de triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos e hexágonos. Além disto, apresentamos duas tarefas:

1) Dado os polígonos, com quais combinações podemos construir um mosaico sem que as figuras se sobreponham ou formem espaços vazios.

2) A partir da primeira tarefa, você conseguiria criar uma regra geral para saber quando é possível formar um mosaico? Se sim, qual seria?

Como resposta, esperávamos que os alunos chegassem as seguintes combinações de polígonos regulares: seis triângulos equiláteros, quatro quadrados, três hexágonos, dois hexágonos e dois triângulos equiláteros, um hexágono e quatro triângulos equiláteros.

Em seguida, almejamos que os alunos fossem capazes de redigir uma resposta caracterizando que a condição para obter um mosaico é que dado um ponto de encaixe entre os polígonos regulares, a soma dos ângulos em torno dele seja 360°.

4.3.5 Quinta fase: construção do mosaico com polígonos regulares via transformações geométricas

Por último, foi aplicada a tarefa envolvendo a conexão entre as isometrias de reflexão, translação e rotação e a construção dos mosaicos. No Caderno do Professor e do Aluno, isto foi pouco explorado. Há apenas uma tarefa relacionando a isometria de translação e o mosaico, porém, sem mencionar a utilização destes conceitos.

Propomos duas tarefas para essa fase. Na primeira parte elaboramos um enunciado de tarefa contendo três mosaicos que possuíam pelo menos uma das isometrias que trabalhamos e pedimos a identificação, bem como o desenho dos possíveis eixos de simetria.

Para a segunda tarefa formulamos o seguinte enunciado: *construa um mosaico utilizando os polígonos regulares e o conceito de simetria. Na sequência, descreva como você elaborou a construção.*

Um fato a destacar na aplicação destas duas tarefas foi a ‘ocupação da escola’ no decorrer do desenvolvimento da última fase do trabalho de campo, o que prejudicou a finalização desta tarefa.

O ano letivo de 2015 foi muito turbulento na maioria das escolas estaduais de São Paulo. Logo nos primeiros meses de aula, houve uma greve de professores que durou 92 dias, considerada uma das mais longas do estado de São Paulo, a qual afetou a continuidade dos trabalhos nas escolas. Além disto, a secretaria de educação do estado anunciou em outubro de 2015, que seria realizada uma reorganização escolar, em que cada unidade escolar atenderia apenas um segmento escolar, já para o ano de 2016.

Esse anúncio acarretaria em muitas mudanças para os alunos, devido à transferência dos mesmos para outras escolas conforme sua localização; não teriam mais o poder da escolha da escola onde gostariam de estudar.

Com tudo isto, houve muitos protestos contra uma reorganização feita de forma tão rápida, por parte de professores, pais e alunos, e esses últimos resolveram se organizar e protestar de forma mais intensa, o que acarretou nas ocupações de suas escolas. A ocupação, por parte dos alunos, começou na cidade de São Paulo e, aos poucos, o número de escolas ocupadas foi aumentando.

A escola Prof. Julio Bierrenbach Lima foi ocupada no dia 26 de novembro, data em que estava finalizando a pesquisa de campo com os alunos do 6ºD. Desta forma, as últimas atividades dos alunos ficaram incompletas, onde quatro duplas não completaram a tarefa deixando de realizar o mosaico. A escola se manteve ocupada por uma semana, mas com a chegada do mês de dezembro os alunos não retornaram para as aulas.

Apresentamos uma foto ilustrando o ato:

Figura 17: Fachada da escola.

Fonte: arquivo da pesquisadora

A região de Sorocaba teve 21 escolas estaduais tomadas por estudantes. Na tarde de quinta-feira, dia 26) a unidade Júlio Bierrenbach Lima, no Jardim Santa Rosália foi ocupada, em Sorocaba (SP), conforme notícia disponibilizada na imprensa (http://g1.globo.com/sao-paulo/sorocaba-jundiai/noticia/2015/11/ocupações-em-escolas-estaduais-continuam-em-sorocaba.html) e no ‘Anexo A’, deste trabalho.

A ocupação acabou quando o governo do estado decidiu suspender a reorganização escolar, assim os alunos que ocuparam as escolas da rede estadual foram desocupando as escolas.

No próximo capítulo dedicamos a escrever a análise da produção de informações geradas pelos alunos, relatando os resultados do trabalho de campo.

5. ANÁLISE DA PRODUÇÃO DAS INFORMAÇÕES: 3ª A 5ª FASE

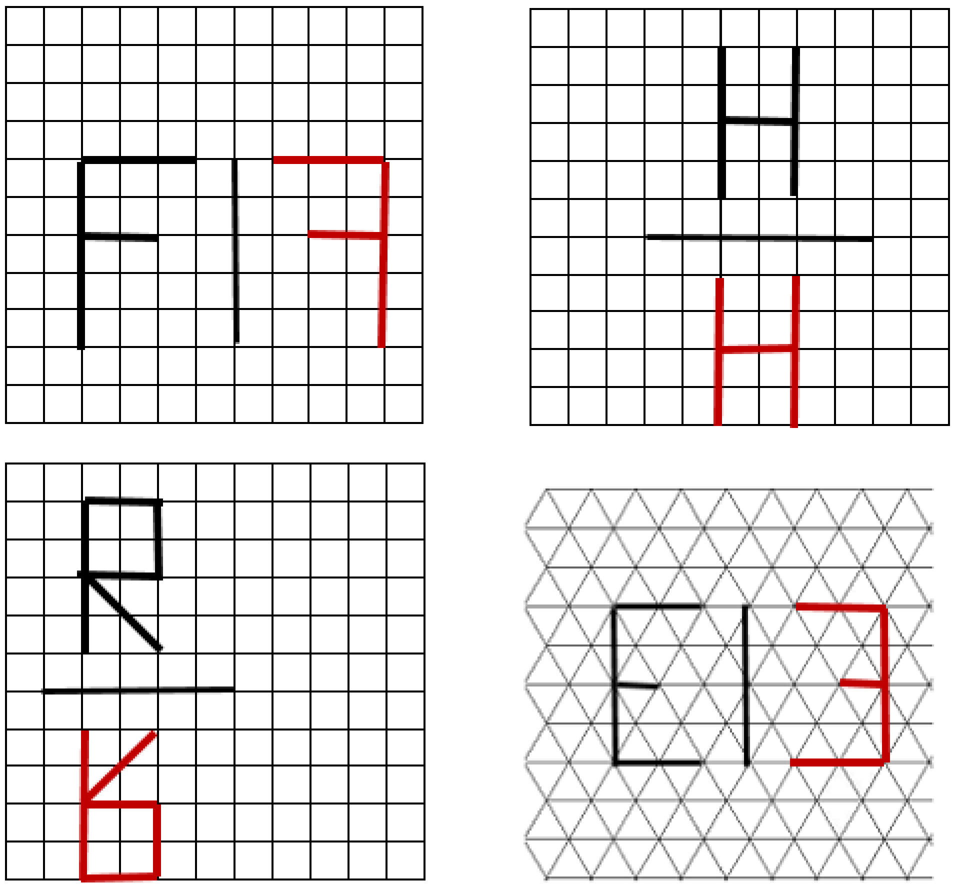
Nesta etapa da redação do relatório de pesquisa organizamos a análise das atividades matemáticas produzidas pelos 31 alunos da turma 6º D, divididos em duplas (D1 a D15) além do aluno nomeado de D16, levando em conta o conteúdo de cada um dos enunciados das tarefas propostas.

Em termos de registros de representação semiótica, as atividades geométricas dos alunos foram desenvolvidas mediante o uso do registro figural e da língua natural, conforme os pressupostos da teoria de Duval (2011, 2014). O registro das figuras foi utilizado para visualizá-las e reconhecer suas propriedades. Já o registro na língua natural foi utilizado para descrever o objeto e enunciar definições.

5.1 Fase 3: análise de cinco tarefas envolvendo as isometrias na malha quadrangular e triangular

A proposta da tarefa envolveu o desenho de cada imagem, pela reflexão na reta r, cujas respostas apresentamos a seguir:

Figura 18: Resolução da atividade 1.

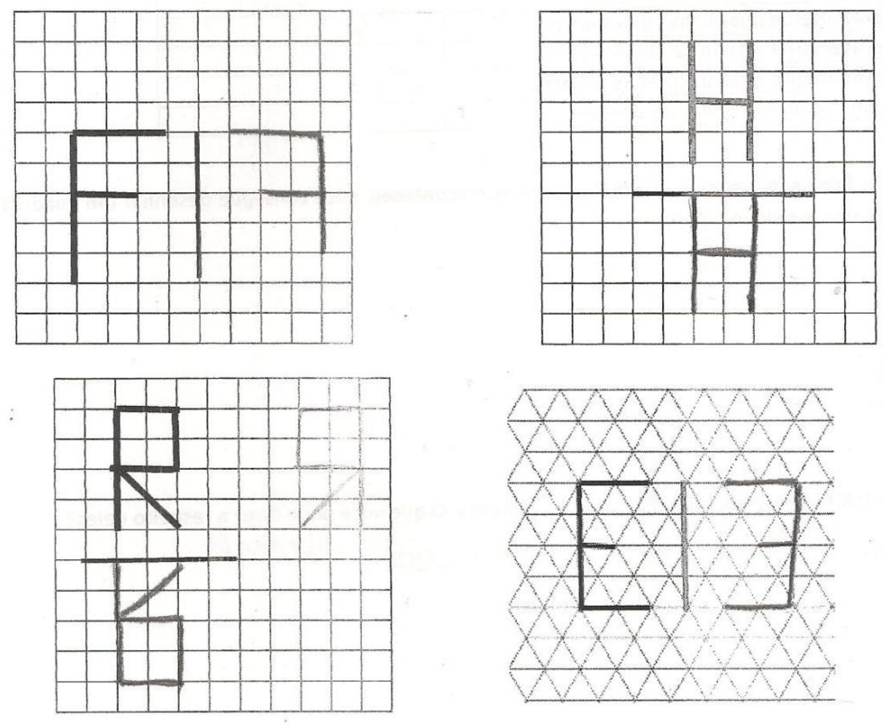


Fonte: arquivo da pesquisadora

Posteriormente, solicitamos aos alunos a descrição do processo de realização da tarefa e as características observadas.

Constatamos que não houve dificuldades dos alunos quanto à compreensão do que tinha sido solicitado no enunciado. Vinte e sete alunos completaram a primeira parte da tarefa realizando o desenho da letra refletida de forma coerente à definição de reflexão na reta r. Apenas duas duplas transformaram cada letra em outra congruente a ela, porém, os vértices não estavam à mesma distância da figura (letra) original em relação ao eixo de simetria. A seguir apresentamos o protocolo da dupla D8, no qual foi contemplado na imagem, a preservação da forma das figuras e dos ângulos; porém, não das distâncias.

Figura 19: Resolução da questão 1 da dupla 8.



Fonte: arquivo da pesquisadora

No momento de descrever o processo de realização da tarefa e suas características, a maioria dos alunos explicou que associou a representação da letra através do eixo de simetria como se fosse um espelho, explicando que a imagem estava sendo refletida por meio da reta r.

A dupla D1 fez a seguinte justificativa: *é apenas imaginar um espelho, porque são figuras refletidas.* Neste registro na língua natural notamos que as alunas buscaram observar a simetria recorrendo ao espelho como um recurso a fim de que tanto a definição de simetria de reflexão quanto suas propriedades fossem construídas a partir da observação, ou seja, da apreensão discursiva (interpretação) da figura construída.

Vale ressaltar que a dupla D1 desenhou corretamente a imagem de cada uma das quatro figuras, no entanto, na conversão para o registro na língua natural não houve menção às propriedades da simetria de reflexão.

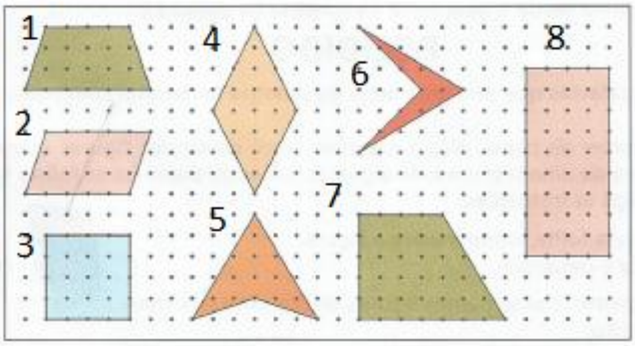
Em termos de recurso para observar a simetria destacamos o relato da dupla D6 que utilizou o celular *e refletiu para conseguirmos desenhar o desenho refletido.*

Algumas duplas citaram como característica observada 'a mudança de direção das letras', porém, o correto é a mudança de sentido. A dupla D3 experimentou o ato de dobrar a folha no eixo para obter a reflexão da imagem. No decorrer da atividade matemática, a maioria das duplas utilizou adequadamente as propriedades de reflexão, levando em conta a modificação posicional das figuras para que se configurar a apreensão operatória, segundo Duval (2012a).

Em relação a segunda questão, descrevemos seu enunciado e a respectiva análise.

Observe os quadriláteros, e responda:

Figura 20: Quadriláteros



Fonte: Reis e Trovon, 6o ano, 2010, p. 56-57.

a) Complete a tabela de acordo com os quadriláteros acima:

Tabela 4: Resolução da atividade 2a.

Aqueles que não têm nenhuma linha de simetria	*2 e 7*
Aqueles que têm exatamente uma linha de simetria	*1, 5 e 6*
Aqueles que têm exatamente duas linhas de simetria	*4 e 8*
Aqueles que têm exatamente três linhas de simetria	-
Aqueles que têm exatamente quatro linhas de simetria	*3*
Aqueles que têm mais de quatro linhas de simetria	-

Fonte: Reis e Trovon, 6o ano, 2010, p. 56-57.

Na primeira parte desta tarefa, os alunos deveriam completar o quadro de acordo com o número de eixos de simetria de cada figura, esperava-se que os alunos conseguissem identificar quantos eixos cada quadrilátero possuía, para assim poder responder os outros itens da questão, segue um quadro do desempenho quantitativo dos alunos:

Tabela 5: Rendimento da segunda questão.

	Certo	**Errado**
Quadrilátero 1	10	6
Quadrilátero 2	8	7
Quadrilátero 3	12	4
Quadrilátero 4	10	6
Quadrilátero 5	16	0
Quadrilátero 6	15	0
Quadrilátero 7	16	0
Quadrilátero 8	8	8

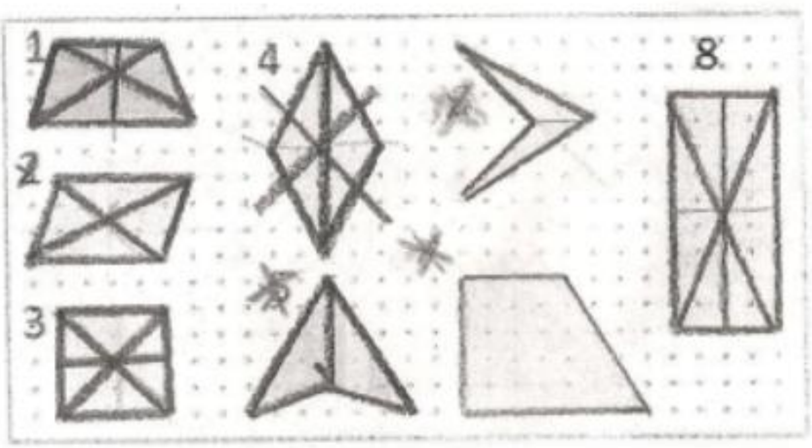
Fonte: arquivo da pesquisadora

A partir da tabela acima, verificamos que todos acertaram a quantidade de eixos dos quadriláteros 5, 6 e 7. O quinto e sexto quadrilátero são não – convexos. Já no quadrilátero 3, a grande maioria respondeu de forma correta, mas quatro duplas não conseguiram encontrar todos os eixos, deixando de localizar os eixos das diagonais do quadrado. Nos quadriláteros 1, 2, 4 e 8, várias duplas encontraram os eixos de simetria, mas fizeram eixos que não dividiam as partes de forma simétrica. A dupla D1 por exemplo, fez exatamente desta forma, desenhando mais eixos de simetria do que os existentes.

No caso dos quadriláteros 2 e 6, uma dupla deixou de preencher a tabela, logo, estes estão com apenas quinze respostas.

A atividade matemática dos alunos em termos de apreensão operatória, segundo Duval (2012a), mobilizou modificações na forma mereológica, dado o fracionamento da figura inicial a partir do desenho dos eixos de simetria.

Figura 21: Resolução da questão 2a da dupla D1.



Aqueles que não têm nenhuma linha de simetria	7
Aqueles que têm exatamente uma linha de simetria	5 e 6
Aqueles que têm exatamente duas linhas de simetria	2
Aqueles que têm exatamente três linhas de simetria	1-3
Aqueles que têm exatamente quatro linhas de simetria	4 e 8
Aqueles que têm mais de quatro linhas de simetria	0

Fonte: arquivo da pesquisadora

Com o quadro notamos que os alunos conseguiam identificar os eixos de simetria, mas começaram a criar outros eixos nos quadriláteros, não percebendo que apesar dos lados ficarem parecidos não havia a reflexão através do eixo. A operação de reconfiguração em nosso estudo depende da identificação de eixos de simetria, de modo que as subfiguras preservem a propriedade de reflexão para compor a figura inicial.

Na correção deste item, foi pedido aos alunos que utilizassem suas próprias ideias para reflexão anotadas no item um, ou um espelho, ou a dobradura para que verificassem se os eixos encontrados eram todos de simetria e junto com a professora foram realizando esta correção. Muitos foram percebendo o equívoco na construção de alguns eixos, pois apesar da aparência da propriedade de reflexão, determinados eixos não estavam em posição que possibilitasse o espelhamento, e assim as várias duplas que tinham colocados eixos a mais nos quadriláteros notaram o que erraram.

b) Olhe para os quadriláteros que têm quatro linhas de simetria. O que você pode dizer a respeito deles?

Neste item, doze duplas de alunos não conseguiram responder de forma correta, três duplas perceberam a existência de ângulos retos, e apenas uma dupla mencionou que o polígono possuía lados e ângulos iguais, porém não perceberam que essa é a definição de polígono regular.

Dentre as dificuldades percebidas na execução desse item, verificamos que as doze duplas não conseguiram identificar os elementos necessários para que exista a formação dos quatro eixos de simetria, impedindo a observação de que os ângulos e lados não são iguais. Para as três duplas que mencionaram ângulos retos, avaliamos que eles conseguiram identificar que os ângulos da figura são iguais, achando que isso era suficiente para atender a propriedade de reflexão. No entanto, não perceberam que o retângulo contempla apenas dois eixos de simetria.

Por fim, uma dupla, a dupla D2, conseguiu chegar na definição de polígono regular, mencionando o caso dos lados e ângulos iguais, apesar de não terem mencionado que o polígono era regular, eles desenvolveram de maneira criteriosa o caso, descrevendo de maneira correta todas as propriedades esperadas para esse quadrilátero.

Houve uma grande dificuldade por parte dos alunos em identificar o polígono com quatro eixos de simetria, assim como na caracterização do mesmo.

No momento da correção dessa questão com a turma toda, foi indagado qual era a única figura que tinha os quatros eixos de simetria; os alunos identificaram o quadrado. Pelo fato de já terem estudado a figura geométrica quadrado, incentivamos os alunos dizerem as diferenças do quadrado em relação aos outros quadriláteros e assim descobrir porquê é o único dos polígonos disponibilizados, com maior número de eixos de simetria.

Desta forma, foi desencadeada a discussão sobre o assunto: a primeira observação foi que o quadrado tem quatro ângulos iguais, mas uma aluna respondeu que o retângulo também tem esta característica; outro aluno mencionou sobre os lados serem congruentes e, uma dupla destacou o losango. Assim a dupla que já tinha acertado, explicou que para o polígono ter os quatro eixos de simetria era necessário ter os lados e ângulos com mesma medida. Foi perguntado à turma como se chamava o polígono com estas propriedades; alguns souberam responder que tratava de um polígono regular.

Quando foi feita a correção com a turma foi possível perceber que os alunos sabiam discutir sobre isometrias, mas as dificuldades na conversão do registro figural para o registro na língua natural ainda eram nítidas. Na concepção de Duval (2014), a atividade geométrica requer contínuo diálogo entre a visualização (registro figural) e o discurso escrito, com o objetivo de transitar do senso comum para a linguagem matemática (expresso das propriedades que regem as transformações do plano). No grau de escolaridade dos alunos envolvidos nessa pesquisa, as interlocuções da professora-pesquisadora foram fundamentais para que os alunos conseguissem enunciar as propriedades requeridas.

No item b, as duplas sabiam que se tratava de um quadrado, e oralmente já tinham explicitado que o quadrado tem lados e ângulos iguais, mas quando pedido para transcrever estas características deixavam de lado esta informação e utilizavam outras como o fato de ser um polígono convexo.

c) Olhe para os quadriláteros que têm duas linhas de simetria. O que você pode dizer a respeito desses dois tipos de quadriláteros com duas linhas de simetria?

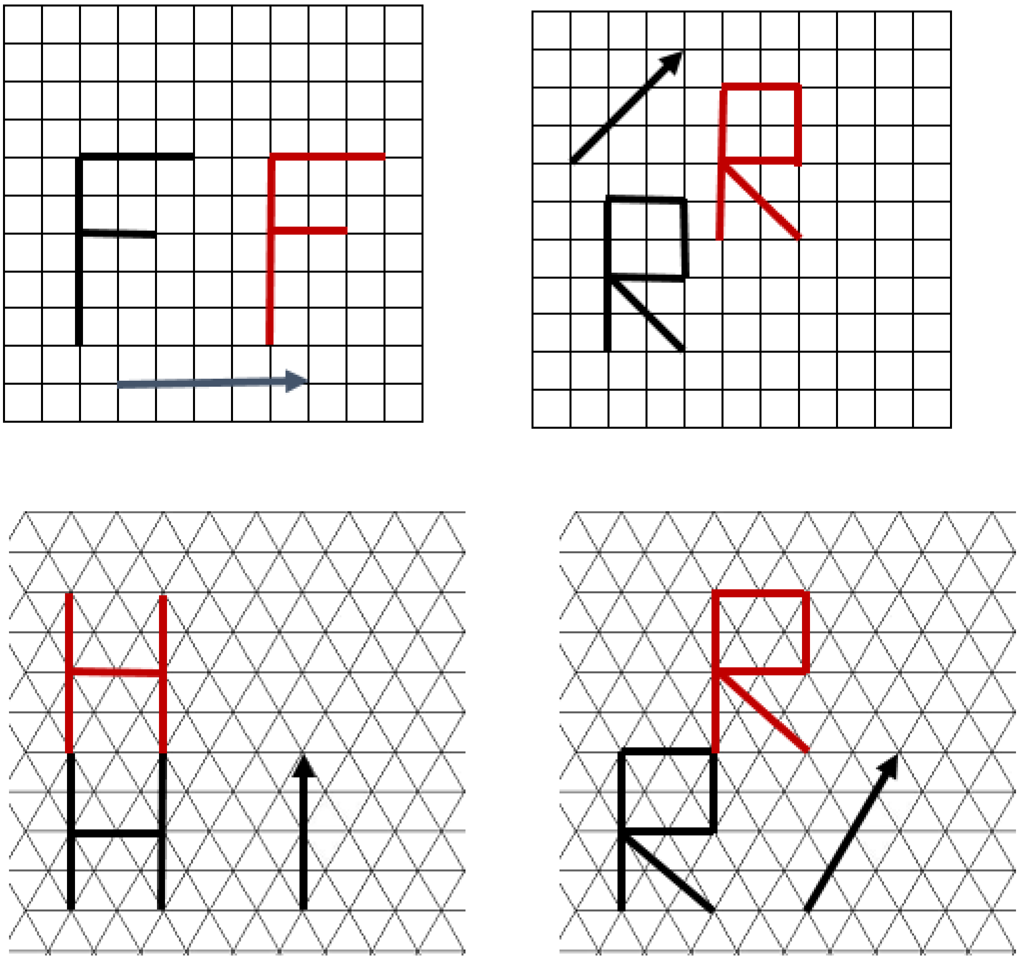
Da mesma forma que no item anterior houve uma grande dificuldade na execução, todas as duplas não conseguiram identificar de maneira correta as características da transformação do plano.

Em alguns casos, os alunos mencionaram as propriedades dos paralelogramos e de polígonos convexos, porém não houve uma relação entre essas propriedades com a característica de se ter todos os lados ou ângulos congruentes.

A dificuldade de relacionar as propriedades dos polígonos com o que se desejava foi o fator preponderante para a execução do exercício, muitos sabiam as definições, porém não as usavam de forma a construir a resposta de forma coerente. Houve também o fato dos alunos estarem buscando características comuns entre o retângulo e o losango, o que dificultou perceberem que as características não são exatamente as mesmas.

3. Desenhe as imagens das figuras pela translação de direção, sentido e amplitude indicados pela seta.

Figura 22: Resolução da atividade 3.



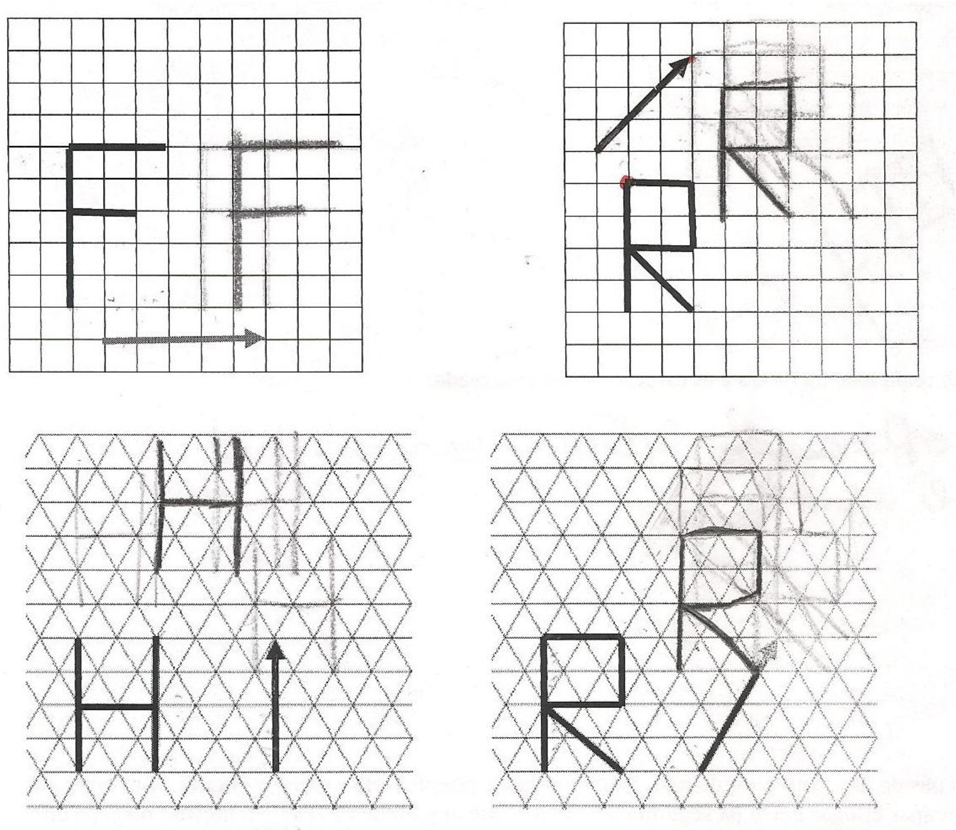
Fonte: arquivo da pesquisadora

Descreva o processo de realização da tarefa e as características observadas.

Neste item, as duplas deveriam transladar a letra respeitando a direção, sentido e amplitude indicados pela seta, e depois descrever o processo de realização e as características observadas.

Na construção do desenho a maioria dos alunos souberam construir a translação sem dificuldades, mas duas duplas, a D7 e D13, demonstraram dificuldade na realização da tarefa. O desenho foi feito várias vezes e não respeitou a direção e amplitude, mostrando que estas duplas apresentaram erros na referida transformação no plano.

Figura 23: Resolução da questão 3 da dupla D13



Fonte: arquivo da pesquisadora

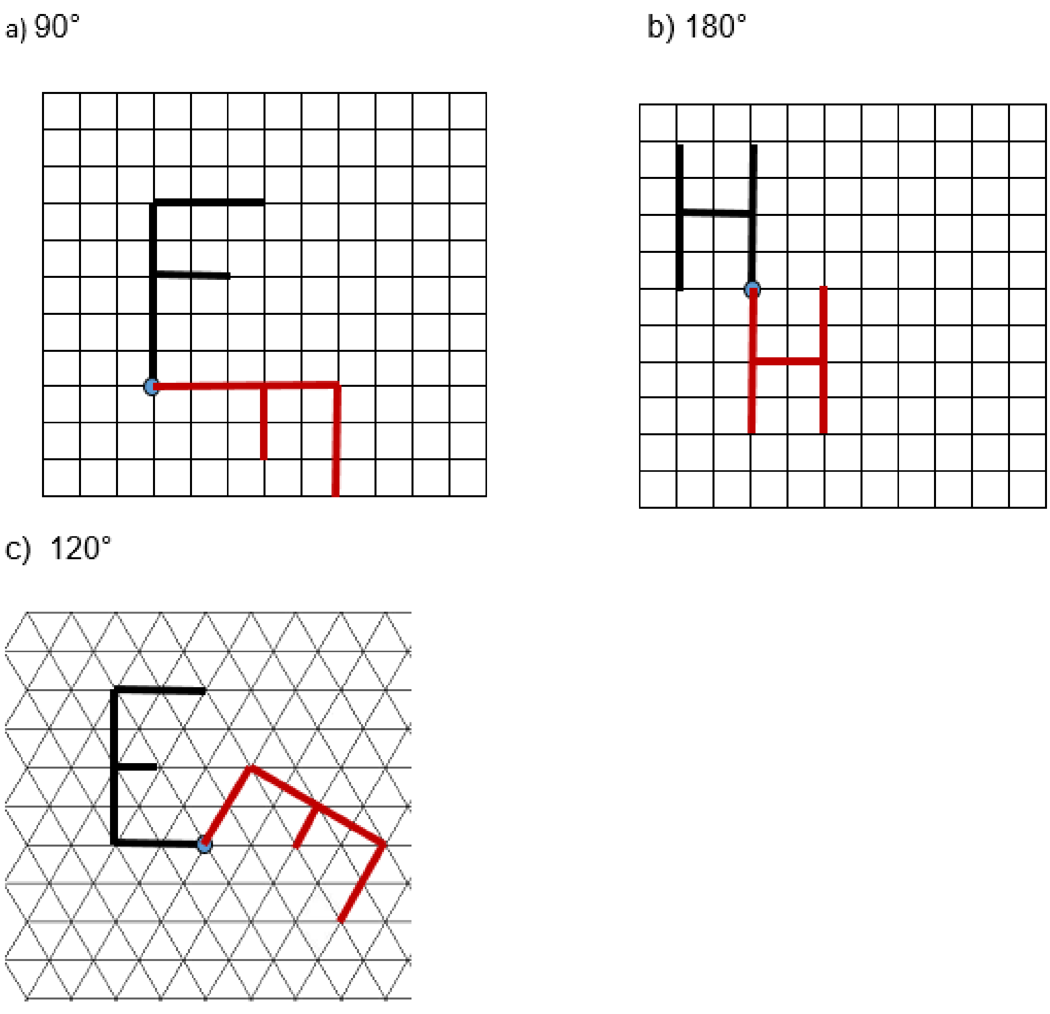
Todas as duplas descreveram o processo de construção informando que ‘contaram a malha na direção que a seta indicava’, mas poucas duplas discriminaram sobre as características observadas. Apenas cinco duplas registraram por escrito que as figuras sofreram deslocamento, porém, mantiveram sua forma e tamanho.

Apesar do número reduzido de duplas de alunos que demonstrou saber a noção de translação, temos que considerar que a maioria conseguiu realizar o desenho o que demonstra ter o conhecimento da translação mas mostra que existe uma grande dificuldade em transcrever isto, em anotar as características observadas.

Na correção deste item, as duas duplas que erraram a translação da figura comentaram que tiveram dificuldades de identificar o caminho que a seta indicava na malha. Na parte descritiva, muitos souberam expor oralmente o que aconteceu com o deslocamento das letras, apesar da dificuldade na escrita. Por isso, mais uma vez houve necessidade de intervenção da professora-pesquisadora para que os alunos pudessem organizar a escrita, explicitando as características da simetria de translação.

4) Desenhe as imagens das figuras pela rotação no sentido horário, de acordo com o ângulo indicado em cada uma:

Figura 24: Resolução da atividade 4.



Fonte: arquivo da pesquisadora

Descreva o processo de realização da tarefa e as características observadas.

Nesta atividade, houve a diferença clara entre as respostas de cada item, pois cada uma delas possuía uma dificuldade diferente. No item ‘a’ todos os alunos conseguiram realizar o desenho sem nenhum erro.

No item ‘b’, a maioria fez de forma correta a rotação da figura, mas quatro duplas encontraram dificuldade em desenhar a figura. Apesar de terem utilizado o ângulo correto trocaram o ponto que seria feito a rotação, tirando a figura do centro de rotação.

A dupla D16 utilizou uma borracha no lugar da letra H e fizeram a rotação da borracha ao invés da letra para perceberem que o H não ficava exatamente em baixo e sim do lado, exatamente o que as quatro duplas acima erraram. Esta utilização da borracha é o uso de um material manipulável para auxiliar na resposta, com isto, várias duplas que perceberam este recurso passaram a utiliza-lo também.

Quando remetemos à teoria de Raymond Duval, a utilização da borracha não constitui uma forma de representação semiótica, porém, sua utilização contribuiu no tratamento do registro figural envolvendo a rotação da letra H.

No item ‘c’, dez duplas desenharam corretamente, cinco duplas encontraram o ângulo correto, mas quatro delas trocaram o centro de rotação, e uma delas se confundiu na hora de desenhar na malha triangular, e apenas uma dupla não conseguiu identificar o ângulo.

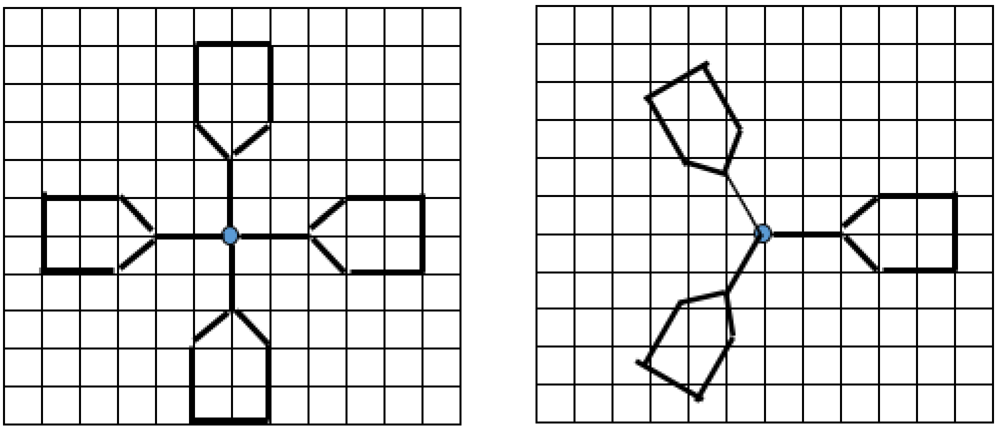
Nesta atividade de rotação os alunos demonstraram em sua maioria, ter o conhecimento do significado desta simetria, pois conseguiram identificar o ângulo. Alguns encontraram dificuldades no momento de rotacionar a letra, movendo o centro de rotação para outro vértice, o que demonstrou uma dificuldade em se trabalhar com a malha. A transformação no plano na forma de rotação para esses alunos ainda estava deficitária, já que da definição sabemos que a figura sempre rotaciona em torno do centro de simetria.

Todos descreveram o que foi realizado na tarefa, comentando que usaram um transferidor para medir o ângulo e identificar o local em que deveriam desenhar a letra. Poucos alunos descreveram as características utilizadas, apesar dos comentários em aula, de que a figura deveria rotacionar em torno do centro. A dupla D1, por exemplo, relatou que a letra E apenas tomou uma nova posição na malha.

Na correção deste item os alunos se surpreenderam, pois muitas duplas que cometeram algum erro acreditavam que tinham acertado. Conforme foi feita a correção de cada letra rotacionada, eles começaram a perceber os equívocos na construção, principalmente as trocas do centro de rotação. Em especial, no caso da letra H, a professora-pesquisadora teve que simular a rotação para que os alunos pudessem perceber o erro quanto a troca do ponto de rotação.

5) Vamos observar as pás de um ventilador de teto. Se o ventilador possui 4 pás, qual é o ângulo de rotação que uma pá descreve até ocupar o lugar que a pá seguinte ocupava? Esse ângulo de rotação é o mesmo no caso do ventilador de 3 pás?

Figura 25: Atividade 5.



Fonte: arquivo da pesquisadora

Nesta tarefa pretendíamos que os alunos identificassem que as pás dos ventiladores fazem o movimento de rotação, e que se temos quantidades diferentes de pás, também temos uma variação diferente no ângulo.

Todas as duplas conseguiram responder as duas questões, identificando os ângulos de forma correta, colocando que eram diferentes nos dois ventiladores. Algumas duplas até justificaram que quanto menor o número de pás maior seria o espaço entre elas.

5.2 Quarta fase: análise da produção dos alunos na tarefa envolvendo a condição de existência do mosaico

Apresentamos a análise das duas questões aplicadas nessa fase da pesquisa.

1) Dado os polígonos, com quais combinações podemos construir um mosaico sem que as figuras se sobreponham ou formem espaços vazios?

Como resposta, era desejável que os alunos utilizassem os polígonos regulares dados e encontrassem combinações para formar o mosaico, ou seja, peças que se juntariam perfeitamente preenchendo todo o espaço. As duplas realizaram esta tarefa sem grande dificuldade, descobrindo que o triangulo equilátero, o quadrado e o hexágono se encaixavam perfeitamente enquanto o pentágono não. Apenas três duplas misturaram os polígonos regulares, sendo que duas não conseguiram o encaixe perfeito e a outra (D2) juntou 2 triângulos com 2 hexágonos, que se encaixam perfeitamente.

2) A partir da primeira tarefa, você conseguiria criar uma regra geral para saber quando é possível formar um mosaico? Se sim, qual seria?

Para responder esta questão, os alunos deveriam perceber que para os vértices se encaixarem e não sobrar nenhum espaço em torno deles, a justaposição das figuras completa uma volta, ou seja, formam um ângulo de 360°, dado um vértice comum a todos. Se a soma fosse menor que 360° haveria um espaço vazio, e se a soma superasse 360º, formaríamos um ângulo poliédrico.

Apenas três duplas conseguiram perceber que a soma dos ângulos deveria ser 360°. Muitas duplas, pelo fato de combinarem apenas peças de um mesmo tipo (triângulo equilátero, por exemplo), responderam que a regra geral estava relacionada com o fato dos ângulos internos terem a mesma medida.

Com base em Duval (2012a) entendemos que a disposição de polígonos regulares do mesmo tipo na formação do mosaico fez com que a apreensão perceptiva dos alunos fosse associada às características de tais polígonos terem lados e ângulos com mesma medida. Consequentemente, a apreensão (interpretação) discursiva dos elementos figurais deu-se com base na definição de polígono regular e, não sobre a justaposição das peças em torno de um vértice comum.

Na correção destacamos a atividade matemática das três duplas que mesclaram os polígonos regulares, porém, o discurso desses alunos quanto ao fato de que a regra geral estava relacionada com o fato de obtermos 360º não foi suficiente para a aprendizagem. Muitos alunos pegaram o transferidor e mediram os ângulos de cada peça para verificar que a soma era 360°. Alguns alunos até voltaram a verificar o encaixe feito somente com pentágonos regulares e constaram que, usando três deles a soma dos ângulos em torno de um vértice comum era menor que 360º e quatro pentágonos a soma dos ângulos superou os 360°.

De acordo com Duval (2012a), no momento de correção da tarefa a aprendizagem dos alunos ocorreu pela oportunidade do processo de experimentação, ou seja, a apreensão operatória quanto à validação ou não da soma igual a 360º demandou a conferência das medidas requeridas, por meio do uso do transferidor.

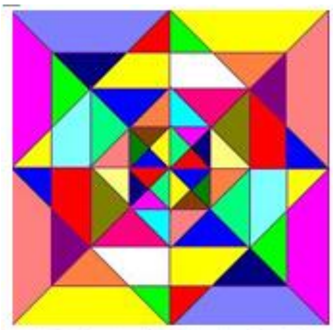
5.3 Quinta fase: análise da produção dos alunos na construção do mosaico com polígonos regulares.

Esta última fase do nosso trabalho de campo contou com a aplicação de duas tarefas. Na primeira tarefa disponibilizamos três mosaicos que foram construídos com base em pelo menos uma das transformações geométricas no plano (reflexão, rotação ou translação). A segunda tarefa envolveu a construção do mosaico condicionada ao uso de uma das isometrias no plano, destacadas nessa primeira tarefa.

A seguir apresentamos o enunciado da primeira tarefa e a análise da produção escrita dos alunos.

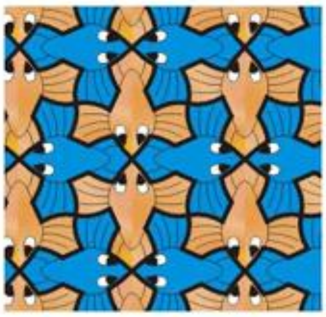
1) Localize, por meio de traços, os eixos de simetria. Identifique a simetria existente em cada mosaico e descreva suas características.

Figura 26: Mosaicos da tarefa 3 com resolução.



Simetria de rotação (180°)

Simetria de reflexão, translação e rotação (90°).



Simetria de reflexão, rotação (180°) e translação.

Fonte: arquivo da pesquisadora

No primeiro mosaico praticamente todas as duplas identificaram de forma correta a rotação, e algumas anotaram o ângulo de rotação da figura.

No segundo mosaico, havia os três tipos de simetria, o que diversificou as respostas: 7 duplas identificaram apenas um tipo, 6 duplas encontraram dois tipos e apenas uma dupla conseguiu identificar as três simetrias na imagem. A simetria menos citada foi a de rotação apesar de aparecer em algumas respostas.

No terceiro mosaico, tínhamos a simetria de reflexão, e também a simetria de rotação e translação em algumas partes do mosaico, o que, como no item anterior, diversificou as respostas: 8 duplas encontraram apenas um tipo, 2 duplas encontraram dois tipos e 4 duplas encontraram os três tipos de simetrias.

Para a segunda tarefa formulamos o seguinte enunciado: *construa um mosaico utilizando os polígonos regulares e o conceito de simetria. Na sequência, descreva como você elaborou a construção.*

Em termos de análise da produção escrita dos alunos, optamos por oferecer ao leitor uma síntese do desempenho de cada dupla no decorrer da aplicação das tarefas anteriores até a construção do mosaico (quinta fase).

Ressaltamos que nessa fase do relatório vamos apresentar a síntese, bem como a construção do mosaico de onze duplas e do aluno nomeado D16. No quarto capítulo, item4.3.5, informamos que infelizmente não tivemos acesso sobre todas as produções dos mosaicos devidos aos problemas de ocupação das escolas públicas, devido a insatisfação da população quanto às políticas públicas educacionais do nosso Estado.

5.3.1 Análise da dupla 1

Na primeira questão, da primeira tarefa, essa dupla teve um bom desempenho, construindo todas as simetrias na malha de maneira coerente, descrevendo bem as características observadas, mostrando boa compreensão do conceito.

Assim como a maioria das duplas, mostrou dificuldade na realização na questão 2) ao acertar parcialmente a tabela de linhas de simetria do item a). Com isso, teve dificuldades em responder os itens seguintes, essa dificuldade deve-se principalmente ao fato de não ter percebido que algumas linhas de simetria que a dupla contou não formavam reflexão do quadrilátero.

Na segunda tarefa, apesar de ter encontrado e montado os mosaicos corretamente, utilizando os polígonos regulares, não souberam identificar a regra de condição de existência, mencionando apenas que os ângulos deveriam ser idênticos, porém nada falaram da soma desses, que deve ser de 360º. Por isso a explicação ficou incompleta e não atendeu à condição para a construção de mosaicos.

Na primeira parte das tarefas da quinta fase a dupla acertou parcialmente os tipos de simetria envolvidos em cada figura; na primeira os alunos não perceberam a rotação que ocorreu, pois não acompanharam o movimento das cores da figura, com isso, deduziram que a figura sofreu uma translação, o que não ocorreu.

Na segunda figura ocorreu os três tipos de simetria, porém observaram apenas a reflexão, mas deveriam ter melhor observado a formação principal da figura sendo transladada e rotacionada em torno de um eixo imaginário

Na terceira figura, a dupla observou translação e rotação, porém isso ocorreu em algumas partes de figura, mas isto não configurou a regra de formação do mosaico. O correto seria a reflexão em torno de um eixo imaginário horizontal passando pelo centro da figura.

Mesmo com as dificuldades inerentes a construção do mosaico, a dupla mostrou ter compreendido as ideias principais. Ao construir um mosaico baseado em hexágonos regulares, avaliamos que os alunos superaram a dificuldade encontrada na quarta fase da pesquisa quanto à condição de existência do mosaico. A dupla optou por unir em um mesmo vértice três hexágonos, cujo ângulo interno mede 120º, dando origem à peça básica para a construção do mosaico.

A dupla utilizou de forma coerente a simetria de reflexão. Para isso construíram os eixos horizontais e verticais e aplicaram a referida transformação no plano. Não tratamos em nossas aulas a construção do plano cartesiano, porém, esses alunos inseriram o primeiro hexágono na origem do sistema cartesiano e a partir deste, a justaposição dos demais polígonos respeitando a propriedade da reflexão em torno dos eixos cartesianos.

O mosaico baseado na simetria de reflexão atendeu a proposta da tarefa, pois é possível perceber a figura sendo refletida em torno dos eixos. Pode-se considerar que a dupla não percebeu apenas um detalhe, a cor, pois como a figura e seu reflexo devem ser o mais semelhante possível. No desenho não vemos a utilização simétrica das cores, porém toda a construção foi feita de maneira correta, utilizando os conceitos descritos e trabalhados nas tarefas que realizaram. Portanto, a dupla conseguiu aplicar as propriedades de simetria e criar um mosaico.

Figura 27: Produção do mosaico (Dupla 1)

Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.2 Análise da Dupla 2:

Na primeira tarefa essa dupla foi muito bem, construindo todas as simetrias na malha de maneira correta, descrevendo bem as características observadas, mostrando boa compreensão do conceito.

Foi uma dupla com destaque, pois acertou praticamente todas as atividades, descrevendo muito bem as características e propriedades das simetrias.

Quando questionado sobre as combinações de polígonos regulares para a formação do mosaico, também obtiveram destaque, pois foi uma dupla que fez a justaposição de peças com um mesmo tipo de polígono regular e também fizeram construíram a peça básica com 2 hexágonos e 2 triângulos equiláteros.

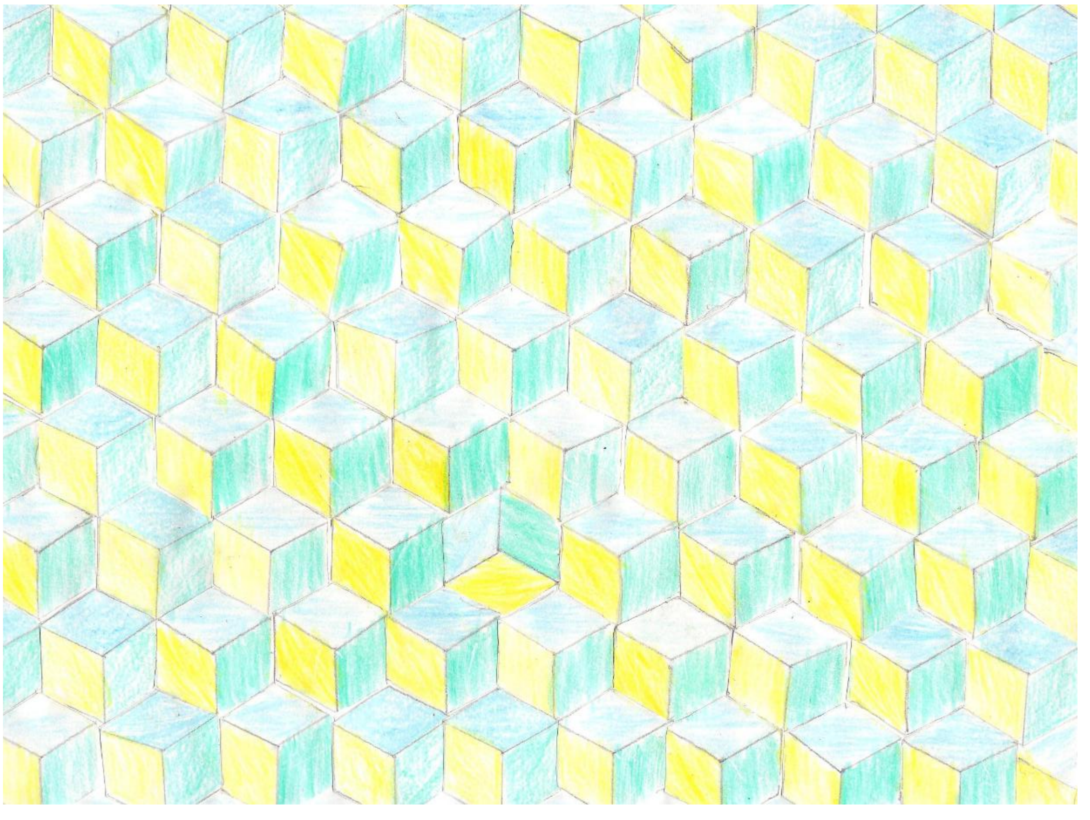
Em relação a condição de existência de um mosaico, escreveram que a soma dos ângulos das peças em torno de vértice comum deveria ser 360º.

Na última fase da aplicação das tarefas a dupla também obteve ótimo desempenho, deixando apenas de notar que o segundo mosaico também possuía a simetria de translação.

A construção do mosaico foi minuciosa, utilizando vários hexágonos regulares, os quais foram divididos em três partes iguais, pintando cada parte com uma cor diferente, transladando ela por toda a folha sulfite, deixando uma impressão de imagem em 3D.

O mosaico desta dupla atendeu a proposta da tarefa, utilizando de forma coerente a translação do hexágono regular, mantendo as inalteradas propriedades exigidas por esta simetria (sentido, direção e amplitude).

Figura 28: Produção do mosaico (Dupla 2).



Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.3 Análise da Dupla 3:

Na tarefa que consistiu em desenhar cada letra dada pela reflexão na reta r, essa dupla teve um bom desempenho, realizando as construções corretas, mas demonstrou dificuldades na descrição das propriedades de simetria.

Na tarefa que visava determinar os eixos de simetria em quadriláteros, a dupla não conseguiu completar a tabela de linhas de simetria de forma correta, confundindo os eixos de alguns quadriláteros. Consequentemente, teve dificuldades para analisar as características dos quadriláteros com determinado número de eixos de simetria.

Em relação a condição de existência dos mosaicos, relataram que ‘a partir de um ponto fixo haveria 360º’. Esse ponto fixo corresponde ao vértice comum aos polígonos regulares justapostos.

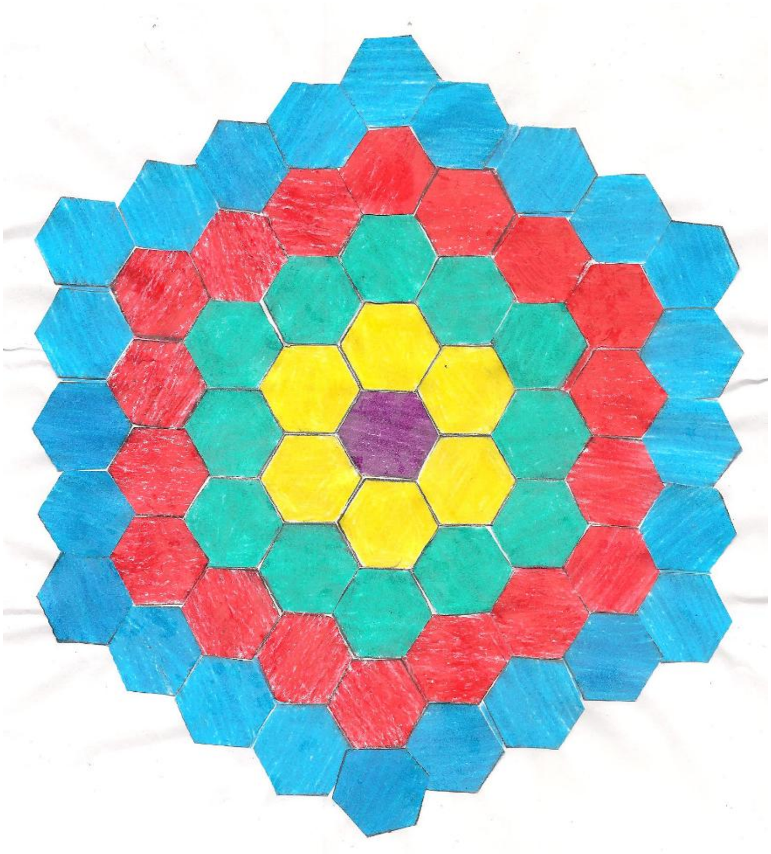
Na última fase das tarefas a dupla demonstrou dificuldades em identificar as transformações no plano que originaram os mosaicos. No primeiro mosaico aplicou-se a simetria de rotação, mas a dupla colocou que seria de translação. No segundo mosaico que possuía todas as simetrias, eles identificaram apenas a simetria de reflexão, desenhando os dois eixos; deixando de perceber que poderia haver outras simetrias.

No terceiro mosaico, a dupla observou a reflexão e rotação. A simetria de reflexão está correta com um eixo horizontal no centro do mosaico, mas a rotação ocorre apenas em algumas partes do mosaico, não sendo realizada na figura como um todo.

Na construção do mosaico a dupla optou pela simetria de reflexão, utilizando hexágonos regulares. Fixaram um hexágono central, estabeleceram seis eixos de reflexão, três nas diagonais o hexágono e três nos pontos médios dos lados opostos do polígono. Diferentemente de outras duplas, esses alunos utilizaram cores na ressaltar as propriedades da reflexão em torno dos eixos de simetria.

Este mosaico cumpriu com a proposta da tarefa, pois a dupla coordenou os tratamentos figurais e discursivos a medida que as propriedades da simetria de reflexão foram aplicadas na criação do mosaico, bem como a combinação da cor na apreensão operatória posicional da referida simetria.

Figura 29: Produção do mosaico (Dupla 3)



Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.4 Análise da Dupla 4:

Na primeira tarefa a dupla 4 obteve um bom desempenho, realizaram todas as simetrias na malha de forma coerente, souberam descrever de maneira simples todas as observações, demonstrando que compreenderam o conceito apresentado.

Igual a todas as duplas, tiveram dificuldade na realização da questão 2), acertaram parcialmente a tabela de linhas de simetria do item a), e por consequência acabaram sentindo dificuldade nos itens seguintes, dúvida muito próxima a das outras duplas, não perceberam a formação das simetrias do quadrilátero.

Na segunda tarefa, conseguiram encontrar e montar os mosaicos corretamente, utilizando os polígonos regulares, mas não conseguiram conjecturar a condição de existência, mencionaram apenas que os ângulos deveriam ser idênticos, porém a resposta é incompleta, já que a informação mais importante é a soma dos ângulos ser igual a 360º.

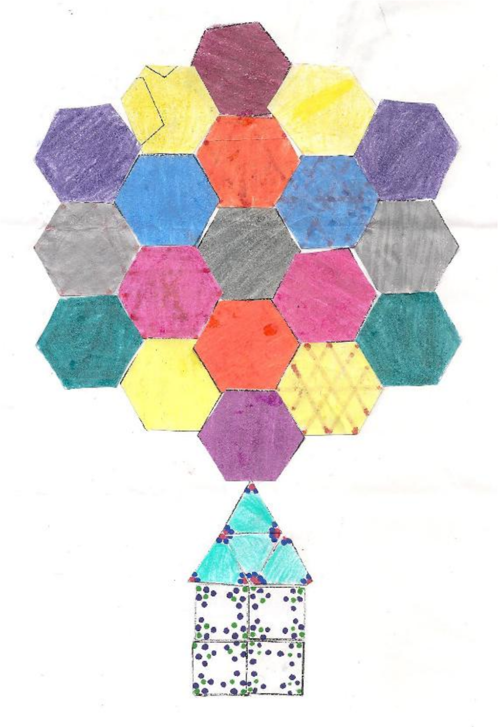
Na primeira parte da tarefa 3 a dupla acertou a primeira figura, mencionando a rotação como o tipo de simetria utilizada, na segunda figura mencionaram dois tipos de simetria, translação e rotação, mas não observaram a reflexão que ocorreu, mesmo assim explicaram bem como ocorreu cada tipo de simetria, mostrando ter compreendido bem o conceito.

Na terceira figura, a dupla observou as três simetrias, porém apenas a reflexão ocorreu, a dúvida aparece por existir em partes da figura as outras simetrias, porém essa não foi a regra de formação da mesma, com isso apenas a reflexão ocorre.

Mesmo com as dificuldades naturais da construção, a dupla mostrou ter compreendido bem as regras de formação do mosaico, construíram baseado em hexágonos regulares, observa-se que os alunos entenderam que existe uma condição de existência para o mesmo, o que não observaram na tarefa anterior, e perceberam que ao unir pelo vértice três hexágonos, cujo ângulo interno mede 120º, temos a formação do ângulo de 360º e assim puderam fazer a figura.

O mosaico baseado na simetria de reflexão cumpriu com a proposta da tarefa, é possível perceber a figura sendo refletida em torno de eixos imaginários.

Figura 30: Produção do mosaico (Dupla 4)



Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.5 Análise da Dupla 5:

Na primeira tarefa a dupla 5 realizou todas as construções de forma correta e também descreveu várias propriedades coerentes a simetria, mostrando uma boa compreensão dos conceitos.

No segundo item desta tarefa a dupla demonstrou dificuldades, trocando alguns quadriláteros na tabela, colocando eixos a mais em 3 quadriláteros, o que acabou dificultando um pouco mais as descrições das observações pedidas nos outros itens.

Na segunda tarefa a dupla construiu alguns mosaicos com polígonos regulares, mas não souberam identificar a condição de existência de um mosaico, colocando apenas que as peças precisavam se encaixar, deixando a resposta sem um argumento matemático.

Na primeira parte da tarefa 3 a dupla conseguiu encontrar boa parte das simetrias, identificando corretamente aa simetrias do primeiro e terceiro mosaico, apenas na segunda a resposta ficou incompleta, pois apesar de ter encontrado os eixos de reflexão, não percebeu que o mosaico também possuía as simetrias de rotação e translação.

A dupla 5 não realizou a construção do mosaico.

5.3.6 Análise da Dupla 6:

Na primeira tarefa a dupla 6 obteve um bom desempenho, realizaram todas as simetrias na malha de forma coerente, mesmo com a referência do celular na explicação, pois utilizaram como um “espelho”, pode se perceber que compreenderam bem a ideia principal.

Igual a todas as duplas, tiveram dificuldade na realização da questão 2, acertaram parcialmente a tabela de linhas de simetria do item a, e por consequência acabaram sentiram dificuldades nos itens seguintes, dificuldades semelhantes a das outras duplas, não observaram a formação das simetrias do quadrilátero.

Na segunda tarefa, conseguiram encontrar e montar os mosaicos corretamente, utilizando os polígonos regulares, mas não conseguiram conjecturar a condição de existência, a explicação ficou de certa forma vaga, sem determinar uma regra coerente.

A dupla não realizou as tarefas da última fase do trabalho de campo.

5.3.7 Análise da Dupla 7:

Na primeira tarefa a dupla 7 construíram todas as simetrias na malha de maneira coerente, descrevendo bem as características observadas, mostrando boa compreensão do conceito

A dupla teve dificuldade na realização da questão 2), acertaram parcialmente a tabela de linhas de simetria do item a), e por consequência acabaram sentindo dificuldade nos itens seguintes, dúvida muito próxima a das outras duplas, não perceberam a formação das simetrias do quadrilátero.

Na segunda tarefa, apesar de ter encontrado e montado os mosaicos corretamente, utilizando os polígonos regulares, não souberam identificar a regra de condição de existência, mencionaram de forma confusa a regra que observaram, e essa não atende a real condição para a construção de mosaicos.

Na primeira parte da tarefa 3) a dupla não acertou a primeira figura, mencionando que não existe simetria, porém observa-se a rotação como o tipo de simetria utilizada, os alunos deveriam acompanhar a rotação das cores na figura. Na segunda figura, mencionaram um tipo de simetria, rotação, mas não observaram a reflexão e translação que ocorreram, mesmo assim explicaram bem como ocorreu o tipo de simetria que observaram.

Na terceira figura, a dupla observou bem a existência de apenas uma simetria, a reflexão. A dupla não realizou a segunda parte da tarefa 3, a construção dos mosaicos.

5.3.8 Análise da Dupla 8:

Na primeira tarefa a dupla 8 realizou a construção das simetrias das letras de forma correta, mas teve um pouco de dificuldade na descrição das características, mostrando a dificuldade em transcrever as propriedades observadas.

A dupla conseguiu identificar os eixos dos quadriláteros para completar a tabela do segundo exercício, mas novamente, mostrou dificuldades em escrever as observações pedidas nos outros itens.

Na segunda tarefa, a dupla montou os mosaicos corretamente, utilizando os polígonos regulares, mas não conseguiram identificar a condição de existência, novamente colocaram apenas que as peças deveriam se juntar, não percebendo a regra para que isto ocorra.

A dupla não realizou as tarefas da última fase do trabalho de campo.

5.3.9 Análise da Dupla 9:

Na primeira tarefa a dupla 9 obteve um bom desempenho, realizaram todas as simetrias na malha de forma coerente, souberam descrever de maneira completa todas as observações, demonstrando que compreenderam o conceito apresentado.

Assim como a maioria das duplas, mostrou dificuldade na realização na questão 2), mesmo acertando a tabela de linhas de simetria do item a), tiveram dificuldades em responder os itens seguintes, essas dificuldades devem-se principalmente ao fato de não conseguirem transcrever as propriedades dos quadriláteros observadas.

Na segunda tarefa, conseguiram encontrar e montar os mosaicos corretamente, utilizando os polígonos regulares, e conjecturaram perfeitamente a condição de existência dos mosaicos.

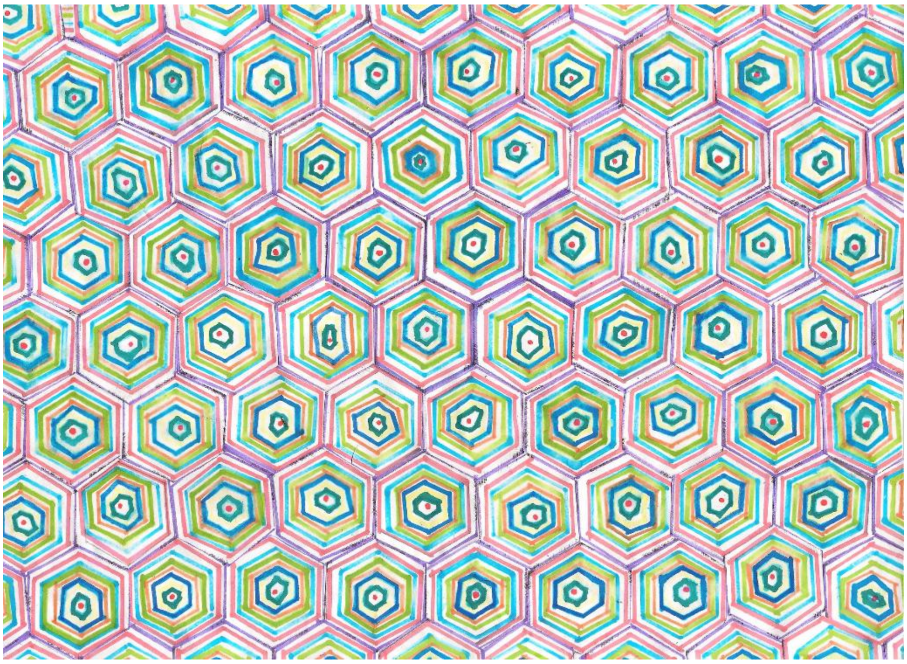
Na primeira parte da tarefa 3) a dupla acertou a primeira figura, mencionando a rotação como o tipo de simetria utilizada, na segunda figura mencionaram dois tipos de simetria, reflexão e translação, mas não observaram a rotação que ocorreu, mesmo assim explicaram bem como ocorreu cada tipo de simetria, mostrando entendimento do conteúdo.

Na terceira figura, a dupla observou as três simetrias, porém apenas a reflexão ocorreu, a dúvida aparece por existir em partes da figura as outras simetrias, porém essa não foi a regra de formação da mesma, com isso apenas a reflexão ocorre.

A dupla não mostrou dificuldades na construção do mosaico, a dupla mostrou ter compreendido as ideias principais, ao construir um mosaico baseado em hexágonos regulares, vemos que os alunos entenderam que existe uma condição de existência para o mesmo, perceberam que ao unir pelo vértice três hexágonos, cujo ângulo interno mede 120º, temos a formação do ângulo de 360º e por consequência o mosaico.

A dupla utilizou de forma coerente a simetria de translação, e preencheram a folha com diversos hexágonos transladados no plano, mostrando compreensão muito boa do conceito, entende-se então que a dupla conseguiu unir tudo que aprendeu e construir um significado para simetria e mosaicos.

Figura 31: Produção do mosaico (Dupla 9).



Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.10 Análise da Dupla 10:

Na primeira tarefa os alunos construíram a simetrias das letras corretamente, tendo dificuldade apenas em descrever as características observadas.

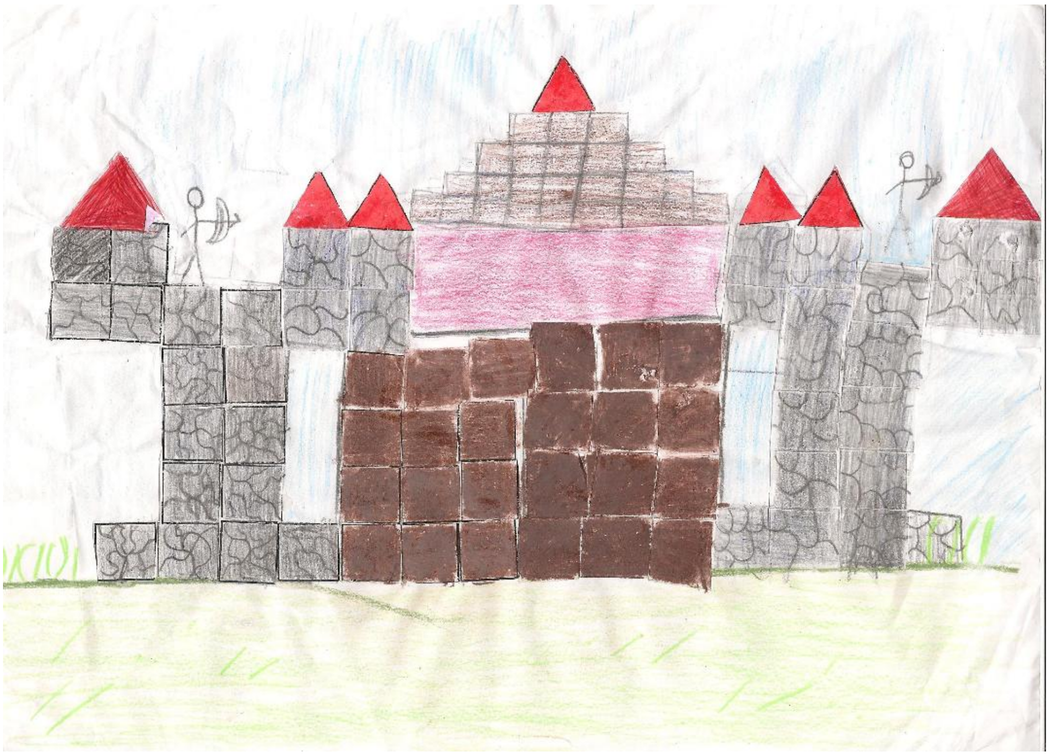
Assim como a maioria das duplas, mostrou dificuldade na realização na questão dois, adicionando eixos inexistentes em alguns quadriláteros, deixando assim a tabela parcialmente correta, o que dificulta ainda mais a realização dos outros itens desta atividade.

Na segunda tarefa, a dupla construiu os mosaicos com polígonos regulares de forma correta, porém, não identificaram a condição de existência dos mosaicos, colocando o fato dos polígonos terem ângulos iguais, o que não seria a regra correta.

Na primeira parte da terceira atividade, a dupla identificou muito bem as simetrias, acertando o tipo de simetria no primeiro e terceiro mosaico, e também no segundo, mas deixou de identificar que este teria mais dois tipos de simetria, pois possuía também a simetria de rotação e translação.

Já na construção do mosaico a dupla utilizou a simetria de reflexão, construindo um castelo com quadrados e triângulos equiláteros, a dupla completou o mosaico a mão livre, e neste momento cometeu um equívoco, deixando de alterar o lado do arqueiro colocado sobre o castelo, mas mesmo assim percebemos que a dupla conseguiu compreender o conceito, mantendo a reflexão do castelo inclusive nas cores e desenhos das paredes.

Figura 32: Produção do mosaico (Dupla 10).



Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.11 Análise da Dupla 11:

Na primeira tarefa a dupla 11 mostrou dificuldades, apesar de terem realizado o desenho na simetria de reflexão e translação, já mostraram dificuldade no desenho da simetria de rotação, também mostraram uma grande dificuldade em transcrever as características dos conceitos.

Como dito no item anterior, a dificuldade continuou na descrição dos itens do segundo exercício, onde não conseguiram identificar os eixos dos quadriláteros para assim poderem responder os outros itens.

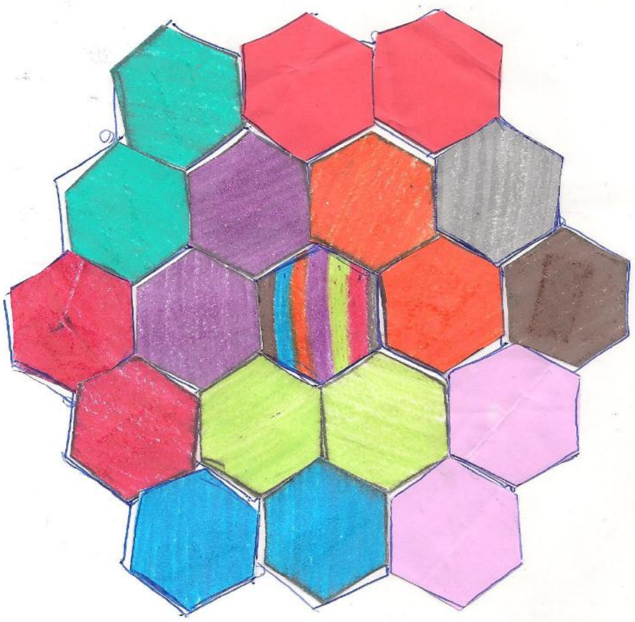
Na segunda tarefa, a dupla construiu os mosaicos utilizando os polígonos regulares, mas não conseguiram identificar a regra para a condição de existência dos mosaicos.

Na primeira parte da tarefa 3 a dupla acertou a simetria do primeiro mosaico, e identificou a simetria de reflexão e translação no segundo mosaico, deixando de notar apenas a simetria de rotação, já no terceiro mosaico, eles identificaram a reflexão, mas também a rotação que ocorre em apenas alguns trechos do mosaico.

Na construção do mosaico, foi utilizado a simetria de reflexão, na mesma ideia da dupla 3, com seis eixos de reflexão, mas desta vez, a cor não foi levada em conta, pois apesar dos eixos dividirem corretamente, as cores não ficam refletidas.

Esta dupla demonstrou uma grande evolução da primeira atividade para esta, pois os alunos conseguiram identificar as simetrias na terceira atividade, algo que não tinha ficado claro na primeira, e também conseguiram realizar a construção de um mosaico coerente ao conceito de reflexão.

Figura 33: Produção do mosaico (Dupla 11)



Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.12 Análise da Dupla 12:

Na primeira tarefa, a dupla 12 realizou a construção das simetrias de forma correta, mas demonstrou dificuldade em escrever sobre as propriedades percebidas nestas construções, descrevendo apenas na de reflexão sobre a ideia de espelho.

A dupla também demonstrou dificuldade na descrição dos itens do segundo exercício, apesar de ter construído os eixos de simetria dos quadriláteros de forma correta.

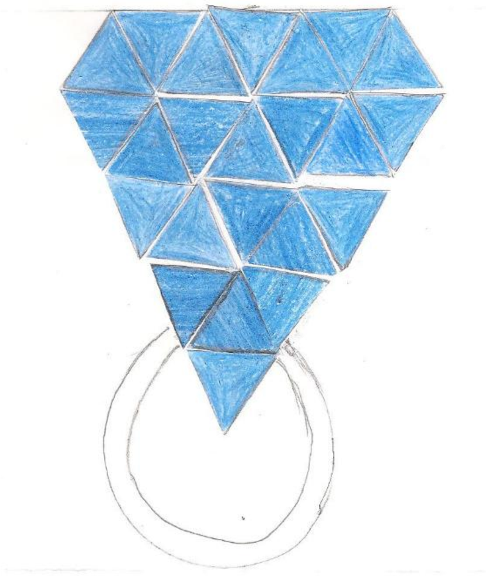
Na segunda tarefa, a dupla montou os mosaicos com os polígonos regulares, mas não identificou a condição de existência dos mosaicos, colocando que ‘a regra seria não poder sobrar espaços’. A observação está correta, mas não é a regra para criação dos mosaicos, que seria a soma dos ângulos igual a 360º.

Na primeira parte da tarefa 3, a dupla identificou corretamente as simetrias de todos os mosaicos, deixando de notar que o segundo mosaico também tinha as propriedades das simetrias de rotação e translação.

Na construção do mosaico, a dupla optou pela construção de um anel com uma pedra, utilizando a simetria de reflexão, com apenas um eixo de simetria, e com triângulos equiláteros.

A dupla demonstrou o conhecimento das simetrias na realização do mosaico, e nas identificações das simetrias na terceira tarefa.

Figura 34: Produção do mosaico (Dupla 12).



Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.13 Análise da Dupla 13:

Na primeira tarefa a dupla realizou muito bem a reflexão e a rotação das letras, mas teve dificuldade na translação, conseguimos visualizar várias tentativas para o desenho mas mesmo assim não alcançaram a translação correta.

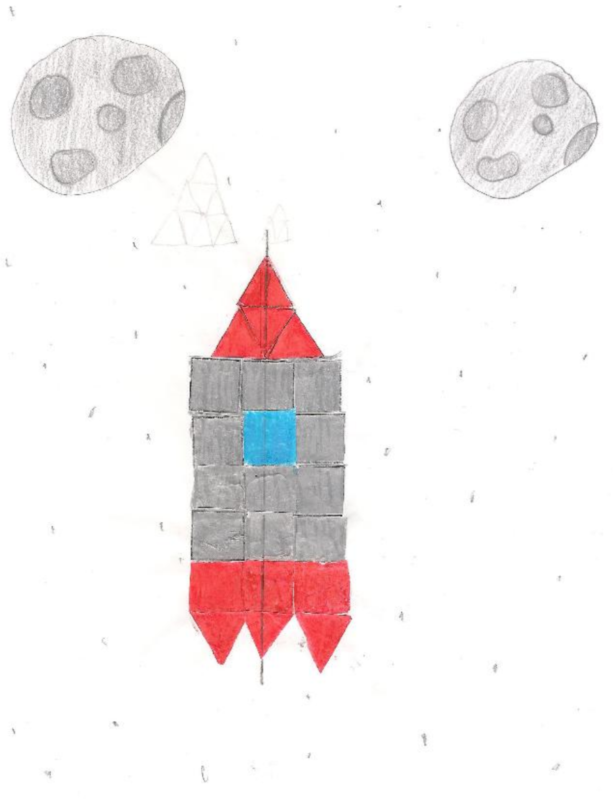
Apesar de terem realizado a construção dos eixos dos quadriláteros de forma satisfatória, não conseguiram escrever as propriedades e observações do segundo exercício.

Na realização da segunda tarefa demonstraram um pouco mais de dificuldades, pois construíram apenas um mosaico com a utilização de quadrados e tentaram construir um com pentágonos regulares, mas que não deu certo, com isto, também não conseguiram encontrar a regra de condição de existência de um mosaico, anotando apenas que as peças precisavam se encaixar.

Na primeira parte da tarefa 3, a dupla mostrou ter entendido melhor o conceito de translação, pois conseguiu identifica-la no segundo mosaico e também descreveu algumas propriedades desta simetria, além disto, a dupla acertou todas as simetrias dos mosaicos, deixando de notar que no segundo também havia a simetria de reflexão e rotação.

O mosaico desta dupla foi composto de quadrados e triângulos equiláteros, a dupla fez um foguete com os polígonos, e desenhou um planeta de cada lado para manter a ideia de reflexão que foi a simetria escolhida pela dupla.

Figura 35: Produção do mosaico (Dupla 13).



Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.14 Análise da Dupla 14:

Na primeira tarefa a dupla 14 obteve um bom desempenho, realizaram todas as simetrias na malha de forma coerente, descreveram corretamente o processo de simetria no plano, compreendendo bem o conceito apresentado.

Apresentaram dificuldades parecidas com as outras duplas em relação a questão 2, acertando parcialmente a tabela de linhas de simetria, e com isso não conseguiram acertar os itens seguintes da questão, pois não perceberam de maneira correta a construção das linhas de simetria nos quadriláteros.

Na segunda tarefa, conseguiram encontrar e montar os mosaicos corretamente, utilizando os polígonos regulares, mas não conseguiram elaborar a condição de existência, mencionaram apenas que os ângulos deveriam ser todos iguais, porém a resposta é incompleta, já que a informação mais relevante é a soma dos ângulos internos igual a 360º.

Na primeira parte da tarefa 3 a dupla acertou a primeira figura, mencionando a rotação como o tipo de simetria encontrada, na segunda figura mencionaram dois tipos de simetria, translação e reflexão, mas não observaram a rotação que ocorreu, os alunos deveriam ter observado melhor a rotação das cores na figura.

Na terceira figura, a dupla observou muito bem a formação apenas da reflexão.

Mesmo com as dificuldades naturais da construção, a dupla mostrou ter compreendido bem as regras de formação do mosaico, construíram baseado em diversas figuras, porém todas são polígonos regulares, assim como o exigido no enunciado, eles se basearam na reflexão como a simetria utilizada e perceberam bem a condição de existência do mosaico, já que na parte de cima do desenho, que foi construída com hexágonos, o meio foi encaixado perfeitamente, para isso eles tiveram que utilizar as mesmas figuras, a fim de conseguir a soma de 360º, porém se equivocaram nas pontas, onde utilizaram pentágonos, os quais não se encaixaram com os hexágonos.

A figura não foi totalmente baseada no encaixe de polígonos, porém a dupla atingiu os objetivos, construindo uma figura com simetria, usando polígonos regulares, e mesmo com o equívoco dos pentágonos a simetria de reflexão foi mantida em toda figura.

Figura 36: Produção do mosaico (Dupla 14).

Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.15 Análise da Dupla 15:

Na primeira tarefa a dupla teve um bom desempenho, realizou todas as construções de forma correta, e fez descreveu algumas características observadas, apesar de não ter se aprofundado.

Na segunda atividade desta tarefa, a dupla conseguiu identificar os eixos dos quadriláteros, e também tentou descrever as características pedidas nos outros itens, mas não conseguiu chegar nas conclusões necessárias.

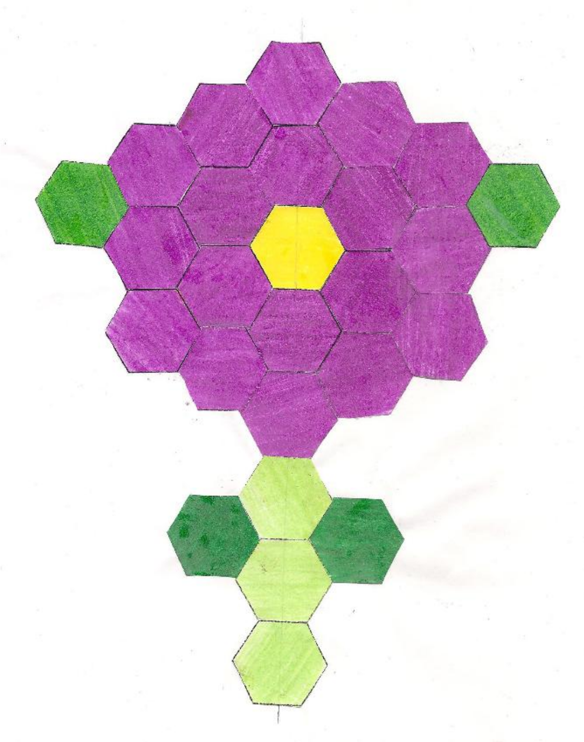
Na segunda tarefa, a dupla conseguiu construir os mosaicos, mas não conseguiu encontrar a condição de existência dos mosaicos, escrevendo apenas que as peças devem se encaixar, mas não identificando a regra para que isto ocorra.

Na primeira parte desta terceira tarefa a dupla identificou muito bem as simetrias, acertando as simetrias do primeiro e terceiro mosaicos, e também do segundo, mas deixou de notar apenas que este também possuía a simetria de translação.

A dupla construiu um mosaico utilizando apenas hexágonos, construíram uma flor com caule e folhas, de forma a utilizar a simetria de reflexão, descreveram que esta era a simetria usada e também que tinha apenas um eixo de reflexão passando pelo centro da flor.

Notamos que esta dupla entendeu os conceitos de simetria, construindo um mosaico com as propriedades escolhidas, mantendo as cores para a reflexão, e também desenhando o eixo para destaca-la.

Figura 37: Produção do mosaico (Dupla 15)



Fonte: arquivo da pesquisadora

5.3.16 Análise do aluno 16:

Na primeira tarefa o aluno 16 obteve um bom desempenho, realizaram todas as simetrias na malha de forma correta, descreveram bem o processo de construção das figuras, mostrando a boa compreensão do conteúdo

Da mesma forma que todas as duplas, tiveram dificuldade na realização da questão 2, acertando parcialmente a tabela de linhas de simetria do item a), e por consequência acabaram sentindo dificuldade nos itens seguintes, com dúvidas semelhantes a das outras duplas, a dificuldades se deu por não perceberem as linhas de simetrias dos quadriláteros.

Na segunda tarefa, conseguiram encontrar e montar os mosaicos corretamente, utilizando os polígonos regulares, mas não conseguiram conjecturar a condição de existência, mencionaram apenas que os ângulos são importantes para essa condição, de fato são, porém isso não é o suficiente para caracterizar a existência dos mosaicos.

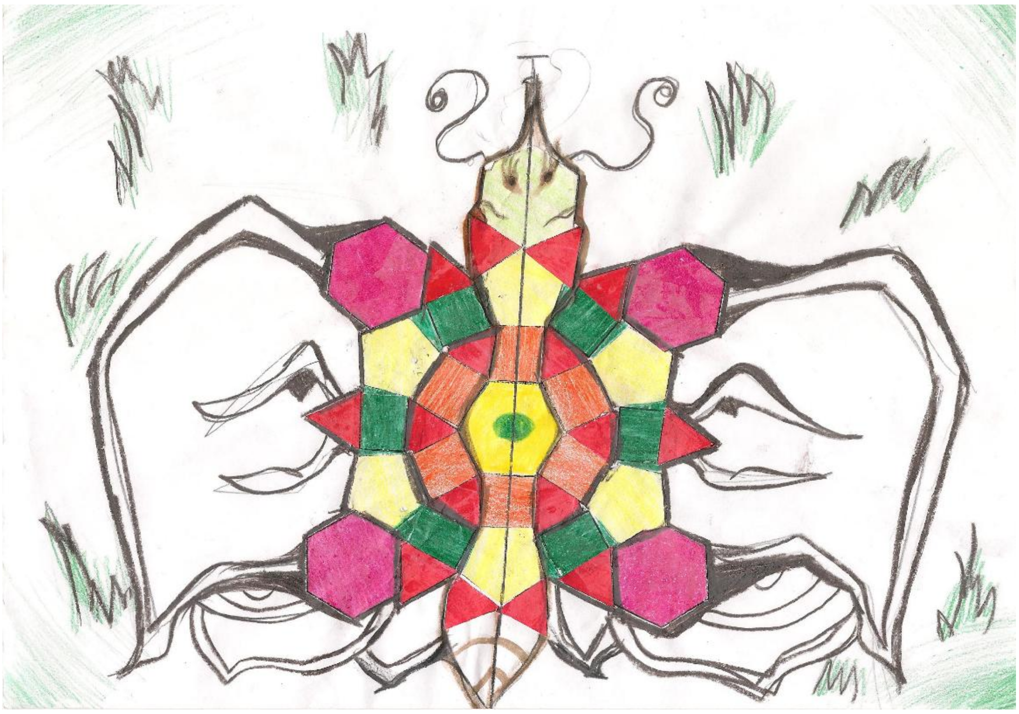
Na primeira parte da tarefa 3 o aluno acertou a primeira figura, mencionando a rotação como o tipo de simetria utilizada, na segunda figura mencionaram dois tipos de simetria, translação e reflexão, mas não observaram a rotação que ocorreu, mesmo assim explicaram bem como ocorreu cada tipo de simetria, mostrando ter compreendido bem o conceito.

Na terceira figura, o aluno observou as três simetrias, porém apenas a reflexão ocorreu, a dúvida provavelmente apareceu por existir em partes da figura as outras simetrias, porém essas não formam a regra que gerou a figura apresentada.

Mesmo com as dificuldades naturais da construção, o aluno mostrou ter compreendido bem as regras de formação do mosaico, construíram baseado em diversos polígonos, apesar de não terem usado os regulares como base, eles construíram polígonos que se encaixaram, formando o mosaico. A simetria utilizada pelo aluno foi a reflexão, vê-se naturalmente que o aluno criou um eixo de simetria vertical, e a partir dele, construíu os lados esquerdo e direito da figura, mantendo a proporcionalidade e a igualdade dos mesmos.

A única menção a se fazer é que como o aluno fez um desenho baseado no imaginário deles, ela não ficou reduzida ao uso de polígonos, mas a reflexão é mantida em boa parte do desenho, apenas a “grama” que foi desenhada não está em reflexão, mas o próprio aluno mencionou que a simetria de reflexão só existiria se o cenário no qual está a figura não fosse contado, por isso vemos que o aluno compreendeu o conceito, já que fez menção ao fato, ou seja, ele estava ciente do que fazia.

Figura 38: Produção do mosaico (aluno D16)



Fonte: arquivo da pesquisadora

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procuramos nessa pesquisa propor uma implementação do ensino de transformações geométricas no plano com a utilização de mosaicos, com o objetivo de analisar a aprendizagem dos alunos. Dessa forma procuramos responder a questão de investigação: *quais as contribuições das nossas tarefas para o ensino-aprendizagem de transformações geométricas a partir do 6º ano do Ensino Fundamental?*

Para isso, construímos a parte teórica da pesquisa nos baseando na definições sobre transformações geométricas no plano e a teoria de registros de representação semiótica, que nos serviu de aporte para a construção da proposta e base para a análise dos resultados.

Para se responder a questão norteadora, foi adotada a opção metodológica da pesquisa qualitativa, cuja produção de informações deu-se pela produção escrita dos alunos. O trabalho de campo coordenado pela professora-pesquisadora envolveu cinco etapas:

a) visita ao laboratório de ensino da matemática da Universidade de Sorocaba (UNISO);
b) abordagem de isometrias no plano;
c) aplicação de tarefas envolvendo isometrias em malhas;
d) aplicação da tarefa envolvendo condição de existências de um mosaico;
e) construção de mosaicos com polígonos regulares via transformações geométricas.

Com base nos resultados obtidos e a partir da análise feita no capítulo anterior, vemos que os alunos conseguiram criar um significado melhor para o conceito de transformações geométricas, em especial, as isometrias. Analisando as duplas uma a uma, percebemos que mesmo os alunos que tiveram dificuldade com alguma propriedade das simetrias, ainda conseguiram utiliza-la corretamente para as construções dos mosaicos, ou seja, conseguiram com certa naturalidade construir os diferentes tipos de isometrias no plano.

Para os mosaicos, vimos que os alunos compreenderam e alguns até conjecturaram a sua condição de existência, e com ela construíram mosaicos seguindo a ideia proposta, utilizando polígonos regulares e isometrias.

Os alunos participaram efetivamente destas tarefas, desenhavam, comentavam, e criavam, com muito interesse, e passaram isto para o papel, mostrando que devemos sempre instigar nossos alunos. Ficamos surpresos com os resultados, pois todas as duplas que terminaram os mosaicos, até mesmo as que tiveram dificuldade durante o processo, mostraram a compreensão das transformações no plano.

Dessa forma, percebemos que a proposta foi válida, já que os alunos criaram um significado para o conteúdo e fizeram os tratamentos e conversões de registros necessários e que levaram a construções dos mosaicos.

Deixamos o convite para que novos professores e pesquisadores continuem a buscar novas atividades para o ensino das transformações geométricas, pois o tema é lindo e com diversas perspectivas, relacionando matemática e arte de forma inspiradora.

Com esta pesquisa, sinto que evolui como professora-pesquisadora, que comecei a ter um novo olhar para a educação matemática, e para os lugares onde ela pode nos levar, perceber o quanto isto pode mudar a nossa visão em sala de aula e como este novo olhar faz com que melhoremos a cada dia como professores, profissão que escolhi seguir, que amo, mas que exige de nós o aprendizado diário.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, Claudia Maria Fiuza. **O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher.** 2014. 76f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática – Ensino Fundamental II. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) **Aprendizagem em matemática**: Registros de representações semióticas. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-34.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** (Sémiosis et Pensée Humaine: Registres Sémiotiques et Apprentissages Intellectuels). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011

DUVAL, Raymond. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v.7, n.1, p.118-138, 2012a.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v.7, n.2, p.266-297, 2012b.

DUVAL, Raymond. Rupturas e omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em geometria. In: BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu (orgs). **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ijuí: Editora Unijuí, 2014, p. 15-38.

FIORENTINI, Dario; FERNANDES, Fernando Luís Pereira; CRISTOVÃO, Eliane Matesco. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO: Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores, 2005, Lisboa. **Anais...** Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM), 2005. CD-ROM. 22p.

LORENZATO, Sérgio. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006.178p.

MEDEIROS, Margarete Farias. **Geometria dinâmica no ensino de transformações no plano:** uma experiência com professores da Educação Básica. 2012. 172f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

MIRANDA, Silvia Andrea Alexandre. **Construção de mosaicos:** uma análise por meio de tarefas exploratório-investigativas no 7º ano do ensino fundamental. 2014. 257f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas). Sorocaba: Universidade Federal de São Carlos, 2014.

NACARATO, Adair Mendes et al. Modalidades de pesquisas em educação matemática: um mapeamento de estudos qualitativos do GT-19 da Anped. In: REUNIÃO ANUAL DA ASSOCIAÇÃO NACIONAL DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 28., 2005, Caxambu. **Anais...** 19p. Caxambu, 2005. CD-ROM.

NASSER, Lilian; SOUSA, Geneci A. de ; PEREIRA, José Alexandre. Explorando a geometria do ensino fundamental por meio de reflexões, translações e rotações. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** 19p. Recife: UFPE, 2004. CD-ROM.

PEREIRA, Joana Mata; PONTE, João Pedro da. **Raciocínio matemático em contexto algébrico uma análise com alunos de 9º ano.** In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2011, Lisboa. **Anais...** M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds), 2011, p. 347–364.

PONTE, João Pedro; HENRIQUES, Ana; PEREIRA, Joana Mata. O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v.7, n.2, p.355-377, jul./dez. 2012.

REZENDE, Eliane Quelho Frota; QUEIROZ, Maria Lúcia Bontorim de. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas: Editora da Unicamp, 2000.

RODRIGUES, Camila Roberta Ferrão. **Potencialidades e possibilidades do ensino das transformações geométricas no Ensino Fundamental**. 2012. 156f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2012.

ROSSI, Izabela Caroline. **Aprendendo Isometria com Mosaicos**. 2014. 67f. 76f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). São José do Rio Preto: Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2014.

SANTAELLA, Lúcia. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2002.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** Matemática – Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Coord. Maria Inês Fini. São Paulo, SEE: 2010.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do Professor:** 6º ano do Ensino Fundamental, Matemática. São Paulo: SEE, 2014-2017, v.2.

SOUZA, Joamir; PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de saber matemática**: ensino fundamental – 6º ano. São Paulo: 2013.

TJABBES, Pieter. **O mundo mágico de Escher.** Disponível em: <http://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>. Acesso em : 1 mai. 2016.

Anexo A

Ocupações em escolas estaduais continuam em Sorocaba

Unidade no Jardim Santa Rosália foi tomada nesta quinta-feira (26). Manifestação é contra a reorganização escolar proposta pelo governo.

Do G1 Sorocaba e Jundiaí

A região de Sorocaba tem 21 escolas estaduais tomadas por estudantes. Na tarde desta quinta-feira (26) a unidade Júlio Bierrenbach Lima, no Jardim Santa Rosália foi ocupada, em Sorocaba (SP). Já a escola Maria de Lourdes de Franca Silveira, de Jundiaí (SP), foi desocupada após diálogo - de acordo com a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Com isso, restam duas unidades ocupadas em Jundiaí (SP). As manifestações são contra a reorganização escolar proposta pelo governo do Estado de São Paulo. **Já são 112 as escolas ocupadas por estudantes contrários ao projeto**.

As escolas ocupadas em Sorocaba são:

- E.E. Antônio Vieira Campos, no bairro Júlio de Mesquita: apesar de atualmente também ter alunos do 6º ao 9º do ensino fundamental, vai passar a atender somente alunos do ensino médio em 2016;
- E.E. Hélio Del Cistia, no Jardim São Camilo: apesar de atualmente ter alunos do ensino médio, vai atender somente alunos do 6º ao 9º do ensino fundamental;
- E.E. Guiomar Camolesi Souza, no Jardim Maria Eugênia: atualmente tem alunos do ensino fundamental anos finais e, em 2016, ficará apenas com os do ensino médio;
- E.E. Professora Isabel Lopes Monteiro, no bairro Marcelo Augusto: hoje atende alunos tanto do 6º ao 9º do ensino fundamental quanto do ensino médio. Mas em 2016 ficará apenas com alunos do fundamental;
- E. E. Mário Guilherme Notari, no Jardim Luciana Maria: será fechada e o prédio utilizado pelo Centro Paula Souza ou pela prefeitura;
- E.E. Professor Jorge Madureira, no Jardim Guaíba: vai passar a atender apenas alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental;

- E.E. Humberto de Campos, Jardim Zulmira: apesar de atualmente ter alunos do 6º ao 9º do ensino fundamental, vai passar a atender somente alunos do ensino médio em 2016;
- E.E. Professora Beathris Caixeiro Del Cistia, que fica no Jardim São Conrado: apesar de atualmente a unidade também ter alunos do 6º ao 9º do ensino fundamental, vai passar a atender somente alunos do ensino médio em 2016;
- E.E. Lauro Sanches, na Vila Carol: com a reorganização do ensino estadual, a instituição passará a ser de ciclo único e atenderá somente alunos que estão do 6º ao 9º do ensino fundamental;
- E. E. Júlio Prestes de Albuquerque, no Centro: a escola irá atender, a partir do ano que vem, somente alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental;
- E. E. Antônio Padilha, no Centro: apesar de atualmente também ter alunos do 6º ao 9º do ensino fundamental, a unidade vai passar a atender somente alunos do ensino médio em 2016;

ESCOLAS OCUPADAS
Alunos são contra reorganização em SP

- E.E. João Rodrigues Bueno, na Vila Carol: apesar de atualmente também ter alunos do 6º ao 9º do ensino fundamental, a unidade vai passar a atender somente alunos do ensino médio em 2016;
- E.E. Professora Elza Salvestro Bonilha, no Jardim Itanguá: será fechada e o prédio utilizado pelo Centro Paula Souza ou prefeitura;
- E.E. Professor Roque Conceição Martins, no Jardim Guadalupe: será fechada e o prédio utilizado pelo Centro Paula Souza ou prefeitura.
- E.E Professor Rafael Orsi Filho, no bairro Júlio de Mesquita; a escola irá atender, a partir do ano que vem, somente alunos do 6º ao 9º ano do ensino fundamental.

- E.E Senador Vergueiro, na Vila Hortência; não será afetada pela reorganização do ensino.
- E.E Professor Genésio Machado, na Vila Santana; a escola irá atender, a partir do ano que vem, somente alunos do ensino médio, do 1º ao 3º anos.
- E.E Professor Antônio Cordeio, no Parque das Laranjeiras; apesar de atualmente também ter alunos do 6º ao 9º do ensino fundamental, a unidade vai passar a atender somente alunos do ensino médio em 2016.
- E.E Professora Ossis Salvestrini Mendes, na Rua Paes de Linhares, 1198, no Jardim Paulistano.
- E.E Professora Ezequiel Machado nascimento, que fica na Rua Angelo Elias, 830, no Santa Rosália.

-E. E Professor Júlio Bierrebach Lima, fica na rua Vicente Funes Marins, 95, Jardim Santa Rosália.

Rotina

Colchões infláveis, sacolas com alimentos, produtos de limpeza e videogame. Esses são alguns dos objetos trazidos pelos alunos que ocupam a Escola Estadual Beathris Caixeiro Del Cistia, no bairro São Conrado, em Sorocaba (SP), em protesto contra a reorganização escolar proposta pelo Governo do Estado. **A organização de uma sala transformada em dormitório foi apresentada por uma adolescente à equipe da TV TEM na terça-feira** (24).

Ao observar as imagens, é possível notar sobre as carteiras, cerca de oito colchões infláveis com lençóis e travesseiros, que ocupam uma fileira inteira perto das janelas. No local, também tem mochilas e jaquetas no chão. Já na área do refeitório, que se tornou uma espécie de despensa, alimentos perecíveis, como feijão, ainda estão embalados em sacolas plásticas. Ao lado deles, em mesas separadas, produtos de limpeza, como água sanitária. No freezer, salsicha e leite.

Colchões infláveis em sala de aula da escola Beathris Caixeiro (Foto: Moisés Soares/TV TEM)

"Temos a despensa onde a gente tem mantimentos arrecadados para o almoço e a janta. Também trouxemos produtos de limpeza para manter a escola limpa. Existe uma sala onde os meninos dormem e os colchões foram doados. No local, eles improvisaram um lugar para jogar videogame e distrair um pouco a cabeça em um horário livre", detalha a jovem.

No total, a escola tem 1.225 alunos e está ocupada desde segunda-feira (23) por cerca de 50 estudantes. Com a reorganização, a unidade, que atualmente atende alunos do 6º ao 9º do ensino fundamental e também do ensino médio, passará a ter estudantes apenas do ensino médio.

Sem prova

Por conta das ocupações, **as provas do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp), que seriam aplicadas nesta terça-feira (24) e quarta-feira (25), foram canceladas** nessas unidades. A informação foi confirmada por meio de nota pela Secretaria de Educação.

Nas demais unidades da cidade, o exame que mede o nível de aprendizado dos alunos paulistas será aplicada normalmente. As notas obtidas compõem o Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo (Idesp) e servem como parâmetro ao cálculo do bônus de professores e funcionários.

Os aspectos relacionados ao pagamento do bônus por resultado, que tem no Saresp elemento central para fins de cálculo, serão estudados do ponto de vista legal e comunicados posteriormente. A previsão da Secretaria é que 1,2 milhão de alunos sejam avaliados neste ano.

De acordo com a coordenadora do Sindicato dos Professores do Ensino Oficial do Estado de São Paulo (Apeoesp) de Sorocaba, Magda Souza, não é possível quantificar o número de ativistas que realizam os movimentos porque a organização dos protestos é feita apenas pelos alunos. "Há uma variação de ativistas em cada escola. Estive em locais com 30 estudantes, outros com 50. Não estamos organizando [o protesto], mas apoiamos os movimentos. Somos contra essa reorganização", afirma.

Estudantes na porta de escola ocupada em Jundiaí (Foto: Reprodução/TV TEM)

Em Jundiaí e região

As escolas Eloy de Miranda Chaves, na Vila Aparecida e Barão de Jundiaí, que fica no bairro Colônia, foram tomadas por estudantes em Jundiaí.

Os jovens ocuparam a escola na última terça-feira (16). Eles são contra a reorganização escolar proposta pelo Governo do Estado. Na quinta-feira (19), o juiz da Vara da Fazenda Pública de **Jundiaí** determinou a reintegração de posse, mas os estudantes se recusaram a deixar o prédio depois da visita do oficial de Justiça.

Também na noite de segunda-feira (23), a Escola Estadual Rei Dagoberto Romag, em **Campo Limpo Paulista** (SP), foi ocupada por estudantes em protesto contra a reorganização escolar. Segundo a Secretaria de Educação, a escola não faz parte das mudanças no ensino, mas os alunos pedem por melhorias na estrutura da unidade.

Votorantim e Iperó

A E.E. Selma Maria Martins Cunha, localizada no Jardim Tatiana, em Votorantim (SP), também aderiu ao movimento estudantil na manhã desta terça-feira. Os estudantes tomaram a unidade antes do início das aulas. A escola atende atualmente alunos do 6º ao 9º do ensino fundamental e também do 1º ao 3º ano do ensino médio. Mas, no ano que vem, passará a ser de ciclo único, atendendo apenas alunos do ensino médio.

Já em **Iperó**, alunos ocuparam a E.E Gaspar Ricardo Júnior, localizada na Rua Santo Antônio, 186, no Centro. A escola não será afetada pela reorganização escolar, segundo a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

Alunos fazem manifestação na frente de escolas (Foto: Moisés Soares/ TV TEM)

Estudantes ocupam mais uma escola em Sorocaba (Foto: Apeoesp Sorocaba/Divulgação)