



EDUARDO ALEXANDRE ZAMPIERI

INVERSÕES NA ELIPSE

Santo André, 2015



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

EDUARDO ALEXANDRE ZAMPIERI

INVERSÕES NA ELIPSE

Orientador: Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de
Matemática, Computação e Cognição para
obtenção do título de Mestre

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO
DEFENDIDA PELO ALUNO EDUARDO ALEXANDRE ZAMPIERI,
E ORIENTADA PELO PROF. DR. MÁRCIO FABIANO DA SILVA.

SANTO ANDRÉ, 2015

Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do ABC
Elaborada pelo Sistema de Geração de Ficha Catalográfica da UFABC
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Alexandre Zampieri, Eduardo
Inversões na elipse / Eduardo Alexandre Zampieri —
Universidade Federal do ABC, 2015.

165 fls. : il.

Orientador: Márcio Fabiano da Silva

Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC,
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT, Santo André, 2015.

1. Elipse. 2. Inversão geométrica. 3. Transformação
Geométrica. 4. Inversões na Elipse. I. da Silva, Márcio
Fabiano. II. Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT, 2015. III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Fundação Universidade Federal do ABC
Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Avenida dos Estados, 5001 – Bairro Santa Terezinha – Santo André – SP
CEP 09210-580 · Fone: (11) 4996-0017
profmat@ufabc.edu.br

FOLHA DE ASSINATURAS

Assinaturas dos membros da Banca Examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Dissertação de Mestrado do candidato Eduardo Alexandre Zampieri, realizada em 27 de agosto de 2015:

Márcio Fabiano da Silva

Prof.(a) Dr.(a) **Márcio Fabiano da Silva** (UFABC) – Presidente

Antonio Cândido Faleiros
Prof.(a) Dr.(a) **Antonio Cândido Faleiros** (UFABC) – Membro Titular

Armando Traldi Junior
Prof.(a) Dr.(a) **Armando Traldi Junior** (IFSP) – Membro Titular

Prof.(a) Dr.(a) **Rafael de Mattos Grisi** (UFABC) – Membro Suplente

Prof.(a) Dr.(a) **Alexandre Lymberopoulos** (USP) – Membro Suplente

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, de acordo com as observações levantadas pela banca no dia da defesa, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

Santo André, _____ de _____ de 2015.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Dedico este trabalho a meus pais Antonio e Lourdes que sempre incentivaram os estudos mesmo não os tendo e trabalharam incansavelmente, nunca medindo esforços, para que os filhos pudessem estudar e adquirir conhecimentos.

AGRADECIMENTOS

À Deus por tudo o que me proporcionou para que pudesse chegar até aqui. Mais uma vez a teoria virou prática. Para fazer essa caminhada tive que dar a volta em algumas pedras do caminho ao invés de retirá-las do lugar que ocupavam.

À minha avó, meus pais, irmãos e sobrinhos por compreenderem a minha ausência física durante os 30 meses de estudo e dedicação para a conclusão desse projeto de vida. Especialmente aos meus pais, que sempre ensinaram com suas ações que não se deve parar a caminhada iniciada. Iniciá-la é fácil, pois no começo temos ânimo, grandes expectativas e sonhos. Persistir nela nos traz o cansaço e com ele as incertezas. Mas para alcançar a linha de chegada é preciso se conhecer para se superar. Obrigado pai. Obrigado mãe.

Aos colegas de trabalho que me apoiaram e incentivaram de alguma forma.

Aos amigos que permaneceram todo o tempo tentando me tirar dos estudos para espalhar as ideias mesmo sabendo que eu não o faria.

Aos amigos e colegas de curso: André, Claudia, Claudinei, Daniel, Edmundo, Francisco, Germano, Henrique, Henry, Laurindo, Lisandra, Luiz Fernando, Luiz Gustavo, Marcell, Marcelo, Nair, Renata, Roberto, Robson, Rodrigo, Rogério, Samuel e Thiago por todo companheirismo, amizade, pelos muitos momentos de muito estudo, aprendizado e descontração. Em especial, àqueles que ajudaram direta ou indiretamente na realização desse trabalho. Nossa turma foi única!

Aos professores Dr. Daniel M. Machado, Dr. Eduardo Guéron, Dr. João C. M. Ferreira, Dr. Maurício F. S. Lima, Dr. Rafael M. Grisi, Dr. Sinuê D. B. Lodovici e Dr. Valdecir Marvulle pelo compartilhamento do conhecimento, pelo bom humor, incentivo e empenho para tornar as aulas aos sábados menos cansativas.

Ao professor Dr. Márcio Fabiano da Silva por ter me orientado e se colocado à disposição mesmo não tendo lecionado para a minha turma durante o curso. Muito obrigado Professor Márcio.

À todos que eu, eventualmente, me esqueci de agradecer.

“A diferença entre o possível e o impossível está na vontade humana.”

Louis Pasteur.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo estudar o processo de inversão geométrica na elipse que nada mais é do que uma transformação geométrica sofrida em uma superfície não plana. Mais do que isso, é uma forma de propor um trabalho diferenciado ao professor do Ensino Médio baseado nas aplicações da Elipse e de suas propriedades e que a partir de um trabalho de pesquisa pode ser estendido para as demais cônicas. Diferente da inversão geométrica clássica na circunferência, utilizamos a elipse como agente inversor.

Primeiramente trazemos um apanhado da história da elipse. Apresentamos seus elementos, seus conceitos e propriedades básicas.

Recordamos a homotetia, que é uma transformação geométrica do plano e que faz parte do estudo dos resultados das inversões estudadas.

Em seguida, passamos a estudar as inversões na elipse.

Então, para finalizar, são sugeridas atividades envolvendo as elipses e outras as inversões que nela ocorrem. Tais atividades podem ser aplicadas em sala de aula desde as primeiras séries do ensino fundamental II, desmistificando a famosa pergunta: Onde e/ou para que vou usar “isso”, professor? São atividades de pesquisa, atividades interativas e de trabalho com o *software* de geometria dinâmica *Geogebra*[®].

Palavras-chave: inversão geométrica, transformação geométrica, elipse.

ABSTRACT

This work aims to study the geometric inversion process on the ellipse which is nothing more than a geometric transformation suffered in a non-planar surface. More than that, it's a way of proposing a differentiated work to high school teacher based on practical applications of Ellipse and its properties and that from a research paper can be extended to other conical. Unlike the classic geometric inversion in the circle, we use the ellipse as inverter agent.

First we bring an overview of the history of the ellipse. We present its elements, its concepts and basic properties.

We recall about dilation, which is a geometric transformation on plane very important to study the results of studied inversions.

Then, we began to study the inversions on Ellipse.

Finally, we suggest activities involving the ellipses and other inversions that occur in it. Such activities can be applied in the classroom from the early grades of elementary school, demystifying the famous question: Where and / or I will use " it ", Professor? Are research activities, interactive activities and work with dynamic geometry *software Geogebra*[®].

Keywords: geometric inversion, geometric transformation, ellipse.

CONTEÚDO

Introdução	1
1 A EVOLUÇÃO DE UMA CRIAÇÃO/DESCOBERTA ATRAVÉS DOS TEMPOS	5
1.1 Notas históricas sobre a Elipse	5
2 ELIPSE E SEUS ELEMENTOS	11
2.1 Focos	11
2.2 Eixo Menor	15
2.3 Relação entre os eixos e a distância focal	16
2.4 Excentricidade	17
2.5 Equações da elipse	17
2.5.1 Equação da elipse com centro na origem e focos no eixo Ox . . .	18
2.5.2 Equação da elipse com centro na origem e focos no eixo Oy . . .	19
2.5.3 Equação da elipse com centro qualquer	19
2.5.4 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$	22
2.6 Simetria na Elipse	24
2.7 Propriedade Refletora da elipse	25
3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS	27
3.1 Homotetia	28
3.2 Elipses homotéticas	29
4 INVERSÕES NA ELIPSE	31
4.1 O que é uma inversão geométrica?	31
4.2 Reta OP	35
4.3 Coordenadas do ponto Q	35
4.4 Equação da reta tangente à elipse	36
4.4.1 Demonstração da equação da reta tangente à elipse	37
4.5 Reta polar de P	39
4.6 Ponto inverso de P	40
4.6.1 Obtenção do ponto inverso de forma geométrica.	40
4.6.2 Obtenção do ponto inverso de forma algébrica.	43

Conteúdo

4.6.3	Sobre a construção Geométrica de P'	45
4.7	Unicidade do ponto inverso	47
4.7.1	Razão cruzada e conjugados harmônicos	51
4.8	Imagens de curvas sobre inversão na elipse	52
4.8.1	Imagem de retas obtidas sobre inversão em relação a \mathcal{E}	53
4.8.2	Imagem de elipses obtidas sobre inversão em relação a \mathcal{E}	58
4.8.3	Imagem das demais cônicas obtidas sobre inversão em relação a \mathcal{E}	61
4.8.4	Resumo dos casos de inversão.	62
5	NOTAS PARA SALA DE AULA	67
5.1	ELIPSE - Aplicações e atividades	67
5.1.1	Observação das formas do mundo	67
5.1.2	Construção/obtenção de elipses de formas manuais	69
5.1.3	Construção de elipses em ambiente de geometria dinâmica	73
5.1.4	Construção de elipses no GeoGebra®	75
5.1.5	Órbitas Planetárias	81
5.1.6	A elipse na moda	87
5.1.7	Dentista, Sala do sussuro e outros bichos	92
5.1.8	Arquitetura	96
5.1.9	Engrenagens Elípticas	98
5.2	INVERSÕES - Aplicações e atividades	101
5.2.1	Imagens formadas por inversão	101
5.2.2	Ponto inverso e software de geometria dinâmica	103
5.2.3	Tangenciando Círculos	119
5.2.4	A inversão na engenharia mecânica.	122
A	APÊNDICE A	127
A.1	Respostas das atividades propostas	127
	Bibliografia	137

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	M.C.Escher - Still Life with Spherical Mirror 1934. Fonte: [22] .	2
Figura 2	M.C.Escher - Three Spheres II 1946. Fonte: [22]	3
Figura 3	M.C.Escher - Hand with Reflecting Sphere 1935. Fonte: [22] . .	3
Figura 4	Inversão produzida com superfície esférica refletora. Fonte [16]	3
Figura 5	Cone retângulo.	6
Figura 6	Cone acutângulo.	6
Figura 7	Cone obtusângulo.	6
Figura 8	Secções no cone simples. Fonte: [43]	8
Figura 9	Secções no cone duplo Fonte: [10]	8
Figura 10	Focos e distância focal.	12
Figura 11	Semieixos = c e distância focal = $2c$	12
Figura 12	Figura da primeira edição de La Géométrie. Fonte: [11].	12
Figura 13	Representação dos vértices A_1 e A_2 e focos F_1 e F_2 da elipse. . .	13
Figura 14	Eixo maior	14
Figura 15	Eixo menor: $B_1B_2 = 2b$	15
Figura 16	Eixo menor: $B_1B_2 = 2b$	16
Figura 17	Variação da excentricidade da elipse. Fonte: [30]	17
Figura 18	Variação da excentricidade das cônicas.Fonte: [37]	18
Figura 19	Elipse de focos F_1 e F_2 e P genérico	18
Figura 20	Elipse de focos F_1 e F_2 e P genérico	20
Figura 21	Elipse \mathcal{E} transladada mantendo eixo maior paralelo ao eixo OX	21
Figura 22	Elipse \mathcal{E} transladada mantendo eixo maior paralelo ao eixo Oy .	22
Figura 23	Simetria de \mathcal{E} em relação à reta focal.	25
Figura 24	Simetria de \mathcal{E} em relação ao centro.	25
Figura 25	Reflexão na elipse	26
Figura 26	Reflexão na elipse	26
Figura 27	Polígonos homotéticos.	28
Figura 28	Elipses homotéticas.	29
Figura 29	Inversão numérica [3].	33
Figura 30	Inverso de P . Fonte: [3].	33

Lista de Figuras

Figura 31	P' interior a elipse é inverso de P , exterior à elipse.	34
Figura 32	Relação entre P e Q	36
Figura 33	Reta tangente à elipse. Fonte: [7].	37
Figura 34	Reta polar de P	39
Figura 35	Semirreta OP	40
Figura 36	Na intersecção de OP com \mathcal{E} temos Q e por Q uma tangente à \mathcal{E}	41
Figura 37	BB' é a paralela a r	41
Figura 38	P' é a intersecção das tangentes por B e B'	41
Figura 39	P' , P e Q coincidem no mesmo ponto.	42
Figura 40	Semirreta OP	42
Figura 41	Retas tangentes a \mathcal{E} por P . Fonte: [35]	42
Figura 42	Inversos P e P' . Fonte: [35].	43
Figura 43	Projeções dos pontos P , Q e P' respectivamente são: X , Y e Z	43
Figura 44	Triângulos semelhantes.	44
Figura 45	Triângulos semelhantes.	44
Figura 46	Pontos distintos têm inversos distintos. Fonte: [35]	48
Figura 47	Inversos de pontos não colineares. Fonte: [35]	49
Figura 48	Inversos de pontos não colineares. Fonte: [35]	49
Figura 49	Inversos de pontos não colineares. Fonte: [35]	50
Figura 50	Disposição de 4 dos pontos em razão harmônica	51
Figura 51	Disposição de 4 dos pontos em razão harmônica	52
Figura 52	Imagem da reta não contendo \mathcal{E}	53
Figura 53	Imagem da reta não contendo \mathcal{E}	53
Figura 54	Inversão de retas perpendiculares onde $O \in l_1$ e $O \in l_2$	55
Figura 55	Inversão de retas perpendiculares onde $O \notin l_1$ e $O \in l_2$	56
Figura 56	Inversão de retas perpendiculares sendo que $O \notin l_1$ e $O \notin l_2$	56
Figura 57	Imagem de um feixe de retas não contendo O de \mathcal{E}	57
Figura 58	Inversão de um feixe de retas paralelas. Fonte: [35]	58
Figura 59	Elipse sobre inversão gerando elipse.	58
Figura 60	Elipse sobre inversão gerando reta	59
Figura 61	Pontos de tangência entre elipses homotéticas.	61
Figura 62	Circunferência sobre inversão na elipse ($O \in C$).	62
Figura 63	Circunferências sobre inversão na elipse ($O \notin C$).	63
Figura 64	Parábola sobre inversão na elipse ($O \in C$)	63
Figura 65	Parábolas sobre inversão na elipse ($O \notin C$).	64
Figura 66	Hipérbole sobre inversão na elipse ($O \in C$)	64

Figura 67	Hipérboles sobre inversão na elipse ($O \notin C$).	65
Figura 68	Obtenção da elipse pelo método das coordenadas.	70
Figura 69	Retângulo base para obter uma elipse.	70
Figura 70	Fita de papel para desenhar elipses.	71
Figura 71	Elipse feita a partir de uma fita de papel.	71
Figura 72	Elipsógrafo: dispositivo para desenhar elipses. Fonte [18]	71
Figura 73	Elipse construída com o método do jardineiro.	72
Figura 74	Elipse construída com o método do jardineiro.	73
Figura 75	Interface do GeoGebra	74
Figura 76	Sistema solar representado por circunferências concêntricas. . .	82
Figura 77	Hippopede descrita pelo movimento da Terra em volta do Sol. .	83
Figura 78	Modelo heliocêntrico de Copérnico.	83
Figura 79	Modelo atual do sistema solar.	84
Figura 80	O Sol fica em um dos focos da elipse.	84
Figura 81	Representação gráfica das órbitas de alguns astros.	86
Figura 82	Representação gráfica das órbitas de alguns astros.	87
Figura 83	Tronco de cilindro.	88
Figura 84	Manga da camisa planificada	90
Figura 85	Elipse como secção do cilindro.	92
Figura 86	Espelho elíptico da luminária do destista.	93
Figura 87	Litotriptor, fonte [34]	93
Figura 88	Gravura dos espelhos incendiários de Arquimedes de Athanasius Kircher.	95
Figura 89	Mesa de bilhar elíptica.	95
Figura 90	Praça de São Pedro(Roma) com formato elíptico e focos bem marcados. [21]	96
Figura 91	Jardim Botânico Nacional de Gales(Reino Unido). [21]	97
Figura 92	Coliseu(Roma)-A planta baixa é uma elipse cujo eixo maior tinha 188m e o menor 156m. [21]	97
Figura 93	Ponte Santa Trînia em Florença: três arcos elípticos [1].	97
Figura 94	Engrenagens elípticas com eixos nos centros. Fonte: [14]. . . .	98
Figura 95	Engrenagens elípticas com eixos nos centros. Fonte: [13]. . . .	99
Figura 96	Engrenagens elípticas com eixos nos focos. Fonte: [13]. . . .	99
Figura 97	Deslocamento de líquido feito por engrenagens elípticas. Fonte: [14].	100
Figura 98	Imagem abrangente formada num espelho esférico. Fonte: [1]. .	101

Lista de Figuras

Figura 99	Superfície refletora em forma de feijão - Chicado. Fonte: [38].	102
Figura 100	Superfície refletora em forma de feijão - Chicado. Fonte: [32].	102
Figura 101	Janela de álgebra do GeoGebra.	106
Figura 102	Criação de nova ferramenta no GeoGebra.	108
Figura 103	Criação de nova ferramenta no GeoGebra - aba objetos finais.	108
Figura 104	Criação de nova ferramenta no GeoGebra - aba objetos iniciais.	109
Figura 105	Criação de nova ferramenta no GeoGebra - aba objetos iniciais.	109
Figura 106	Janela de opções do GeoGebra - Habilitar rastro.	111
Figura 107	Janela de opções do GeoGebra - Função Animar.	111
Figura 108	Figura obtida na inversão de uma elipse.	111
Figura 109	Caixa de polígono regular - GeoGebra.	113
Figura 110	Caixa de polígono regular - GeoGebra.	114
Figura 111	Caixa de polígono regular - GeoGebra.	115
Figura 112	Imagem da inversão de um triângulo interno à elipse - GeoGebra.	118
Figura 113	Imagem da inversão de um triângulo externo à elipse - GeoGebra.	118
Figura 114	Os círculos de Steiner. Fonte: [20].	119
Figura 115	Inversão da elipse. Fonte: [35]	120
Figura 116	Inversão de uma torre de elipses tangentes à elipse inversora.	121
Figura 117	Inversão de uma torre de elipses não tangentes à elipse inversora.	121
Figura 118	Mecanismo inversor de James Watt [39].	122
Figura 119	Esquema inversor de Peaucellier.	123
Figura 120	Roda elíptica. Fonte: [17].	123
Figura 121	Bicicleta <i>Elip</i> [®] que possui rodas elípticas. Fonte: [29].	124
Figura 122	Estrutura da roda elíptica.	125
Figura 123	Estrutura do cubo da roda elíptica.	126
Figura 124	Resultado da atividade 2	127
Figura 125	Resultado da atividade 6	128
Figura 126	Resultado da atividade 7	128
Figura 127	Resultado da atividade 8	129
Figura 128	Resultado da atividade 9	129
Figura 129	Resultado da atividade 10	130
Figura 130	Resultado da atividade 10	130
Figura 131	Resultado da atividade 11	131
Figura 132	Resultado da atividade 15	132
Figura 133	Imagem da inversão de um segmento de reta que contém a origem - Geogebra.	135

- Figura 134 Imagem da inversão de um triângulo externo à elipse - Geogebra.135
Figura 135 Imagem da inversão de um triângulo externo à elipse - Geogebra.136

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Excentricidades de planetas	85
----------	---------------------------------------	----

INTRODUÇÃO

A geometria analítica é um conteúdo fascinante, uma vez que é capaz de representar através da álgebra todos os elementos das geometrias plana e espacial ¹. Porém, alguns de seus tópicos são ensinados de forma muito superficial. Das cônicas que fazem parte desse universo analítico, a parábola é a mais ensinada/estudada/divulgada desde as últimas séries do ensino Fundamental II até a última série do Ensino Médio. Porém, o ensino da elipse e da hipérbole muitas vezes não acontece de forma satisfatória nas séries/anos do Ensino Médio a que se destina. Por isso ao escrever este trabalho, objetivei a construção de um documento que facilitasse ao leitor (professores do ensino fundamental II e ensino Médio e alunos) o acesso à informações sobre uma dessas cônicas: a elipse.

Pela proposta curricular da Secretaria da Educação do estado de São Paulo, as cônicas aparecem timidamente como o último assunto a ser trabalhado no primeiro bimestre do terceiro ano do Ensino Médio, cujo objetivo é um estudo nada aprofundado do assunto e que está longe do ideal:

“Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas.”

Tal abordagem superficial pode deixar os alunos que tem inclinação para cursar a graduação na área de exatas, com grande defasagem e desvantagem em relação à alunos que tiveram uma boa formação matemática escolar.

Aliado a isso, muitos dos professores que deveriam transmitir esses conhecimentos em sala de aula, não tiveram uma capacitação ou formação adequada, não tem domínio do assunto ou não conseguem cumprir o planejamento curricular anual e, sendo as cônicas consideradas muitas vezes como um conteúdo supérfluo, acabam sendo trabalhadas ainda menos do que é proposto.

¹ Foi o matemático francês René Descartes (1596-1650) quem publicou em 1637, na Holanda, o Discurso do Método, que trazia os primeiros ensaios da geometria analítica.

Esse trabalho, porém, não se limita somente a repetir conceitos básicos que podem ser encontrados em qualquer livro didático. Vai mais além. Também tratará sobre inversões geométricas na elipse.

Como disse Cristina Acciarri em [8]:

“Meus professores sempre me deixaram saber que existia mais do que me contavam. É como se me dissessem: olha, deixo você nadar aqui na beira da praia, mas pode chegar ali mais ao fundo se um dia souber nadar bem”.

Assim, aquele que ensina deve saber muito mais do que aquele que aprende para que possa mostrar aos seus discípulos que existe muito mais a ser estudado do que se imagina. A intensão, modesta, é estimular a curiosidade e a pesquisa daquele que virá a manusear esse documento.

Os casos de inversão geométrica clássica, mais comuns, estão relacionados à circunferência ou à esfera, que são agentes de inversão. Para dar uma ideia àquele que entra em contato com tal conceito pela primeira vez, a inversão geométrica na circunferência, na esfera ou na elipse (que é nosso alvo da pesquisa) pode ser comparada a uma reflexão na reta, ou seja, os agentes da inversão são nossos “espelhos”. Mas esses espelhos não são espelhos comuns, são espelhos que “deformam” a imagem do objeto estudado. Por exemplo: Retas produzem círculos ou elipses como imagens. Segmentos de retas transformam-se em arcos de circunferência e vice-versa. As ilustrações de M.C.Escher (figuras 1, 2 e 3) representam magnificamente inversões na esfera.



Figura 1: M.C.Escher - Still Life with Spherical Mirror 1934. Fonte: [22]

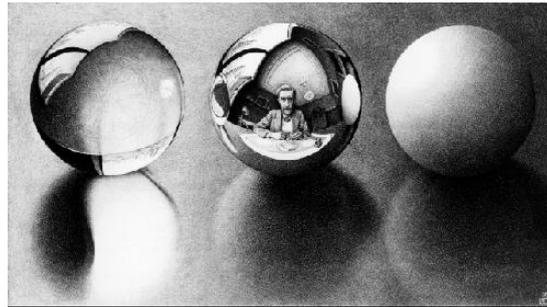


Figura 2: M.C.Escher - Three Spheres II 1946. Fonte: [22]



Figura 3: M.C.Escher - Hand with Reflecting Sphere 1935. Fonte: [22]



Figura 4: Inversão produzida com superfície esférica refletora. Fonte [16]

Uma simples colher ou uma esfera refletora e uma máquina fotográfica podem produzir o mesmo efeito de inversão (figura4).

INTRODUÇÃO

No primeiro capítulo fizemos um apanhado histórico, em ordem cronológica, para verificarmos como os conhecimentos acerca das elipses foram se desenvolvendo e se acumulando durante os tempos. É importante verificar (e se conscientizar) de que os conhecimentos são construídos de forma lenta, os resultados surgem a longo prazo e que esses resultados encontrados são obtidos através de um esforço coletivo.

O segundo capítulo trata dos elementos básicos da elipse.

As transformações geométricas da geometria euclidiana, especialmente a homotetia, compõem o terceiro capítulo deste trabalho.

Organizados no quarto capítulo estão os estudos realizados sobre as inversões geométricas que podem ocorrer na elipse.

Por fim, o quinto capítulo traz aplicações das elipses e suas inversões em outras áreas do conhecimento, tais como: Astronomia, Engenharia e Medicina, além de atividades para aplicação em sala de aula.

A EVOLUÇÃO DE UMA CRIAÇÃO/DESCOBERTA ATRAVÉS DOS TEMPOS

A geometria e toda a matemática foi criada/descoberta pela necessidade humana de resolver problemas do dia a dia ou problemas teóricos inerentes da própria matemática. A descoberta/criação da elipse não foi diferente. Esse elemento geométrico não é obra de um único pensador. Ao longo do tempo, matemáticos se empenharam em pesquisas e estudos para descobrir e documentar seus elementos, propriedades e aplicações.

1.1 NOTAS HISTÓRICAS SOBRE A ELIPSE

Discípulo de Eudoxo na academia de Platão, Meneacmus, matemático grego (380 – 320 a.C.), teria sido o primeiro a descobrir a necessidade das curvas cônicas enquanto trabalhava na resolução do problema de Delos ou duplicação do cubo. Tal problema consistia em obter um método para, dada a aresta de um cubo, construir, com régua e compasso, a aresta de um segundo cubo cujo volume é o dobro do cubo inicial [7]. Em suas investigações concluiu que esta duplicação poderia ser obtida desde que encontrasse e usasse curvas que obedecessem a uma propriedade de proporção do tipo $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. Então, descobriu que havia uma família de curvas disponíveis que ofereciam as propriedades necessárias para a solução que procurava. Essas curvas poderiam ser obtidas cortando-se um cone circular reto por planos perpendiculares à sua geratriz gerando assim a elipse, a hipérbole e a parábola, cônicas fundamentais para a solução do seu problema.

Variando a abertura (ângulo do vértice) do cone, Meneacmus obteve curvas de três tipos diferentes:

- Com o ângulo do vértice do cone sendo reto, a secção seria uma parábola.

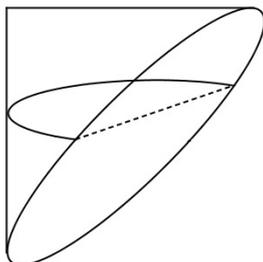


Figura 5: Cone retângulo.

- Com o ângulo do vértice do cone sendo agudo, a secção seria uma elipse.

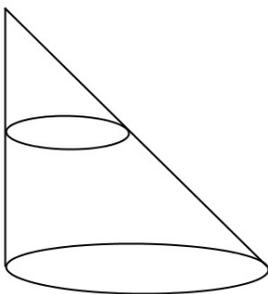


Figura 6: Cone acutângulo.

- Com o ângulo do vértice do cone sendo obtuso, a secção seria uma hipérbole.

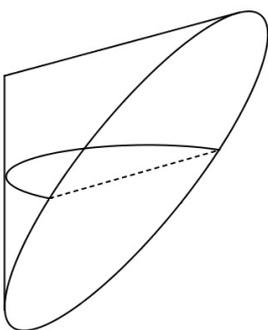


Figura 7: Cone obtusângulo.

As três secções são obtidas a partir do cone. Por isso recebem o nome de secções cônicas.

Euclides (aproximadamente 330 a.C – 265 a.C.) e seu contemporâneo Aristeu, o Velho (370 a. C. - 300 a. C.), também realizaram trabalhos importantes sobre secções de cones de revolução, sendo que Os elementos de Euclides substituíram textos anteriores. Arquimedes (matemático grego, Pai da Geometria, nasceu na Síria 287a.C. – 212 a.C.) escreveu um tratado sobre conóides e esferóides. Nele consta que encontrou a área da elipse (aproximadamente em 330 a.C.), “ As áreas das elipses são como os retângulos sob seus eixos”(proposição 6).

Hoje, de acordo com [7] podemos dizer que a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pode ter sua área representada por πab ou que a área da elipse é igual a área de um círculo cujo raio é a média geométrica entre a medida dos semieixos da elipse.

Sua obra é um ponto de referência fundamental para reconstruir, pelo menos em parte, o estado da teoria sobre cônicas registrada antes de Apolônio. Arquimedes teria atingido o ponto mais alto no estudo da geometria da época.

Apolônio de Perga, astrônomo e matemático grego (262-190 a.C.), de acordo com [2], escreveu “*As Cônicas*” em oito volumes. É a sua obra principal e marcam uma “revolução” na pesquisa das cônicas. Tanto é que em um nível mais avançado a obra de Apolônio superou e substituiu as demais no campo das secções cônicas, incluindo “*As Cônicas*” de Euclides. Os quatro primeiros livros dessa obra se tornaram tão importantes que foram chamados de “os novos elementos” a serem estudados e utilizados como referência. O sucesso das inovações propostas por Apolônio condenou ao esquecimento os escritos anteriores sobre cônicas. “*As Cônicas*” são um dos pontos altos da geometria grega para [2], e Apolônio o ápice da geometria da posição pois organizou e aprimorou os resultados conhecidos até então sobre o assunto na sua obra *Secções Cônicas*.

Apolônio abandonou a definição de cônicas como um plano perpendicular à geratriz de um cone de determinada abertura, variando, em vez disso, a inclinação do plano secante ao cone. Se o plano encontrasse todas as geratrizes do cone, a seção seria uma circunferência ou uma elipse, de outra forma, seria uma parábola (no caso em que o plano secante fosse paralelo a uma geratriz) ou uma hipérbole.

Segundo [15], só se considerava um ramo da hipérbole até então. Foi Apolônio no livro 1 de seu tratado, que passou a obter as secções cônicas a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo. Introduziu assim, a hipérbole de dois ramos, chamando-os de “seções opostas”, como conhecemos hoje em dia.

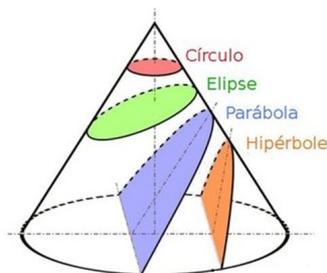


Figura 8: Secções no cone simples. Fonte: [43]



Figura 9: Secções no cone duplo Fonte: [10]

As cônicas não foram batizadas por Menaecmus como hipérbole, parábola e elipse, mas sim por Apolônio, embora os dois primeiros nomes já haviam sido usados antes dele. Essas denominações, de acordo com [2], provêm do modo pelo qual ele introduziu a propriedade fundamental (“sintomo”) das três seções, vinculando-a à teoria da aplicação das áreas. Depois dele não houve, aparentemente, desenvolvimentos importantes. A obra Seções Cônicas de Apolônio e os Elementos de Euclides constituem o auge da matemática grega.

Pappus de Alexandria, (matemático egípcio helenizado 290 – 350 d.C.) em seus escritos credita ao geômetra grego Aristeu, o Velho, a publicação do primeiro tratado sobre seções cônicas. Ainda se refere aos escritos de Apolônio sobre o tema e depois de séculos ainda se discutia os mesmos problemas.

Na visão de Descartes (matemático Frances, 1596 – 1650) uma elipse poderia ser descrita como uma série de pontos no plano onde a partir de um desses pontos, para se obter o próximo ponto da série, devemos aumentar uma coordenada e diminuir a outra, de modo que a soma ponderada dos quadrados das coordenadas permaneça a mesma (e não simplesmente a soma das coordenadas). Para [25], trezentos anos antes de Descartes, Oresme, com a escassez da álgebra, não conseguiu expressar que

as curvas poderiam ser escritas pelas relações entre coordenadas, embora já tivesse percebido o fato.

Pierre de Fermat (matemático francês, 1601 – 1665), de acordo com [19], procurava restaurar a obra perdida de Apolônio, *Plane Loci* (que estudava a natureza particular dos lugares geométricos), seguindo as mesmas etapas realizadas por Pappus. Para obter as demonstrações dos teoremas enunciados por ele (Pappus), Fermat fez associações com a teoria das equações de François Viète, utilizando fundamentalmente a álgebra. As técnicas revelaram a Fermat que todos os lugares geométricos discutidos por Apolônio poderiam ser expressos por equações algébricas com duas variáveis, cuja análise produziria as propriedades fundamentais do lugar geométrico assim como a natureza da sua construção. Essa obra foi intitulada “*Ad locos planos et solidos isagoge*” (1636), onde se estabelece um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana (equivalente ao de Descartes). A partir das propriedades que definem as seções cônicas e aplicando os mesmos procedimentos citados anteriormente, Fermat, ao estudar a obra “*Cônicas*” de Apolônio, obteve sete equações que eram formas irredutíveis da equação geral do segundo grau com duas variáveis que corresponde a:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Variando os coeficientes dessa equação, Fermat poderia obter sete lugares geométricos que correspondiam às equações da reta, da hipérbole equilátera, de um par de retas concorrentes, da parábola, do círculo, da elipse e da hipérbole axial.

Fazendo $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$, geometricamente teremos, uma elipse, uma hipérbole e uma parábola, que são os principais lugares geométricos obtidos dessa equação.

ELIPSE E SEUS ELEMENTOS

Definição 2.1. (Elipse)

Uma elipse \mathcal{E} de focos F_1 e F_2 é o conjunto de pontos P , do plano, cuja soma das distâncias de P a F_1 e de P a F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\mathcal{E} = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Fazem parte da elipse: os focos F_1 e F_2 ; os vértices A_1, A_2, B_1 e B_2 ; o centro O e seus eixos: maior $\overline{A_1A_2}$ e menor $\overline{B_1B_2}$ ¹.

2.1 FOCOS

Em uma reta ℓ traçamos dois pontos F_1 e F_2 quaisquer. Consideremos esses pontos os focos da elipse. A reta suporte $\ell \ni F_1$ e F_2 e é chamada reta focal. Já o segmento $\overline{F_1F_2}$ é o segmento focal, cujo comprimento, chamado de distância focal é representado por $2c$ (fig 10).

Por sua vez, o semieixo focal é representado por c (figura11).

¹ $2a$ é a dimensão do eixo maior da elipse; $2b$ é a dimensão do seu eixo menor e $2c$ é a distância focal da elipse.

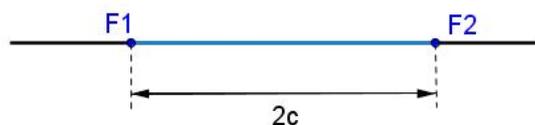


Figura 10: Focos e distância focal.

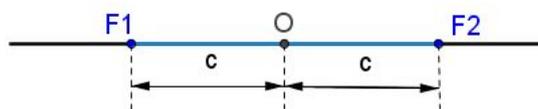


Figura 11: Semieixos = c e distância focal = $2c$.

Em [7] cita-se que a partir desses dois focos e utilizando-se o “método do jardineiro”², constrói-se uma elipse utilizando-se barbantes.

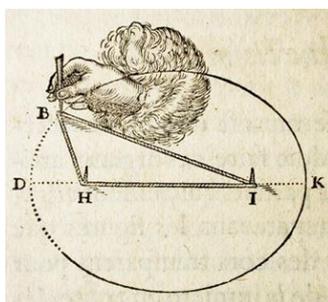


Figura 12: Figura da primeira edição de La Géométrie. Fonte: [11].

No caso da figura 12, de Descartes³, teríamos $H = F_1$, $I = F_2$, $B = P$ ⁴ e $d(H, B) + d(B, I) = 2a$, ou seja, $d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2a$.

Ao deslocar o ponto B pelo plano, segundo o método citado, Descartes obteve a elipse \mathcal{E} . A intersecção de \mathcal{E} com a reta focal são os pontos $D = (A_1)$ e $K = (A_2)$, cujo segmento $\overline{DK} = \overline{(A_1A_2)}$, hoje, é chamado eixo maior da elipse, cujo comprimento é $2a$.

2 O método do jardineiro consiste, em colocar dois bastões verticais em uma superfície (sobre os focos) e fixar as extremidades de uma corda a cada uma dos bastões. Com um terceiro bastão encostado na corda, mantendo sempre a corda esticada e deslocando o bastão perpendicularmente pela superfície determinamos, nela, um lugar geométrico de pontos: a elipse. O comprimento da corda deve, claramente, ser superior à distância entre as hastes.

3 René Descartes publicou La Géométrie em 1637 como um apêndice de Discours de la méthode (Discurso do Método).

4 P é ponto genérico da elipse.

Considerando-se a elipse \mathcal{E} , de focos F_1 e F_2 , A_1 e A_2 pontos de $\mathcal{E} \cap \ell$ (figura 13), podemos verificar que o ponto médio O de $\overline{A_1A_2}$ (figura 14) é o centro da elipse de modo que:

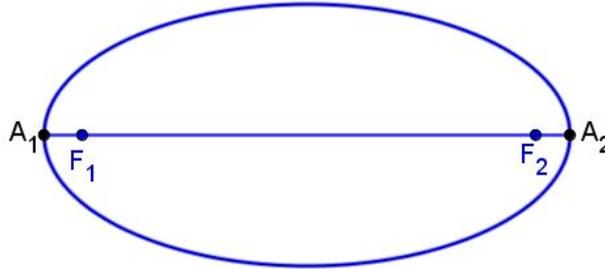


Figura 13: Representação dos vértices A_1 e A_2 e focos F_1 e F_2 da elipse.

$$A_1O = A_2O = a$$

$$A_1A_2 = 2a$$

e pela definição de elipse

$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a.$$

De fato,

Por definição: $d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2a$, em que P é um ponto qualquer de \mathcal{E} .

Uma vez que A_1 pertence à elipse, então:

$$F_1A_1 + A_1F_2 = 2a \tag{2.1}$$

Uma vez que A_2 pertence à elipse, então:

$$F_1A_2 + A_2F_2 = 2a \tag{2.2}$$

Portanto de 2.1 e 2.2 temos:

$$F_1A_1 + A_1F_2 + F_1A_2 + A_2F_2 = 2a + 2a = 4a \tag{2.3}$$

Temos que:

$$F_1A_1 + F_1A_2 = A_1F_2 + A_2F_2 = A_1A_2 = 2a. \tag{2.4}$$

Substituindo 2.4 em 2.3 segue que:

$$A_1A_2 + A_1A_2 = 2A_1A_2 = 4a \quad (2.5)$$

Portanto, $A_1A_2 = 2a$.

Assim, A_1A_2 é o eixo maior da elipse e A_1O e A_2O os semieixos.

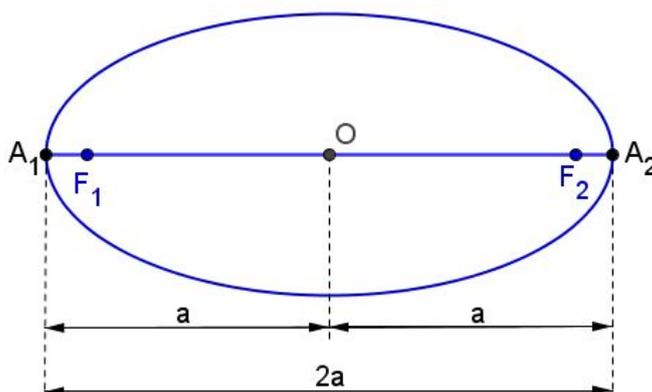


Figura 14: Eixo maior

A seguir, verifiquemos que a configuração geométrica é a de F_1 e F_2 entre A_1 e A_2 . Escrevemos: $A_1 - F_1 - O - F_2 - A_2$.

Seja $A \in \{A_1, A_2\}$. Caso $A \in \overline{F_1F_2}$, teríamos $2c = d(F_1, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a$ o que é absurdo uma vez que $2a > 2c$. Logo, $A_1, A_2 \notin \overline{F_1F_2}$.

Suponha que $A_1 - F_1 - F_2 - A_2$, com $A_2F_1 = x$.

Como $A_1 \in \mathcal{E}$ então $A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$.

Mas, $A_1F_1 = A_1A_2 + A_2F_1 = 2a + x$ e $A_1F_2 = A_1A_2 + A_2F_1 + F_1F_2 = 2a + x + 2c$.

Assim, $4a + 2x + 2c = 2a$, donde segue que $2a + 2x + 2c = 0$, o que é absurdo, pois $a, x, c > 0$.

De modo análogo mostra-se que não pode ocorrer $A_1 - F_1 - A_2 - F_2$.

Agora, suponha que $A_2 - A_1 - F_1 - F_2$, com $A_1F_1 = y$. Temos que $A_2F_2 = A_2A_1 + A_1F_1 + F_1F_2 = 2a + y + 2c$ e, por outro lado, $A_2F_2 = 2a - A_2F_1 = 2a - A_1A_2 - A_1F_1 = 2a - 2a - y = -y$, uma vez que $A_2 \in \mathcal{E}$.

Assim, $2a + y + 2c = -y$, donde segue que $2a + 2y + 2c = 0$, o que é absurdo, pois $a, y, c > 0$. De modo análogo mostra-se que não pode ocorrer $F_1 - F_2 - A_1 - A_2$.

Portanto, os pontos A_1 e $A_2 \in \mathcal{E} \cap \ell$ são as extremidades do eixo maior da elipse e são denominados vértices da elipse sobre a reta focal.

2.2 EIXO MENOR

A partir do eixo maior A_1A_2 , traçando uma perpendicular ℓ' (eixo não focal e mediatriz de $\overline{A_1A_2}$) passando por O , obtemos os pontos B_1 e B_2 na intersecção com \mathcal{E} .

Os pontos B_1 e B_2 são as extremidades de um segmento de reta, denominado Eixo Menor de \mathcal{E} . Por esse motivo podem ser considerados vértices da elipse sobre a reta não focal.

O ponto O , centro da elipse, também é ponto médio de $\overline{B_1B_2}$ de modo que:

$$B_1O = B_2O = b,$$

$$B_1B_2 = 2b,$$

em que b é um número real positivo. De fato, as dimensões do eixo maior e do eixo menor serão sempre positivas e temos por definição que $a > b > 0$ ⁵ (Figura 15). Logo $2a > 2b$.

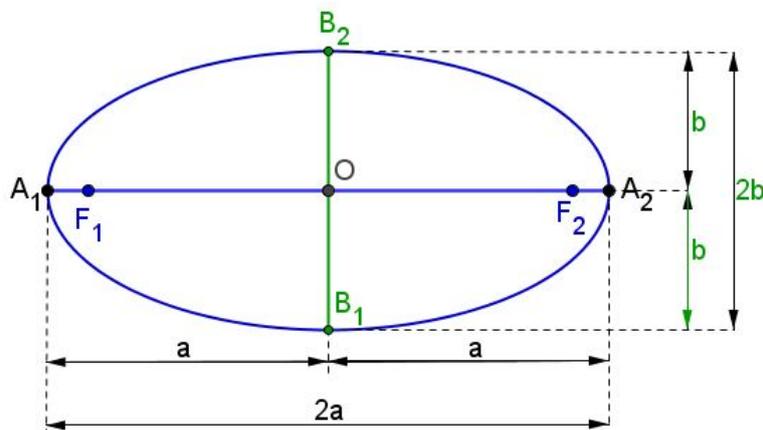


Figura 15: Eixo menor: $B_1B_2 = 2b$

Como ℓ' é mediatriz de $\overline{A_1A_2}$ e conseqüentemente mediatriz de $\overline{F_1F_2}$, temos que $B \in \mathcal{E} \cap \ell'$ se, e somente se, $d(B, F_1) = d(B, F_2) = a$

⁵ Caso $a = b > 0$, a elipse se degenera numa circunferência.

Aplicando-se o critério de congruência cateto - hipotenusa aos triângulos $\triangle B_1F_1O$ e $\triangle B_2F_1O$, conclui-se que $B_1O = B_2O$ (Figura 16).

Assim, O é ponto médio de $\overline{B_1B_2}$.

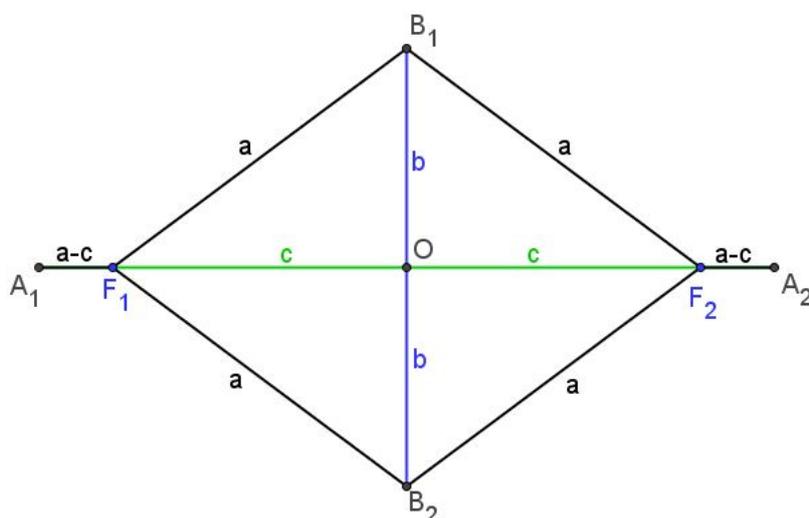


Figura 16: Eixo menor: $B_1B_2 = 2b$

2.3 RELAÇÃO ENTRE OS EIXOS E A DISTÂNCIA FOCAL

Vamos lembrar da obtenção da elipse pelo método do jardineiro, onde o ponto B representava um ponto genérico da elipse. Consideremos que B coincida com B_1 ou B_2 . Nesse caso, B_1O ou B_2O é perpendicular a OF_2 . Pelos pontos B_1 e F_2 temos o barbante que fecha o triângulo retângulo B_1OF_2 . Aplicando-se o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $\triangle B_1OF_2$, temos:

$$(B_1F_2)^2 = (B_1O)^2 + (OF_2)^2$$

Como $B_1F_2 = a$, $B_1O = b$ e $OF_2 = c$, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{2.6}$$

Equivalentemente, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

2.4 EXCENTRICIDADE

A excentricidade e é a razão entre a dimensão do semieixo focal (c) e o semieixo maior (a). Será sempre um número positivo maior do que zero ($e > 0$). Assim:

$$e = \frac{c}{a}, \quad (a > 0, b > 0 \text{ e conseqüentemente } e > 0)$$

Se $c = 0$, ou seja, F_1 coincide com F_2 , teremos: $e = \frac{0}{a} \iff e = 0$

Neste caso, $\mathcal{E} = \{P \mid d(P, C) = a\}$ é uma elipse degenerada num círculo de centro C e raio $a = b$.

Como mencionado anteriormente, $a > c > 0$. Assim como $e = \frac{c}{a}$ então $0 < e < 1$. Quanto menor o valor de e e mais próximo de zero, mais a forma da elipse se aproximará de uma circunferência. Pela caracterização algébrica de e , a excentricidade se aproximará do valor 0, quanto menor for a distância entre os focos da elipse, mantendo-se a dimensão do eixo maior (a fixado). Analogamente, quanto maior for a distância focal de uma elipse, mantendo-se a dimensão do eixo maior, mais a excentricidade se aproxima de 1.

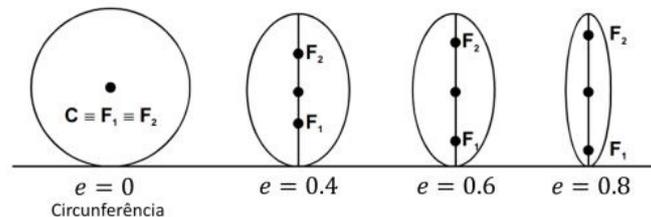


Figura 17: Variação da excentricidade da elipse. Fonte: [30]

Quando $e = 1$ a cônica é uma Parábola, quando $0 < e < 1$ é uma Elipse e quando $e > 1$ é uma Hipérbole. (figura 18)

2.5 EQUAÇÕES DA ELIPSE

A partir da definição de elipse, podemos obter a sua equação canônica (ou equação reduzida) em relação a um sistema de eixos ortogonais Oxy , coordenados, para representá-la e identificá-la segundo a posição de seus eixos, focos e vértices.

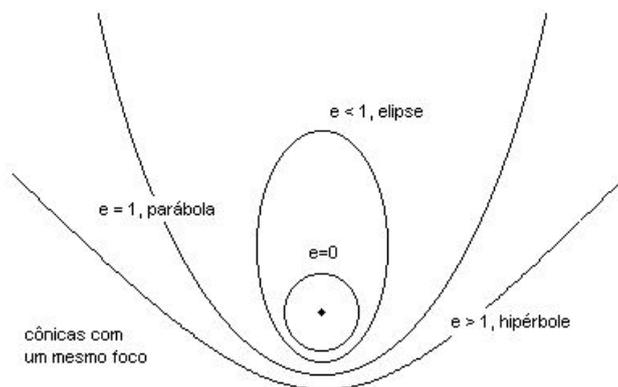


Figura 18: Variação da excentricidade das cônicas.Fonte: [37]

2.5.1 Equação da elipse com centro na origem e focos no eixo Ox

Consideremos a elipse de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ (figura 19), os vértices $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$ e um ponto qualquer $P = (x, y) \in \mathcal{E}$, onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

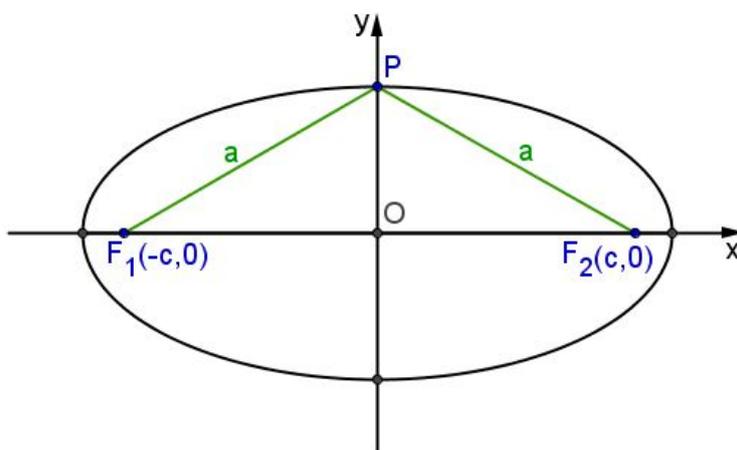


Figura 19: Elipse de focos F1 e F2 e P genérico

Assim, de acordo com [10] temos:

$$P = (x, y) \in \mathcal{E} \leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow 2xc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc \\ \Leftrightarrow 4xc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow a^2 - cx &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado novamente:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (a^2 - cx)^2 &= a^2((x-c)^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2) \\ \Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

Portanto, a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é a equação reduzida, ou equação canônica da elipse de centro na origem e focos sobre o eixo Ox .

2.5.2 Equação da elipse com centro na origem e focos no eixo Oy

Considerando a elipse de focos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, os vértices $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$ e um ponto qualquer $P = (x, y) \in \mathcal{E}$, onde $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Aplicando os mesmos procedimentos do caso anterior, verificamos que a equação da elipse \mathcal{E} (Figura 20) é:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

2.5.3 Equação da elipse com centro qualquer

As elipses podem ser transladadas e rotacionadas para qualquer parte de plano xOy a que pertençam. Aqui vamos destacar somente as elipses cuja translação se faz a

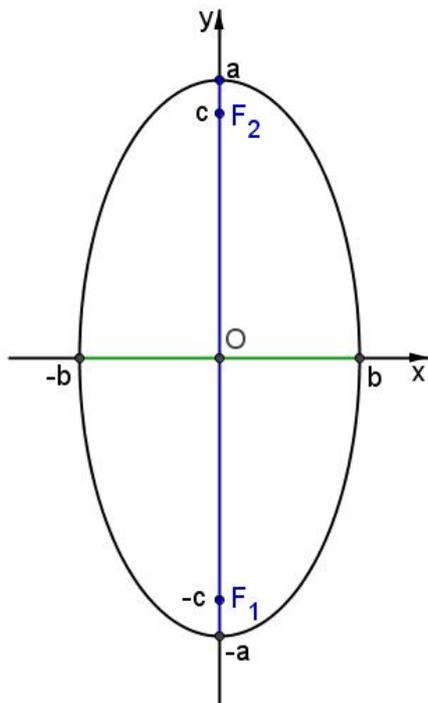


Figura 20: Elipse de focos F_1 e F_2 e P genérico

partir dos casos anteriores, ou seja, vamos transladar elipses com eixo maior paralelos aos eixos Ox ou Oy .

Equação da elipse transladada com focal paralelo ao eixo Ox

Em um sistema de coordenadas (x, y) considera-se uma elipse de centro $C = (x_C, y_C)$ e eixo maior paralelo ao eixo Ox (Figura21).

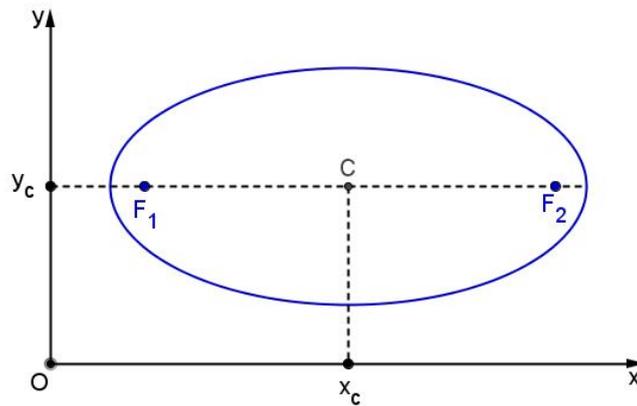


Figura 21: Elipse \mathcal{E} transladada mantendo eixo maior paralelo ao eixo OX

Consideremos outro sistema $x'Cy'$ cuja origem é o centro C da elipse, com $Cx' // Ox$ e $Cy' // Oy$.

Em relação ao sistema $x'Cy'$, a equação da elipse é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad (2.7)$$

Mas como:

$$x' = x - x_C \quad (2.8)$$

e

$$y' = y - y_C, \quad (2.9)$$

fazemos as substituições necessárias de (2.8) e (2.9) em (2.7), obtendo:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1 \quad (2.10)$$

onde $b^2 = a^2 - c^2$. A equação obtida é a equação reduzida (canônica) da elipse \mathcal{E} em relação ao sistema de xOy .

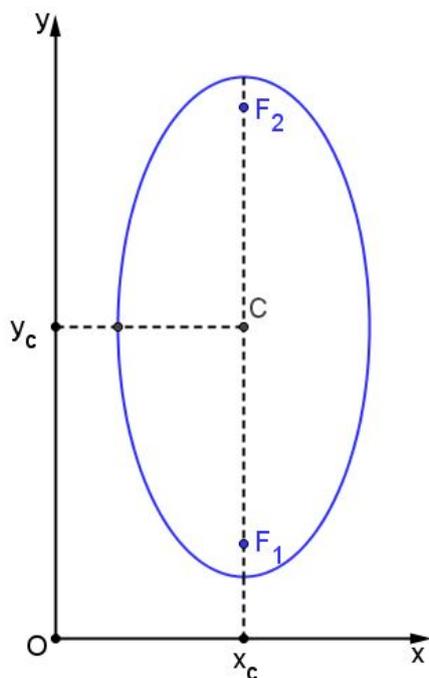


Figura 22: Elipse \mathcal{E} transladada mantendo eixo maior paralelo ao eixo Oy

Equação da elipse transladada com reta focal paralelo ao eixo Oy

Utilizando procedimentos análogos aos utilizados no item anterior, podemos obter a partir de uma translação da elipse, de forma que o eixo maior fique paralelo ao eixo Oy , (figura22), a equação reduzida da elipse de centro $C = (x_c, y_c)$ que será:

$$\frac{(x - x_c)^2}{b^2} + \frac{(y - y_c)^2}{a^2} = 1 \quad (2.11)$$

onde $b^2 = a^2 - c^2$

2.5.4 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$

Vamos considerar a equação da elipse \mathcal{E} de centro no ponto (x_0, y_0) e a reta focal paralela ao eixo Ox :

$$\mathcal{E}: \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Desenvolvendo essa equação, obtemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

com $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Então, $B = 0$ e A e C tem o mesmo sinal. O mesmo vale para a equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo Oy .

Reciprocamente, temos:

Proposição 2.2. *Se os coeficientes A e C da equação do segundo grau*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.12)$$

têm o mesmo sinal, então a equação representa um dos seguintes conjuntos:

- *uma elipse com os eixos paralelos aos eixos coordenados;*
- *um ponto;*
- *o conjunto vazio.*

Demonstração:

Dividindo-se a equação (2.12) por AC , obtemos:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}$$

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2}.$$

Isto é

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4AFC}{4A^2C^2} = \frac{M}{4A^2C^2}, \quad (2.13)$$

onde $M = CD^2 + AE^2 - 4AFC$.

Se $M = 0$, a equação (2.13) representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, pois A e C têm o mesmo sinal.

Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação (2.13) na forma:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} = 1 \quad (2.14)$$

Como $AC > 0$, a equação 2.14 representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, se $M, A, C > 0$.

Se $M < 0$, mas $A, C > 0$, a equação (2.14) representa o conjunto vazio, pois, neste caso, $\frac{M}{4A^2C^2} < 0$ e $\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} > 0$. O mesmo ocorre caso $M > 0$, mas $A, C < 0$

Os casos em que a equação do segundo grau

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $AC > 0$, representa um ponto ou o conjunto vazio são denominados casos degenerados da elipse.

2.6 SIMETRIA NA ELIPSE

A elipse \mathcal{E} é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro. De fato, se $P \in \mathcal{E}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então: $\triangle F_2PQ \cong \triangle F_2P'Q$ e $\triangle F_1PQ \cong \triangle F_1P'Q$, pois $PQ = P'Q$ e $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ é mediatriz de $\overline{PP'}$, onde $\{Q\} = \overleftrightarrow{PP'} \cap \overleftrightarrow{F_1F_2}$.

Em particular, $F_1P = F_1P'$ e $F_2P = F_2P'$.

Logo, $2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P', F_1) + d(P', F_2)$ de modo que $P' \in \mathcal{E}$ (figura 23).

Se $P \in \mathcal{E}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro C , então (figura 24).

$\triangle PCF_2 \cong \triangle P''CF_1$ e $\triangle F_1CP \cong \triangle F_2CP''$ (critério LAL de congruência).

Em particular, $F_1P = F_2P''$ e $F_2P = F_1P''$.

Assim, $2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P'', F_2) + d(P'', F_1)$, de modo que $P'' \in \mathcal{E}$.

A simetria em relação à reta não focal se verifica de maneira análoga.

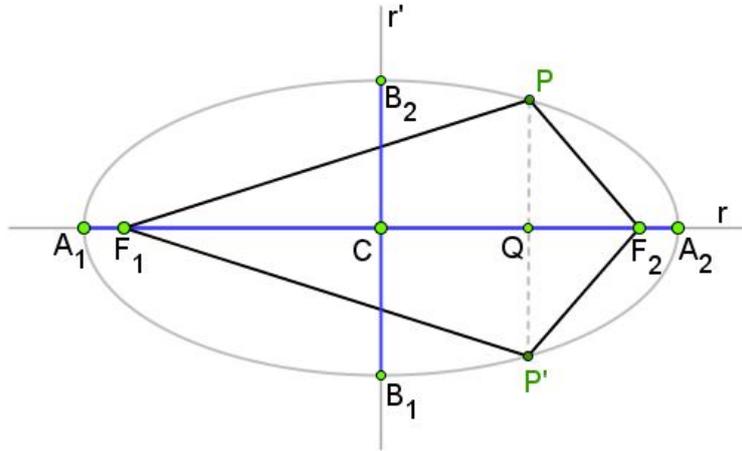


Figura 23: Simetria de \mathcal{E} em relação à reta focal.

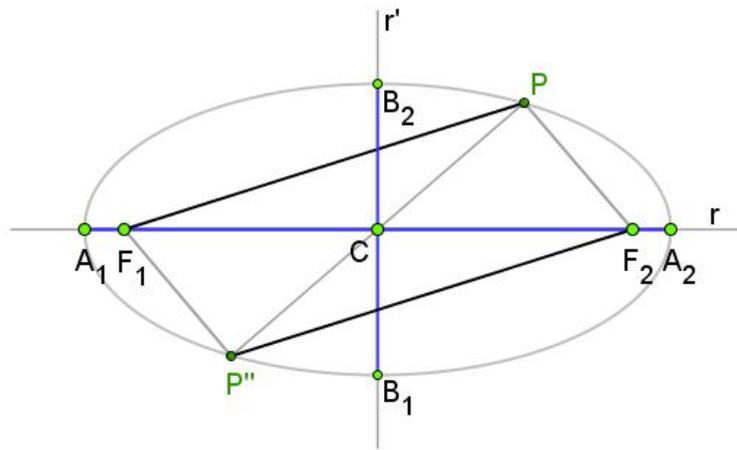


Figura 24: Simetria de \mathcal{E} em relação ao centro.

2.7 PROPRIEDADE REFLETORA DA ELIPSE

Consideremos a elipse \mathcal{E} de focos F_1 e F_2 e um ponto $P \in \mathcal{E}$. Todo raio luminoso ou onda sonora emitidos a partir de F_1 ou de F_2 em direção a \mathcal{E} será refletido/emitted para o outro foco.

Demonstração:

Tomemos a elipse \mathcal{E} , seus focos F_1 e F_2 e $P \in \mathcal{E}$ um ponto qualquer.

Por P passamos uma reta t tangente a \mathcal{E} . Por F_1 e F_2 traçamos as retas r e s perpendiculares a t . Traçamos as semirretas $u = \overrightarrow{F_1P}$ e $v = \overrightarrow{F_2P}$.

Seja P um ponto qualquer da elipse \mathcal{E} . Sejam $C \in \overrightarrow{F_1P}$ tal que $PC = PF_2$ e t a mediatriz de $\overline{F_2C}$. Como $PF_2 = PC$ então $P \in t$ (figura 25).

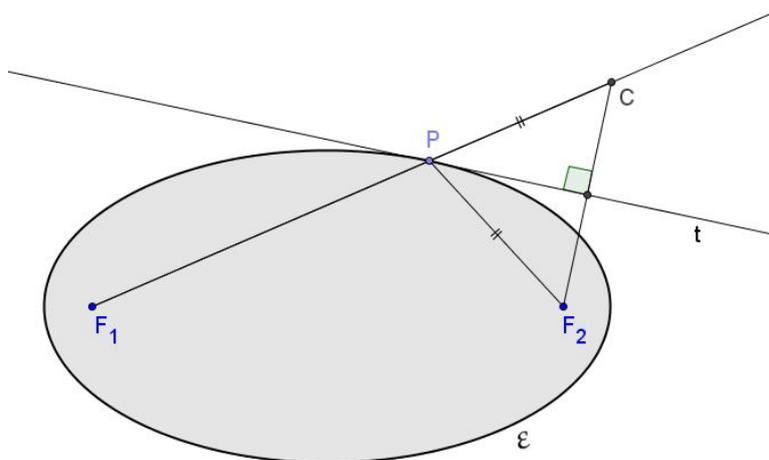


Figura 25: Reflexão na elipse

Sejam α e β os ângulos que $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ fazem com a reta t , respectivamente; e o ponto $A \in t$, $A \neq P$ (figura 26). Como $A \in t$ então $AF_2 = AC$. Além disso, como F_1 , P e C são colineares, então $F_1C = F_1P + PC = F_1P + PF_2$. Pela desigualdade triangular, $AF_1 + AC > F_1C = F_1P + F_2P = 2a$. Ou seja, $AF_1 + AC > 2a$, de modo que $A \notin \mathcal{E}$. Portanto, t é tangente à elipse \mathcal{E} no ponto P .

Além disso, sendo $\{Q\} = t \cap \overline{F_2C}$, aplicando-se o critério de congruência cateto-hipotenusa nos triângulos $\triangle F_2PQ$ e $\triangle CPQ$, concluímos que $\triangle F_2PQ \cong \triangle CPQ$, donde segue que $\alpha = \beta$.

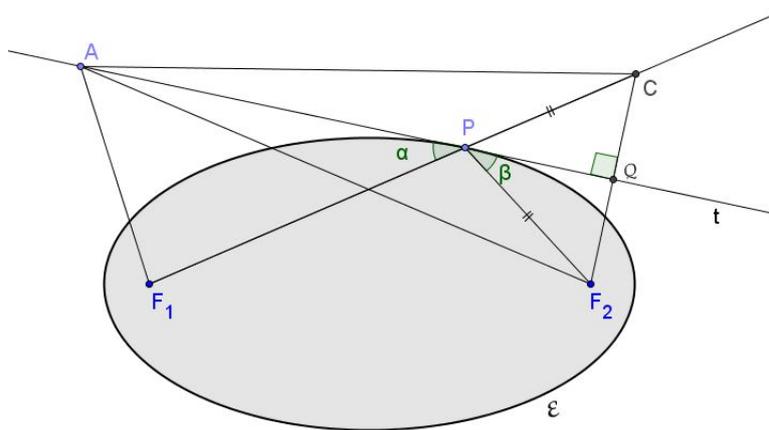


Figura 26: Reflexão na elipse

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Desde a nossa infância a matemática e/ou seus conceitos estão presentes em nosso dia a dia.

Situações lógicas aparecem a todo momento e na maioria das vezes não nos damos conta disso.

O mesmo ocorre em relação às transformações geométricas que estão presentes por toda a parte. Um simples olhar no espelho (reflexão) ou a mudança de um objeto de lugar (translação combinada com uma rotação, ou não), já produzem uma transformação geométrica.

Definição 3.1. [10] Uma transformação no plano π é uma função bijetora $T : \pi \rightarrow \pi$ que a cada ponto $P \in \pi$ associa o ponto $T(P) \in \pi$ chamado imagem de P por T .

As transformações geométricas isométricas, que preservam as propriedades das figuras em relação ao paralelismo e à razão entre o comprimento dos segmentos, são sempre funções bijetivas¹, de um espaço nele próprio.

As isometrias mais conhecidas e trabalhadas no Ensino Fundamental e Médio estão em \mathbb{R}^2 e são: Homotetia, Reflexão, Rotação e Translação.

¹ As transformações geométricas são funções bijetivas uma vez que cada ponto da figura “original” corresponde a um, e somente um, ponto da figura transformada e cada ponto da figura transformada corresponde a um, e somente um, ponto da figura “original”.

3.1 HOMOTETIA

Definição 3.2. Homotetia é uma transformação T no plano π de modo que $T : \pi \rightarrow \pi$ onde a cada ponto $P \in \pi$ teremos $T(P) = k \cdot P$, sendo k um número real não nulo chamado de razão de homotetia.

De forma mais simples, pode-se dizer que a homotetia é uma transformação que translada pontos da posição P para uma posição P' segundo uma razão k de forma que $\overrightarrow{SP'} \supset \overrightarrow{SP}$ (Figura 27), sendo S o centro da homotetia. É uma transformação geométrica que pode ampliar ou reduzir a distância entre um ponto P e sua imagem P' segundo uma razão k .

A homotetia de razão $k = 1$ é a transformação identidade.

A homotetia de razão $k = -1$ associa cada ponto P (ou vetor \vec{v}) ao seu simétrico P' (ou vetor $-\vec{v}$) em relação à origem S .

Quando a razão $|k| < 1$ a distância entre um ponto P e o centro da homotetia é diminuída (diminui o tamanho dos vetores não nulos). Quando a razão $|k| > 1$ aumenta a distância entre os dois pontos (aumenta o tamanho dos vetores não nulos)

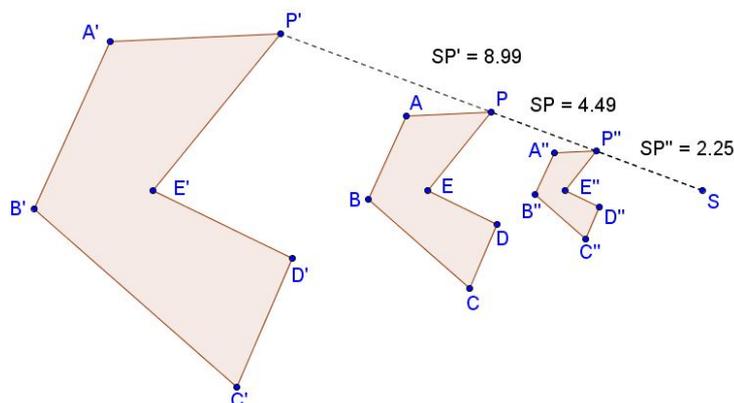


Figura 27: Polígonos homotéticos.

Na figura 27 a ampliação do polígono $ABCDEP$ na razão 2 é o polígono $A'B'C'D'E'P'$, pois $T(P) = 2P$. A redução na razão 0,5 do polígono $ABCDEP$ é o polígono $A''B''C''D''E''F''$, pois $T(P) = \frac{1}{2} \cdot P$

Das demais transformações geométricas citadas não são expostos maiores detalhes e propriedades por não serem o objetivo principal deste trabalho.

3.2 ELIPSES HOMOTÉTICAS

Duas elipses \mathcal{E}_1 e $\mathcal{E}_2 \subset \mathbb{R}^2$ serão homotéticas se $T(\mathcal{E}_1) = k \cdot \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ e $T(\mathcal{E}_2) = \frac{1}{k} \cdot \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1$, com $k > 0$; de modo que $e_{\mathcal{E}_1} = e_{\mathcal{E}_2}$

Então, podemos dizer que, submetendo-se uma das elipses à transformação geométrica de homotetia, obtém-se como resultado sua ampliação ou redução, de modo a conservar a proporção entre os eixos e conseqüentemente o valor da excentricidade e . (figura 28)

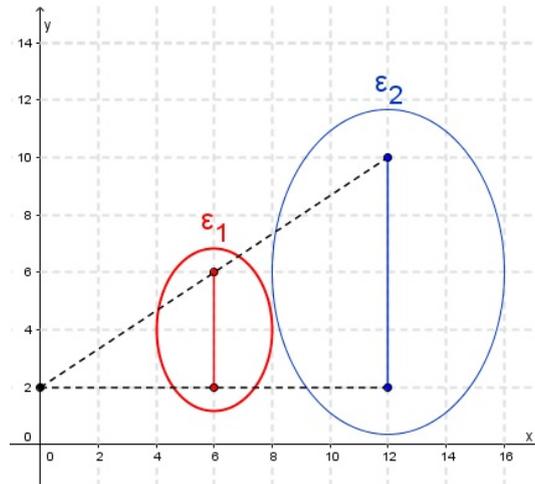


Figura 28: Elipses homotéticas.

Para \mathcal{E}_1 temos $e_{\mathcal{E}_1} = \frac{c}{a}$. Para \mathcal{E}_2 temos $e_{\mathcal{E}_2} = \frac{k \cdot c}{k \cdot a} = \frac{c}{a}$. Portanto, $e_{\mathcal{E}_1} = e_{\mathcal{E}_2}$.

Em outras palavras, duas elipses \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 são homotéticas quando os semieixos a e b de \mathcal{E}_1 , forem proporcionais aos semieixos a' e b' de \mathcal{E}_2 (conseqüentemente, suas semidistâncias focais).

Para [5] o estudo das transformações geométricas se justifica pela importância que têm na história da matemática recente e por constituir uma ferramenta útil para demonstrações, resolução de problemas e construção de idéias sobre o plano e o espaço.

Surgem então as bases da geometria inversiva, deixada por Steiner, que apresentava a perspectiva de resolução do problema por meio de uma geometria não Euclidiana: a **Inversão**.

A inversão também é uma transformação geométrica e é estudada e demonstrada em detalhes no próximo capítulo.

Para [12]:

“Although not generally considered a part of high school geometry, inversion should be known to the earnest student of geometry”. (Embora não seja geralmente considerado um conteúdo da geometria do ensino médio, a inversão geométrica deve ser conhecida por aqueles que se dedicam ao estudo da geometria).

INVERSÕES NA ELIPSE

4.1 O QUE É UMA INVERSÃO GEOMÉTRICA?

A inversão geométrica tal como a reflexão, a rotação, a translação e a homotetia (semelhança) é uma transformação geométrica. É uma função bijetora que faz corresponder a cada ponto do plano π um novo ponto de π [20].

Definição 4.1. Inversão em relação à elipse \mathcal{E} [35]

Consideremos o plano \mathbb{R}^2 e a elipse \mathcal{E} nele contida, com focos F_1 e F_2 e centrada em O . A inversão em \mathcal{E} é uma função $\vartheta : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ definida por $\vartheta(P) = P'$ de modo que P' esteja na semirreta \overrightarrow{OP} e $OP \cdot OP' = (OQ)^2$

O ponto P' é chamado de inverso de P em relação a elipse \mathcal{E} . Dessa forma \mathcal{E} pode ser chamada de elipse de inversão cujo centro O se torna o centro de inversão. A distância de O a Q ou o segmento OQ é o raio de inversão (w). Obedecendo a estrutura da elipse (o lugar geométrico de seus pontos), o raio de inversão não é constante como o raio de inversão de uma circunferência.

Demonstração de bijetividade de \mathcal{E}

Seja a função: $\vartheta : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ com $P \mapsto P'$

ϑ é bijetora de fato se, e somente se, ϑ é injetora e bijetora.

De fato,

$\vartheta : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ é **injetora** se:

$P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ forem tais que $P'_1 = \vartheta(P_1) = \vartheta(P_1) = P'_2$ então $P'_1 \in \overrightarrow{OP'_1}, P'_2 \in \overrightarrow{OP'_2}$; mas $P'_1 = P'_2$, de modo que $P_1, P_2 \in \overrightarrow{OP'_1}$.

Além disso, $OP_1 \cdot OP'_1 = w^2 = OP_2 \cdot OP'_2$. Novamente, como $P'_1 = P'_2$ então $OP'_1 = OP'_2$, donde segue que $OP_1 \cdot OP'_1 = OP_2 \cdot OP'_2$. Consequentemente, como $P_1, P_2 \in \overrightarrow{OP'_1}$, então $P_1 = P_2$.

$\vartheta : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ é **sobrejetora** se,

tomarmos $P' \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ como um ponto arbitrário. Seja P o ponto tal que $P \in \overrightarrow{OP'}$ e $OP = \frac{w^2}{OP'}$. Assim, P' satisfaz $P' \in \overrightarrow{OP}$ e $OP \cdot OP' = w^2$, ou seja, $\vartheta(P) = P'$.

Portanto, ϑ é uma transformação do plano. \square

A transformação de inversão pode ocorrer no plano ou no espaço. Porém, a característica mais marcante de uma inversão é a de não preservar as propriedades da figura “original”. Ângulos e retas podem sofrer alterações. Por esse motivo a inversão faz parte de uma geometria não Euclidiana.

A inversão geométrica de uma figura ou de um elemento geométrico em relação a outro é o resultado da “reflexão” de todos os seus pontos para a formação da “imagem” da mesma, tendo na maioria das vezes o caso clássico da inversão em uma circunferência. Em nosso estudo, a inversão é na elipse, pois a temos como agente de inversão. Nessa inversão é a elipse que funciona como um “espelho”.

“Espelhos físicos só refletem de um lado e não de dois, como os espelhos matemáticos”. [5]

Matematicamente falando, esses espelhos refletem dos dois lados porque são transformações geométricas de inversão, já definida como uma aplicação biunívoca uma vez que cada ponto invertido tem como inverso o ponto “original”. Transformações geométricas são invertíveis, o que é fundamental para operar composições entre quaisquer tipos de funções. Assim como na álgebra, a composição de uma transformação geométrica com sua inversa vai gerar uma identidade que é um elemento neutro da operação composição.

Em álgebra é comum operarmos com funções inversas, onde para cada número x temos um inverso $\frac{1}{x}$. Temos então que 1 é elementos fixo, elemento neutro ou elemento cuja inversão é ele próprio (figura29).

Graficamente teríamos:

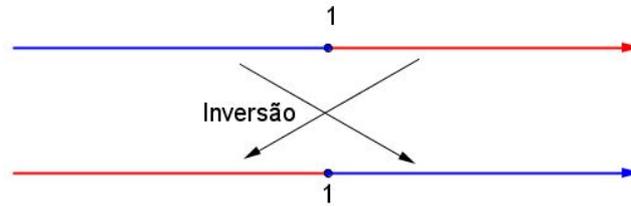


Figura 29: Inversão numérica [3].

Na figura 29 pode-se observar que números menores que 1 quando invertidos passam a ser maiores do que 1 e números maiores do que um quando invertidos passam a ser números menores do que 1.

O produto das distâncias à origem de qualquer ponto e do seu inverso é (sempre) 1.

Estendendo esta noção ao plano ou ao espaço, podemos definir uma inversão de centro num ponto O , aplicando a cada semirreta de origem O a ideia descrita acima. O inverso de um ponto P diferente de O será o ponto P' da semirreta OP , tal que $OP \cdot OP' = 1$ (figura 30).

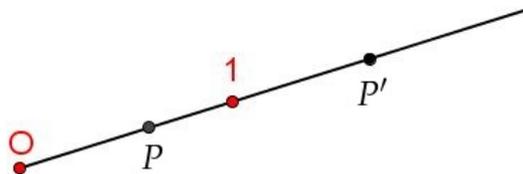


Figura 30: Inverso de P . Fonte: [3].

Analogamente, na inversão geométrica na elipse \mathcal{E} , temos que considerar a unidade como sendo um ponto “fixo” qualquer de \mathcal{E} , que chamaremos de Q , e assim: $OP \cdot OP' = OQ^2$ (figura 31).

A função definida para a inversão em \mathcal{E} é uma involução¹, uma vez que $\vartheta(\vartheta(P)) = P$ para todo ponto $P \neq O$. Os únicos pontos fixos são os pontos da elipse. Se P estiver

¹ De acordo com [7] (p-248) o termo involução foi introduzido por Desargues (1591-1661) e significa: pares de pontos de uma reta cujo produto das distâncias a um ponto fixo é constante. Chamou os pontos em divisão harmônica de involução de quatro pontos.

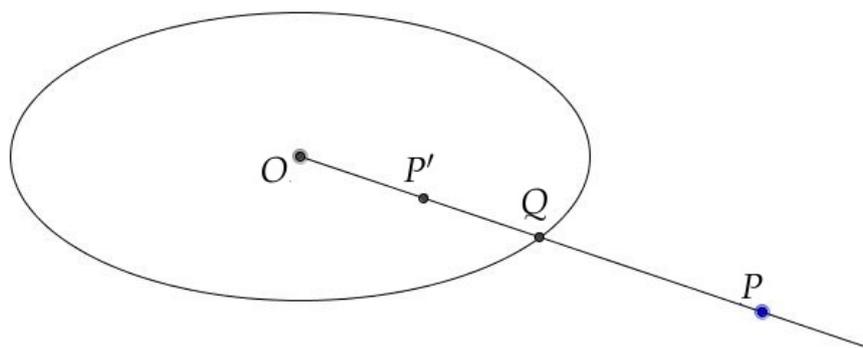


Figura 31: P' interior a elipse é inverso de P , exterior à elipse.

no exterior da elipse, então P' estará no interior da mesma e vice-versa. Introduzindo o ponto O_∞ no infinito como imagem de O (ou inverso de O), \mathcal{E} é considerada uma involução no plano inversivo estendido que chamaremos de \mathbb{R}_∞^2 .

Para [28] nesse caso o infinito é um ponto para que se possa estabelecer uma transformação biunívoca e assim a inversão ser uma verdadeira transformação geométrica segundo sua definição.

Em [31] o autor trata da inversão na circunferência e também introduz o ponto inverso de O como sendo ∞ para que a inversão ocorra em todo o plano estendido sem excessão de pontos. Ele diz:

“Nossa definição de inversão não vale para o centro da inversão O . Consideramos nosso plano euclidiano como um plano de números complexo, e introduzimos um outro ponto, o ponto ∞ . Definimos o inverso do ponto O sendo o ponto ∞ e o inverso do ponto ∞ será o centro O da inversão.”

A partir da introdução do ponto inverso de O , a definição para inversão de um ponto na elipse passa a abranger todos os pontos, sem excessão, como foi dito anteriormente. Daí a seguinte definição:

Definição 4.2. Inversão em \mathbb{R}_∞^2 em relação à elipse. [35]

Consideremos o plano \mathbb{R}^2 e a elipse \mathcal{E} de inversão nele contida centrada em O . A inversão em \mathcal{E} é uma função $\vartheta : \mathbb{R}_\infty^2 \rightarrow \mathbb{R}_\infty^2$ definida por $\vartheta(P) = P'$ de modo que P' esteja na semirreta \overrightarrow{OP} e $OP \cdot OP' = (OQ)^2$, onde Q é o ponto de intersecção da semirreta \overrightarrow{OP} e a elipse \mathcal{E} , $\vartheta(O_\infty) = O$ e $\vartheta(O) = O_\infty$.

4.2 RETA OP

Definição 4.3. A reta \overleftrightarrow{OP} é a reta suporte da semirreta \overrightarrow{OP} e tem como equação $vx - uy = 0$.

Demonstração:

A equação de uma reta pode ser obtida através das coordenadas de dois pontos pertencentes a essa reta pelo cálculo do determinante. Mais especificamente pela regra de Sarrus. Lembremos que quando o determinante é igual a zero, significa que os pontos estão alinhados, ou seja, estão numa mesma reta.

Assim, sendo $O = (0, 0)$ e $P = (u, v)$, temos:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x \cdot 0 \cdot 1 + y \cdot 1 \cdot u + 1 \cdot 0 \cdot v - 1 \cdot 0 \cdot u - y \cdot 0 \cdot 1 - x \cdot 1 \cdot v = 0$$

$$uy - vx = 0 \tag{4.1}$$

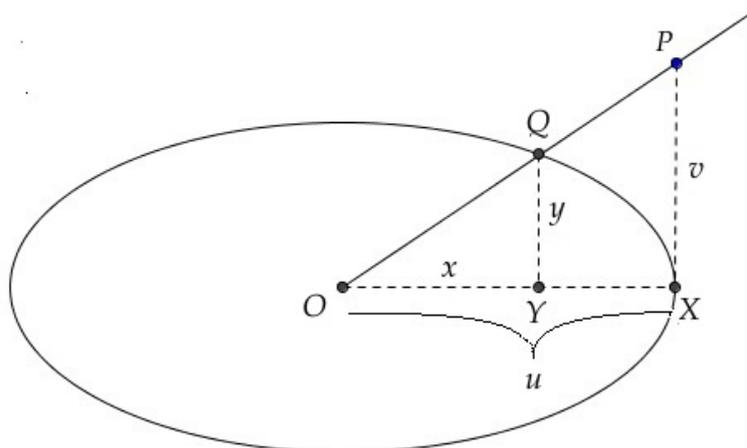
4.3 COORDENADAS DO PONTO Q

Definição 4.4. (Ponto Q)

$\{Q\} = \overrightarrow{OP} \cap \mathcal{E}$, sendo $Q = (tu, tv)$.

Demonstração: Sobre o semieixo maior Ox da elipse \mathcal{E} de centro O e do ponto $P = (u, v)$, exterior a \mathcal{E} , podemos obter os triângulos semelhantes OPX e OQY (fig 32).

Consideremos $OX = u$, $OY = x$, $PX = v$ e $QY = y$.


 Figura 32: Relação entre P e Q .

Por semelhança de triângulos, temos: $\frac{u}{v} = \frac{x}{y} = t$, sendo t uma constante de semelhança.

Manipulando algebricamente: $\frac{y}{v} = \frac{x}{u} = t$

Assim: $x = \frac{u \cdot y}{v} \implies x = u \cdot \frac{y}{v} \implies x = u \cdot t$

O mesmo ocorre para a coordenada Y do ponto Q .

Por semelhança de triângulos, temos: $\frac{y}{v} = \frac{x}{u} = t$.

Assim: $y = \frac{x \cdot v}{u} \implies y = v \cdot \frac{x}{u} \implies y = v \cdot t$

Portanto as coordenadas do ponto Q são (tu, tv)

4.4 EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE À ELIPSE

As retas tangentes à elipse estão presentes no livro II de Apolônio, proposição 49. Segundo [7] essas retas tangentes eram traçadas utilizando-se a teoria da divisão harmônica.

Um exemplo dos procedimentos de Apolônio, dado por [7], diz que se $Q \in \mathcal{E}$ (Figura 33), traçava-se uma perpendicular \overline{QN} de Q ao eixo AA' e achava-se o conjugado harmônico T de N com relação a A e A' , isto é, achava-se o ponto T da reta AA' estendida tal que $\overline{AT} / \overline{A'T} = \overline{NA} / \overline{NA'}$; em outras palavras determinava o ponto T

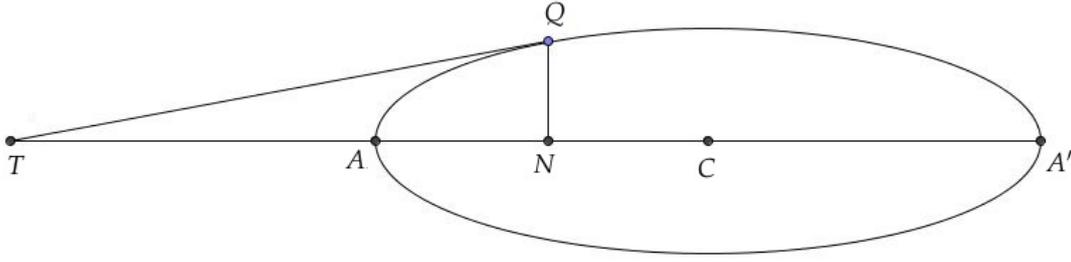


Figura 33: Retas tangente à elipse. Fonte: [7].

que divide o segmento AA' externamente na mesma razão em que N o divide internamente. A reta por T e Q será então a tangente à elipse.

Em especial, temos que a equação da reta tangente que intercepta a elipse no ponto Q é $a^2y_0y + b^2x_0x = a^2b^2$ (nas convenções anteriores).

4.4.1 Demonstração da equação da reta tangente à elipse

O ponto de tangência T entre a reta de equação $y = mx + c$ e a elipse de equação $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ pode ser encontrado resolvendo-se o sistema:

$$\begin{cases} y = mx + c & (1) \\ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 & (2) \end{cases} \quad (4.2)$$

Substituindo-se (1) em (2) (sistema 4.2), temos:

$$b^2x^2 + a^2(mx + c)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2cmx + c^2) = a^2b^2$$

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2cmx + a^2c^2 - a^2b^2 = 0$$

que é uma equação do segundo grau em x . Para encontrar as raízes desta equação, caso existam, calculamos o discriminante:

$$\Delta = (2a^2cm)^2 - 4(a^2m^2 + b^2)(a^2c^2 - a^2b^2)$$

$$\Delta = 4a^4c^2m^2 - 4(a^4c^2m^2 - a^4b^2m^2 + a^2b^2c^2 - a^2b^4)$$

$$\Delta = 4a^4c^2m^2 - 4a^4c^2m^2 + 4a^4b^2m^2 - 4a^2b^2c^2 + 4a^2b^4$$

$$\Delta = 4a^4b^2m^2 - 4a^2b^2c^2 + 4a^2b^4$$

$$\Delta = 4a^2b^2(a^2m^2 - c^2 + b^2)$$

Uma condição necessária para a reta tangenciar a elipse é que $\Delta = 0$. Como $a, b > 0$, isto implica que $a^2m^2 + b^2 = c^2$. Neste caso, as raízes da equação do 2º grau são reais, iguais e dadas por:

$$x = \frac{-(2a^2cm)}{2(a^2m^2 + b^2)} = -\frac{a^2cm}{a^2m^2 + b^2} = -\frac{a^2cm}{c^2} = -\frac{a^2m}{c} \quad (4.3)$$

Substituindo-se (4.7) em (1) de (4.2), temos:

$$y = m \left(-\frac{a^2m}{c} \right) + c$$

$$y = \frac{-a^2m^2 + c^2}{c}$$

$$y = \frac{b^2}{c}$$

Concluimos assim, que o ponto de tangência da reta com a elipse é:

$$T = \left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{b^2}{c} \right)$$

O coeficiente angular m da reta tangente à elipse no ponto $T = \left(-\frac{a^2m}{c}, \frac{b^2}{c} \right) = (x_0, y_0)$ satisfaz a relação:

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{\frac{b^2}{c}}{-\frac{a^2m}{c}} = -\frac{b^2}{a^2m}, \text{ ou seja, } m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

Chamando-se $T = (x_0, y_0)$, temos que a equação da reta tangente à elipse no ponto T é dada por:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0) \\ (y - y_0) \cdot (a^2y_0) &= -(b^2x_0) \cdot (x - x_0) \\ a^2y_0y - a^2y_0^2 &= -b^2x_0x + b^2x_0^2 \\ a^2y_0y + b^2x_0x &= b^2x_0^2 + a^2y_0^2 \end{aligned}$$

Visto que $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ é a condição para que T seja um ponto da elipse, podemos concluir que:

$$a^2y_0y + b^2x_0x = a^2b^2 \quad (4.4)$$

é a equação da reta tangente à elipse que passa pelo ponto $T = (x_0, y_0)$.

4.5 RETA POLAR DE P

Definição 4.5. (Reta polar de P).

Sejam \mathcal{E} a elipse de equação $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e $P = (u, v)$ um ponto exterior a \mathcal{E} e $\{Q\} = \overline{OP} \cap \mathcal{E}$. Neste caso, $Q = (tu, tv)$, para algum $t \in \mathbb{R}_+$. Sejam também P' o inverso de P em relação a \mathcal{E} e s a reta tangente a \mathcal{E} em Q . A reta polar de P é a reta s' paralela a s que passa por P' (figura 34).

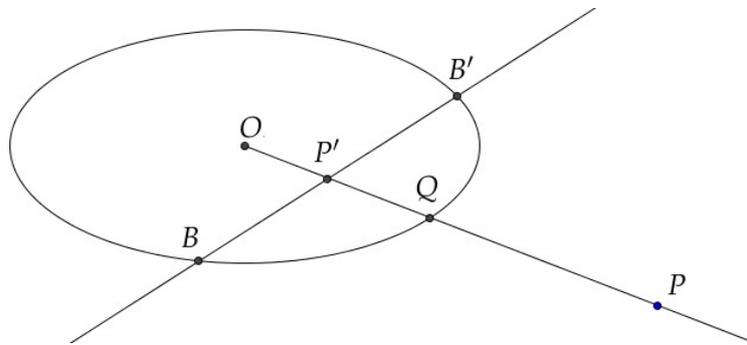


Figura 34: Reta polar de P .

Para [7](p-248) Desargues², de posse dos conhecimentos sobre a reta polar, introduziu que a polar de um ponto no infinito passa pelo diâmetro da cônica. No caso da elipse, passar pelo diâmetro significa passar pelo ponto central.

A reta polar s' tem o mesmo coeficiente angular que a sua paralela s , ou seja: $m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$

Substituindo m e as coordenadas do ponto $P' = (u', v')$ na equação da reta s , tangente a \mathcal{E} , teremos:

$$y - v' = -\frac{b^2tu}{a^2tv}(x - u')$$

$$y - v' = -\frac{b^2u}{a^2v}(x - u')$$

$$(y - v')(a^2v) = -b^2u(x - u')$$

² Matemático francês, arquiteto, engenheiro militar e precursor da Geometria projetiva.

$$a^2vy - a^2vv' = -b^2ux + b^2uu'$$

$$a^2vy + b^2ux = b^2uu' + a^2vv', \quad (4.5)$$

que é a equação da reta polar de P .

4.6 PONTO INVERSO DE P

Além de obter o ponto inverso por meios algébricos, necessitamos obtê-lo por métodos geométricos, uma vez que se faz necessária a utilização de *softwares* de geometria dinâmica no estudo da inversão geométrica.

4.6.1 Obtenção do ponto inverso de forma geométrica.

1º caso: P é interior à elipse.

a) Traçamos a semirreta \overrightarrow{OP} (Figura 35).

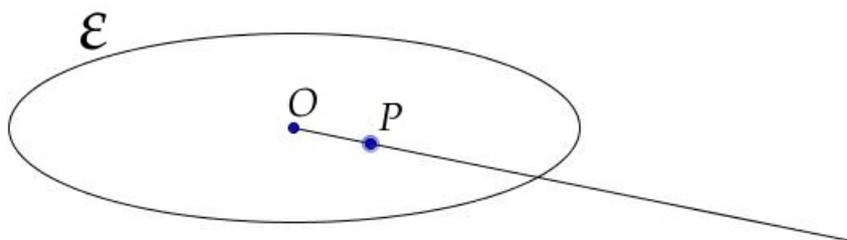


Figura 35: Semirreta OP

b) Marcamos o ponto Q , intersecção de \overrightarrow{OP} e \mathcal{E} e traçamos uma reta tangente r à \mathcal{E} por Q .(Figura 36).

c) Passando por P traçamos uma reta t paralela a r e marcamos os pontos B e B' , intersecção de t e \mathcal{E} .(Figura 37).

d) Traçamos as tangentes u e v em relação à \mathcal{E} por B e B' . Então $\overrightarrow{OP} \cap u \cap v = \{P'\}$, inverso de P . (Figura 38).

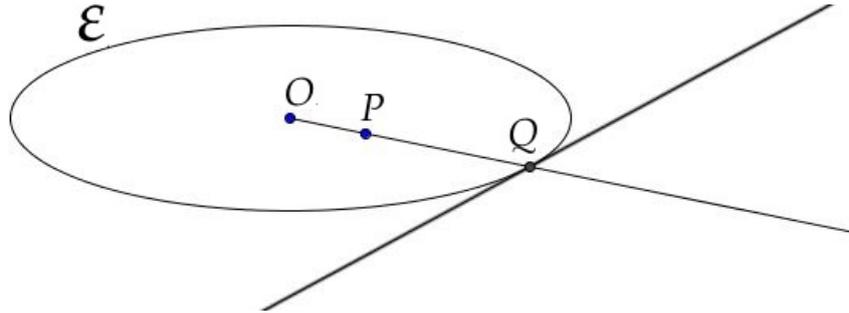


Figura 36: Na intersecção de OP com \mathcal{E} temos Q e por Q uma tangente à \mathcal{E} .

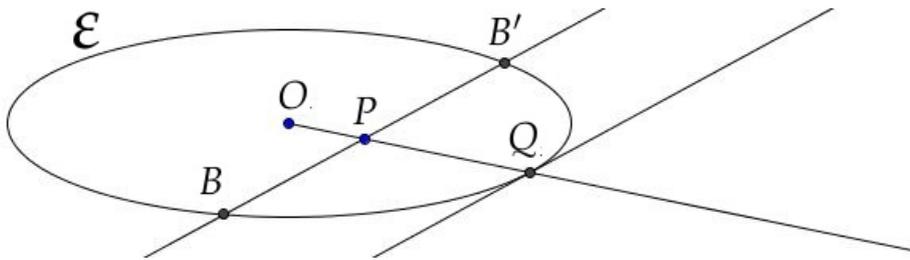


Figura 37: BB' é a paralela a r .

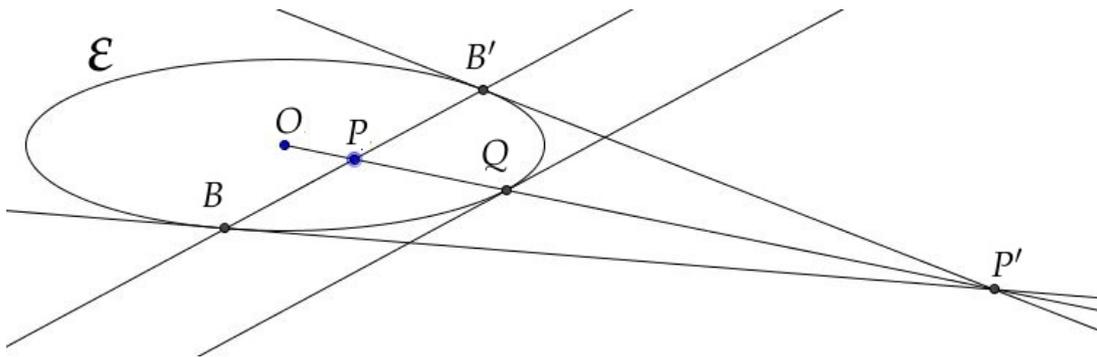


Figura 38: P' é a intersecção das tangentes por B e B' .

2º caso: Se P estiver sobre a elipse $P = P'$ (figura 39).

3º caso: Se P estiver sobre O , sua inversão é o infinito. Isso porque a função de inversão é bijetiva. (definição 4.2).

4º caso: Se P for exterior a \mathcal{E} .

a) Traçamos a semirreta \overrightarrow{OP} (Figura 40).

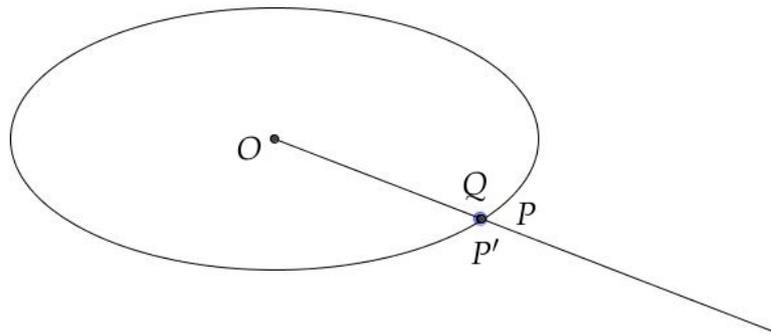


Figura 39: P' , P e Q coincidem no mesmo ponto.

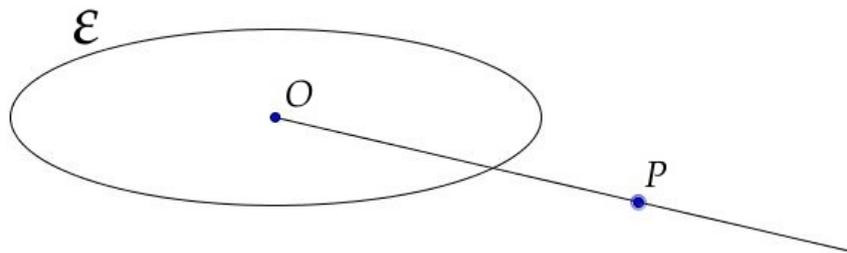


Figura 40: Semirreta OP .

b) Traçamos as retas tangentes r e s em relação a \mathcal{E} e marcamos os pontos B_1 e B_2 , intersecção de r e s com \mathcal{E} .(Figura 41).

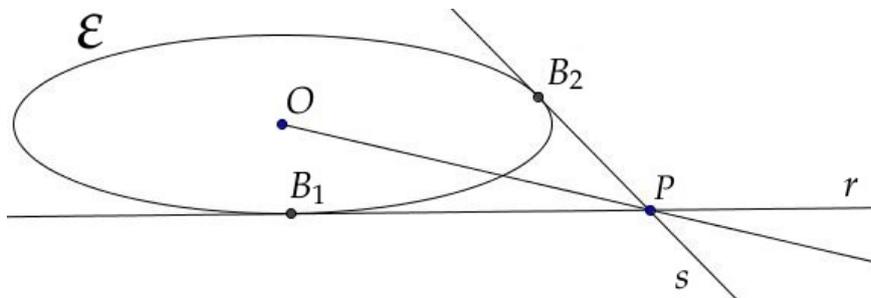


Figura 41: Retas tangentes a \mathcal{E} por P . Fonte: [35]

c) Por B_1 e B_2 traçamos uma reta t . A intersecção de t com \overline{OP} é o ponto P' , inverso de P (figura 42).

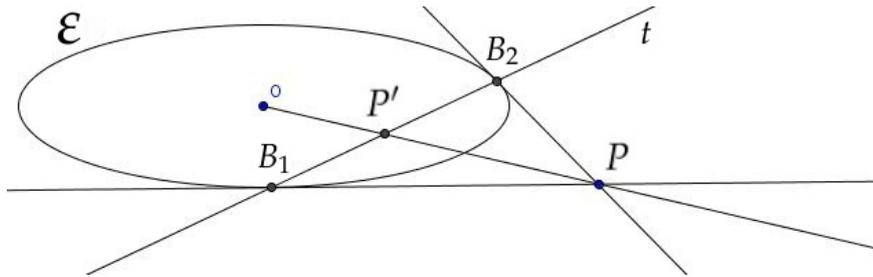


Figura 42: Inversos P e P' . Fonte: [35].

4.6.2 Obtenção do ponto inverso de forma algébrica.

Por definição temos que $P' \in \overrightarrow{OP}$ e é tal que $OP \cdot OP' = OQ^2$.

No sistema de coordenadas Oxy , temos: $O = (0, 0)$, $P = (u, v)$, $Q = (tu, tv)$, $P' = (x', y')$.

Denotamos por X , Y e Z as projeções ortogonais de P , Q e P' , respectivamente (figura 43).

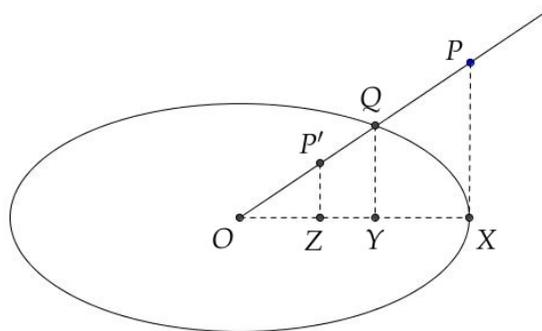


Figura 43: Projeções dos pontos P , Q e P' respectivamente são: X , Y e Z .

Observemos na figura anterior (43) que os triângulos OPX e OQY são semelhantes e os destacamos na figura 44.

Assim, tomando as coordenadas dos vértices dos triângulos em questão, temos: $OX = u$, $PX = v$, $OY = tu$, $QY = tv$. Além disso, por semelhança (figura 44):

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{tv}{v} = \frac{tu}{u} = t, \text{ sendo } t \text{ a razão de semelhança.}$$

Mas $OP \cdot OP' = OQ^2$. Logo:

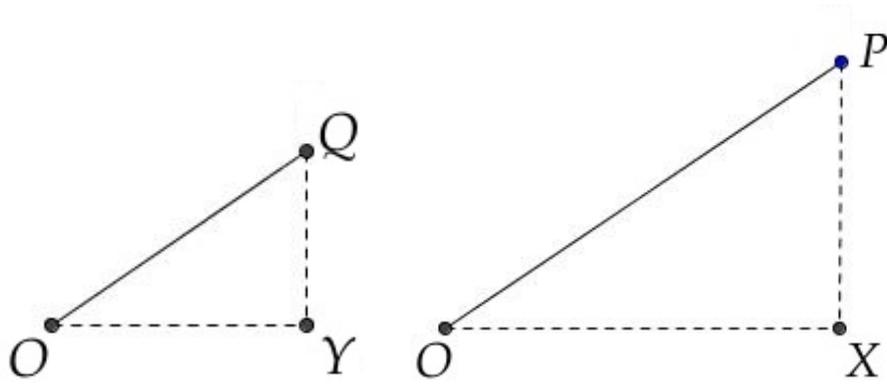


Figura 44: Triângulos semelhantes.

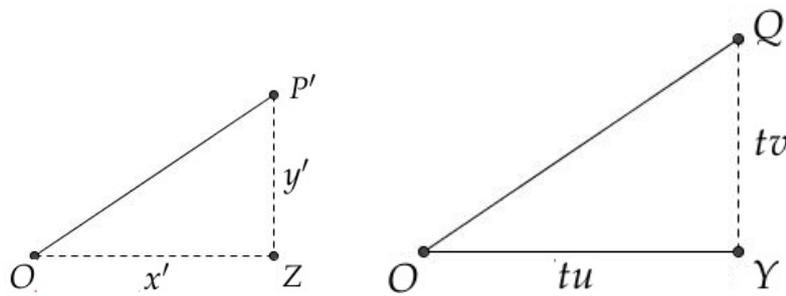


Figura 45: Triângulos semelhantes.

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{OQ^2} = \frac{OQ \cdot OP'}{OQ^2} = \frac{OP'}{OQ}$$

Analogamente temos $\triangle OP'Z \sim \triangle OQY$.

Assim: $OZ = x'$ e $P'Z = y'$ e, então, novamente pela semelhança de triângulos e sabendo que a razão de semelhança é t :

$$t = \frac{OP'}{OQ} = \frac{x'}{tu} = \frac{y'}{tv}.$$

Então, $t = \frac{x'}{tu} \Rightarrow t^2 u = x'$ e da mesma forma $y' = t^2 v$.

Mas, por $t^2 \cdot \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right) = 1$, temos:

$$t^2 = \frac{1}{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}} = \frac{1}{\frac{u^2 b^2 + v^2 a^2}{a^2 b^2}} = \frac{a^2 b^2}{u^2 b^2 + v^2 a^2}$$

Lembremos que: $P' = (x', y')$, $x' = t^2u$ e $y' = t^2v$.

Fazendo as substituições:

$$P' = (t^2u, t^2v) = \left(\frac{a^2b^2u}{b^2u^2 + a^2v^2}, \frac{a^2b^2v}{b^2u^2 + a^2v^2} \right) \quad (4.6)$$

Proposição 4.6. *A partir da elipse \mathcal{E} de centro O , de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e do ponto $P = (u, v)$, exterior a \mathcal{E} , a reta polar de P tem equação $\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 1$.*

Demonstração:

Por (4.5), temos que a reta polar de P tem equação $a^2vy + b^2ux = b^2uu' + a^2vv'$.

Mas, por (4.6), $P' = (u', v') = \left(\frac{a^2b^2u}{b^2u^2 + a^2v^2}, \frac{a^2b^2v}{b^2u^2 + a^2v^2} \right)$.

Assim,

$$\begin{aligned} a^2vy + b^2ux &= b^2u \cdot \frac{a^2b^2u}{b^2u^2 + a^2v^2} + a^2v \cdot \frac{a^2b^2v}{b^2u^2 + a^2v^2} = \\ &= \frac{a^2b^4u^2 + a^4b^2v^2}{b^2u^2 + a^2v^2} = \frac{a^2b^2(b^2u^2 + a^2v^2)}{b^2u^2 + a^2v^2} = a^2b^2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 1$$

4.6.3 Sobre a construção Geométrica de P' .

Mostremos que essa construção se justifica, de acordo com os resultados anteriores, no caso em que P é externo à elipse \mathcal{E} . Para isso, determinamos os pontos de intersecção da reta polar de equação $\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 1$ com a elipse \mathcal{E} .

Em seguida, consideremos a equação da reta tangente a \mathcal{E} que passa por P e verificamos que, para os pontos de intersecção obtidos, a equação é verificada, de modo que podemos concluir que os pontos de tangência a \mathcal{E} , a partir de P , são os pontos de intersecção da reta polar de P com a elipse \mathcal{E} .

Assim, os pontos de intersecção da reta polar de P com a elipse \mathcal{E} podem ser obtidos resolvendo-se o sistema a seguir:

$$\begin{cases} \frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 1 & (1) \\ x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 & (2) \end{cases} \quad (4.7)$$

Pela equação 1 do sistema (4.7) temos: $\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 1 \implies y = \frac{b^2}{v} \cdot \left(-\frac{ux}{a^2} + 1\right)$, caso $v \neq 0$.

Ainda no sistema (4.7) substituímos (1) em (2):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b^4}{v^2} \cdot \left(\frac{u^2x^2}{a^4} + 1 - \frac{2ux}{a^2}\right) = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{v^2} \cdot \left(\frac{u^2x^2}{a^4} + 1 - \frac{2ux}{a^2}\right) = 1$$

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2u^2}{a^4v^2}\right) \cdot x^2 - \frac{2ub^2}{av^2} \cdot x + \frac{b^2}{v^2} - 1 = 0$$

Calculemos seu discriminante:

$$\Delta = \frac{4u^2b^4}{a^4v^4} - 4 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2u^2}{a^4v^2}\right) \cdot \left(\frac{b^2}{v^2} - 1\right)$$

$$\Delta = \frac{4u^2b^4}{a^4v^4} - \frac{4b^2}{a^2v^2} + \frac{4}{a^2} - \frac{4u^2b^4}{a^4v^4} + \frac{4b^2u^2}{a^4v^2}$$

$$\Delta = \frac{4}{a^2} \cdot \left(-\frac{b^2}{v^2} + 1 + \frac{b^2u^2}{a^2v^2}\right)$$

$\Delta = \frac{4}{a^2} \cdot \frac{(b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2)}{a^2v^2} > 0$, pois como $P = (u, v)$ é exterior à elipse \mathcal{E} então, $b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2 > 0$.

$$x_0 = \frac{a^2b^2u \pm \sqrt{a^4v^2(-a^2b^2 + a^2v^2 + b^2u^2)}}{a^2v^2 + b^2u^2}$$

Substituindo x_0 em na equação 1 do sistema (4.7), temos:

$$y_0 = \frac{b^2(a^4v^2 \mp uv\sqrt{-a^4v^2(a^2b^2 - a^2v^2 - b^2u^2)}}{a^2v(a^2v^2 + b^2u^2)}$$

Então, os pontos de intersecção entre a reta polar de P e a elipse \mathcal{E} são:

$$B_1 = \left(\frac{a^2 b^2 u + \sqrt{a^4 v^2 (-a^2 b^2 + a^2 v^2 + b^2 u^2)}}{a^2 v^2 + b^2 u^2}, \frac{b^2 (a^4 v^2 - u \cdot \sqrt{-a^4 v^2 (a^2 b^2 - a^2 v^2 - b^2 u^2)})}{a^2 v (a^2 v^2 + b^2 u^2)} \right)$$

e

$$B_2 = \left(\frac{a^2 b^2 u - \sqrt{a^4 v^2 (-a^2 b^2 + a^2 v^2 + b^2 u^2)}}{a^2 v^2 + b^2 u^2}, \frac{b^2 (a^4 v^2 + u \cdot \sqrt{-a^4 v^2 (a^2 b^2 - a^2 v^2 - b^2 u^2)})}{a^2 v (a^2 v^2 + b^2 u^2)} \right)$$

A partir das coordenadas obtidas para $B_1 = (x_0, y_0)$ e $B_2 = (x'_0, y'_0)$, fazemos a substituição de x_0 e y_0 e/ou x'_0 e y'_0 na equação da reta tangente (4.4), além da substituição das coordenadas de $P = (u, v)$. Assim temos:

$$\begin{aligned} a^2 y_0 y + b^2 x_0 x &= \\ &= a^2 v \left(\frac{b^2 (a^4 v^2 \mp u \sqrt{-a^4 v^2 (a^2 b^2 - a^2 v^2 - b^2 u^2)}}{a^2 v (a^2 v^2 + b^2 u^2)} \right) + b^2 u \left(\frac{a^2 b^2 u \pm \sqrt{a^4 v^2 (-a^2 b^2 + a^2 v^2 + b^2 u^2)}}{a^2 v^2 + b^2 u^2} \right) = \\ &= \frac{a^2 b^4 u^2}{a^2 v^2 + b^2 u^2} + \frac{b^2 a^4 v^2}{a^2 v^2 + b^2 u^2} = \frac{a^2 b^2 (b^2 u^2 + a^2 v^2)}{a^2 v^2 + b^2 u^2} = a^2 b^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, $a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2$ como queríamos demonstrar.

4.7 UNICIDADE DO PONTO INVERSO

Teorema 4.7. *Dois pontos distintos terão pontos inversos distintos.*

Sejam P e T pontos distintos com raios de inversão distintos w e u em relação à \mathcal{E} . Então seus respectivos pontos inversos P' e T' também serão distintos em relação à inversão em \mathcal{E} .

De acordo com a posição relativa dos pontos P e T , podemos destacar dois casos :

1º caso: Se os pontos P e T forem colineares com o centro O da elipse, significa que também são colineares com Q , P' e T' . Dessa forma temos que: $P'T' = \frac{w^2 \cdot TP}{OP \cdot OT}$.

Demonstração:

$$P'T' = OT' - OP' \tag{4.8}$$

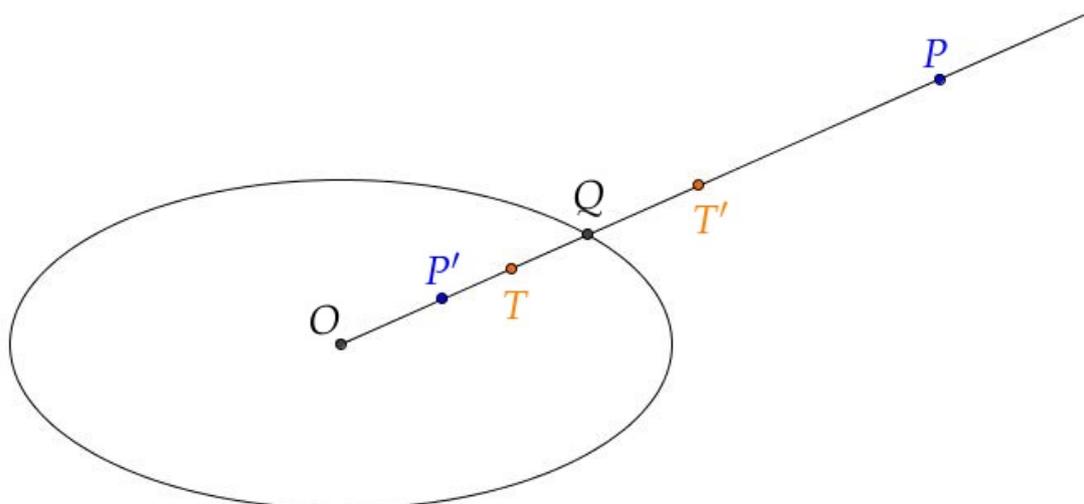


Figura 46: Pontos distintos têm inversos distintos. Fonte: [35]

Pela definição de inversão $OP \cdot OP' = OQ^2$ podemos escrever:

$$OQ^2 = OT \cdot OT' \iff OT' = \frac{OQ^2}{OT} \quad (4.9)$$

e

$$OQ^2 = OP \cdot OP' \iff OP' = \frac{OQ^2}{OP} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.8):

$$P'T' = \frac{OQ^2}{OT} - \frac{OQ^2}{OP} \quad (4.11)$$

Assim,

$$P'T' = \frac{OQ^2 \cdot OP - OQ^2 \cdot OT}{OT \cdot OP} = \frac{OQ^2(OP - OT)}{OT \cdot OP} = \frac{OQ^2(TP)}{OT \cdot OP} \quad (4.12)$$

Dado que o raio de inversão $OQ = w$, temos: $P'T' = \frac{w^2 \cdot TP}{OP \cdot OT}$.

2º caso: Se os pontos P , T e O não forem colineares:

$$P'T' = \frac{\sqrt{(w^2 - u^2)(w^2 \cdot OT^2 - u^2 \cdot OP^2) + w^2 u^2 \cdot PT^2}}{OP \cdot OT}$$

Demonstração:

Se O , P e T não forem pontos colineares, então os pontos P' , T' e O também não o são (figura 47).

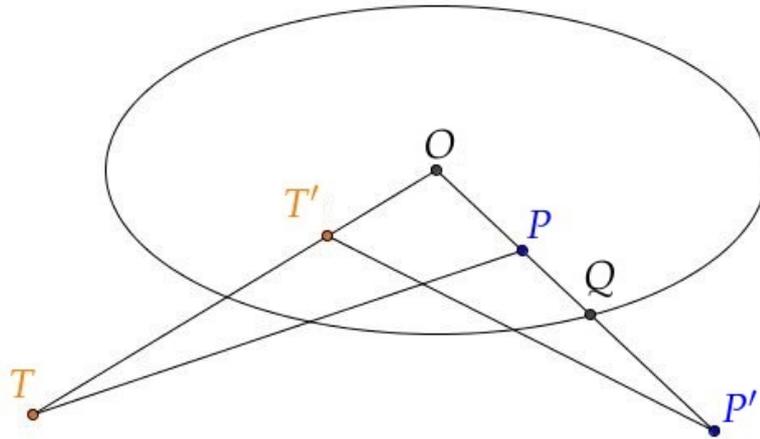


Figura 47: Inversos de pontos não colineares. Fonte: [35]

Seja α o ângulo $P'OT'$ (figura 48). Aplicando a lei dos cossenos, teremos no triângulo POT:

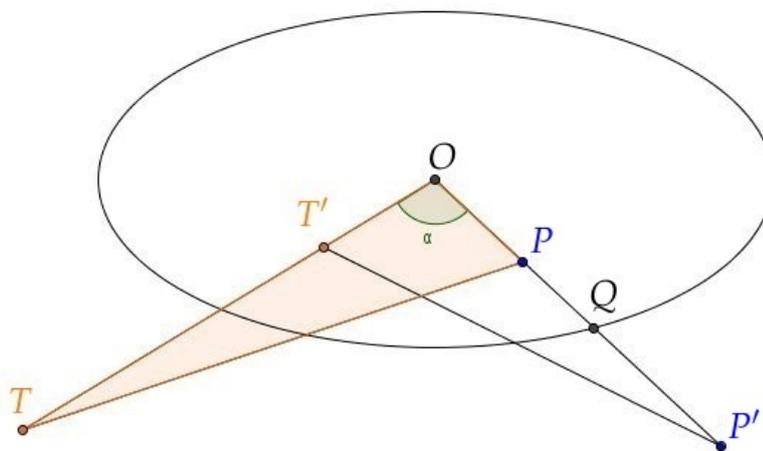


Figura 48: Inversos de pontos não colineares. Fonte: [35]

$$PT^2 = OT^2 + OP^2 - 2 \cdot OT \cdot OP \cdot \cos\alpha$$

Fazendo uma manipulação algébrica:

$$2 \cdot OT \cdot OP \cdot \cos\alpha = OT^2 + OP^2 - PT^2$$

$$\cos\alpha = \frac{OP^2 + OT^2 - PT^2}{2 \cdot OP \cdot OT}$$

O mesmo pode ser feito para o triângulo P'OT (figura 49):

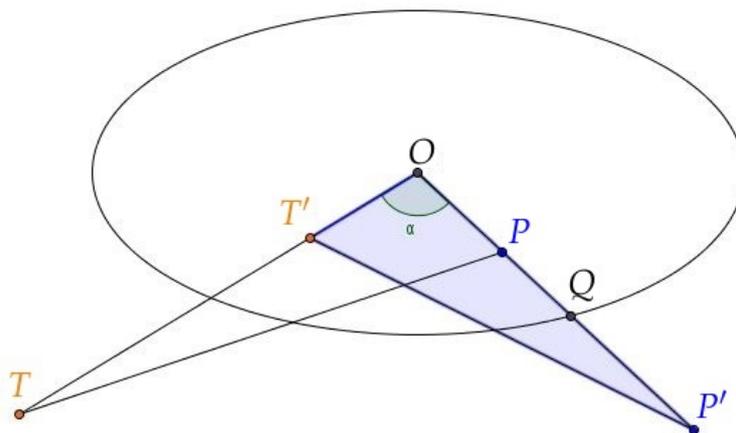


Figura 49: Inversos de pontos não colineares. Fonte: [35]

$$P'T'^2 = OT'^2 + OP'^2 - 2 \cdot OT' \cdot OP' \cdot \cos\alpha \quad (4.13)$$

Pela definição de inversão temos:

$$OT \cdot OT' = OQ_1^2 \implies OT' = \frac{OQ_1^2}{OT} \implies OT' = \frac{w^2}{OT} \quad (4.14)$$

$$OP \cdot OP' = OQ_2^2 \implies OP' = \frac{OQ_2^2}{OP} \implies OP' = \frac{u^2}{OP} \quad (4.15)$$

Substituindo (4.14) e (4.15) em (4.13) os segmentos de retas pelas definições:

$$P'T'^2 = \left(\frac{w^2}{OT}\right)^2 + \left(\frac{u^2}{OP}\right)^2 - 2 \cdot \frac{w^2}{OT} \cdot \frac{u^2}{OP} \cdot \frac{OP^2 + OT^2 - PT^2}{2 \cdot OT \cdot OP} =$$

$$= \frac{w^4 \cdot OT^2 + u^4 \cdot OP^2 - w^2 u^2 (OP^2 + OT^2 - PT^2)}{OP^2 \cdot OT^2} =$$

$$= \frac{(w^2 - u^2)(w^2 \cdot OT^2 - u^2 \cdot OP^2) + w^2 u^2 OP^2}{OP^2 \cdot OT^2}, \text{ logo:}$$

$$P'T' = \frac{\sqrt{(w^2 - u^2)(w^2 \cdot OT^2 - u^2 \cdot OP^2) + w^2 u^2 \cdot PT^2}}{OP \cdot OT}.$$

Assim, em ambos os casos, teremos a distância $P'T' \neq 0$ quando P e T forem distintos.

4.7.1 Razão cruzada e conjugados harmônicos

Definição 4.8. (Razão Cruzada)

Dados quatro pontos alinhados A, B, C e D (sendo $A - C - B$ e $C - B - D$), diz-se que estão dispostos em razão cruzada ou razão dupla se:

$$(AB, CD) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC},$$

Pode-se observar a disposição dos pontos em razão cruzada na figura (figura 50). Esse tipo de razão foi definida na antiguidade, possivelmente por Euclides, e foi considerada por Pappus, que notou sua propriedade chave: a invariância. O documento foi amplamente estudado no século XIX.

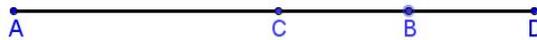


Figura 50: Disposição de 4 dos pontos em razão harmônica

Se um dos quatro pontos é um ponto da reta que está no infinito, então as duas distâncias que envolvem esse ponto são descartadas e não são consideradas no cálculo (retira-se da fórmula).

Para [6], diz-se que C, D divide A, B harmonicamente se a razão cruzada $(AB, CD) = 1$, ou seja, $(AB, CD) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = 1$. Neste caso é dito que C e D são conjugados harmônicos em relação a A e B . A razão cruzada é invariante na inversão no círculo cujo centro não é nenhum dos quatro pontos.

Contudo, a inversão em relação à elipse não preserva a razão cruzada.

No entanto, no caso de conjugados harmônicos, temos o teorema a seguir:

Teorema 4.9. Consideremos uma elipse \mathcal{E} de centro O e $\overline{Q_1Q_2}$ o diâmetro de \mathcal{E} . Dois pontos P e P' da reta $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$ são conjugados harmônicos de Q_1 e Q_2 se, e somente se, eles são inversos um do outro em relação a \mathcal{E} . (Figura 51)

Demonstração:

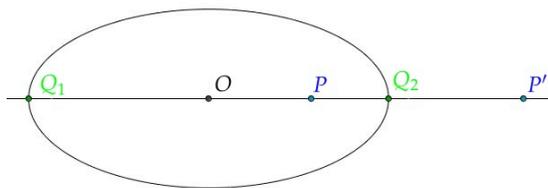


Figura 51: Disposição de 4 dos pontos em razão harmônica

Sejam P e $P' \in \overleftrightarrow{Q_1Q_2}$, com $O-P-Q_2$ e $P-Q_2-P'$. Portanto:

$$(AB, CD) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{Q_1P \cdot Q_2P'}{Q_1P' \cdot Q_2P}$$

Então:

$$\frac{Q_1P \cdot Q_2P'}{Q_1P' \cdot (Q_2P)} = 1 \iff \frac{(Q_1O + OP) \cdot (OP' - OQ_2)}{(Q_1O + OP') \cdot (Q_2O - OP)} = 1$$

O raio $OQ_1 = OQ_2 = w$. Assim:

$$\iff \frac{(w + OP) \cdot (OP' - w)}{(w + OP') \cdot (w - OP)} = 1 \iff \frac{w \cdot OP' - w^2 + OP \cdot OP' - w \cdot OP}{w^2 - w \cdot OP + w \cdot OP' - OP' \cdot OP} = 1$$

$$\iff -w^2 + w \cdot OP' - w \cdot OP + OP \cdot OP' = w^2 + w \cdot OP' - w \cdot OP - OP \cdot OP'$$

$$\iff 2OP' \cdot OP = 2w^2 \iff OP' \cdot OP = w^2$$

Portanto, os pontos P e P' são inversos em relação a \mathcal{E} e são conjugados harmônicos em relação a Q_1 e Q_2 .

4.8 IMAGENS DE CURVAS SOBRE INVERSÃO NA ELIPSE

Nessa seção vamos explorar os tipos de imagem que são formadas quando submetemos retas, elipses, circunferências, parábolas e hipérbolas a uma inversão em relação à elipse \mathcal{E} . Cada curva gera uma imagem característica em relação à sua função.

4.8.1 Imagem de retas obtidas sobre inversão em relação a \mathcal{E} .

Teorema 4.10. Consideremos a inversão ϑ na elipse \mathcal{E} com centro em O .

(a) Toda reta contendo O é invariante sobre inversão (figura 52).

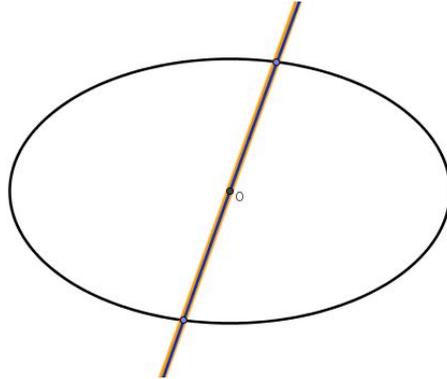


Figura 52: Imagem da reta não contendo \mathcal{E} .

(b) A imagem da reta não contendo O é uma elipse contendo O e homotética a \mathcal{E} (figura 53).

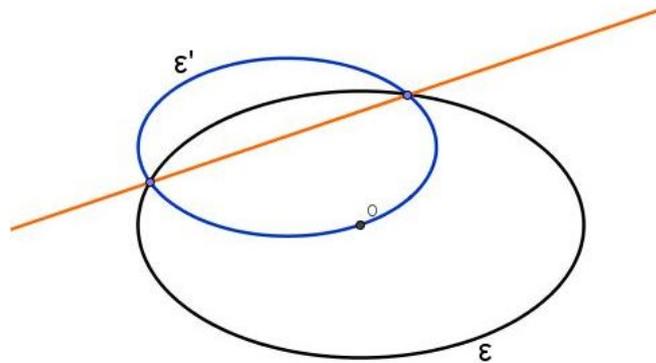


Figura 53: Imagem da reta não contendo \mathcal{E} .

Demonstração:

(a) A partir da definição de inversão fica claro que cada ponto da reta terá seu inverso sobre a própria reta. Assim, cada ponto P da reta terá sua imagem P' em lugar distinto daquele que ocupa mas ainda assim sobre o mesmo lugar geométrico inicial, ou seja, se r for uma reta que passa por O então $\forall P \in r, \vartheta(P) = P'$ e $P' \in r$.

(b) Considerando a reta t não contendo O , com equação $px + qy + r = 0$ com $r \neq 0$, ou seja, não passando pela origem do plano cartesiano. O ponto (x, y) é a imagem inversa de um ponto de t , então a imagem de (x, y) encontra-se na reta t . Assim podemos substituir as coordenadas do ponto inverso na equação da reta. Em outras palavras,

$$px + qy + r = 0$$

$$p \cdot \frac{a^2 b^2 x}{b^2 x^2 + a^2 y^2} + q \cdot \frac{a^2 b^2 y}{b^2 x^2 + a^2 y^2} + r = 0$$

Assim,

$$p \cdot \frac{a^2 b^2 x}{b^2 x^2 + a^2 y^2} + q \cdot \frac{a^2 b^2 y}{b^2 x^2 + a^2 y^2} + \frac{r(b^2 x^2 + a^2 y^2)}{b^2 x^2 + a^2 y^2} = \frac{0}{b^2 x^2 + a^2 y^2}$$

$$a^2 b^2 px + a^2 b^2 qy + r(b^2 x^2 + a^2 y^2) = 0$$

$$a^2 b^2 (px + qy) + r(b^2 x^2 + a^2 y^2) = 0 \quad (4.16)$$

A equação obtida é a equação de uma elipse contendo $O = (0, 0)$. Para ficar claro, vamos manipular algebricamente a equação escrevendo-a na forma reduzida.

Tomando a equação (4.16) dividimos por $a^2 b^2$:

$$\frac{a^2 b^2 (px + qy)}{a^2 b^2} + \frac{r(b^2 x^2 + a^2 y^2)}{a^2 b^2} = 0$$

$$px + qy + \frac{rx^2}{a^2} + \frac{ry^2}{b^2} = 0. \text{ Rearranjando:}$$

$$px + \frac{rx^2}{a^2} + qy + \frac{ry^2}{b^2} = 0, \text{ Logo,}$$

$$\frac{rx^2 + a^2 px}{a^2} + \frac{ry^2 + b^2 qy}{b^2} = 0. \text{ Dividindo por } r,$$

$$\frac{x^2 + \frac{a^2 px}{r}}{a^2} + \frac{y^2 + \frac{b^2 qy}{r}}{b^2} = 0$$

Para completar os quadrados vamos reescrever $\frac{a^2 px}{r}$ como $2 \cdot x \cdot \frac{a^2 p}{2r}$ e $\frac{b^2 qy}{r}$ como $2 \cdot y \cdot \frac{b^2 q}{2r}$ e inserimos os termos $\left(\frac{a^2 p}{2r}\right)^2$ e $\left(\frac{b^2 q}{2r}\right)^2$ em ambos os membros. Assim:

$$\frac{x^2 + \frac{2a^2px}{2r} + \frac{a^4p^2}{4r^2}}{a^2} + \frac{y^2 + \frac{2b^2qy}{2r} + \frac{b^4q^2}{4r^2}}{b^2} = 0 + \frac{a^4p^2}{4r^2} + \frac{b^4q^2}{4r^2}$$

$$\frac{\left(x + \frac{a^2p}{2r}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{b^2q}{2r}\right)^2}{b^2} = \frac{a^2p^2 + b^2q^2}{4r^2}, \quad (4.17)$$

Comparando-se a equação canônica da elipse \mathcal{E} : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ de centros $(0, 0)$ e a equação (4.17) obtida para a elipse de centro $\left(-\frac{a^2p}{2r}, -\frac{b^2q}{2r}\right)$, verificamos que são homotéticas.

De fato, sendo \mathcal{E}_1 : $\frac{\left(x + \frac{a^2p}{2r}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{b^2q}{2r}\right)^2}{b^2} = \frac{a^2p^2 + b^2q^2}{4r^2}$, então \mathcal{E}_1 tem equação reduzida dada por $\frac{\left(x + \frac{a^2p}{2r}\right)^2}{\frac{a^2(a^2p^2 + b^2q^2)}{4r^2}} + \frac{\left(y + \frac{b^2q}{2r}\right)^2}{\frac{b^2(a^2p^2 + b^2q^2)}{4r^2}} = 1$.

Temos que $\frac{a^2(a^2p^2 + b^2q^2)}{4r^2} = \frac{a^2p^2 + b^2q^2}{4r^2}$ e $\frac{b^2(a^2p^2 + b^2q^2)}{4r^2} = \frac{a^2p^2 + b^2q^2}{4r^2}$.

Dessa forma, temos que os semieixos maior e menor de \mathcal{E} e \mathcal{E}_1 são proporcionais, de modo que \mathcal{E} e \mathcal{E}_1 são elipses homotéticas.

Corolário 4.11. *Sejam l_1 e l_2 retas perpendiculares com intersecção no ponto P .*

a) *Se $P = O$, então $\vartheta(l_1)$ e $\vartheta(l_2)$ são retas perpendiculares (figura 54).*

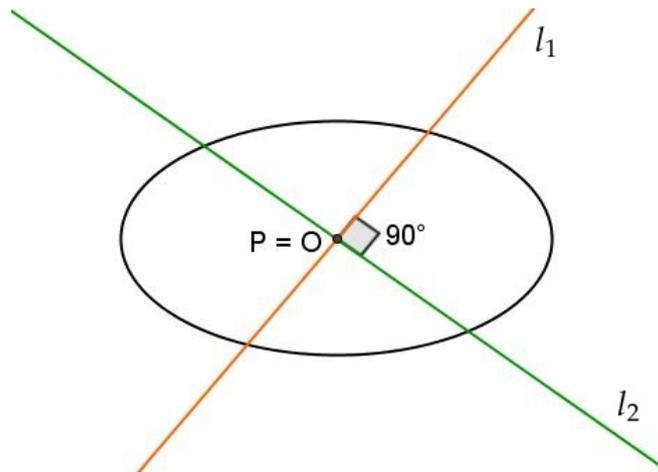


Figura 54: Inversão de retas perpendiculares onde $O \in l_1$ e $O \in l_2$.

b) Se l_1 não contém O mas l_2 contém, então $\vartheta(l_1)$ é uma elipse que passa pelo centro O ortogonalmente a $\vartheta(l_2) = l_2$ por O (figura 55).

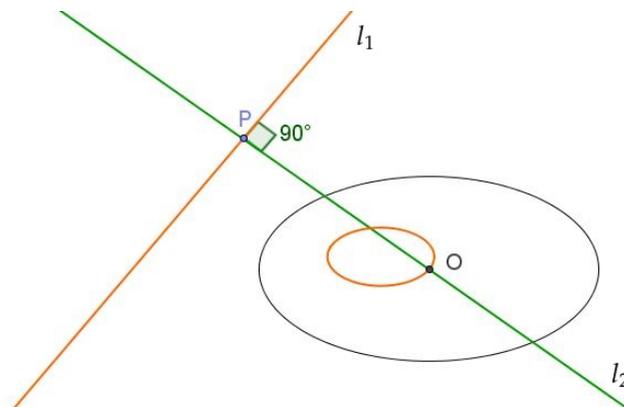


Figura 55: Inversão de retas perpendiculares onde $O \notin l_1$ e $O \in l_2$.

c) Se nenhum dos pontos contém o centro O da elipse, então $\vartheta(l_1)$ e $\vartheta(l_2)$ são elipses contendo P' e O , e são ortogonais em O (figura 56).

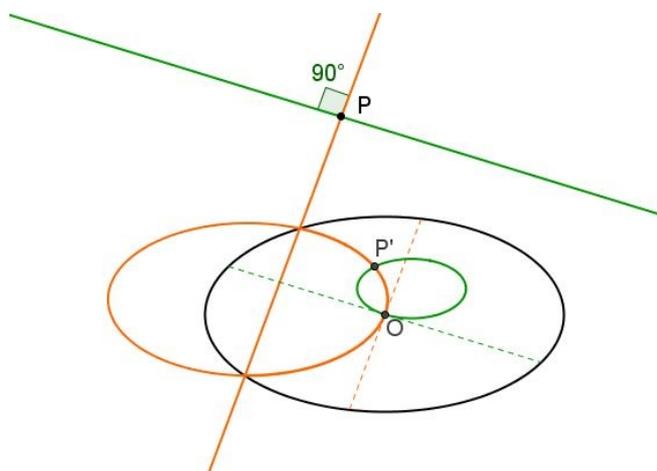


Figura 56: Inversão de retas perpendiculares sendo que $O \notin l_1$ e $O \notin l_2$.

Para [31], que estuda a inversão na circunferência, a inversão não altera o ângulo de intersecção de dois círculos (teorema).

Demonstração [35]:

(a) As retas l_1 e l_2 são invariantes.

(b) Consideremos l_1 como a reta $px + qy + r = 0$ (com $r \neq 0$). Sua imagem por \mathcal{E} é uma elipse dado por $a^2b^2(px + qy) + r(b^2x^2 + a^2y^2) = 0$. A tangente pelo ponto O é a reta cuja equação é obtida suprimindo-se os termos em x^2 e y^2 , e substituindo-se x e y por $\frac{1}{2}x$ e $\frac{1}{2}y$. O resultado é a reta $\frac{1}{2}a^2b^2(px + qy) = 0$, ou simplesmente $px + qy = 0$, paralelo a l_1 e ortogonal a l_2 em O .

(c) Tomemos as retas ortogonais $l_1 : p(x - h) + q(y - k) = 0$ e $l_2 : q(x - h) - p(y - k) = 0$ interceptando-se em $P = (h, k) \neq O$. Sua imagens inversas por \mathcal{E} são elipses interceptando O e P' . Por (b) acima, as tangentes por O são retas ortogonais $px + qy = 0$ e $qx - py = 0$.

OBSERVAÇÃO: Em (c), as imagens não são necessariamente ortogonais em P' .

Corolário 4.12. (a) Se $P \neq O$, a imagem inversa de um feixe de retas que passam por P são elipses coaxiais através de O e P'' (figura 57)

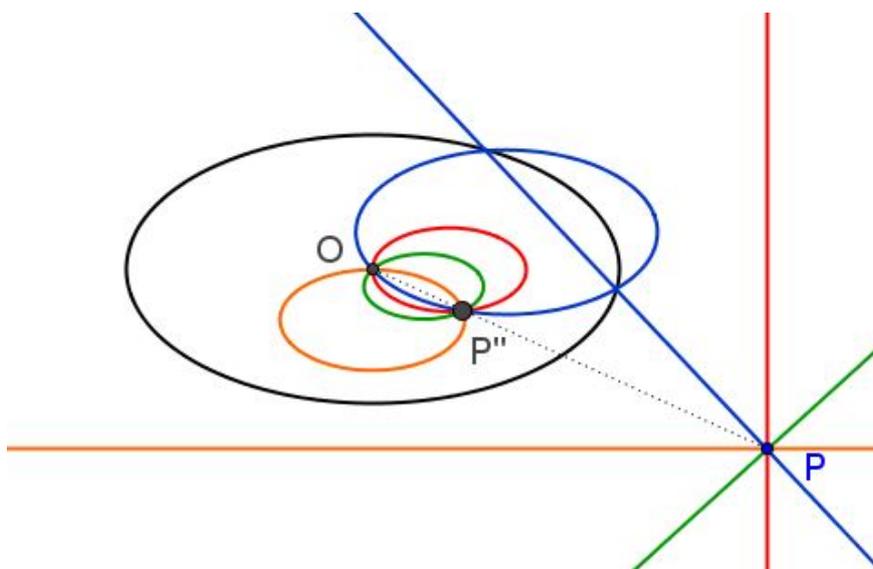


Figura 57: Imagem de um feixe de retas não contendo O de \mathcal{E} .

(b) Seja l_0 uma reta que contém o centro O de \mathcal{E} . A imagem de um feixe de retas paralelas a l_0 são elipses homotéticas a \mathcal{E} e tangentes a l_0 por O (figura 58).

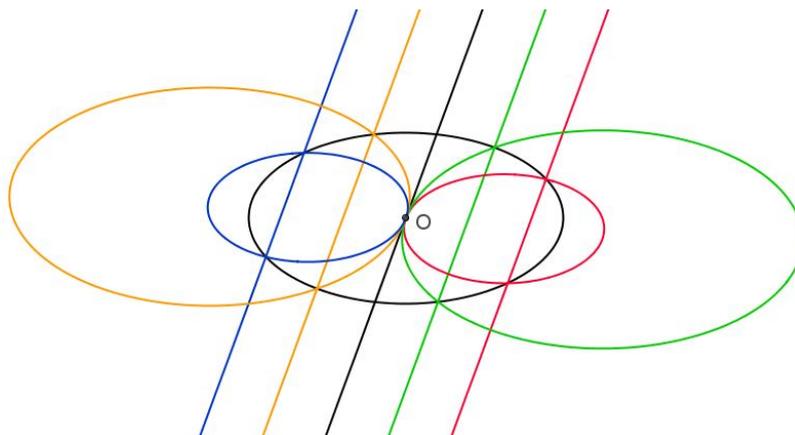


Figura 58: Inversão de um feixe de retas paralelas. Fonte: [35]

4.8.2 Imagem de elipses obtidas sobre inversão em relação a \mathcal{E} .

Teorema 4.13. *Seja \mathcal{E} a elipse de inversão com centro em O e \mathcal{E}' uma elipse homotética de \mathcal{E} . A imagem de \mathcal{E}' é*

(a) *Uma elipse homotética de \mathcal{E} se \mathcal{E}' não passa pelo centro O . (Figura 59)*

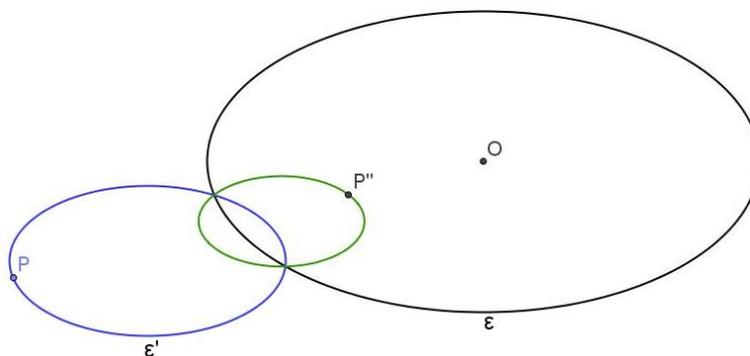


Figura 59: Elipse sobre inversão gerando elipse.

b) *Uma reta se \mathcal{E}' passa pelo centro O . (Figura 60) .*

Demonstração:

Uma elipse \mathcal{E}' homotética a \mathcal{E} tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + px + qy + r = 0.$$

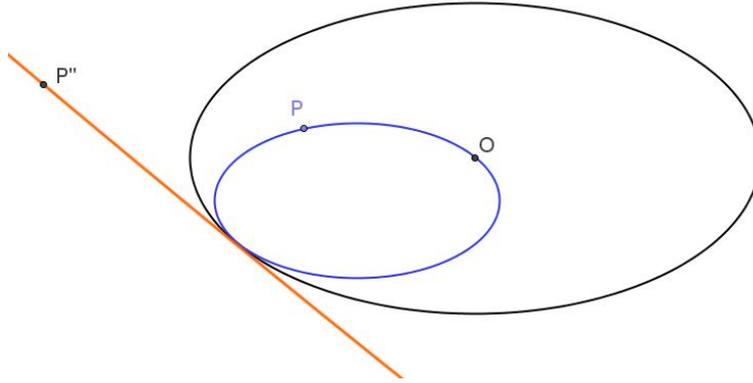


Figura 60: Elipse sobre inversão gerando reta

A elipse \mathcal{E}' passa por O se, e somente se, $r = 0$.

(a) Se \mathcal{E} não passa pelo centro O , então $r \neq 0$. A imagem inversa consiste em pontos $P(x, y)$ para cada P' que pertence á elipse \mathcal{E} , isto é:

$$\frac{\left(\frac{a^2 b^2 x}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{a^2 b^2 y}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right)^2}{b^2} + p \left(\frac{a^2 b^2 x}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right) + q \left(\frac{a^2 b^2 y}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right) + r = 0$$

Manipularemos a equação obtida afim de simplificá-la.

$$\left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right)^2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{a^2} + \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right)^2 \cdot y^2 \cdot \frac{1}{b^2} + px \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right) + qy \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right) + r = 0$$

Colocando o fator comum em evidência:

$$\left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right)^2 \cdot \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + (px + qy) \left(\frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{a^2 b^2}\right) + r \left(\frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{a^2 b^2}\right)^2 \right] = 0$$

Para o produto dos dois fatores encontrados ser igual zero, um dos fatores deve ser zero. Mas $\left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x^2 + a^2 y^2}\right)^2 \neq 0$ pois $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Então:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + (px + qy) \left(\frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{a^2 b^2}\right) + r \left(\frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{a^2 b^2}\right)^2 = 0 \quad (4.18)$$

Mas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2}, \quad (4.19)$$

então substituindo 4.19 em 4.18 obtemos:

$$\left(\frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2}\right) + (px + qy) \left(\frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2}\right) + r \left(\frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2}\right)^2 = 0$$

Novamente colocando o fator comum em evidência:

$$\frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2} \cdot \left(1 + px + qy + r \cdot \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2}\right) = 0$$

Sabemos que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2} = 1$ então, substituindo os valores:

$$1 \cdot \left(1 + px + qy + r \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right) = 0$$

Dividimos por r , temos:

$$\frac{1}{r} + \frac{p}{r}x + \frac{q}{r}y + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = 0$$

Rearranjando

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{p}{r} \cdot x + \frac{q}{r} \cdot y + \frac{1}{r} = 0$$

Essa última equação representa uma elipse homotética a \mathcal{E} (Figura 59 ou 60).

Corolário 4.14. *Seja \mathcal{E}' uma elipse com centro em O' homotética a \mathcal{E} com centro em O . Se \mathcal{E}' é invariante em relação à inversão em \mathcal{E} , e P é um ponto comum entre as elipses, então $O'P$ e OP são tangentes a \mathcal{E} e \mathcal{E}' respectivamente (figura 61).*

Demonstração [35]:

Comparando a equação de \mathcal{E}' e sua imagem sobre inversão em \mathcal{E} na demonstração do teorema anterior (4.13), concluímos que a elipse \mathcal{E}' é invariante se, e somente se, sua equação é da forma:

$$(\mathcal{E}'): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + px + qy + 1 = 0$$

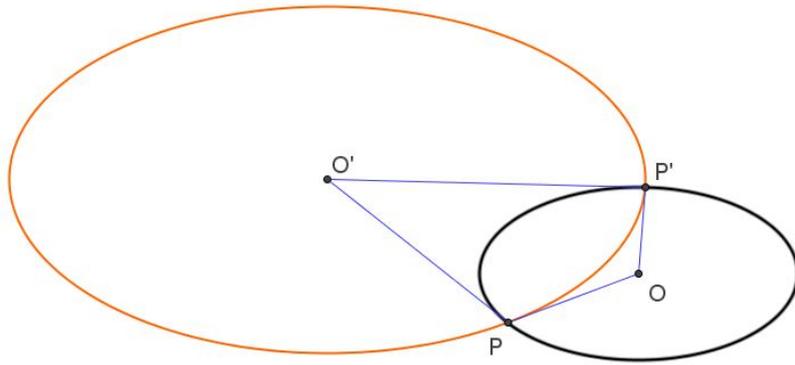


Figura 61: Pontos de tangência entre elipses homotéticas.

Observemos que o centro O' de \mathcal{E}' tem as coordenadas $\left(-\frac{pa^2}{2}, -\frac{qb^2}{2}\right)$.

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto comum das duas elipses. Claramente,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

$$px_0 + qy_0 + 2 = 0.$$

As tangentes de \mathcal{E} e \mathcal{E}' em (x_0, y_0) são as retas

$$(t) : \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0,$$

e

$$(t') : \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{1}{2}p(x + x_0) + \frac{1}{2}q(y - y_0) + 1 = 0.$$

Substituindo as coordenadas (x, y) pelas coordenadas de O' em (t) e $(0, 0)$ em (t') chegamos à $\mp \left(\frac{px_0}{2} + \frac{qy_0}{2} + 1\right)$ respectivamente. Pela equação $px_0 + qy_0 + 2 = 0$ o resultado vale zero em ambos os casos, mostrando que $O'P$ é tangente a \mathcal{E} e OP é tangente a \mathcal{E}' .

4.8.3 Imagem das demais cônicas obtidas sobre inversão em relação a \mathcal{E}

A partir de uma elipse e da função ϑ pode-se fazer a inversão de qualquer objeto geométrico que se queira. Em [35] destaca-se duas características na inversão das

demais cônicas: A formação de inversos descritos por curvas cúbicas ou quádricas, como segue no próximo teorema.

Teorema 4.15. *Dada uma elipse \mathcal{E} com centro O , a imagem de uma cônica C não homotética a \mathcal{E} é:*

- (i) *uma curva cúbica se C passa por O , (figuras 62, 64 e 66)*
- (ii) *uma curva quádrica se C não passa por O (figuras 63, 65 e 67).*

Nas figura a seguir, são mostrados as imagens inversas de um círculo, de uma parábola e de uma hiperbole em relação á elipse.

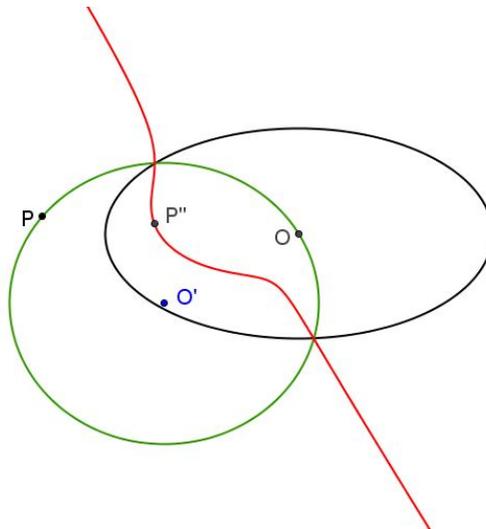


Figura 62: Circunferência sobre inversão na elipse ($O \in C$).

4.8.4 Resumo dos casos de inversão.

Em resumo, os casos de inversão são:

1. O inverso de um ponto interno a \mathcal{E} é um ponto externo a \mathcal{E} .
2. O inverso de um ponto externo a \mathcal{E} é um ponto interno a \mathcal{E} .
3. Uma reta passando pelo centro de \mathcal{E} se mantém como inverso dela mesma.

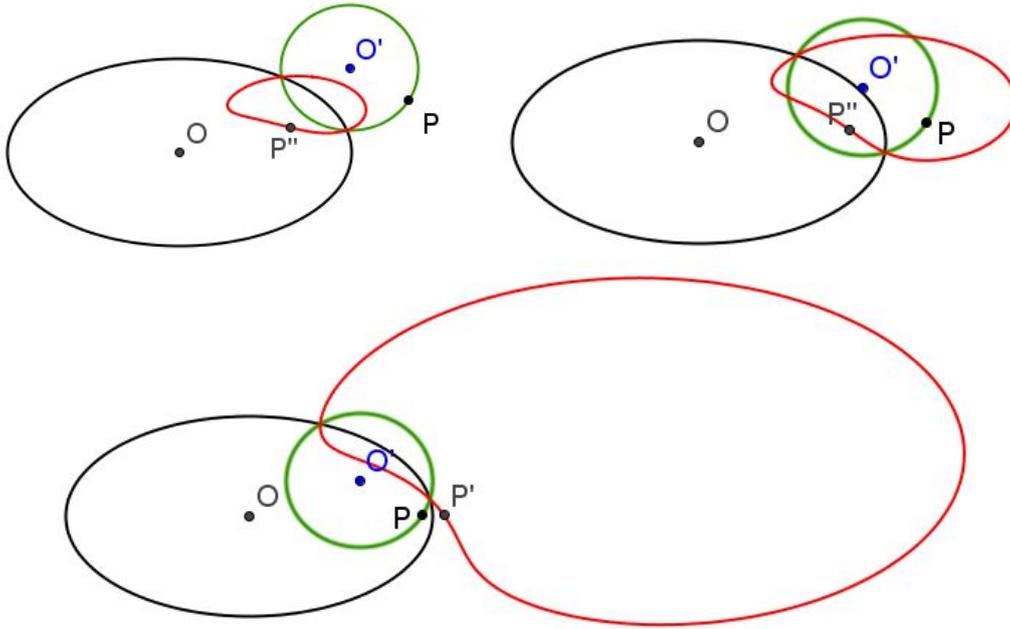


Figura 63: Circunferências sobre inversão na elipse ($O \notin C$).

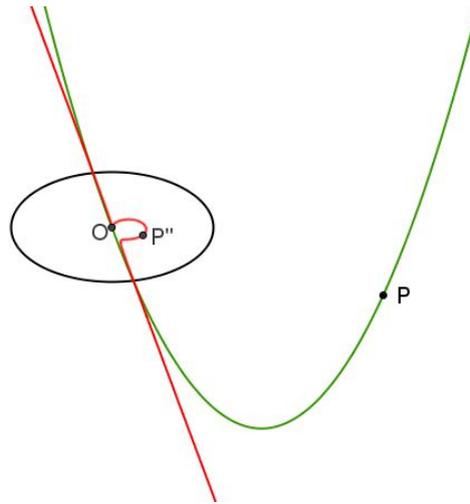


Figura 64: Parábola sobre inversão na elipse ($O \in C$).

4. O inverso de uma reta que não contém o centro O de \mathcal{E} é uma elipse contendo O e homotética a \mathcal{E} , ou seja, é proporcional a \mathcal{E} .
5. Sejam 2 retas perpendiculares que se cruzam em P .
- 5.1. Se P for o centro O de \mathcal{E} então o inverso são duas retas perpendiculares.

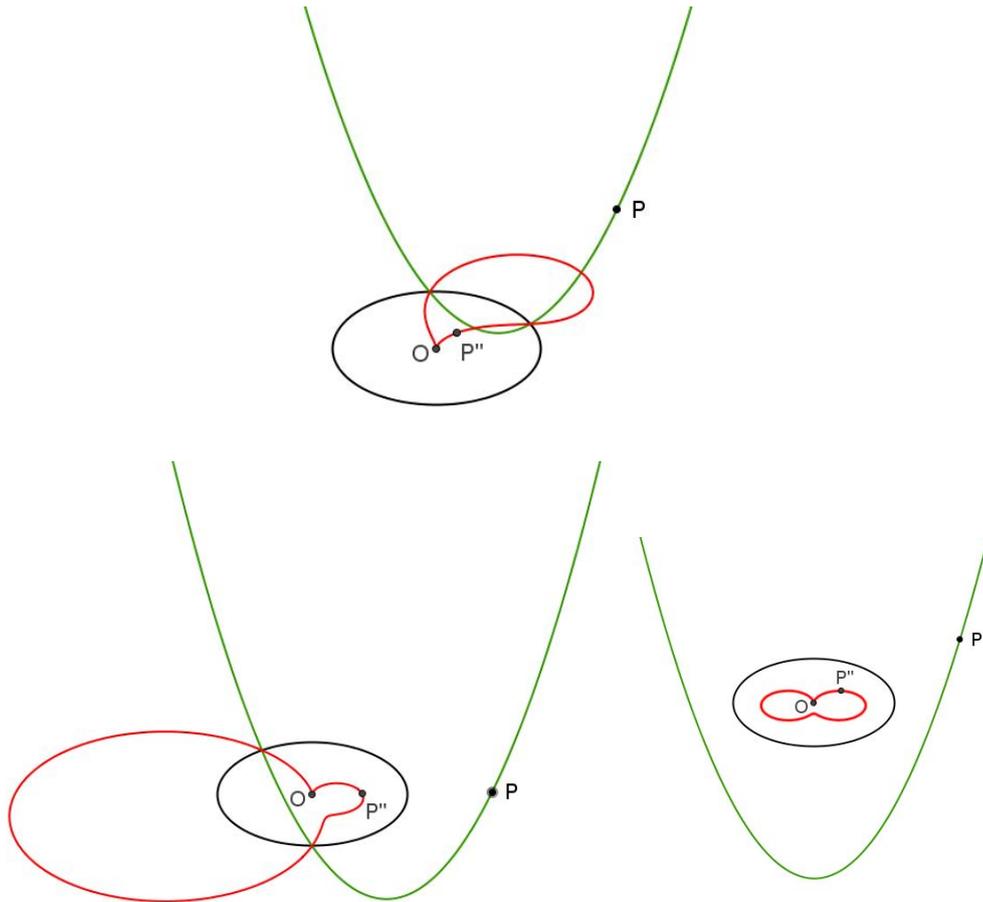


Figura 65: Parábolas sobre inversão na elipse ($O \notin C$).

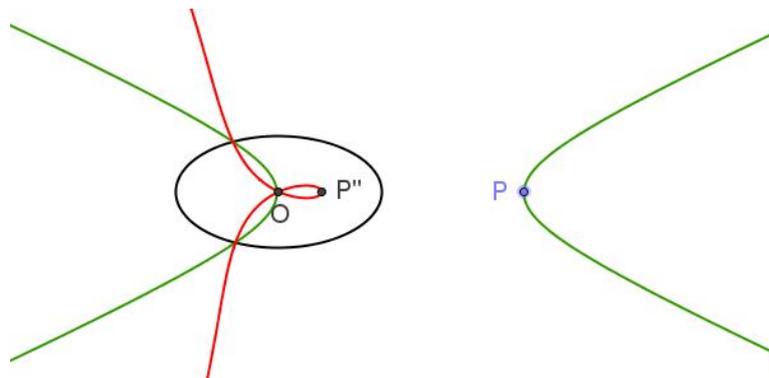


Figura 66: Hipérbole sobre inversão na elipse ($O \in C$).

5.2. Se uma das retas r_1 passa por O e a outra r_2 passa por O , então r_1 é uma elipse ortogonal a inversão (reta) de r_2

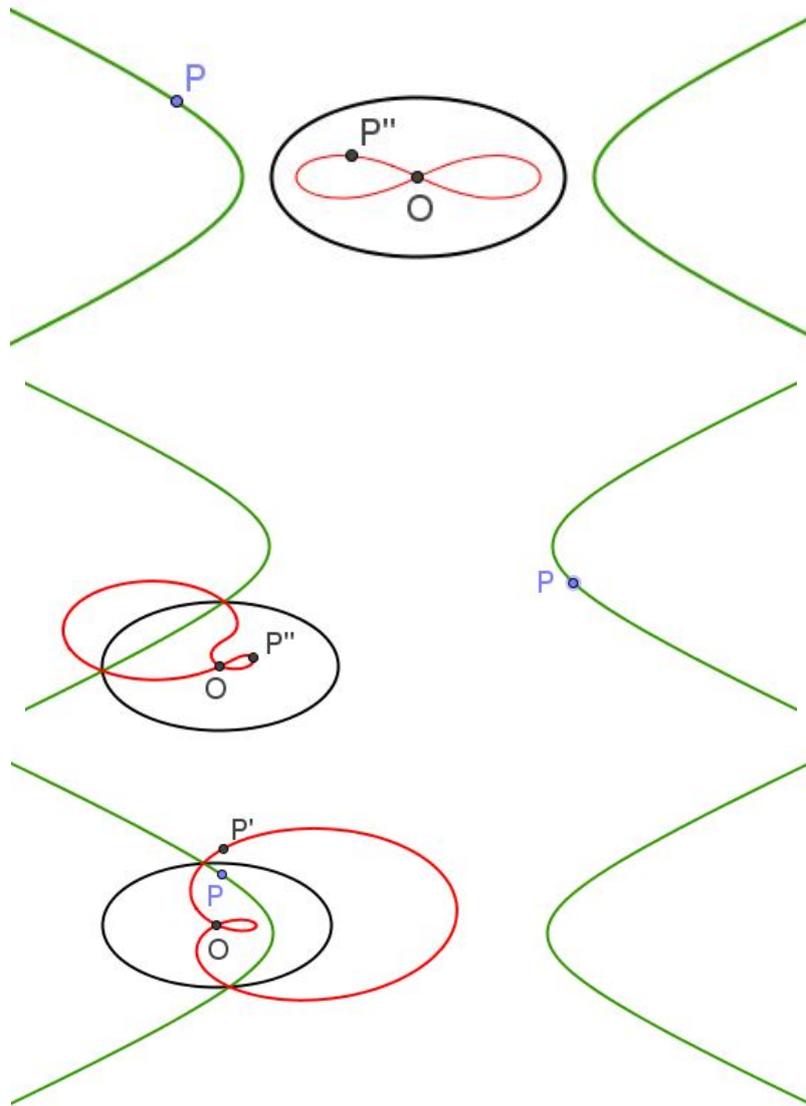


Figura 67: Hipérboles sobre inversão na elipse ($O \notin C$).

5.3. Se nenhuma das retas contém o centro O , então os inversos são elipses ortogonais em O .

6. Um feixe de retas passando por $P \neq O$ e externo a \mathcal{E} , gera como inversos, elipses coaxiais através de O e P' .

7. A inversão de um sistema de retas paralelas são elipses homotéticas a \mathcal{E} e que passam por O .

8. O inverso de uma elipse que não passa por O é uma elipse.

9. O inverso de uma elipse que passa por O é uma reta.

NOTAS PARA SALA DE AULA

Neste capítulo vamos explorar alguns temas possíveis para desenvolver projetos para trabalhar em sala de aula. Assim como aconteceu no desenvolvimento deste trabalho, vamos começar com ideias simples para, em seguida, ampliar os horizontes, os conceitos e as dificuldades, garantindo também, o desenvolvimento do raciocínio e as habilidades matemáticas e o envolvimento do do aluno com o assunto trabalhado.

5.1 ELIPSE - APLICAÇÕES E ATIVIDADES

5.1.1 *Observação das formas do mundo*

O mundo é repleto de formas. Formas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. Todas ao nosso redor. É comum alguém comprar um certo carro e a partir daí começar a ver/perceber como existem tantos carros da mesma marca e modelo daquele adquirido. O mesmo acontece quando nasce uma criança na família e percebemos quantas outras crianças de mesmo nome nos rodeiam. Com as formas geométricas ocorre o mesmo. Em nosso caso, nunca imaginamos a quantidade de elipses que estão a nossa volta e por isso fazem parte do nosso dia-a-dia.

Vamos começar observando. Podemos encontrar elipses:

- logotipos
- frascos de desodorante e perfume
- moldura de espelhos
- jóias

- órbitas planetárias
- bola de futebol americano
- mostradores de relógio
- coberturas de estádio esportivos
- fivelas de cintos
- perspectivas de círculos que são desenhados como elipses
- rodas de bicicletas
- cortes de cilindros (palmito e bambú, por exemplo)
- representação de mapas geográficos
- estampas de roupas
- objetos refletores
- confecção de moldes de roupas
- instrumentos /equipamentos para procedimentos médicos
- arquitetura
- móveis
- acústica, entre outros.

Em todos os exemplos citados anteriormente, as elipses podem aparecer mais ou menos “achatadas”. Tal aparência está ligada à sua excentricidade.

Atividade 1. Reconhecimento de elipses e cálculo das respectivas excentricidades.

- Pesquisar em livros, jornais, revistas ou acessar a internet por meio de computadores ou smartphones figuras de elipses. Vamos precisar de figuras impressas.
- Em posse das figuras (pelo menos 2), traçar os eixos maior e menor.
- Medir o comprimento dos eixos e anotar as médias.
- Calcular os comprimentos dos semieixos maior e menor.
- Calcular a semidistância focal e a excentricidade das elipses encontradas.
- Comparar as figuras e as excentricidades encontradas para responder à pergunta: Elipses com excentricidades próximas de zero são mais ou menos achatadas que

as elipses com excentricidades mais próximas de 1? Caso não seja possível obter uma resposta clara sobre a pergunta por conta de as excentricidades calculadas terem valores muito próximos e as elipses serem muito parecidas, verificar os resultados obtidos pelos outros membros da turma.

5.1.2 Construção/obtenção de elipses de formas manuais

Antes do advento dos computadores, os desenhos de uma elipse eram feitos de formas artesanais utilizando-se régua, lápis, compasso, etc. Da observação ao registro, técnicas foram desenvolvidas para se chegar à “perfeição”. Algumas das técnicas são descritas a seguir. A apresentação dessas técnicas se justifica pelo fato de a elipse ser fundamental para se fazer a inversão estudada.

Método das coordenadas

Este método de construir elipses mistura álgebra e geometria. A partir da equação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, deve-se fazer a substituição dos valores de x e calcular os valores de y . Dessa forma encontrar-se-á pares ordenados que deverão ser marcados num plano cartesiano desenhado em uma folha de papel. Após obter diversos pontos no gráfico, basta uní-los para ter o resultado esperado: a elipse. Para facilitar o trabalho, deve-se lembrar que a elipse pode ser dividida em quatro quadrantes por seus eixos e os pontos marcados em um dos quadrantes pode ser marcados nos demais por reflexões sucessivas em seus eixos (figura 68).

Na figura 68 pode-se observar que o ponto calculado P é refletido em y obtendo-se P' que por sua vez é refletido em x para obtermos P'' . Por último P'' sofre reflexão em relação a y e obtemos P''' . O cálculo de uma única coordenada determina quatro pontos da elipse.

Método do paralelogramo

O método do paralelogramo consiste em desenhar um retângulo de lados com medidas iguais aos eixos maior (AB) e menor (CD) da elipse que se quer obter. Divide-se o retângulo em quatro quadrantes de mesmo tamanho com os eixos da elipse e marca-se o centro O e o vértice E do paralelogramo (figura 69).

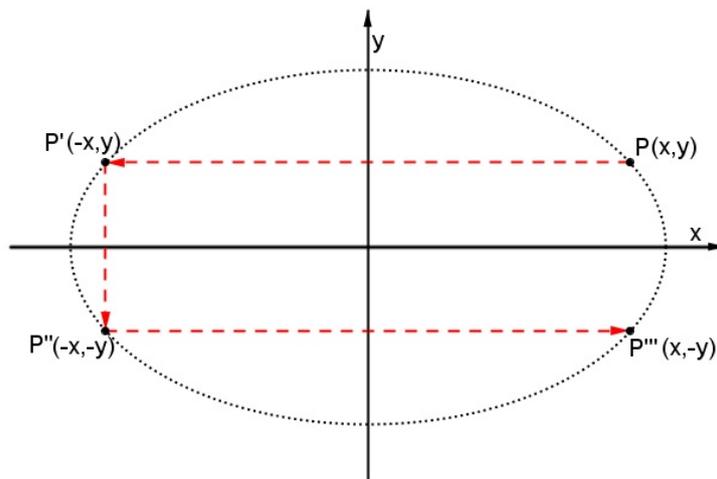


Figura 68: Obtenção da elipse pelo método das coordenadas.

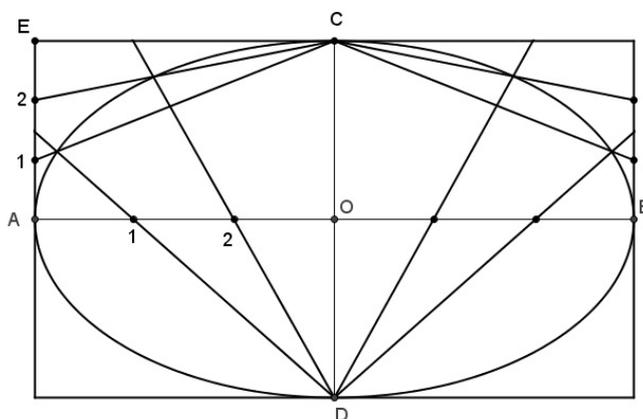


Figura 69: Retângulo base para obter uma elipse.

Divide-se os segmentos AO e AE no mesmo número de partes de mesmo tamanho. A intersecção dos “segmentos 1” e a intersecção dos “segmentos 2” são pontos da elipse. Quanto maior o número de partes que se divide AO e AE mais perfeita fica a elipse obtida.

Método da tira de papel

Este método utiliza somente uma fita de papel para desenhar pontos da elipse. Neste papel marca-se um segmento de reta composto pela medida do semieixo maior seguida da medida do semieixo menor. Tomemos o início do segmento obtido por A , o final por B e o ponto de intersecção entre os dois semieixos de P (figura 70).



Figura 70: Fita de papel para desenhar elipses.

Basta posicionar os extremos A e B sobre o eixo da elipse e começar a marcar os pontos P sempre mudando a tira de posição até formar a cônica. (figura 71).

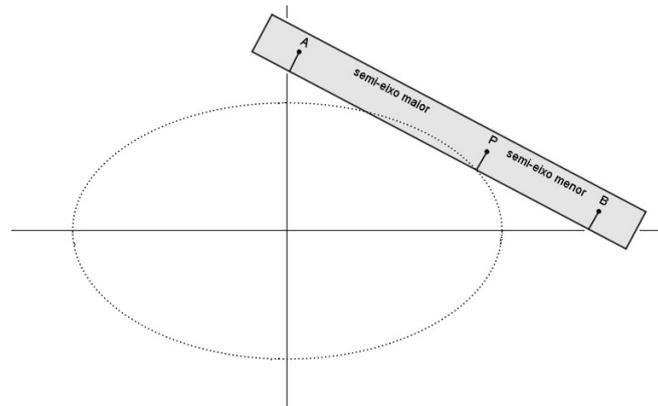


Figura 71: Elipse feita a partir de uma fita de papel.

Existe um dispositivo no qual não é necessário mudar constantemente de lugar a tira de papel. Esse instrumento é o elipsógrafo, representado na figura 72.

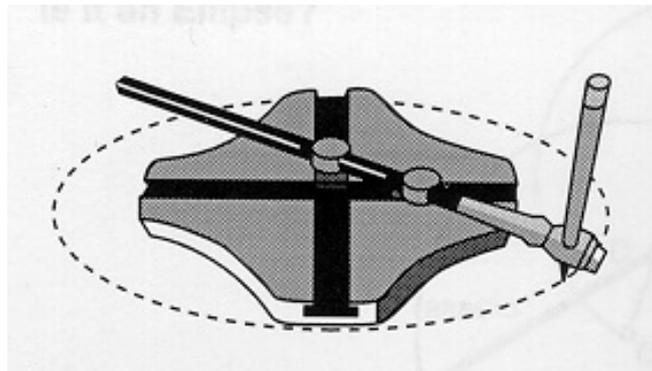


Figura 72: Elipsógrafo: dispositivo para desenhar elipses. Fonte [18]

Método do jardineiro

Este método já foi comentado no capítulo 2:

“O método do jardineiro consiste, em colocar duas hastes verticais em uma superfície (sobre os focos) e fixar as extremidades de uma corda a cada uma das hastes. Com uma terceira haste encostada na corda, mantendo sempre a corda esticada e deslocando a haste perpendicularmente pela superfície determinamos, nela, um lugar geométrico de pontos: a elipse. O comprimento da corda deve, obviamente, ser superior à distância entre as hastes”.

O método é mais apropriado para se obter grandes elipses como um jardim elíptico (daí o nome do método) ou grandes fachadas. Na figura 73 substituímos as hastes pelos pregos e pelo lápis.

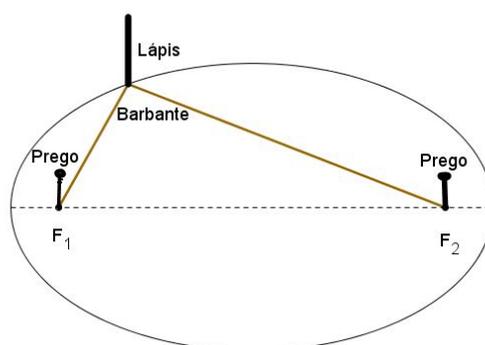


Figura 73: Elipse construída com o método do jardineiro.

Método dos círculos concêntricos

Para obter uma elipse utilizando esse método deve-se desenhar duas circunferências concêntricas de modo que os diâmetros correspondam aos eixos da elipse. Em seguida traçamos segmentos pouco maiores que o maior diâmetro que partam do centro da circunferência. Esses segmentos interceptam os dois círculos. Na intersecção com a circunferência menor deve-se traçar segmentos horizontais enquanto na intersecção com a circunferência maior deve-se traçar segmentos verticais formando ângulos retos (figura 74).

Os vértices dos ângulos retos correspondem à pontos da elipse.

Atividade 2. Construção de elipse de forma manual.

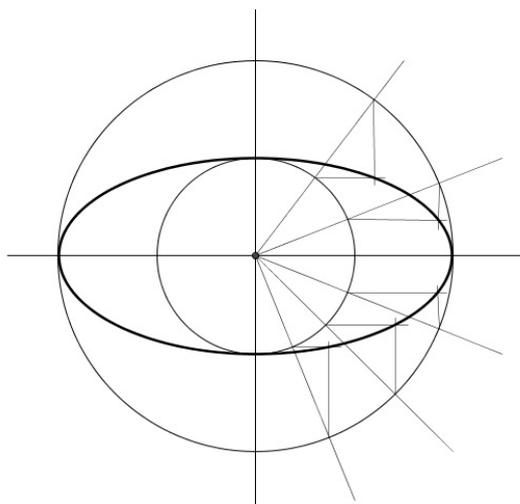


Figura 74: Elipse construída com o método do jardineiro.

Construir o gráfico da elipse de equação $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ utilizando dois métodos diferentes dos que foram expostos anteriormente.

5.1.3 Construção de elipses em ambiente de geometria dinâmica

É fato que na escola, principalmente nos anos iniciais do ensino fundamental, os professores utilizam recursos de diversos materiais para auxiliar no entendimento e desenvolvimento de conceitos e habilidades matemáticas. Com o avanço da tecnologia, esses recursos ficam cada vez mais popularizados e ajudam a desmistificar “dificuldades” que eram encontradas até então, pois esses recursos facilitam a interação do indivíduo com as teorias.

As tábuas, as tabelas, o ábaco, a máquina de calcular, o material dourado, os aplicativos para celular e tablets, entre outros, são alguns dos recursos que poderiam ser utilizados durante as aulas de matemática. Aqui, vamos enfatizar a utilização de um *software* de geometria dinâmica: o *GeoGebra*[®].

O *GeoGebra*[®] é um desses *softwares* desenvolvidos para ajudar no estudo da geometria. Mas ainda podem ser encontrados na internet o Cabri (não *free*) e o Cinderela (não *free*) entre outros. Neles é possível explorar recursos de construção de geometria euclidiana básica.

O GeoGebra®

Para as atividades propostas que aqui constam, deve-se ter o programa GeoGebra instalado em seu computador, tablet ou smartphone. Na falta desse recurso, pode-se executar todas as atividades de forma manual começando por desenhar a elipse utilizando-se um dos procedimentos sugeridos em 5.1.2.

O GeoGebra® é um *softwares* gratuito disponível em www.GeoGebra.org na opção downloads. Existe um tutorial de instalação em <https://www.youtube.com/watch?v=swYHNtmODG8> caso seja necessário. Os procedimentos descritos nesse trabalho são baseados na versão 5.0.149.0-3D de 11 setembro de 2015.

A interface do GeoGebra é bem simples. Destacamos 4 campos importantes (figura75) desse ambiente de geometria dinâmica:



Figura 75: Interface do GeoGebra

- **Barra de Menu:** Salva documentos e controla configurações gerais do GeoGebra.
- **Campo de entrada:** digita-se comandos para obter objetos ou realizar ações.
- **Lista de comandos:** lista com todas as funções pré definidas do programa. Também utilizada para digitar comandos de construção ou de ações.
- **Barra de ferramentas:** concentra todas as ferramentas possíveis que podem ser utilizadas no programa. Cada ícone dessa barra esconde ícones de outras funções que podem ser vistas clicando-se no canto inferior direito.

Para maiores informações, acesse: <https://youtu.be/exSsqDyP65k>.

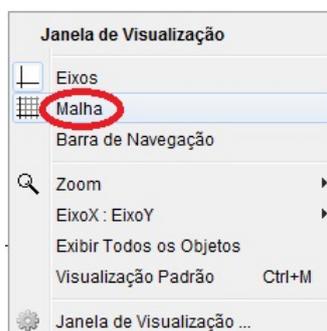
5.1.4 Construção de elipses no GeoGebra®

Exploraremos três formas de desenharmos elipses no GeoGebra.

Vamos supor que queiramos desenhar a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ que possui centro na origem. A partir da equação podemos determinar:

- semieixo maior: $a^2 = 25 \implies a = 5$
- semieixo menor: $b^2 = 9 \implies b = 3$
- Semidistância focal: $a^2 = b^2 + c^2 \implies 25 = 9 + c^2 \implies \boxed{c = 4}$

Para facilitar nosso trabalho, ao iniciarmos o programa GeoGebra, clicaremos com o botão direito do mouse sobre a janela de visualização e na caixa que abrirá, selecionaremos a opção malha:



para que toda a janela de visualização fique quadriculada.

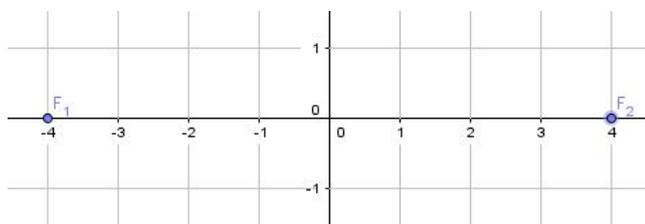
Se for necessário, utilize o botão “Mover janela”  para centralizar os eixos na janela de visualização. Clique na botão indicado e depois com o cursor do mouse na janela de visualização clique e mantenha o botão do mouse pressionado deslocando a janela para onde quiser.

Atividade 3. Primeiro método para desenhar uma elipse no GeoGebra

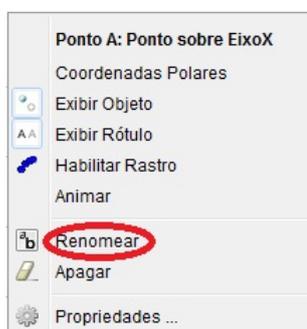
Procedimentos

- Na barra de Menu, selecionar a opção ponto: .

- Na janela de visualização devemos marcar os focos da elipse. Como já se sabe que a distância focal é $c = 4$, marcaremos os pontos $(-4, 0)$ e $(4, 0)$ sobre o eixo x .



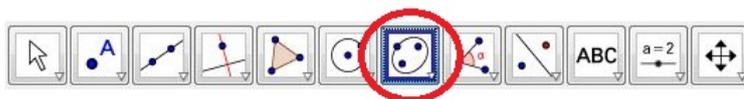
- Clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto A, escolheremos a opção renomear.



- Abrir-se-á uma janela onde digitaremos F_1 e “Ok” em seguida.

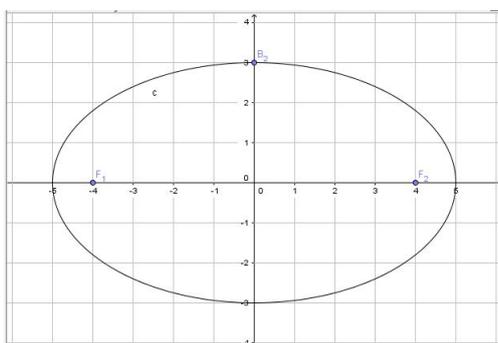


- Repetimos os procedimentos para marcamos o ponto referente ao segundo foco da elipse e o ponto B obtido deverá ser renomeado como F_2 .
- Marcaremos agora o comprimento do semieixo menor $c = 3$ utilizando o ponto $(0,3)$ sobre o eixo y e o nomearemos de B_2 .
- Na barra de ferramentas selecionaremos a função Elipse.



- Em seguida clicamos em F_1 , F_2 e em B_2 , nessa ordem, selecionando os três pontos necessários para que a elipse referente à equação escolhida seja desenhada.

Pronto! A elipse foi desenhada.



É interessante e imprescindível visualizar e verificar que os elementos geométricos construídos na janela de visualização estão presentes na janela de álgebra à direita da interface do GeoGebra. Ou seja, temos os mesmos elementos representados geometricamente e algebricamente.

Os procedimentos escritos acima, não impedem que sejam escolhidos quaisquer pontos aleatórios para a construção de uma elipse qualquer.

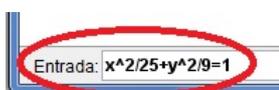
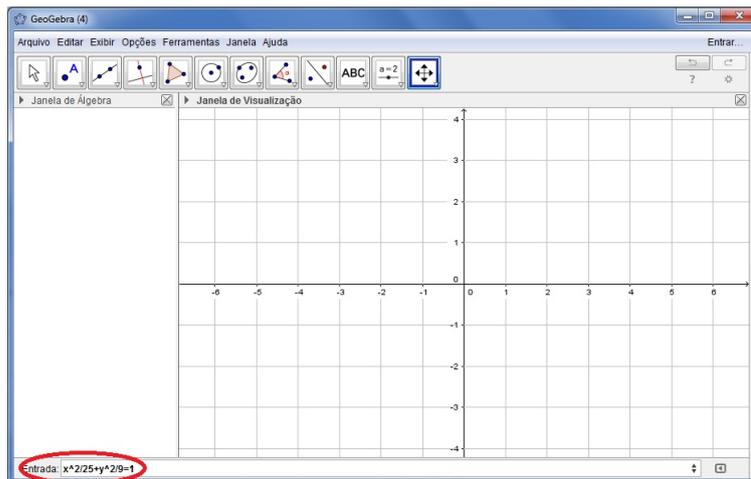
Não se utilizando do plano quadriculado, há o recurso de os pontos para a construção da elipse serem marcados através de coordenadas.

Atividade 4. Segundo método para desenhar uma elipse no GeoGebra.

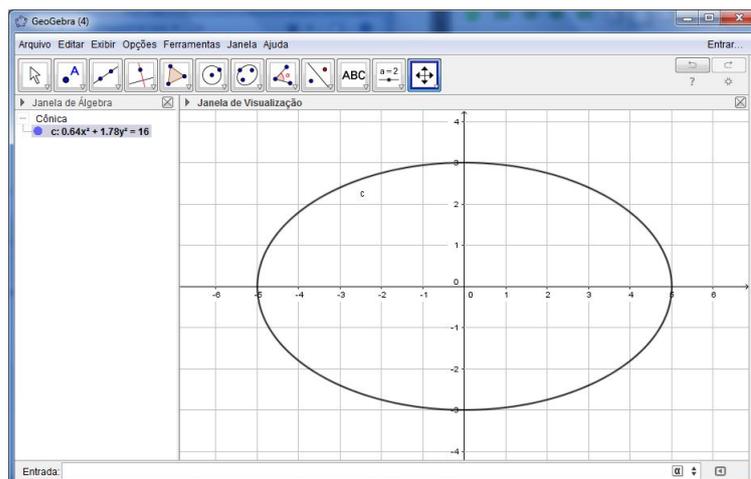
Vamos desenhar a mesma elipse do 1º método: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, utilizando outros recursos.

Procedimentos de construção

- Na caixa de entrada digitar a equação da elipse:

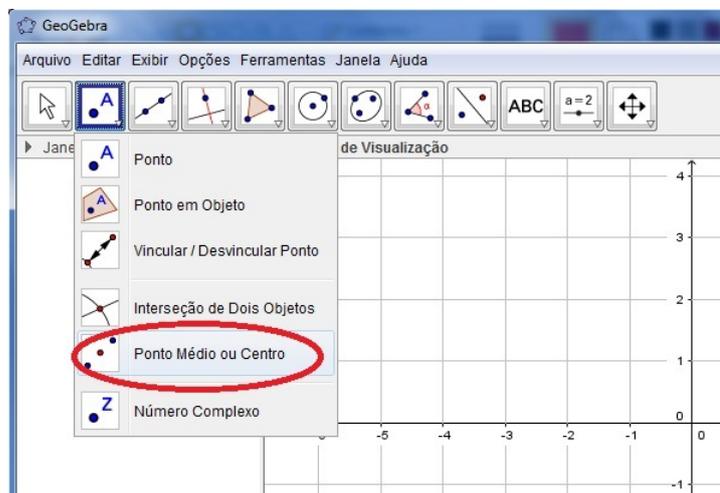


- Ao clicar em enter, a elipse deverá ser desenhada pelo software na janela de visualização.

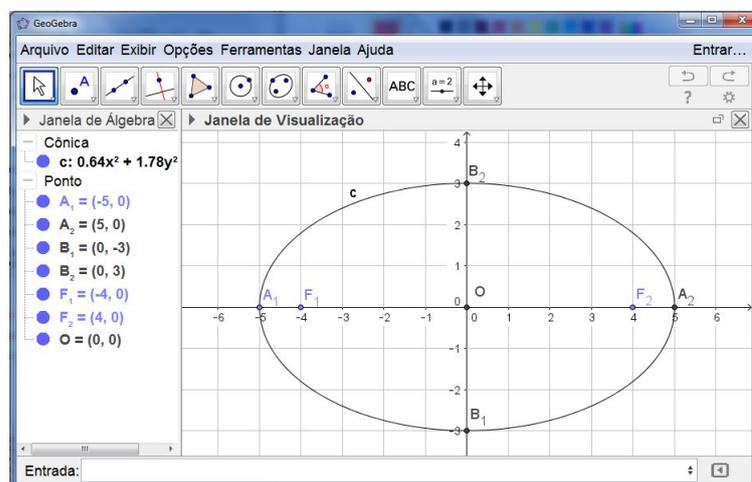


- Para marcar os pontos notáveis da elipse vamos selecionar novamente, no menu de ferramentas, a função ponto: 
- Marcamos as extremidades do eixo maior (A_1 e A_2) e do eixo menor (B_1 e B_2), renomeando os pontos.
- Pelo desenho obtido ou pela equação dada, temos que $a = 5$ e $b = 3$. Calculemos, então, a medida do semieixo focal para depois marcar os focos da elipse: $a^2 = b^2 + c^2 \implies 25 = 9 + c^2 \implies c = 4$

- Assim, basta marcar no desenho os vértices F_1 e F_2 , renomeando-os depois de marcá-los.
- O centro O da elipse pode ser marcado utilizando-se a função *ponto médio* ou *centro*.



- Com a ferramenta selecionada pode-se clicar nas extremidades A_1 e A_2 do eixo maior ou nas extremidades B_1 e B_2 do eixo menor e o centro da elipse, na representação de ponto médio, será marcado. Ou simplesmente clica-se sobre a elipse e o centro será marcado da mesma maneira.
- Renomei-o como O .



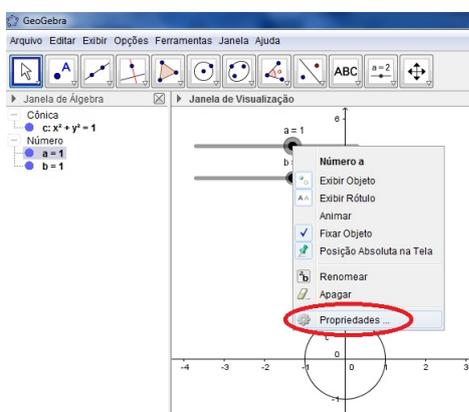
Nesse ponto pode-se observar que o objetivo da atividade foi cumprido.

Atividade 5. Terceiro método para desenhar uma elipse no GeoGebra

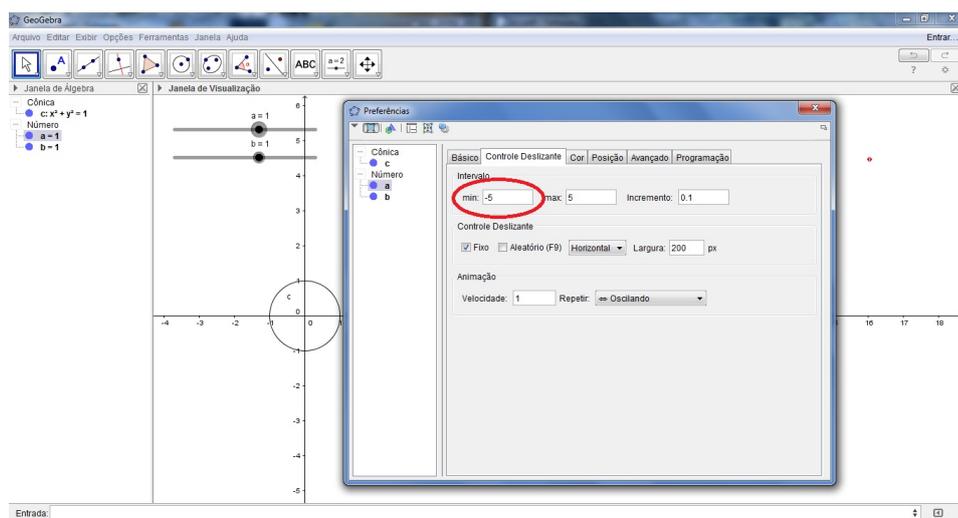
Um outro método interessante para se obter elipses no GeoGebra é criando controles deslizantes.

Procedimentos de construção

- Digitar a equação reduzida da elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ na caixa de entrada do GeoGebra, que será escrita como: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
- Clicando em *Enter* o programa irá pedir para criar controles deslizantes. Concorde.
- Clique com o botão direito do mouse sobre um dos controles deslizantes. Irá aparecer uma caixa onde a opção propriedades deve ser selecionada.



Nova janela será aberta. Na aba controle deslizante, vamos colocar o valor mínimo em zero (uma vez que não existe eixo de elipse com medida negativa) e o máximo podemos modificar para 10.



- Feche a caixa e o controle deslizante já estará modificado.
- Modifique os parâmetros do outro controle deslizante.
- Selecione a ferramenta mover  para poder interagir com os controles deslizantes.
- Mova os controles deslizantes e obtenha a elipse desejada.

Atividade 6. Construção de uma elipse no GeoGebra com eixo maior da cônica sobre o eixo X.

Utilize o primeiro método de construção e desenhe a elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Atividade 7. Construção de uma elipse no GeoGebra com eixo maior da cônica sobre o eixo Y.

Utilize o segundo método de construção e desenhe a elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1$.

Atividade 8. Construção de uma elipse no GeoGebra com equação da elipse na forma geral.

Utilize o terceiro método de construção e desenhe a elipse $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

Atividade 9. Construção de uma elipse no GeoGebra sendo o que o centro da cônica está fora da origem.

Utilize o primeiro método de construção e desenhe a elipse $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$.

5.1.5 Órbitas Planetárias

Um dos grandes provocadores do desenvolvimento da matemática foram problemas envolvendo a astronomia.

Nos tempos helênicos ¹ a observação do céu era de grande importância para seguir direções e fazer localizações durante viagens por terra ou por mar. Mas os estudos e as teorias geradas a partir dos astros e das estrelas fez com que fossem criadas diversas teorias e impasses. O estudo das órbitas dos planetas foi uma delas. [7]

Em Atenas, na Grécia, Eudoxo (408 a.C - 355 a.C; pai da astronomia) foi discípulo de Platão². A partir de uma proposta de seu mestre, Eudoxo representou, por meio de esferas concêntricas de raios diferentes, as órbitas dos cinco planetas conhecidos na época, além do Sol e da Lua tendo a terra como centro. Esse esquema, segundo [7], permaneceu em vigor durante quase 2000 anos (figura 76).

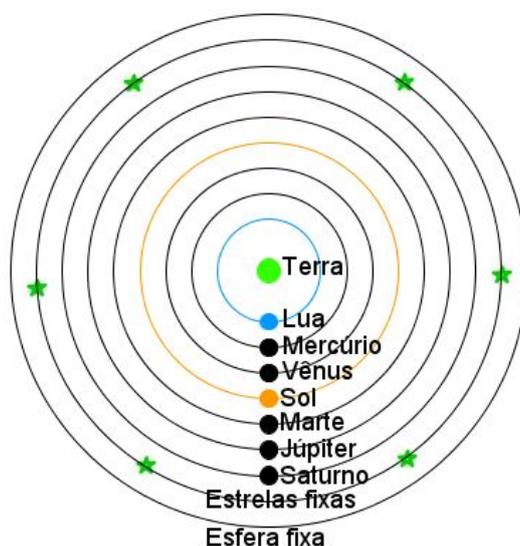


Figura 76: Sistema solar representado por circunferências concêntricas.

Toda obra de Eudoxo se perdeu. Segundo Arquimedes, o esquema anterior não foi o único. Eudoxo teria visto que por uma combinação de movimentos circulares, os astros descreveriam seus movimentos sobre órbitas curvas chamadas hippopedes que é uma curva que se assemelha a um oito traçado sobre uma esfera. [7](figura 77)

No sec. XVI, o modelo de Copérnico, heliocêntrico, colocava o Sol como astro central e a Terra e os demais planetas girariam em torno dele em órbitas circulares substituiu o modelo geocêntrico (figura78).

1 Período da história da Grécia compreendido entre a morte de Alexandre o Grande em 323 a.C.e a anexação da península grega e ilhas por Roma em 146 a.C.

2 Platão (428a.C – 348 a.C. – Atenas, Grécia - discípulo de Sócrates).

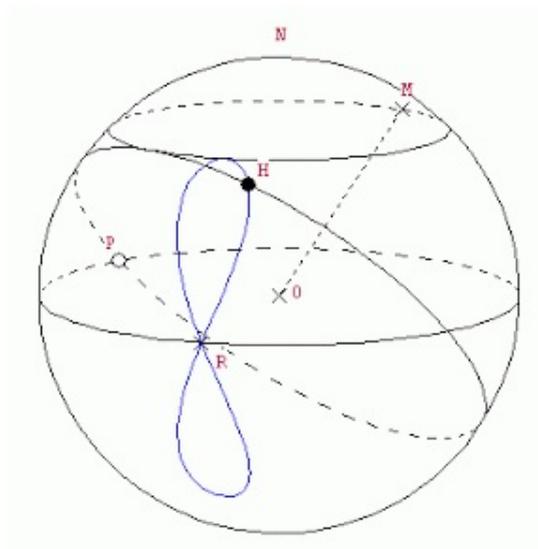


Figura 77: Híppopede descrita pelo movimento da Terra em volta do Sol.

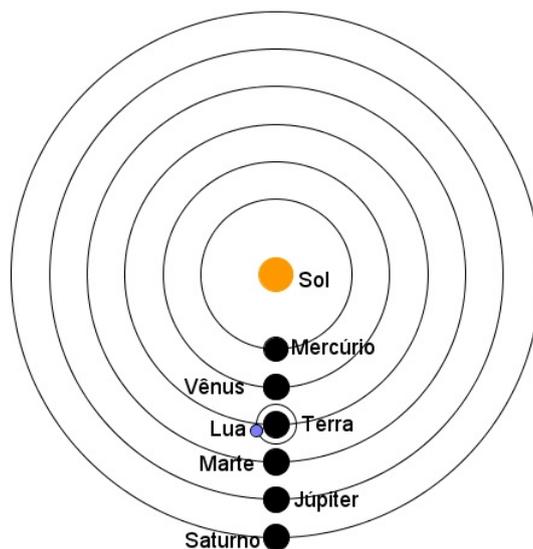


Figura 78: Modelo heliocêntrico de Copérnico.

No século XVII era uma heresia religiosa sugerir que os planetas giravam ao redor do Sol e não da Terra. Em 1600, Giordano Bruno, um defensor do sistema heliocêntrico de Copérnico e um religioso herético em geral, foi julgado pela Inquisição e queimado na fogueira.

Mesmo o grande Galileu, que era amigo do Papa, foi preso, julgado pela Inquisição, e obrigado a renunciar publicamente suas crenças.

Anos após a morte de Copérnico, Tycho Brahe, um astrônomo dinamarquês, com um observatório muito bem equipado, observou por cerca de 20 anos o movimento dos planetas.

Esses dados foram tabelados e utilizados com base do trabalho de Kepler (sec XVII), que era seu discípulo. Após a morte de Tycho Brahe, Kepler estudou os dados deixados por seu mestre durante 17 anos, concebendo as três leis sobre o movimento dos planetas, dando origem à Mecânica Celeste e propondo novo modelo para o sistema solar (figura79) onde os planetas se movem em órbitas elípticas .

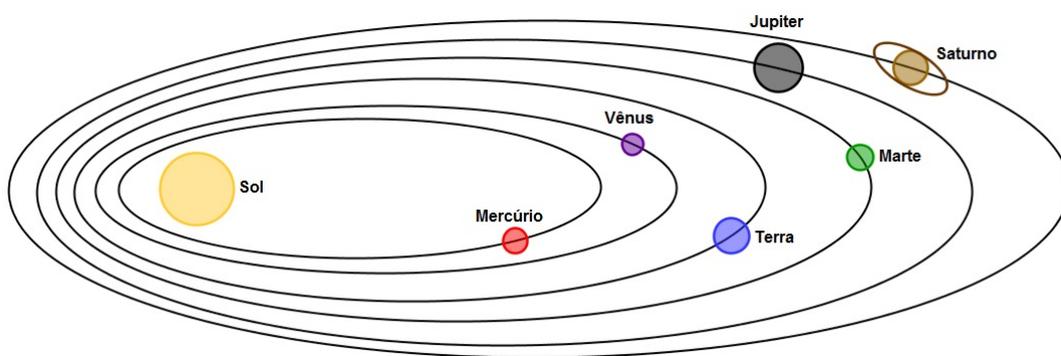


Figura 79: Modelo atual do sistema solar.

No novo modelo o Sol fica posicionado em um dos focos da elipse (figura80).

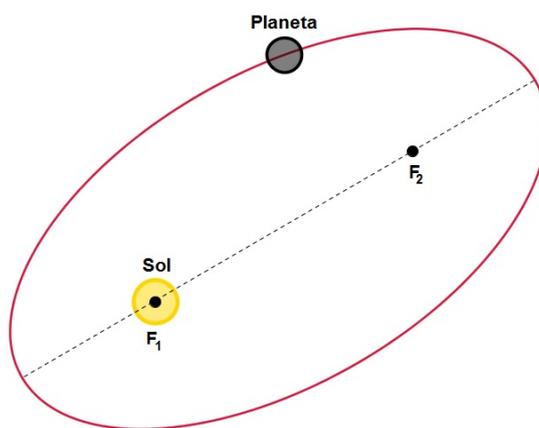


Figura 80: O Sol fica em um dos focos da elipse.

Segundo [4] planetas e asteróides, em geral, tem órbitas com baixa excentricidade. Veja tabela1:

Tabela 1: Excentricidades de planetas

Astros Celestes	Excentricidade
Mercúrio	0,2056
Vênus	0,0068
Terra	0,0167
Marte	0,0930
Júpiter	0,0480
Saturno	0,0560
Urano	0,0460
Netuno	0,0097
Plutão	0,2460
Lua	0,0549
Cometa Tempel 2	0,5200
Cometa Churyumov-Geracimenko	0,6300
Cometa Giacobini-Zinner	0,7100
Cometa Enke	0,8500
Asteróides	0,0500 a 0,5000
Sedna (planetóide)	0,8600

Para que se tenha a verdadeira dimensão das excentricidades das órbitas elípticas dos astros celestes, observemos a figura 81.

É curioso que as órbitas elípticas fazem com que os planetas não tenham velocidade constante. A segunda lei de Kepler prova que a velocidade de translação do planeta nas proximidades do Sol (periélio) é maior do que em pontos mais afastados (afélio).

Lembremos também que os planetas descrevem órbitas elípticas em torno de estrelas (do Sol no caso da Terra). Satélites naturais, como a Lua, descrevem órbitas elípticas em torno dos planetas. Já os satélites artificiais descrevem órbitas circulares em torno dos planetas, por serem colocados em regiões onde prevalece apenas o vácuo.

Atividade 10. Desenho de órbitas

Para a realização da atividade será necessário uma folha de papel quadriculado ou papel milimetrado de tamanho A4. Havendo a possibilidade, a utilização do software GeoGebra facilita a realização da atividade.

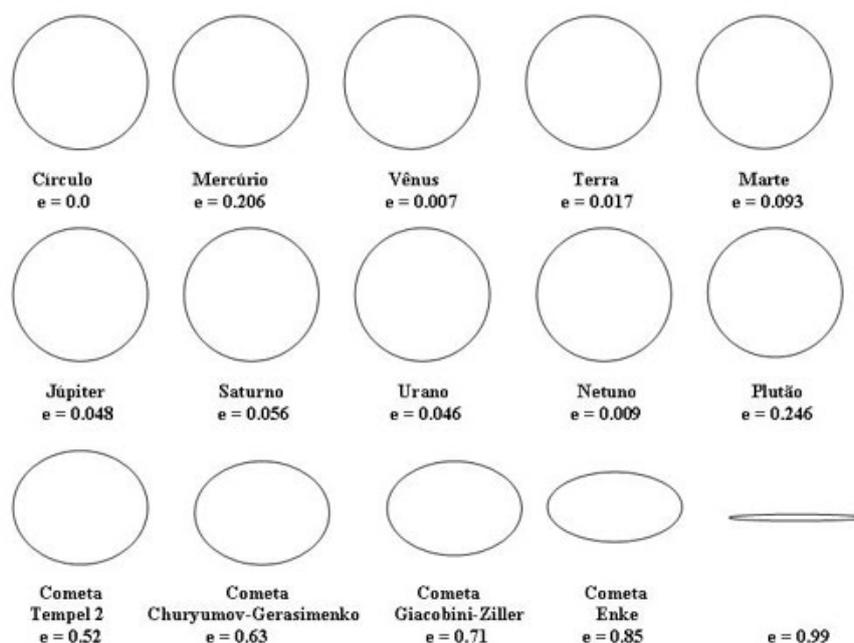


Figura 81: Representação gráfica das órbitas de alguns astros.

Procedimentos:

- Observando a tabela de excentricidades, deverão ser selecionados 4 astros celestes com excentricidades que não sejam muito próximas.
- Para podermos comparar as excentricidades das órbitas escolhidas, vamos fixar um comprimento para o eixo maior da elipse (2.4) em 6 cm, por exemplo. Esses eixos devem ser desenhados na folha de papel quadriculado (figura 82) e em cada eixo deve ser marcado seu centro O .
- A partir das excentricidades escolhidas e da medida estipulada para o eixo maior (6cm), calcular a medida da semidistância focal c utilizando $e = \frac{c}{a}$.
- Marcar os focos no desenho do papel quadriculado. As distâncias focais devem ser marcadas em ordem decrescente.
- Calcular a medida do semieixo menor b utilizando $a^2 = b^2 + c^2$.
- Desenhar o eixo menor de cada órbita.
- Ligar as extremidades dos eixos desenhados para obter as órbitas.

Responder:

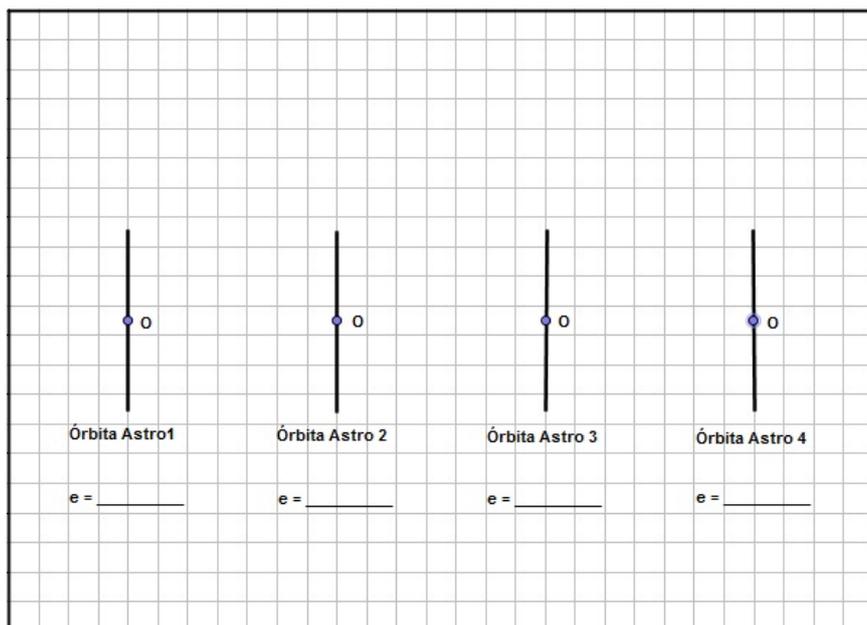


Figura 82: Representação gráfica das órbitas de alguns astros.

- O que acontece com os focos das elipses quando a excentricidade aumenta? Se distanciam? Se aproximam?
- O que acontece com as elipses quando a excentricidade aumenta? Ficam mais achatada? Ficam menos achatadas?
- Mantendo-se a medida do eixo maior, o que acontece com o eixo menor quando a excentricidade da elipse aumenta?
- O que aconteceria com o eixo maior das elipses se tivéssemos estabelecido uma dimensão para o eixo menor? Aumentando-se a excentricidade o eixo maior aumentaria ou diminuiria?

Em programa de geometria dinâmica, poderíamos propor aos estudantes que desenharem as órbitas dos 4 astros celestes sobre o mesmo eixo maior da elipse e em seguida respondessem às mesmas questões.

5.1.6 A elipse na moda

Em certo dia de 2013 durante uma aula de geometria, após pequena explanação, ouvi uma voz de menina que disse: “Nada contra você professor, mas essas coisas de

geometria são muito difíceis. Por isso quando fizer faculdade vou escolher um curso que não tenha matemática.” Respondi com outra pergunta: “Puxa, acho que vai ser difícil você se ver livre dela (da matemática). Mas vamos lá. O que você pretende cursar?” Toda entusiasmada ela respondeu: “Moda”. Então, mais entusiasmado que ela eu respondi: “Se é o que pretende, deve se dedicar a tudo que te for proposto durante o curso, goste ou não (já sabendo o que ela encontraria). Depois que você começar o curso a gente pode voltar a conversar. Certo?”

Um ano inteiro se passou e inesperadamente no início de 2015 recebi a visita daquela menina, agora, mais amadurecida pelo tempo, com ideias novas e discurso diferente.

“Professor, não consegui! É, não consegui me livrar da matemática. É uma das matérias com o maior número de aulas. Mas estou me dedicando. Nem parece mais tão chata!”

Como dissemos no início deste trabalho, a matemática está em todos os ramos das atividades humanas. Até na moda.

Vamos supor que essa mesma garota vá fazer um molde para uma manga de camisa. Vamos supor também que o modelo escolhido tenha um formato de tronco de cilindro cuja secção é uma elipse. Como fazer o molde? Quais medidas serão utilizadas na tarefa?

Baseados nos procedimentos de [23] vamos primeiramente visualizar o produto final: A manga da camisa, figura 83.

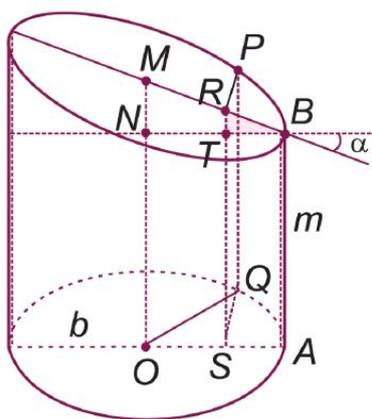


Figura 83: Tronco de cilindro.

A secção elíptica tem uma certa inclinação em relação à base, que tomamos por α . A superfície lateral do cilindro tem um comprimento igual ao da circunferência do braço da camisa e cujo raio está representado por b que também é a medida do semieixo menor da elipse. Para obter a medida b precisamos dividir o comprimento da circunferência por 2π .

$$C = 2\pi r \implies C = 2\pi b \implies \boxed{\frac{C}{2\pi} = b}$$

Para determinar o ângulo α vamos tomar os triângulos semelhantes BTR e BNM .

$$\text{Assim, } \cos\alpha = \frac{TB}{RB} \text{ e } \cos\alpha = \frac{NB}{MB}. \text{ Portanto } \boxed{\alpha = \arccos \frac{NB}{MB}}$$

Pelas identidades trigonométricas, temos que:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha \text{ e } \sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha. \text{ Portanto } \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{MB^2}{NB^2}.$$

$$\text{Assim: } \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{MB^2}{NB^2} - 1 \implies \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{MB^2 - NB^2}{NB^2} \implies \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{MB^2 - NB^2}{NB^2}$$

Como o triângulo em questão é retângulo, temos que: $MB^2 - NB^2 = MN^2$.

$$\text{Então } \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{MN^2}{NB^2} \implies \operatorname{tg}\alpha = \frac{MN}{NB}$$

O semieixo menor da elipse é $OA = b$ enquanto o semieixo maior da elipse é $MB = a$. Como na elipse a relação entre os semieixos e a distância focal é $a^2 = b^2 + c^2$, podemos escrever que:

$MB^2 = NB^2 + c^2 \implies c^2 = MB^2 - NB^2$, sendo que c a semidistância focal da elipse (secção do cilindro).

A tangente de α é a mesma para os triângulos BTR e BNM , portanto,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{TR}{TB} \implies TR = \operatorname{tg}\alpha \cdot TB \implies TR = \operatorname{tg}\alpha \cdot (NB - NT)$$

Substituindo os valores de $\operatorname{tg}\alpha$ e NB , temos:

$$TR = \frac{MN}{NB} \cdot (b - NT) \quad (5.1)$$

Para cada ponto P da secção elíptica, podemos calcular sua altura até a base circular do cilindro, tomada por y . O pé da altura chamaremos de Q . Um seguimento de reta perpendicular ao semieixo maior intercepta-o em S , dando origem ao triângulo OSQ retângulo em S . Então:

$$\cos\widehat{S}OQ = \frac{OS}{OQ} \implies OS = \cos\widehat{S}OQ \cdot OQ.$$

Mas se $OQ = b$ e $OS = NT$ e tomando o ângulo $S\hat{O}Q$ por β , substituindo-se os valores de $tg\alpha$ e NB , temos:

$$NT = \cos\beta \cdot b \quad (5.2)$$

Substituindo 5.2 em 5.1 obtemos:

$$TR = \frac{MN}{NB} \cdot (b - b \cdot \cos\beta) \implies TR = \frac{MN}{NB} \cdot b(1 - \cos\beta)$$

Como $NB = b$, podemos simplificar. Então:

$$TR = MN \cdot (1 - \cos\beta).$$

Podemos concluir que a altura y que P se encontra é dada por:

$$y = QP = SR = ST + TR = m + MN \cdot (1 - \cos\beta) \implies \boxed{y = m + MN - MN \cdot \cos\beta}$$

O valor de y encontrado está em função de $\cos\beta$, ou seja, secção elíptica da manga da camisa se planificada corresponderá a uma cossenóide como apresentado na figura 84.

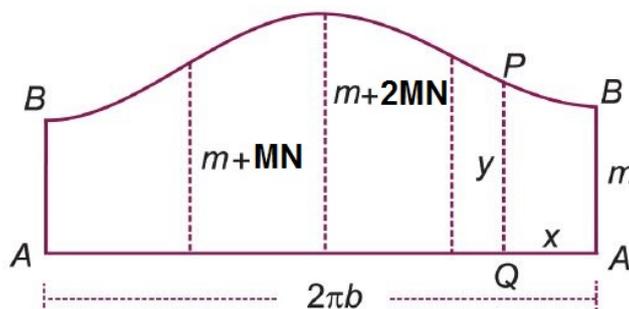


Figura 84: Manga da camisa planificada

De acordo com [23] a planificação do tronco de cilindro pode ser obtida com um modelo do sólido em madeira, molhado com tinta e movimentado sobre uma superfície. Se feito sobre papel obtém-se o molde para corte do tecido.

Atividade 11. Construção do gráfico da função cosseno e exploração das transformações sofridas no gráfico a partir de alterações na função.

A princípio essa atividade foi idealizada para a observação das transformações gráficas que podem a partir de alterações realizadas na função. Mas além disso, é importante verificar e se conscientizar de que os conteúdos matemáticos não estão isolados

e compartimentados como nos livros didáticos. Esses conteúdos podem ser conectados de modo a se “completarem”, se “conversarem” e nos possibilitar a resolução de problemas das mais diversas naturezas.

Procedimentos da atividade:

- Na caixa de entrada do GeoGebra digite a função $y = \cos x$ (digitar: $y = \cos(x)$)
- Na caixa de entrada do GeoGebra digite a função $y = 3 \cdot \cos x$
- Com o botão direito do mouse clique sobre o gráfico da segunda função digitada ou sobre a equação na janela de álgebra e selecione a opção propriedades. Na aba cor, escolha uma cor diferente da utilizada no gráfico da primeira função e feche a caixa. Note que a equação da janela de álgebra também muda de cor.
- Na caixa de entrada do GeoGebra digite a função $y = 5 + 3 \cdot \cos x$.

Agora responda:

- a) O que aconteceu com o gráfico de $y = \cos x$, qual foi a transformação sofrida, quando $\cos x$ foi multiplicado por 3?
- b) O que aconteceu com o gráfico de $y = 3 \cdot \cos x$, qual foi a transformação sofrida, quando foi adicionado 5 à função?
- c) Quais transformações sofrerá o gráfico da função $y = \cos \beta$ quando transformada na função $y = MN - MN \cdot \cos(m \cdot \beta)$ encontrada na planificação da secção elíptica da manga da camisa?

Atividade 12. Planificação da lateral do tronco de cilindro e confecção de um molde.

Para essa atividade vamos precisar de:

- Um cilindro. Pode ser um cilindro produzido com isopor, sabão, bambú, cabo de vassoura ou qualquer outro material possível.
- Fita adesiva ou fita crepe.
- Estilete.
- De posse do cilindro, deve-se cortá-lo (seccioná-lo) de forma a obter um tronco de cilindro.
- envolver o tronco de cilindro com fita adesiva ou fita crepe de modo que a lateral do sólido fique perfeitamente envolvida.

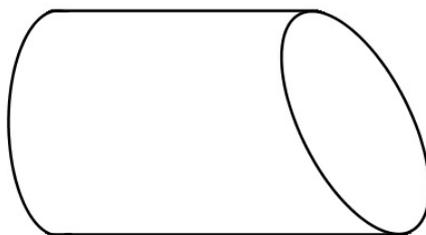


Figura 85: Elipse como secção do cilindro.

- Com a ajuda do estilete, cortar a fita adesiva que envolve a lateral do tronco de cilindro perpendicularmente à base e retirá-la com cuidado para não danificá-la.
- A planificação proposta foi obtida.

5.1.7 Dentista, Sala do sussuro e outros bichos

Ir ao dentista fazer uma simples limpeza nos dentes ou se submeter a um procedimento de litotripicia para quebrar pedras dos rins não nos parece nada matemático. Porém, se não fosse a aplicação da propriedade refletora da elipse esses procedimentos poderiam ser um pouco mais complicados.

Segundo [24] essa propriedade é utilizada na luminária do dentista, pois em sua parte interna há um espelho refletor em forma de arco de elipse. Falamos daquela luminária que o dentista movimenta com as mãos para posicioná-la dentro da nossa boca. Esse espelho elíptico faz com que os raios luminosos direcionam-se para um único ponto, mais precisamente para um dos focos da elipse enquanto o outro é ocupado pela fonte luminosa. É por isso que o profissional consegue direcionar a iluminação dentro da boca do paciente, especificamente no dente a ser tratado.

Ainda por [?], utilizar a elipse nesse caso tem duas vantagens: a primeira é a concentração da luminosidade exatamente no local a ser tratado e a segunda é de que essa concentração dos raios luminoso num único ponto não causa desconforto aos olhos do paciente durante o tratamento dentário.

Como citado anteriormente a propriedade refletora também é utilizada em equipamentos médicos durante o processo de eliminação (fragmentação) de cálculos renais. Para tal, o paciente é posicionado em um equipamento que tem formato de elipsóide

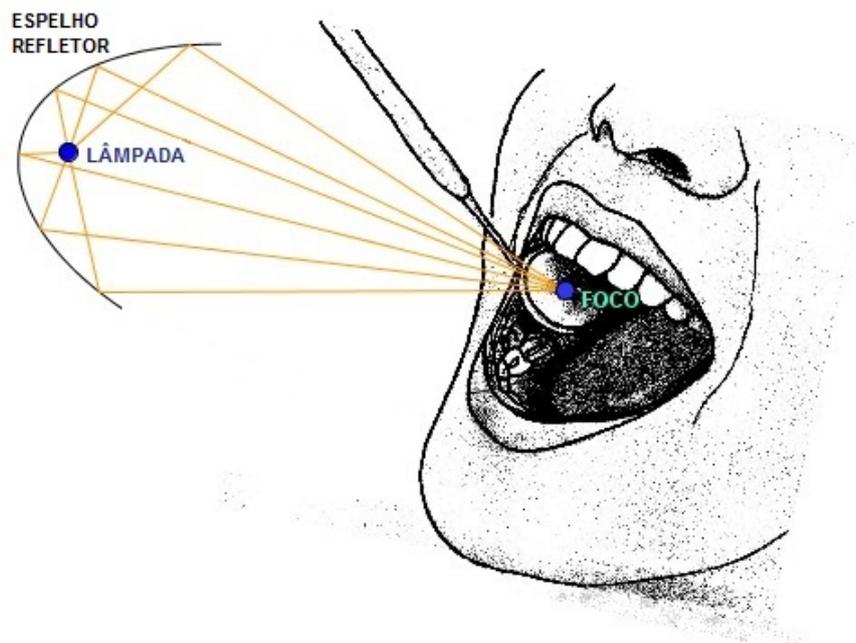


Figura 86: Espelho elíptico da luminária do dentista.

³ de onde serão emitidas ondas sonoras de alta frequência (ultrasons). As ondas sonoras são emitidas a partir de um dos focos do elipsóide, enquanto o cálculo renal do paciente é colocado no outro foco do elipsóide.

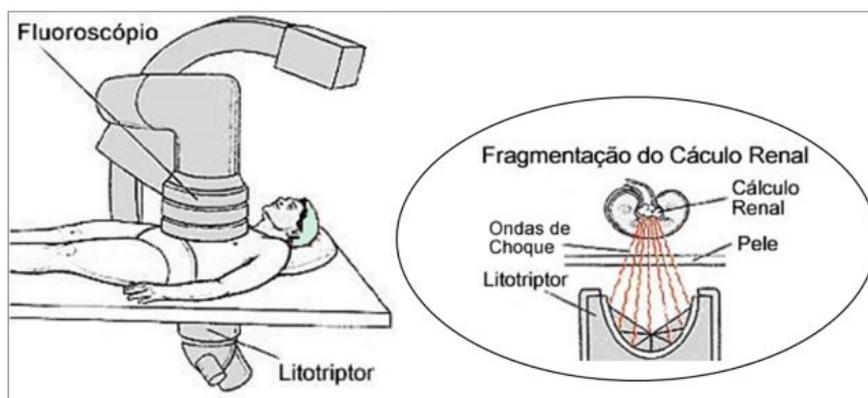


Figura 87: Litotriptor, fonte [34]

De acordo com [34], baseado na propriedade refletora da elipse, qualquer onda sonora ou luminosa que parta de um dos focos da elipse em direção à sua superfície

³ Elipsóide é o sólido de revolução formado pela rotação de uma elipse em torno de seu eixo maior ou em torno de seu eixo menor

será direcionada ao outro foco, percorrendo a mesma distância num mesmo intervalo de tempo, pois a soma das duas distâncias percorridas pelas ondas (foco 1/superfície, superfície/foco 2) é sempre constante independentemente da direção tomada.

Alguns equipamentos utilizados em radioterapia também utilizam o mesmo princípio do litotriptor segundo [24], cujos raios emitidos devem destruir apenas tecidos doentes, não afetando as partes sadias ao redor da enfermidade do organismo tratado.

Outra aplicação da propriedade refletora são as chamadas salas de sussuro. Essas salas são construções elípticas sendo que os focos estão marcados no chão [24]. Quando duas pessoas posicionam-se nos focos marcados, a comunicação entre elas pode ser estabelecida mesmo se falarem com entonação baixa, inaudível às outras pessoas presentes no ambiente. Como as ondas sonoras percorrem a mesma distância no mesmo intervalo de tempo independente da direção tomada, o som chega ao receptor de forma ampliada, proporcionando ouvir o que foi dito, naturalmente.

É o caso da Catedral de S. Paulo (Londres) e do edifício do Capitólio em Washington, D. C. Nesses ambientes um desavisado pode ter sua conversa ouvida ou um segredo revelado por não conhecer as propriedades acústicas do ambiente onde está. O presidente John Quincy Adams utilizava esse recurso para ouvir as conversas que aconteciam do outro lado da sala.

A gravura da figura 88 data do século *XVII* de acordo com [13] e retrata os espelhos incendiários de Arquimedes desenvolvidos em 214 a.C., queimando navios romanos em Siracusa. Mas se Arquimedes projetara tais espelhos em 214 a.C., significa que as propriedades reflexivas das cônicas são conhecidas há mais de dois mil anos.

Atividade 13. Mesa de bilhar elíptica (figura 89, fonte: [40]).

Pesquisar na internet, através do computador ou do celular sobre a mesa de bilhar elíptica.

Em seguida responder:

- a) Há alguma curiosidade sobre esse tipo de mesa?
- b) Qual a propriedade da elipse utilizada nessa situação?
- c) O que há no lugar dos focos da elipse?
- d) A bola sempre cairá na caçapa mesmo colocada em qualquer ponto da mesa?

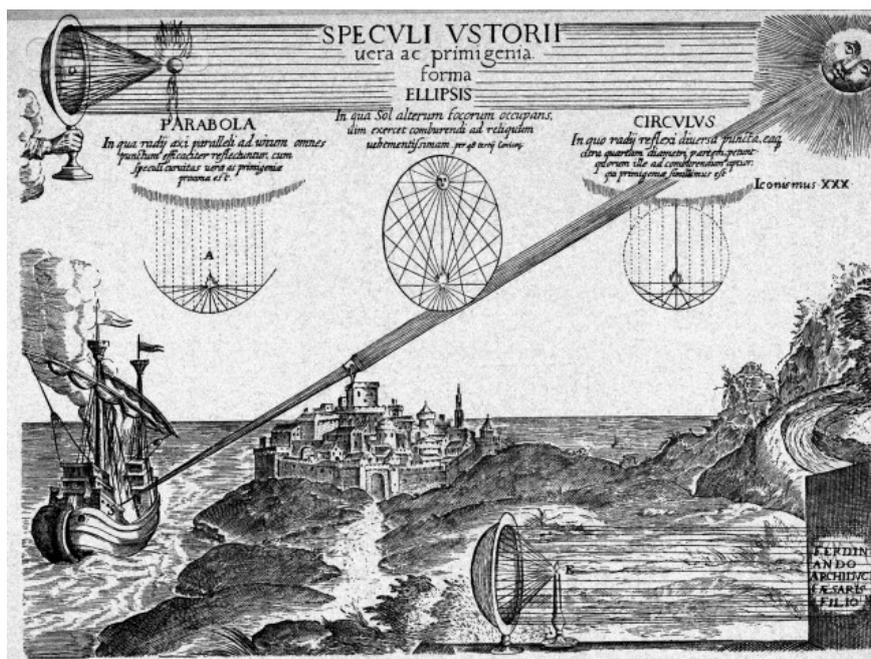


Figura 88: Gravura dos espelhos incendiários de Arquimedes de Athanasius Kircher.



Figura 89: Mesa de bilhar elíptica.

Atividade 14. Tigela elíptica.

A tigela elíptica (ou um pirex oval) tem as mesmas propriedades da mesa elíptica e pode ser utilizada na observação da propriedade refletora da elipse.

Procedimentos da atividade:

- Assista a um vídeo sobre a mesa elíptica no Youtube.com.
- Pegue uma tigela com formato elíptico, meça os eixos maior e menor.
- Calcule os focos e marque-os com caneta apropriada na tigela.
- Encha a tigela com água

- Com o dedo cause uma perturbação na água na posição de um dos focos. Uma bola de gude jogada perpendicularmente sobre um dos focos causa o mesmo efeito.
- Repita a operação de perturbar a água quantas vezes forem necessárias para verificar para onde a perturbação da água se dirige.

Agora responda:

- a) Qual a direção seguida pela perturbação da água causada em um dos focos da elipse?
- b) A perturbação da água em qualquer ponto da tigela causa o mesmo efeito?
- c) Enuncie a propriedade refletora da elipse.

5.1.8 *Arquitetura*

A arquitetura é outro ramo da atividade humana onde as elipses são amplamente utilizadas. Janelas, grandes jardins e praças têm essa forma geométrica. Temos como exemplo a praça de São Pedro na cidade do Vaticano (figura 90), o Jardim Botânico Nacional de Gales (figura 91), o Coliseu em Roma (figura 92) e a ponte Santa Trìnica em Florença (figura 93).



Figura 90: Praça de São Pedro(Roma) com formato elíptico e focos bem marcados. [21]



Figura 91: Jardim Botânico Nacional de Gales(Reino Unido). [21]

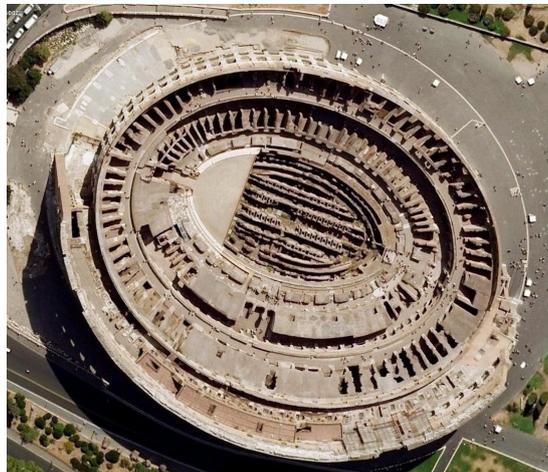


Figura 92: Coliseu(Roma)-A planta baixa é uma elipse cujo eixo maior tinha 188m e o menos 156m. [21]



Figura 93: Ponte Santa Trìnica em Florença: três arcos elípticos [1].

No caso da utilização de arcos elípticos na construção de pontes e estruturas subter-
râneas como túneis e bueiros, em [36] se explica:

“A elipse pode ser utilizada em estruturas porque o arco elíptico suporta ser carregado com carga distribuída uniformemente na vertical ao longo do eixo horizontal por não apresentar esforços cortantes nem momentos fletores ao longo do arco. Apenas esforço normal.”

Atividade 15. Estruturas arquitetônicas

- Pesquisar imagens de estruturas elípticas e transportar uma delas para o GeoGebra utilizando a ferramenta “Inserir figura” .
- Com a figura transportada para a janela de visualização do GeoGebra, construir uma elipse, posicioná-la sobre a figura e verificar a proporção entre os eixos maior e menor.
- Calcular a excentricidade da elipse da estrutura escolhida.
- Pesquisar outras obras arquitetônicas que contenham elipses, como estádios esportivos, por exemplo. Imprimir as figuras, fazer as medições necessárias e calcular as excentricidades. As medições também podem ser feitas transportando-se as figuras para o GeoGebra. Verificar se as elipses utilizadas nessas estruturas seguem um mesmo “padrão”.

5.1.9 Engrenagens Elípticas



Figura 94: Engrenagens elípticas com eixos nos centros. Fonte: [14].

De acordo com [13] duas engrenagens elípticas podem ser conectadas de modo que seus eixos estejam situados em seus centros (figuras 94 e 95) ou em um de seus focos (figura 96).

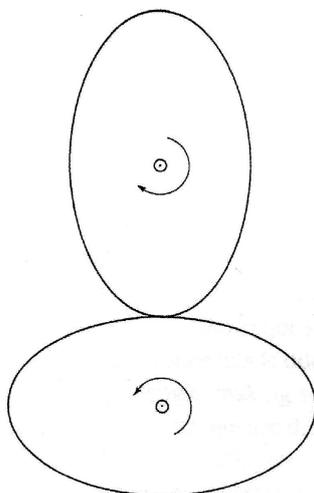


Figura 95: Engrenagens elípticas com eixos nos centros. Fonte: [13].

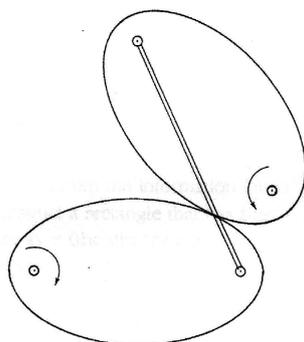


Figura 96: Engrenagens elípticas com eixos nos focos. Fonte: [13].

Nas engrenagens do primeiro tipo (que giram sobre seus centros) a razão entre as velocidades de rotação muda continuamente, bem como a razão entre as dimensões dos eixos maior e menor. Se a engrenagem mestre (a que conduz) tem velocidade constante então a engrenagem escrava (a que é conduzida) terá sua velocidade alterada continuamente, alternando em acelerar e desacelerar duas vezes durante cada volta.

Já as engrenagens do segundo tipo (que giram sobre seus focos) enquanto a engrenagem mestre mantém velocidade constante, a engrenagem escrava mudará continua-

mente de velocidade durante cada volta. Neste tipo de conexão entre as engrenagens, deve haver um braço de ligação ou uma mola de tensão entre os focos que não estão conectados aos eixos garantindo que ambas as engrenagens permaneçam em contato. A distância entre esses focos que não possuem eixos permanece sempre constante e é igual ao comprimento do eixo maior da elipse, considerando-se que ambas tenham o mesmo tamanho.

Para se ter uma ideia, a razão entre os eixos das elipses na segunda disposição vai de 10:1 em um ponto a 1:10 na metade da próxima volta, fazendo com que a velocidade da engrenagem escrava varie numa razão de 100:1 de acordo com [13].

Medidores de vazão com engrenagens elípticas surgiram na Alemanha em 1932. A precisão de equipamentos equipados com essas engrenagens é muito grande. Por isso são utilizados na medição da vazão de um líquido ou de um gás, segundo [14]. Bombas de gasolina, álcool, GNV ou diesel nos postos de combustíveis, são equipadas com essas engrenagens para garantir ao fornecedor e ao consumidor que a quantidade de combustível que está sendo vendida ou comprada esteja certa, não trazendo prejuízo para nenhuma das partes.

São utilizados ainda nos hidrômetros de nossas residências para medir precisamente o consumo de água. São as engrenagens que provocam o deslocamento do líquido (figura 97).

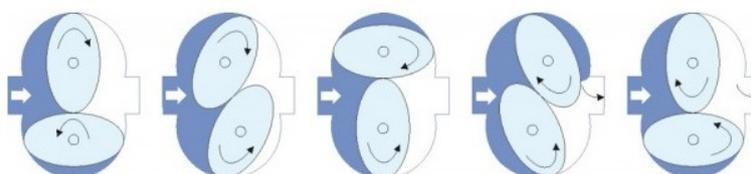


Figura 97: Deslocamento de líquido feito por engrenagens elípticas. Fonte: [14].

As vantagens de se utilizar esses equipamentos, ainda de acordo com [14] são: Alta confiabilidade, longa vida útil de trabalho, fácil manutenção, suporta alta temperatura e pressão e gera baixa perda de carga.

Atividade 16. Pesquisa sobre engrenagens elípticas

No texto anterior foram informadas algumas das utilizações das engrenagens elípticas. Mas serão as únicas?

Procedimentos:

- a) Pesquisar outras aplicações das engrenagens elípticas. Poder-se-á perceber que são vulgarmente chamadas de engrenagens ovais.
- b) Pesquisar o que é um multiplicador de torque em http://www.gedore.com.br/marketing/catalogo/KDowidat_2012.pdf
- c) Verificar qual é a função das engrenagens elípticas nesse instrumento.
- d) Pesquisar em quantas vezes pode-se aumentar o torque utilizando-se das engrenagens elípticas.

5.2 INVERSÕES - APLICAÇÕES E ATIVIDADES

5.2.1 *Imagens formadas por inversão*

Um fato importante no estudo das inversões geométricas é o reconhecimento dessas inversões, o entendimento de como ela se dá e o entendimento dos resultados obtidos (imagens) após o processo.

Espelhos esféricos são comuns e são utilizados em estabelecimentos comerciais e estacionamentos para proporcionar uma visão abrangente mas reduzida (menor) de um grande espaço que não seríamos capazes de acompanhar num único olhar.(figura 98)



Figura 98: Imagem abrangente formada num espelho esférico. Fonte: [1].



Figura 99: Superfície refletora em forma de feijão - Chicado. Fonte: [38].

O grande feijão de Chicago é uma atração turística que atua como um grande espelho tridimensional ao ar livre (figura 99 e 100).



Figura 100: Superfície refletora em forma de feijão - Chicado. Fonte: [32].

É interessante visualizar como a paisagem local se deforma na superfície onde a imagem formada se encontra. No caso citado, é como se a imagem refletida/invertida fosse uma continuação interna do ambiente externo.

Atividade 17. Fotografia e inversão .

Esta é uma atividade de observação. Como não seria possível produzir imagens inversas em um superfícies bidimensionais, utilizaremos superfícies como as apresentadas anteriormente para que os alunos possam absorver ideias e até conceitos a respeito do assunto.

- O primeiro passo consiste em ter em mãos uma superfície refletora e um celular ou máquina fotográfica para captar as imagens. A superfície refletora que pode

ser uma bola de árvore de natal, um balão de festas prateado, um recipiente de cozinha feito em aço inoxidável (tigela arredondadas de preferência), uma colher grande de metal que reflita imagens com perfeição, etc.

- Com a câmera fotográfica e o objeto refletor em mãos, deve-se fotografar a imagem do ambiente em que a pessoa está e depois fotografar a imagem do mesmo ambiente, mas dessa vez a imagem registrada deve ser a refletida na superfície refletora que se está utilizando.
- A comparação entre as duas imagens deve ser feita e “diferenças” (transformações) apontadas e anotadas. Por exemplo: Como ficaram as imagens das retas que foram refletidas? Como ficou o perpendicularismo entre as retas das placas que revestem o piso? Como as demais formas do ambiente se “transformaram”? É possível, a partir de uma imagem transformada, desenharmos o ambiente real cuja imagem está refletida na superfície espelhada, sem mesmo conhecê-lo?
- Caso a partir das fotos obtidas não seja possível fazer a observação proposta, tem-se a opção de fazê-la por meio das obras do artista M.C. Escher, citadas na introdução deste trabalho.

Observação: O aluno deve receber informações de que as transformações na elipse ocorrem de forma semelhante às realizadas nas atividades anteriores. Nesta etapa o aluno já adquiriu conhecimento suficiente para seguir em frente, mediante as intervenções realizadas por meio das atividades propostas. Tendo ideia do “produto final” e dos objetivos que deve atingir tudo ficará mais fácil.

5.2.2 *Ponto inverso e software de geometria dinâmica*

Um ponto invertido numa elipse é um novo conceito que deve ser apresentado aos alunos de forma simples para que a compreensão seja praticamente imediata.

Atividade 18. Observando os resultados produzidos na atividade 17 deveremos chamar a atenção de nossos interlocutores quanto as imagens formadas nos objetos refletores.

- **Primeiro questionamento:** Observando a imagem formada no grande feijão ou na superfície refletora de cada aluno, temos a impressão que a imagem nela formada, está dentro ou fora do objeto?

- **Segundo questionamento:** E se o objeto estive do outro lado da superfície” (parte interna do sólido), e nós pudessemos estar lá dentro também, aos nossos olhos, qual seria a posição da imagem formada? Interior ou exterior à superfície?
- A partir das duas perguntas anteriores podemos estabelecer as duas primeiras regras da inversão: Um ponto externo tem inverso interno e vice-versa.
- **Terceiro questionamento:** E se o objeto (o ponto) não estivesse na parte interna ou externa da superfície, mas sim, pertencesse à superfície, onde estaria posicionado a imagem da inversão?
- **Quarto questionamento:** Ao nos olharmos num espelho plano, sabemos/vemos que nossa imagem está à mesma distância do espelho que nós. Portanto, a reflexão em superfícies planas preserva a distância da imagem em relação ao espelho. Será que na inversão em uma superfície arredondada ocorre o mesmo? Será que a imagem se posicionará mais próxima ou mais longe do espelho em relação ao objeto/ambiente refletido?
- Definir inversão de acordo com a definição 4.2.

1º caso de ponto inverso: Inverso em relação a um ponto interno.

Atividade 19. Construção do ponto inverso externo.

Nessa atividade vamos reproduzir os procedimentos utilizados em 4.6.1: Obtenção do ponto inverso de forma geométrica.

Os resultados são obtidos mais facilmente com a utilização de um software de geometria dinâmica dando maior fluidez aos procedimentos e assim tornando a atividade mais dinâmica. Em nosso caso utilizaremos o programa *GeoGebra*[®].

Procedimentos:

- Iniciar o programa GeoGebra.
- Construir uma elipse. Por exemplo, a elipse da atividade 7.
- Selecionar a função “ponto”  e clicar em qualquer local dentro da elipse. Renomear o ponto marcado como P.

- Seleccionar a função “ponto médio ou centro”  na aba do segundo botão do menu de ferramentas e clicar sobre a elipse. Renomear o ponto marcado como O .
- Seleccionar a função “semirreta” na aba do terceiro botão  e em seguida clique no ponto O e depois em P .
- Seleccionar a função “interseção de dois objetos”  na aba do segundo botão. Em seguida clicar na semirreta e depois na elipse. Renomear o ponto obtido como Q .
- Na aba do quarto botão clicar em “reta tangente”  e depois clicar na elipse e no ponto Q .
- Na mesma aba clicar em “reta paralela”  e em seguida clicar na reta b e no ponto P .
- Seleccionar novamente a função “interseção de dois objetos”  e depois clique na reta d e na elipse. Foram marcados os pontos A e B .
- Seleccionar novamente a função “reta tangente” , clicando em seguida na elipse e em A e depois na elipse e em B . As retas tangentes se interceptarão no ponto sobre a semirreta a .
- Seleccionar a função “interseção de dois objetos”  e em seguida clicar sobre as duas retas tangentes e e f . Renomear este ponto obtido como P' .

O ponto P' é o ponto inverso de P . Porém o desenho tem mais objetos do que o desejado. Vamos removê-los, ou melhor, escondê-los.

- Na janela de álgebra existem representações de pontos, retas e semirretas. Os pontos A e B , as retas e a semirreta deverão ser desmarcados clicando-se nos círculos azuis (figura101).

Agora a construção tem somente os pontos importantes. Caso queira, o ponto Q também poderá ser desmarcado.

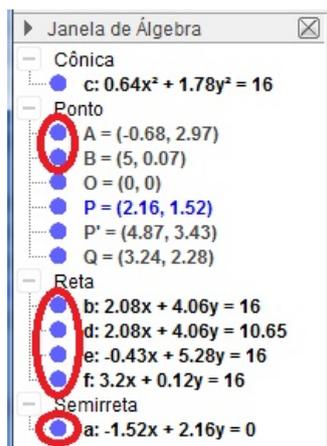


Figura 101: Janela de álgebra do GeoGebra.

- Selecionar a função “mover”  e em seguida clicar sobre o ponto P, deslocando-o dentro da elipse.

Verifique:

- a) O que acontece quando o ponto P é deslocado para perto da elipse, para perto do ponto Q .
- b) O que acontece quando o ponto P é deslocado para perto do centro O da elipse.

Os procedimentos dessa atividade são a base para a realização da atividade 21.

2º caso de ponto inverso: Inverso em relação a um ponto externo.

Atividade 20. Construção do ponto inverso interno.

- Iniciar o programa GeoGebra.
- Construir uma elipse. Por exemplo, a elipse da atividade 7.
- Selecionar a função “ponto”  e clicar em qualquer local fora da elipse. Renomear o ponto marcado como P .
- Selecionar a função “ponto médio ou centro”  na aba do segundo botão do menu de ferramentas e clicar sobre a elipse. Renomear o ponto marcado como O .

- Selecionar a função “semirreta” na aba do terceiro botão  e em seguida clicar no ponto O e depois em P .
- Selecionar a função “interseção de dois objetos”  na aba do segundo botão. Em seguida clicar na semirreta e depois na elipse. Renomear o ponto obtido como Q .
- Na aba do quarto botão clicar em “reta tangente”  e depois clicar na elipse e no ponto P . Serão traçadas duas retas: b e d .
- Selecionar a função “interseção de dois objetos”  na aba do segundo botão. Em seguida clicar na reta b e na elipse e em seguida clicar na reta d e na elipse. Assim, são marcados os pontos B e C .
- Selecionar a função “reta”  e clicar em seguida nos pontos B e C , traçando a reta e .
- Selecionar novamente a função “interseção de dois objetos”  e clicar na reta e e na semirreta a . O ponto marcado deve ser renomeado de P'' .
- Na janela de álgebra desmarque os objetos desnecessários clicando nos círculos azuis das retas b , d e e , da semirreta a e dos pontos A e B .

Verifique:

- a) O que acontece com o ponto P'' quando o ponto P é deslocado para perto da elipse, para perto do ponto Q .
- b) O que acontece com o ponto P'' quando o ponto P é deslocado para longe do ponto Q , ou seja, para longe da elipse.

criação de ferramenta de para obter um ponto inverso externo à elipse

Fazer os procedimentos par obter o ponto inverso uma, duas ou três vezes pode ser prazeroso. Repetir esse procedimento infinitas vezes torna-se cansativo. Por esse motivo, criar uma ferramenta de obtenção automática do ponto inverso acaba por facilitar o trabalho e a análise de resultados quando uma infinidade de pontos devem ser invertidos.

Atividade 21. GeoGebra - Criação de ferramenta para obter um ponto inverso externo à elipse.

Procedimentos

- Realizar a atividade 19.
- Na barra “Menu” clicar em “Ferramentas” e na aba que se abre selecionar a opção “Criar uma Nova Ferramenta” (figura 102).

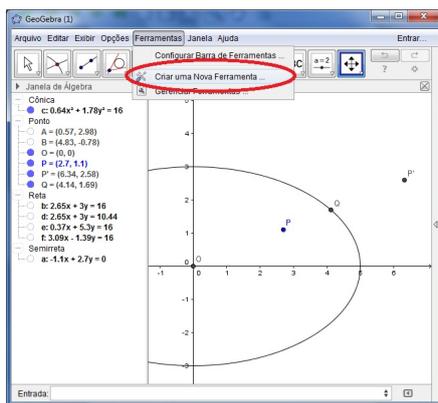


Figura 102: Criação de nova ferramenta no GeoGebra.

- Uma nova caixa com três abas será aberta.

Com a caixa aberta na primeira aba "Objetos finais" deve-se clicar sobre o ponto P' e dentro da caixa aparecerá as referências desse ponto (figura 103).

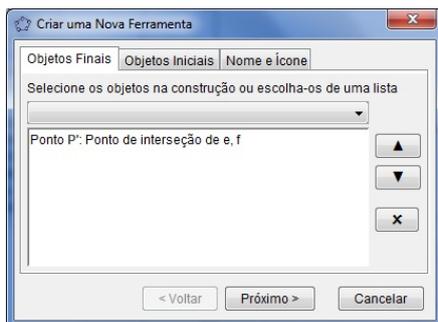


Figura 103: Criação de nova ferramenta no GeoGebra - aba objetos finais.

Clicando na segunda aba “objetos iniciais”, as referências à elipse c e ao ponto P já devem estar marcadas (figura 104).

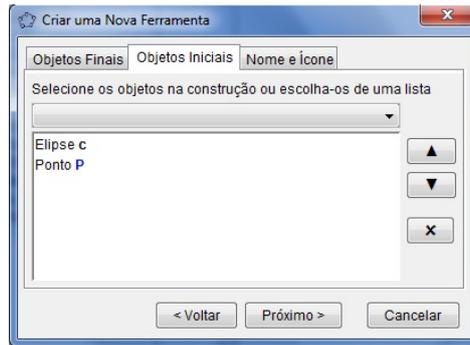


Figura 104: Criação de nova ferramenta no GeoGebra - aba objetos iniciais.

- Clicando na terceira aba “Nome e ícone”, na caixa “Nome da ferramenta”, escrever: Inversão de ponto interno. Na caixa “Ajuda” da ferramenta, escreva: Clicar na elipse e depois no ponto P . O nome do comando será marcado automaticamente. Se quiser que a ferramenta tenha um ícone, pode-se produzir um ícone qualquer para a ferramenta, clicar em ícone e importar o desenho escolhido. Nosso ícone será:  (figura 105).

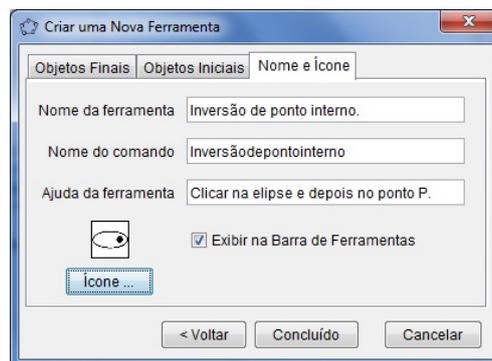


Figura 105: Criação de nova ferramenta no GeoGebra - aba objetos iniciais.

- Clicar em concluído.
- Verificar que na barra de ferramentas foi colocado um novo ícone para sua ferramenta de produzir pontos inversos de um ponto interno à elipse.
- Na barra Menu, clique em “Arquivo”. Em seguida clicar em “Gravar como”. Escolher o local onde vai salvar a atividade. Nomear como “**Ponto inverso**” e então clicar em “Gravar”. A atividade deve ser salva para que a nova ferramenta esteja disponível para utilização posterior.

Atividade 22. Explorando a ferramenta de ponto inverso externo à elipse.

Criada a ferramenta para facilitar a obtenção do ponto inverso de um ponto interno à elipse (vide atividade 21), pode-se explorar esse recurso para fazermos observações dos resultados da inversão.

Procedimentos

- Abrir o GeoGebra.
- Abrir o documento “**Ponto inverso**” criado na atividade 21.
- Na caixa de entrada digitar as equações das elipses: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$ escritas na forma: $x^2/25+y^2/9=1$ e $((x-1)^2)/9+((y+1)^2)/2=1$. Serão criadas duas elipses, sendo que a primeira é interna à segunda.

- Selecionar a ferramenta “Ponto em objeto”  na aba do segundo botão do menu.
- Clicar sobre a elipse interna para criar um ponto A .
- Selecionar a ferramenta “**Ponto inverso**” . Clicar sobre a elipse externa e em seguida no ponto A . Será criado o ponto B .

Caso o ponto B não esteja no seu campo de visão, selecionar a ferramenta “Mover janela”  e selecionar a ferramenta “Reduzir”  e depois clicar na janela de visualização quantas vezes forem necessárias para que se possa ver o ponto B .

- Renomear o ponto A como P e o ponto B como P' .
- Clicar em “mover” . Depois com o cursor do mouse sobre o ponto P' , clicar com o botão direito e na janela que abrirá, selecionar a opção “Habilitar Rastro” (figura 106).
- Continuando, clicar no ponto P com o botão direito do mouse e selecionar “Animar” na janela que se abrirá (figura 107).
- Clicar no Botão Play  que foi colocado pelo GeoGebra no canto inferior esquerdo da janela de visualização.
- Posicionar a animação na tela com as funções “mover”  e reduzir .



Figura 106: Janela de opções do GeoGebra - Habilitar rastro.

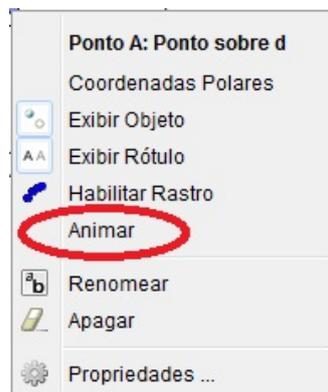


Figura 107: Janela de opções do GeoGebra - Função Animar.

- Observar a formação do inverso da elipse interna em relação à elipse externa (figura 108).

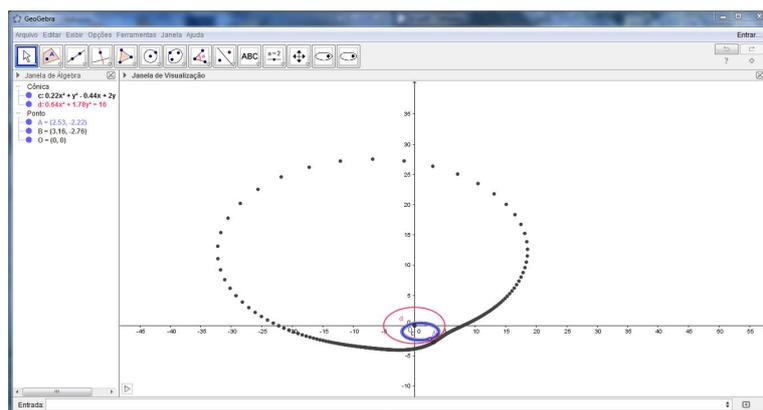


Figura 108: Figura obtida na inversão de uma elipse.

Na figura 108 a elipse azul é o objeto, a elipse vermelha é a elipse inversora e a figura preta é a imagem resultante da inversão do objeto.

- Veja que a velocidade desenvolvida pelo ponto P é constante, mas a velocidade do ponto P' varia constantemente, assim como foi visto em Engrenagens Elípticas 5.1.9.

Pergunta-se:

- a) Em que momento da movimentação de P a velocidade de P' é maior?
- b) Em que momento da movimentação de P a velocidade de P' é menor?
- c) A que se deve a parte da figura invertida que ficou pontilhada?
- d) A figura obtida na inverção é uma elipse?

Atividade 23. GeoGebra - Criação de ferramenta para obter um ponto inverso interno à elipse.

Nessa atividade vamos criar o ponto inverso de outro que está na parte externa na elipse.

Procedimentos

- Iniciar o GeoGebra e abrir a atividade “**Ponto inverso**” (atividade 21) salva anteriormente.

A janela de visualização deve estar em branco pois a intenção é ter duas ferramentas disponíveis na mesma interface. Se a atividade recuperada apresentar objetos desenhados, basta apagá-los.

- Realizar a atividade 20.
- Na barra “Menu” clicar em “Ferramentas” e na aba que se abre selecionar a opção “Criar uma Nova Ferramenta” (como já foi mostrado na figura 102).
- Uma nova caixa com três abas será aberta.

Com a caixa aberta na primeira aba “Objetos finais” deve-se clicar sobre o ponto P'' e dentro da caixa aparecerá as referências desse ponto (como na figura 103).

Clicando na segunda aba “objetos iniciais”, as referências à elipse c e ao ponto P já devem estar marcadas (como na figura 104).

- Clicando na terceira aba “Nome e ícone”, na caixa Nome da ferramenta, escrever: Inversão de ponto externo. Na caixa Ajuda da ferramenta, escrever: Clicar na elipse e depois no ponto P . O nome do comando será marcado automaticamente. Se quiser que a ferramenta tenha um ícone, pode-se produzir um ícone qualquer para a ferramenta, clicar em ícone e importar o desenho escolhido. Nosso ícone será: .
- Clicar em concluído.
- Verificar que na barra de ferramentas foi colocado um novo ícone para a nova ferramenta de produzir pontos inversos de um ponto externo à elipse na mesma aba onde se encontra a primeira ferramenta construída.
- Na barra “Menu”, clique em “Arquivo”. Em seguida clicar em “Gravar”. Dessa forma as ferramentas estão disponíveis para utilização posterior.

Atividade 24. Construção da inversão de um polígono externo à elipse.

Nessa atividade vamos aprender a construir um polígono regular e em seguida obter a imagem da sua inversão.

- Construir uma elipse centrada na origem como foi feito na atividade 4.
- Selecionar a ferramenta “Polígono regular” .
- Marcar dois pontos próximos entre si, fora da elipse. Abrir-se-á uma caixa para digitarmos o número de lados/vértices do polígono (109). Na caixa, digitar 4 para fazermos um quadrado de vértices A , B , C e D .



Figura 109: Caixa de polígono regular - GeoGebra.

- Clicar com o botão direito do mouse sobre os vértices do quadrado e depois seleccione “Exibir Objeto” para esconder os pontos e seus nomes.

- Selecionar a ferramenta “Ponto em Objeto”  e clicar sobre uma aresta do quadrado.
- Selecionar a ferramenta “Inversão de um ponto externo à elipse” , clicar na elipse e depois no ponto P . Formar-se-á o ponto inverso.
- Para o ponto P selecione “Habilitar rastro” e para P'' selecione “animar”.
- Clicar no botão “Play”  e observar a formação da imagem inversa.

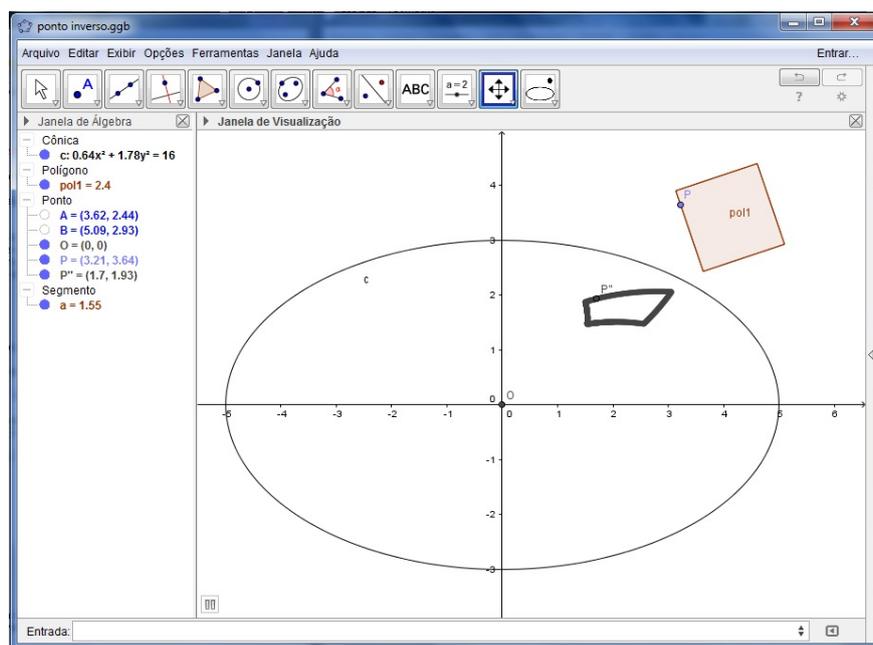


Figura 110: Caixa de polígono regular - GeoGebra.

O resultado encontrado deverá ser parecido com aquele que consta na figura 110, pois a figura formada com a inversão vai depender da posição do quadrado em relação à elipse.

Responda:

- A figura formada pela inversão é um polígono como o objeto submetido a ela?
- Com a animação do ponto P é possível observar que este se desloca em velocidade constante. Já a velocidade de deslocamento do ponto P'' sofre variações bruscas como no caso da formação da inversão da elipse observada na atividade 22?
- Os segmentos de reta submetidas à inversão geram segmentos de reta?

d) Selecionando a ferramenta “mover”  clicar em seguida sobre o quadrado e arrastá-lo para cima da elipse. Iniciar a animação. Como a formação da inversão se comportou (figura111)?

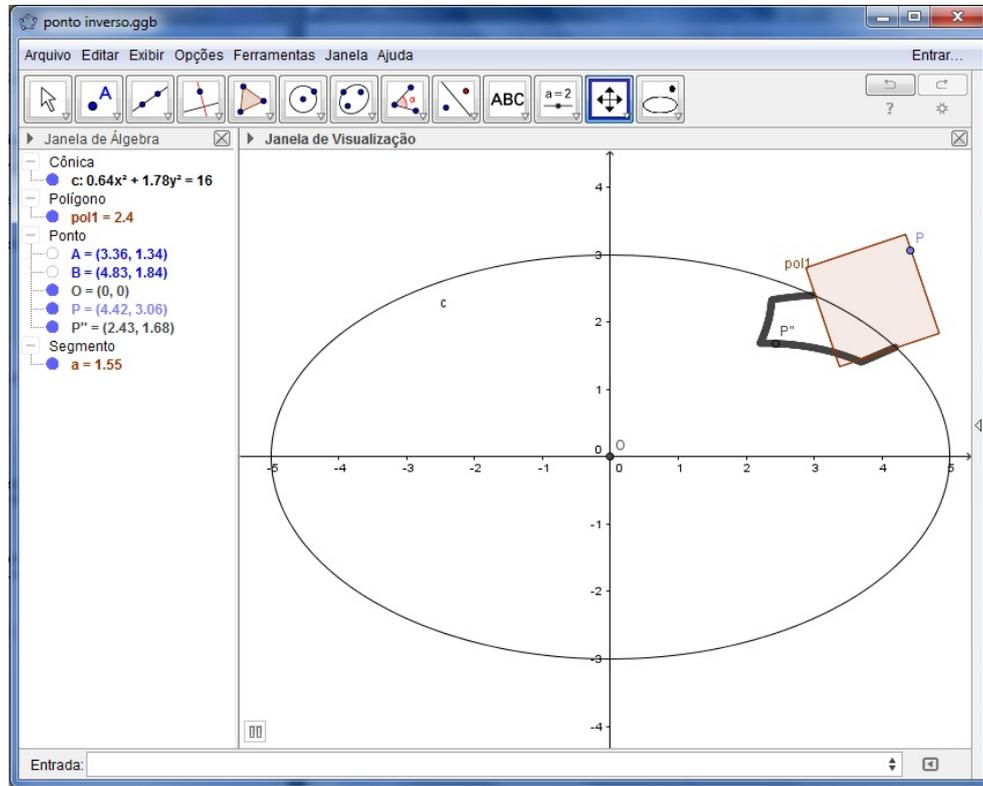


Figura 111: Caixa de polígono regular - GeoGebra.

Atividade 25. Inversão total de um ponto P qualquer.

Nas atividades anteriores 21 e 23 foram criadas ferramentas para facilitar o processo de obtenção de inversões. Em ambas, os inversos são obtidos através de animação do ponto P e habilitação do rastro de seu inverso externo P' e de seu inverso interno P'' .

Movendo-se o ponto ou a figura de dentro da elipse de inversão para fora ou vice-versa, pode-se notar que não há a formação do inverso.

Portanto na atividade seguinte, serão estabelecidos procedimentos que “generalizam” a inversão, não importando se o objeto que sofrerá a inversão esteja interno, externo ou esteja sobre a elipse inversora. Por isso no título da atividade dizemos **Inversão total**. A imagem da inversão do objeto será visualizada independente de sua posição relativa ao agente inversor, a elipse.

Procedimentos:

- Iniciar o GeoGebra e abrir o documento “**Ponto inverso**” (atividade 23), onde estão gravadas as 2 ferramentas de inversão na elipse.
- Como a janela de visualização em branco, construir uma elipse de centro O .
- Marcar um ponto P dentro da elipse.
- Selecionar a ferramenta de inversão  para criar o inverso externo de P e renomar como P' .
- Selecionar a ferramenta “mover”  e levar o ponto P para a parte externa da elipse.
- Selecionar a ferramenta de inversão  para criar o inverso interno de P e renomar como P'' .
- Observar que os pontos P , P' e P'' estão alinhados.
- Movimentar o ponto P para dentro e para fora da elipse. Quando P for exterior à elipse, o ponto P'' deve aparecer no interior da mesma. Quando P estiver interior à elipse, o ponto P' deve aparecer no exterior da mesma.
- Para criar uma ferramenta que faça todo o processo descrito nessa atividade, clicar no menu “Ferramentas” e em seguida selecionar a opção “Criar uma Nova Ferramenta”.
- Na caixa que se abrirá, na aba “Objetos finais” selecionar os pontos P' e P'' .
- Na aba “Objetos iniciais” selecionar a elipse e o ponto P .
- Na aba “Nome e ícone” digitar “**Inversão total**” como nome da ferramenta e “**Clicar na elipse e depois no ponto**” para ajuda da ferramenta.
- Desenhar um ícone para a ferramenta  e anexá-lo, clicando em seguida em “Concluído”.
- Com a ferramenta criada na mesma aba das ferramentas anteriores, basta marcar um ponto H qualquer na janela de visualização para testá-la. Criado o ponto H , clicar na nova ferramenta  e então na elipse e no ponto H criado. Fazer o teste levando o ponto H para dentro e/ou para fora da elipse.

Atividade 26. Inversão total de um objeto P qualquer.

Aqui vamos explorar os resultados da atividade anterior (25) acrescentando mais alguns resultados visuais do GeoGebra que facilitam o entendimento e elevam nosso grau de compreensão sobre inversão.

Procedimentos:

- Iniciar o GeoGebra e abrir o documento “**Ponto inverso**” (atividade 23), onde estão gravadas as 3 ferramentas de inversão na elipse.
- Como a janela de visualização em branco, construir uma elipse de centro O .
- Selecionar na Barra de Ferramentas a opção “Polígono Regular” .
- Construir um triângulo (ou qualquer outro polígono que queira) no exterior da elipse e esconder todos os seus vértices clicando sobre cada um deles com o cursor do mouse (botão direito) e selecionando a opção “exibir objeto”.
- Selecionar a ferramenta “Ponto em objeto”  e clicar sobre uma das arestas do triângulo. Renomear este ponto como P .
- Selecionar a ferramenta “Inversão completa” . Clicar sobre a elipse e em seguida sobre P . Renomear o novo ponto marcado como P'' .
- Selecionar a ferramenta “mover” , clicar sobre o triângulo e arrastá-lo para dentro da elipse inversora. Notar que o ponto P' , inverso de P , apareceu fora da elipse com outro nome. Renomeá-lo como P' .
- Selecionar a ferramenta “Lugar Geométrico” , clicando em seguida sobre P' e depois sobre P . Notar que o GeoGebra desenhou o lugar geométrico de P' em relação a P (figura 112).
- Selecionar a ferramenta “mover” , clicar sobre o triângulo e arrastá-lo para fora da elipse inversora. Notar que a figura que representa a inversão do triângulo desapareceu.
- Refazer os procedimentos do item anterior começando por selecionar a ferramenta “Lugar Geométrico” .
- Clicar no ponto P'' e depois no ponto P . O programa se encarrega de desenhar o inverso do triângulo externo à elipse (figura 113), ou seja, o lugar geométrico.

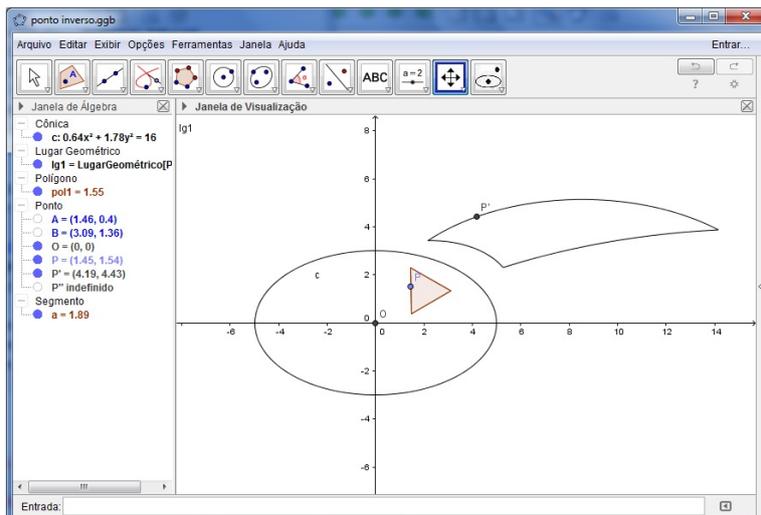


Figura 112: Imagem da inversão de um triângulo interno à elipse - GeoGebra.

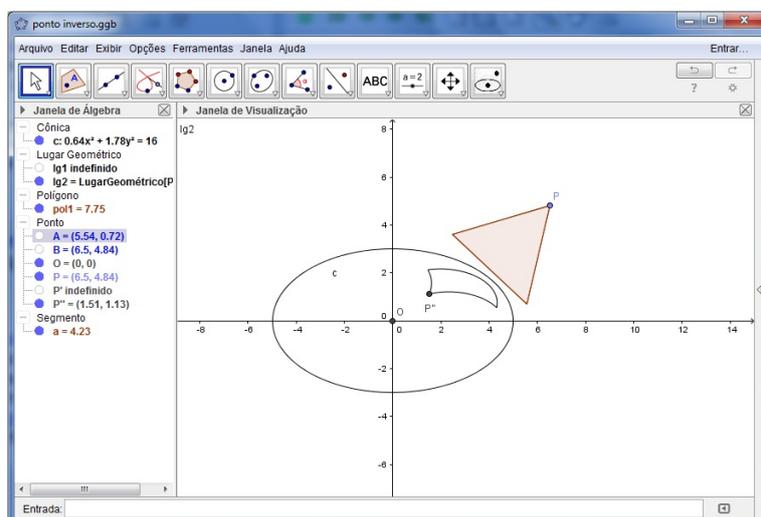


Figura 113: Imagem da inversão de um triângulo externo à elipse - GeoGebra.

- Selecionar a ferramenta “mover” , clicar sobre o triângulo e arrastá-lo pelo plano para verificar as modificações que podem ocorrer.
 - a) Colocar um dos lados do triângulo sobre o centro da elipse. O que pode-se notar?
 - b) Deslocar o triângulo e colocá-lo dentro da elipse de modo que o centro dessa não pertença à superfície do triângulo. Observe a imagem do inverso produzido.

Em seguida posicione o triângulo de modo que este contenha o centro da elipse. O que se pode observar sobre a imagem do inverso obtida?

5.2.3 Tangenciando Círculos

A inversão clássica, em relação à circunferência, é a mais conhecida. Muitas são as aplicações das inversões Geométricas dentro da própria matemática. Consta em [31] algumas dessas aplicações, tais como no Teorema de Feuerbach e no Teorema da cadeira de Pappus. Em [6] ainda são citadas aplicações no Teorema de Miquel. Em [27] é citado o inversor de Peaucellier, o problema de Apolônio, Cadeia de Steiner e os arbelos.

Para [20] Jacob Steiner (1796-1863) teria sido um dos pioneiros a lidar com os conceitos de inversão geométrica. Seu problema seria resolvido quando, dadas duas circunferências não concêntricas, fosse possível encaixar perfeitamente outras circunferências que tangenciassem as duas circunferências dadas e também tangenciassem as demais que fossem encaixadas (figura 114).

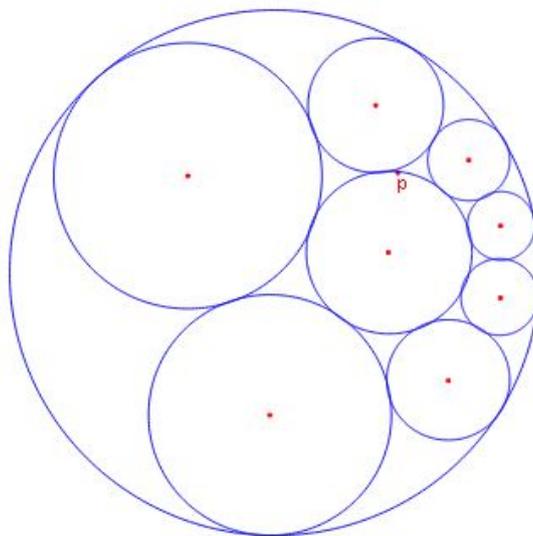


Figura 114: Os círculos de Steiner. Fonte: [20].

O problema de Steiner necessitava de um artifício para ser reduzido a um problema de menor complexidade, de modo que as duas circunferências fossem concêntricas. Sequência de sete círculos preenchendo estrategicamente o espaço compreendido en-

tre outras duas . A solução estava na utilização de uma ferramenta poderosa: a teoria das inversões circulares.

De acordo com [27] os centros das sete circunferências do problema inicial estão dispostos sobre uma elipse.

Em [35], baseado nas aplicações anteriores, há uma aplicação interessante da inversão em elipses que se refere à uma cadeia de elipses (Cadeia de Pappus) posicionada dentro de um arbelo e que o autor nomeia como Pappus chain ellipses (Cadeia de elipses de Pappus).

Cadeia de elipses.

Corolário 5.1. *Seja \mathcal{E} a semi-elipse com o diâmetro principal AB , e \mathcal{E}' , \mathcal{E}_0 semi-elipses no mesmo lado de AB com o diâmetros principais AC e CB respectivamente, ambas homotéticas a \mathcal{E} (Figura 115). Seja $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$, uma sequência de elipses tangentes a \mathcal{E} e \mathcal{E}' , tal como \mathcal{E}_n é tangente a \mathcal{E}_{n-1} e \mathcal{E}_{n+1} para todo $n \geq 1$. Se r_n é o semieixo menor de \mathcal{E}_n , e h_n a distância do centro de \mathcal{E}_n até AB , então $h_n = 2nr_n$ [35].*

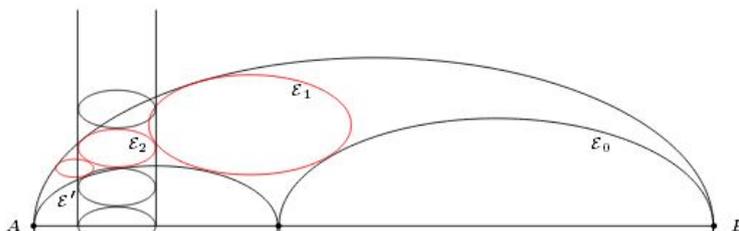


Figura 115: Inversão da elipse. Fonte: [35]

Demonstração.

Seja ϑ_i a inversão na elipse \mathcal{E}_i . (Na figura115 selecionamos $i=2$).

Pelo teorema 4.13, $\vartheta_i(\mathcal{E})$ e $\vartheta_i(\mathcal{E}_0)$ são retas perpendiculares à AB e tangentes à elipse \mathcal{E}_i . Daí, as elipses $\vartheta_i(\mathcal{E}_1)$ e $\vartheta_i(\mathcal{E}_2), \dots$ irão inverter as elipses tangentes em retas paralelas a $\vartheta_i(\mathcal{E})$ e $\vartheta_i(\mathcal{E}_0)$. Daí, $h_i = 2ir_i$.

Com base na demonstração anterior, construímos uma torre de elipses e fizemos a inversão numa elipse tangente à torre (figura 116) e, em seguida, afastamos a elipse

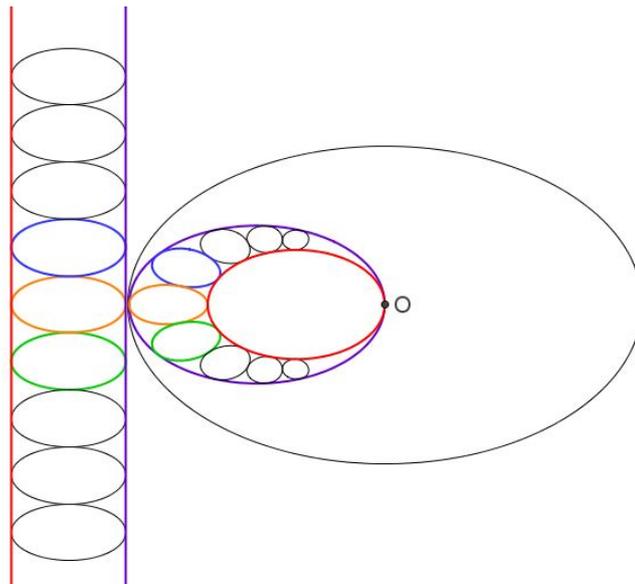


Figura 116: Inversão de uma torre de elipses tangentes à elipse inversora.

não deixando pontos comuns entre a elipse e a torre (figura 117, a fim de observarmos o resultado).

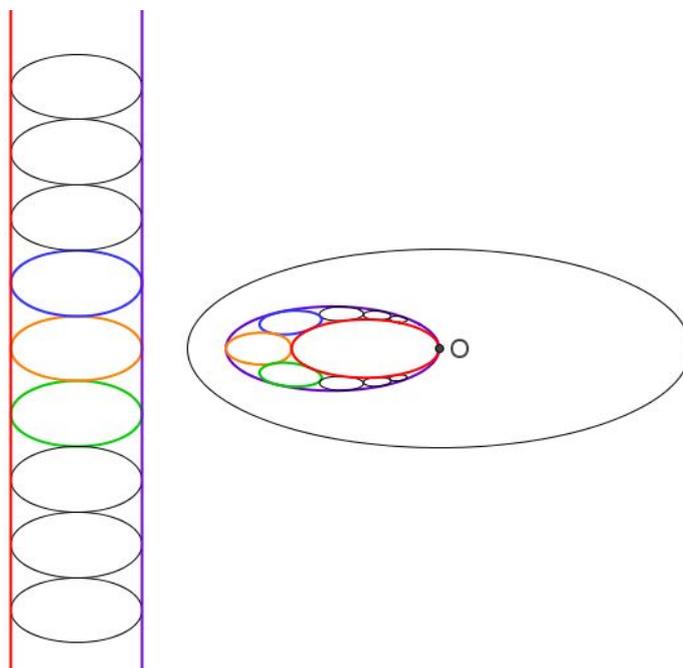


Figura 117: Inversão de uma torre de elipses não tangentes à elipse inversora.

Em ambos os casos as cadeias se formam, embora possamos facilmente observar que as imagens obtidas não serão sempre elipses homotéticas.

Atividade 27. Sobre a cadeia de elipses.

Observando as figuras 116 e 117, expresse com suas palavras porque a torre de elipses submetida ao processo de inversão, gera as cadeias de elipses tangentes observadas.

5.2.4 A inversão na engenharia mecânica.

De acordo com [39], no século XVIII, por conta da revolução industrial, James Watt em 1784 inventou um mecanismo para produzir movimentos retilíneos como o que movia o pistão da máquina a vapor. Porém, eles descreviam movimentos aproximadamente retilíneos (figura 118).

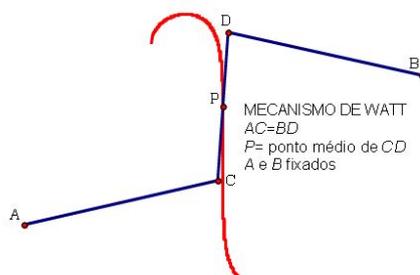


Figura 118: Mecanismo inversor de James Watt [39].

Com isso, a atenção dos matemáticos foi atraída pelo desafio de produzir movimentos retilíneos, pelo menos teoricamente. Em 1864 o feito foi realizado por Peaucellier cujo mecanismo de 6 varetas, chamado de inversor de Peaucellier, produzia através de uma inversão circular a transformação de movimentos circulares em retilíneos (figura 119).

A transformação de um movimento específicos em movimentos retilíneos continuam a ser estudados até os dias de hoje (ver próximo item).

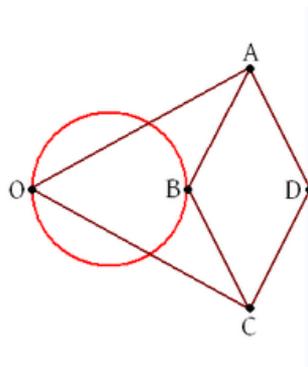


Figura 119: Esquema inversor de Peaucellier.

Bicicleta de rodas elípticas

Toda roda é redonda?

Não. Segundo a reportagem de [17], o português Jacinto Oliveira, inventor de Alentejo (interior de Portugal), criou uma roda elíptica (figura 120) e venceu o desafio de produzir movimentos retilíneos a partir de uma roda não convencional.



Figura 120: Roda elíptica. Fonte: [17].

A roda elíptica é parte de uma bicicleta lançada no ano de 2014 durante o “Festival Bike Portugal”. Foi apresentada depois de 3 anos de desenvolvimento (figura 121).

Segundo o inventor, esse tipo de roda diminui a fadiga muscular por promover movimentos irregulares.



Figura 121: Bicicleta *Elip*[®] que possui rodas elípticas. Fonte: [29].

“Como a roda tem essa configuração, de vez em quando, é necessário mais força, outras vezes é menor esforço, portanto. O músculo não está sempre a fazer o mesmo tipo de esforço”.

Como já vimos em 5.1.9 e no resultado da atividade 22 a velocidade desenvolvida por um ponto na elipse varia de acordo com o referencial do ponto escolhido.

Dessa forma, em partes com maior velocidade é necessário menor esforço e na parte que gera menor velocidade seria necessário maior esforço.

De acordo com o inventor, a bicicleta pode ser utilizada de duas formas:

- com solavancos, de forma que o selim não fique estabilizado, ou seja, possivelmente vai desenvolver o movimento de uma cossenóide como no exemplo da elipse na moda (5.1.6), a medida que se percorre a distância desejada.
- sem solavancos, ao se ajustar um comando no guidão de forma que o passeio fique parecido como em um bicicleta normal. Neste modo, possivelmente, o eixo elíptico da bicicleta deve ser deslocado de forma a tangenciar o centro da roda, pois elipses que contém o centro da elipse inversora produzem uma reta como imagem (teorema 4.13).

No segundo caso, independente do movimento da roda, a mecânica do cubo, onde se localiza “o segredo” da bicicleta, mantém o eixo estável em relação a superfície de apoio.

Como pode-se observar na figura da roda (120), reproduzida na figura 122, a roda elíptica tem uma circunferência no centro, onde é colocado o cubo mecânico que produz o movimento retilíneo do selim.

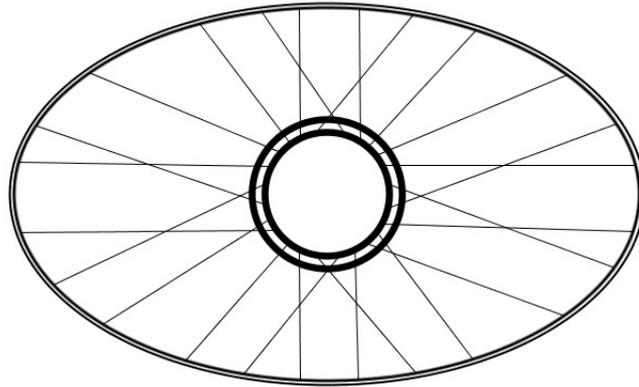


Figura 122: Estrutura da roda elíptica.

Como não foi possível obter maiores detalhes sobre o mecanismo do cubo mecânico que proporciona o movimento retilíneo da estrutura do veículo, vamos supor seu funcionamento com bases nos teoremas 4.10 e 4.13: uma reta que não contém o centro O da elipse inversora, tem uma elipse que contém O como inverso; enquanto toda elipse que contém o centro O produz uma reta que não contém o centro O como inverso. Assim, o cubo da roda gera uma reta em seu movimento, qualquer que seja a posição da roda. Para isso, vamos supor que o mecanismo corresponda à figura (123). A elipse menor é o eixo elíptico sempre fixo na estrutura da bicicleta. Quando o cubo gira em volta desse eixo elíptico, o movimento causa a inversão nessa elipse interna e provoca a estabilidade estrutural da bicicleta de forma que tenha o movimento retilíneo desejado para o selim.

O movimento com solavancos seria produzido quando todo o mecanismo fica travado junto ao eixo elíptico e faz-se a roda girar ao seu redor.

Supomos também que para tal movimento a elipse do eixo seja homotética à elipse da roda. Dessa forma, a reta gerada pela inversão do eixo que gira sobre o ponto O , pode ser transferida para o perímetro da roda.

Afastando-se a reta da elipse central, e levando a reta para tangenciar a elipse da roda, podemos ver que a elipse central, que é o inverso da reta, é homoteticamente menor. A elipse da reta sendo homotética à elipse que gira tangenciando o centro, geram um movimento retilíneo. Por isso é possível andar com a bicicleta de rodas elípticas como se estivesse andando em uma bicicleta com rodas redondas e “normais”.

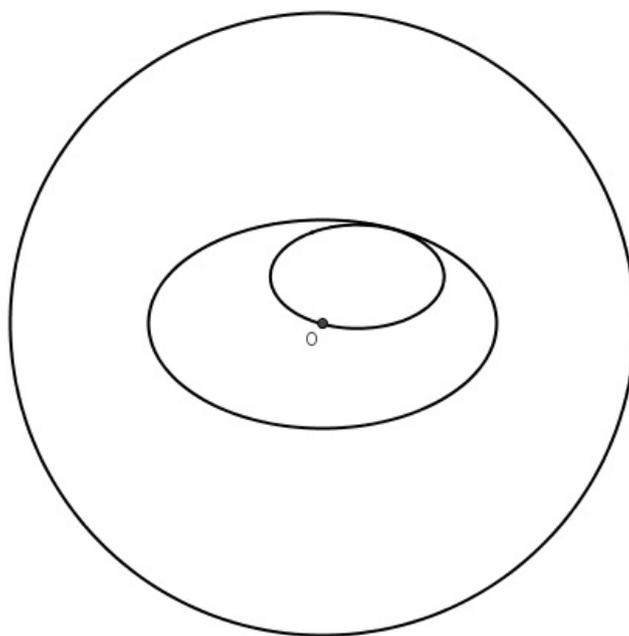


Figura 123: Estrutura do cubo da roda elíptica.

A

APÊNDICE A

A.1 RESPOSTAS DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Atividade 1

Para obter as medidas dos semi-eixos maior (a) e menor (b) basta fazer a medição de ambos e dividir por dois. A distância focal ($2c$) pode ser obtida através da igualdade $a^2 = b^2 + c^2$, de forma que, substituindo os valores de a e b encontra-se c e em seguida $2c$. A excentricidade deve-se calcular por $e = \frac{c}{a}$. Ainda em relação as excentricidades, quando mais próxima de zero, menos achatada a elipse (máis próxima da forma de uma circunferência). Quanto mais próxima de um for a excentricidade, mais achatada será a elipse.

Atividade 2

Independente do método utilizado para desenhar a elipse, o desenho obtido deve ser o gráfico da figura (figura 124)

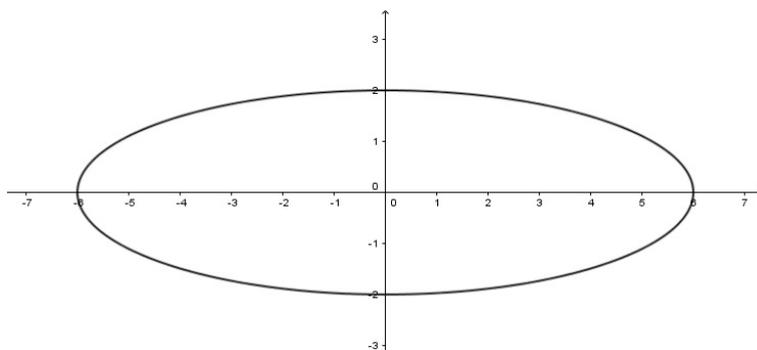


Figura 124: Resultado da atividade 2

Atividade 3: Resposta na própria atividade.

Atividade 4: Resposta na própria atividade.

Atividade 5: Resposta na própria atividade.

Atividade 6: O desenho da elipse encontrada deve corresponder à figura 125

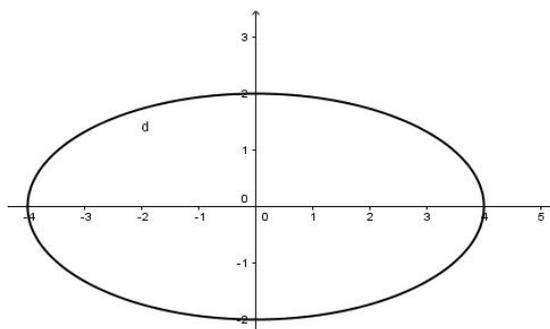


Figura 125: Resultado da atividade 6

Atividade 7:

O desenho da elipse encontrada deve corresponder à figura 126

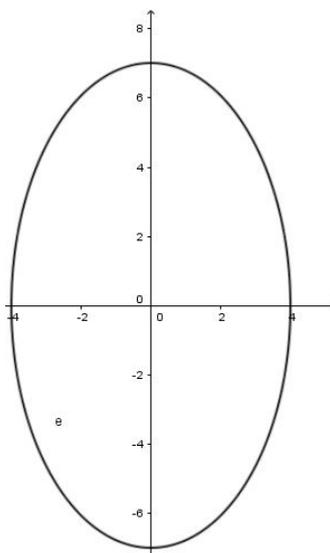


Figura 126: Resultado da atividade 7

Atividade 8:

O desenho da elipse encontrada deve corresponder à figura 127

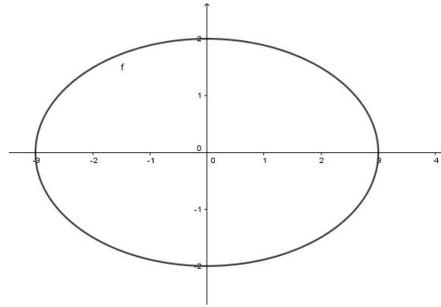


Figura 127: Resultado da atividade 8

Atividade 9:

O desenho da elipse encontrada deve corresponder à figura 128

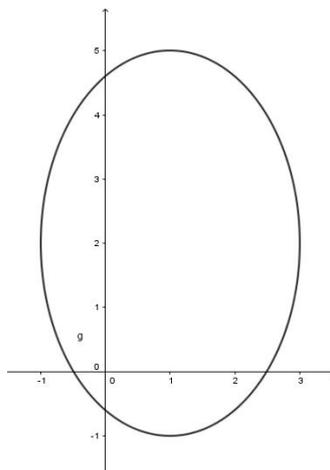


Figura 128: Resultado da atividade 9

Atividade 10

Desenhando as órbitas escolhidas deve-se encontrar algo parecido com a figura 129.

a) Observando a figura 129 podemos verificar que quando comparamos elipses com a mesma medida do eixo maior distância dos focos diminui, a excentricidade diminui também. Sendo assim, quando a distância dos focos aumenta, a excentricidade aumenta também. À medida que os focos se aproximam a excentricidade tende a zero.

b) Quando a excentricidade aumenta a elipse fica mais achatada.

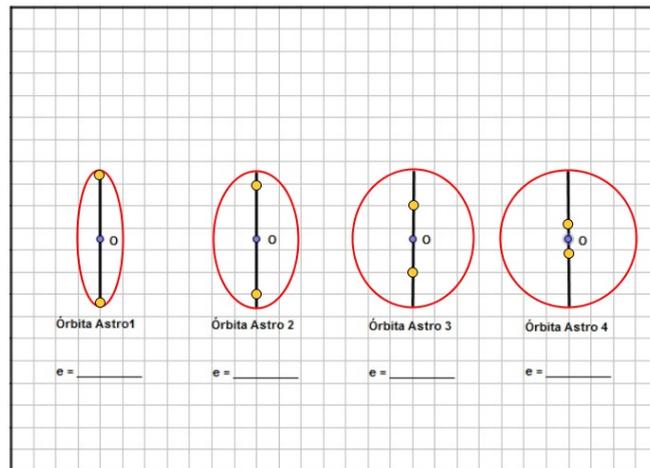


Figura 129: Resultado da atividade 10

c) Mantendo-se a medida do eixo maior, o eixo menor diminui quando a excentricidade da elipse aumenta. As medidas variam de forma inversamente proporcional.

d) Se tivéssemos mantido o eixo menor, à medida que a excentricidade aumentaria o eixo aumentaria também. As medidas variam de forma diretamente proporcional.

Atividade 11

O gráfico pedido na atividade está representado na figura 130

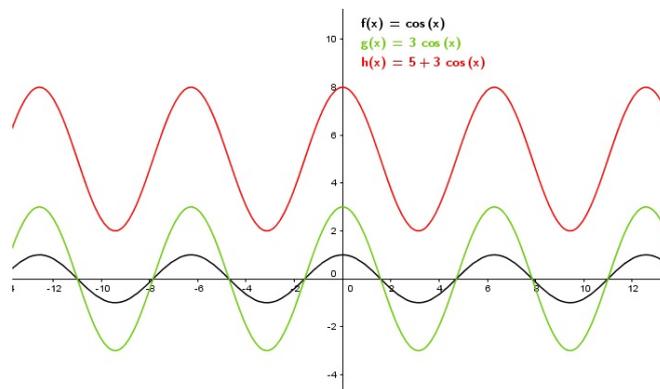


Figura 130: Resultado da atividade 10

a) Ao multiplicar a função por 3 a amplitude aumentou 3 vezes (foi multiplicada por 3).

b) Ao adicionar 5 unidades à função $y = 3 \cdot \cos x$ o gráfico foi deslocado 5 unidades para cima. Para sermos mais específicos podemos dizer que o gráfico sofreu uma translação vertical de baixo para cima.

c) Ao multiplicar β por m , o período da função ficar dividido por m . Em seguida, multiplicando a função por $-MN$ os pontos de máximo da função se transformam em pontos de mínimo e a amplitude fica multiplicada por MN . Por fim, adicionando MN ocorrerá uma translação vertical de baixo para cima de MN unidades (figura 131).

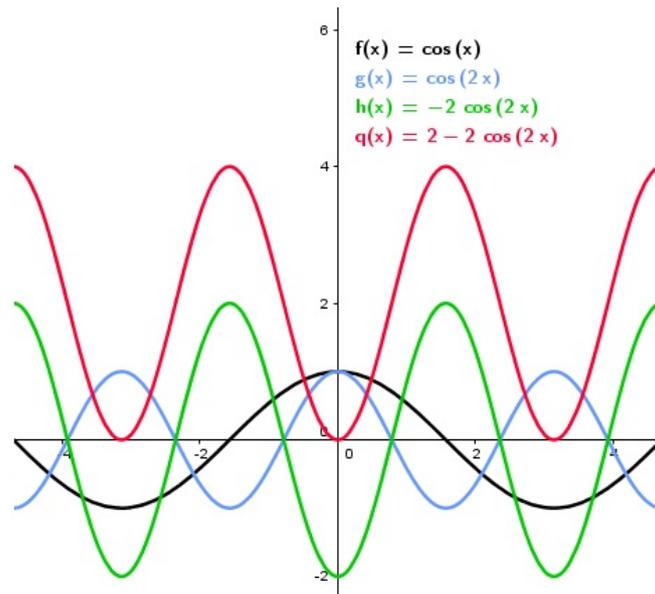


Figura 131: Resultado da atividade 11

Atividade 12

O molde a ser obtido deve ter a mesma aparência daquele exposto da figura 84.

Outra forma de se obter o molde é através de uma garrafa pet. Deve-se colocar água até a metade da garrafa e incliná-la de forma que a superfície da água passe a ser uma elipse. Com caneta apropriada marca-se na superfície da garrafa a elipse que a água forma dentro dela. Em seguida, basta cortar a garrafa para obter o molde desejado.

Atividade 13

a) A curiosidade da mesa de bilhar elíptica é que toda bolha posicionada no ponto indicado, quando impulsionada com o taco cai na caçapa localizada no outro da mesa.

b) A propriedade refletora da elipse é a utilizada na mesa de bilhar elíptica.

c) No lugar dos focos estão a bola e a caçapa.

d) Uma pessoa habilidosa poderia acertar a caçapa mesmo que a bola seja posicionada fora do foco. Mas certamente qualquer pessoa, mesmo sem habilidade, é capaz de acertar a caçapa se posicionar a bola no foco indicado na mesa.

Atividade 14

- a) A direção seguida pela perturbação da água é o outro foco da elipse.
- b) Não, a perturbação só seguirá o caminho do foco 2 se for causada no foco 1.
- c) Em qualquer elipse, um raio emitido a partir de um dos seus focos em direção a linha de seu perímetro, irá ser refletido na direção do outro foco da elipse.

Atividade 15

Utilizando a imagem da praça São Pedro, após colocá-la no GeoGebra obtemos a figura 132.

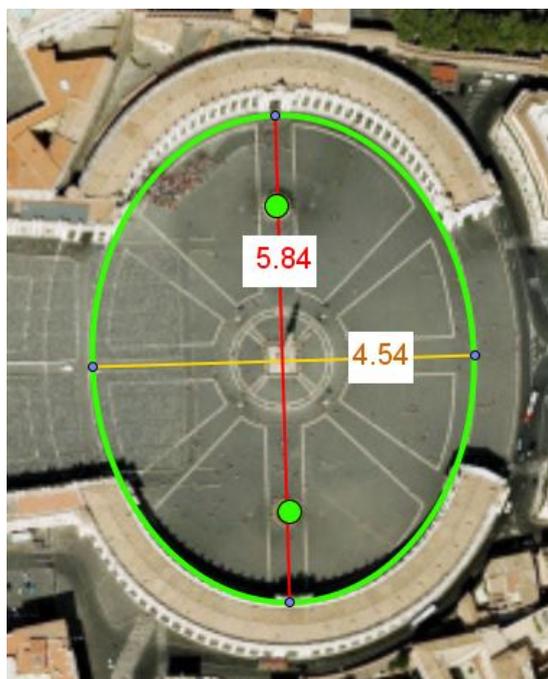


Figura 132: Resultado da atividade 15

Com as medidas encontradas para o eixo maior e menor pode-se calcular a excentricidade pedida: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{\left(\frac{5,84}{2}\right)^2 - \left(\frac{4,54}{2}\right)^2}}{5,84} = 0,31$

A pesquisa sugerida deve seguir os procedimentos anteriores e os dados obtidos devem ser comparados.

Atividade 16

- a) As engrenagens elípticas podem ser utilizadas em equipamentos de torque.
- b) O equipamento de torque é utilizado para aumentar a força de aperto de parafusos. Como exemplo podemos citar as máquinas utilizadas para trocar os parafusos dos pneus nas corridas de fórmula 1. Tem a mesma função que uma alavanca. A diferença é que a alavanca, para executar grandes esforços, necessita ter um cabo bastante alongado enquanto um equipamento de torque ocupa um espaço reduzido.
- c) A função das engrenagens elípticas é multiplicar a força humana exercida durante o trabalho.
- d) O equipamento de torque pode ampliar a força exercida em múltiplos de 5, ou seja, 5:1, 25:1 e 125:1.

Atividade 17

As imagens obtidas vão variar de acordo que aquele que as fotografou.

A importância maior está em comparar as duas imagens obtidas: antes e depois da inversão. Deve-se observar que retas transformam-se em curvas, o perpendicularismo fica desfigurado e até mesmo as curvas obtidas na inversão da imagem se torna diferente. Respondendo à última pergunta: sim! Com alguma habilidade de desenho e conhecimento de algumas propriedades de inversão seria possível reproduzir o ambiente a partir da imagem obtida.

Atividade 18

Primeiro questionamento: Observando a imagem formada no grande feijão temos a impressão que a imagem nele formada está dentro dele.

Segundo questionamento: Se estivéssemos dentro do objeto teríamos a impressão que a imagem estaria do lado externo.

Terceiro questionamento: Como o ponto estaria sobre a superfície inversora não existiria imagem, ou seja, imagem da inversão seria o próprio ponto.

Quarto questionamento: Vai depender do caso. Se o ponto for interior a imagem sempre estará mais distante do que o ponto, da superfície inversora. Já se o objeto for exterior, a imagem sempre estará mais próxima da superfície inversora do que o ponto.

A definição pedida está em 4.2

Atividade 19

a) Quando o ponto P é deslocado para perto da elipse e conseqüentemente para perto do ponto Q , o ponto P' também se aproxima de Q .

b) Quando o ponto P é deslocado para perto do centro da elipse a sua imagem P' se desloca para o infinito.

Atividade 20

a) Quando o ponto P é deslocado para perto da elipse e conseqüentemente para perto do ponto Q , o ponto P'' também se aproxima de Q .

b) Quando o ponto P é deslocado para longe da elipse ou para longe do ponto Q a sua imagem P'' se desloca aproximando-se do centro da elipse.

Atividade 21: Realizar os procedimentos descritos na própria atividade.

Atividade 22

a) A velocidade de P' é maior quando P se aproxima do centro da elipse.

b) A velocidade de P' é menor quando P se distancia do centro e se aproxima da elipse.

c) A parte da figura invertida que ficou pontilhada se deve a grande velocidade do ponto P' . A velocidade de P' é tão grande que o *software* não consegue imprimir o rastro de todos os pontos do seu lugar geométrico.

d) A figura obtida na inversão não é uma elipse

Atividade 23: Realizar os procedimentos descritos na própria atividade.

Atividade 24

a) Não, a figura obtida não é um polígono.

b) O ponto P'' sofre variações de velocidade mas não tão bruscas como foi observado na atividade 22. Os segmentos de reta percorridos por P depois da inversão ficarão internos à elipse e a figura obtida será menor que a original. Dessa forma o espaço percorrido por P'' é reduzido e por isso sua velocidade não tem grandes variações.

c) Os segmentos de reta que compõem o polígono sofrem inversão e são transformados em arcos de circunferência.

d) Foi formado somente o inverso da parte do polígono que ficou no exterior da elipse inversora.

Atividade 25: Realizar os procedimentos descritos na própria atividade.

Atividade 26

a) Nota-se que o lado do triângulo (segmento de reta) inverte-se em segmentos de reta.(figura 133).

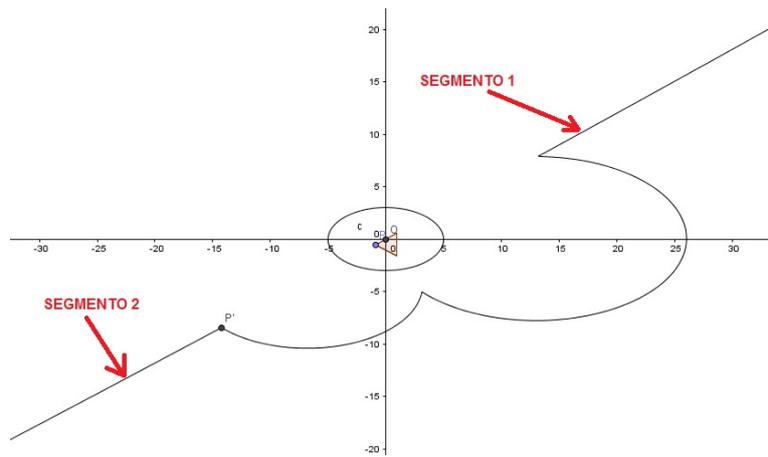


Figura 133: Imagem da inversão de um segmento de reta que contém a origem - Geogebra.

b) No primeiro caso, nota-se que o inverso possui “bicos” (figura 134).

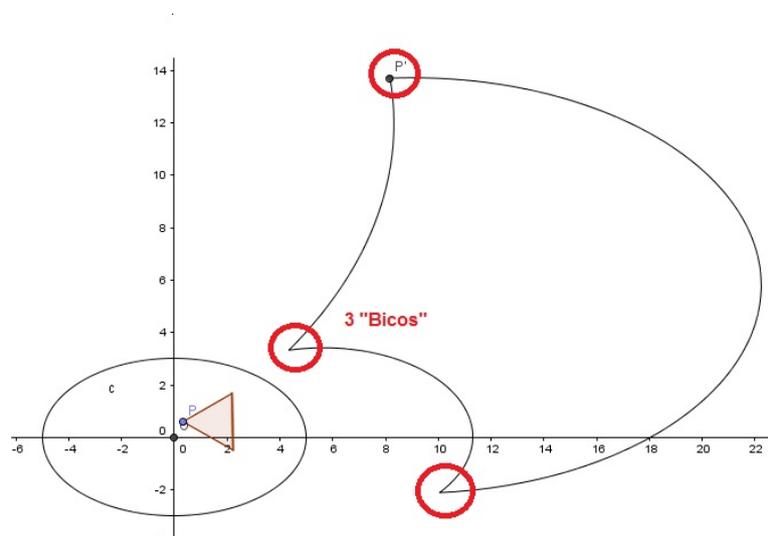


Figura 134: Imagem da inversão de um triângulo externo à elipse - Geogebra.

É como se de uma elipse tivessem sido retirados dois pedaços de outras elipses.

No segundo caso, nota-se que o inverso possui “reentrâncias” (figura 135)

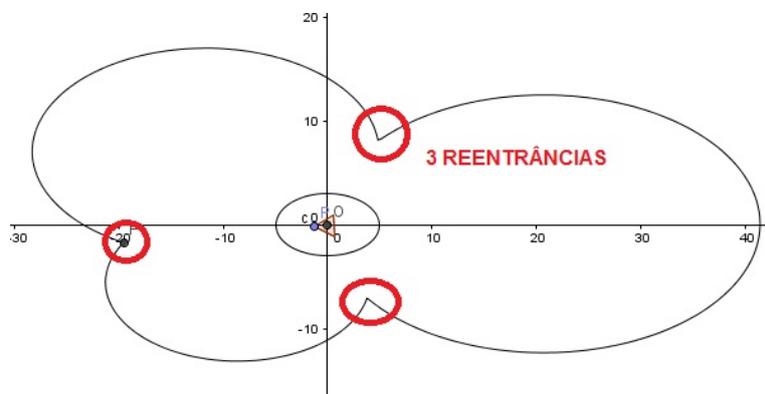


Figura 135: Imagem da inversão de um triângulo externo à elipse - Geogebra.

É como se três elipses tivessem sido sobrepostas.

Atividade 27

Uma reta não contendo o centro O da elipse tem como inverso uma elipse homotética da elipse inversora passando por O (4.10).

A função de inversão modifica a aparência dos elementos invertidos mas não modifica a relação entre eles. Portanto, a pilha de elipses deve continuar entre as duas retas mesmo depois da inversão, o que gera a cadeia de elipses tangentes entre as duas elipses não concêntricas.

Pelo teorema 4.13 temos também que a imagem de uma elipse que não passa pelo centro O tem como imagem uma elipse homotética à elipse inversora que também não passa por O .

Como as elipses geradas pela inversão não são homotéticas à elipse inversora, pode-se concluir que as elipses que compõem a torre não são homotéticas à elipse inversora.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A PONTE Santa Trinita: Fotos e ilustrações. Disponível em: <<http://www.aboutflorence.com/pt/pontes-de-florenca/ponte-santa-trinita-immagini.html>>. Acesso em: 07 jul. 2015.
- [2] ALEXANDRE AGABITI FERNANDEZ (São Paulo). Editora Duetto (Ed.). Matemática grega na época de Arquimedes. Revista Scientific American Brasil: Gênios da Ciência, São Paulo, n. 7, p.14-19, 2005. Edição Especial. Tradução: Alexandre Massella, Eduardo Sterzi, Lucia Wataghin e Roberto Barni.
- [3] ASSOCIAÇÃO ATRACTOR (Portugal) (Org.). Atractor - Matemática interactiva: Inversão. 2000. Disponível em: <<http://www.atractor.pt/mat/inversao/instr/inv.htm>>. Acesso em: 20 dez. 2014.
- [4] ASTRONOMIA, Saber (Org.). Órbitas do Sistema Solar. 2014. Disponível em: <<http://cienciaeficcao.blogspot.com.br/>>. Acesso em: 06 fev. 2015.
- [5] BASTOS, Rita; Transformações geométricas. Educação e matemática: Revista da associação de Professores de Matemática. Portugal. Nº 94 set/out 2007, p 23 - 27.
- [6] BLAIR, David E. Inversion theory and conformal mapping. Ed: American Mathematical Society, 2000.
- [7] BOYER, Carl B.. História da Matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [8] CÁLCULO: Matemática para todos. São Paulo: Segmento, v. 47, dez. 2014. Mensal.
- [9] CUERPOS del Sistema Solar. 2007. Disponível em: <http://www.elcielodelmes.com/cuerpos_del_sistema_solar.php>. Acesso em: 04 jul. 2015.
- [10] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFFI, Lhaylla. Geometria Analítica. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 20???. (Coleção PROF-

BIBLIOGRAFIA

MAT).

- [11] DESCARTES, René. La géométrie. A. Hermann, 1886.
- [12] DODGE, Clayton W.; Euclidean Geometry and Transformations, Mineola, New York, Dover Publications INC, 2004
- [13] DOWNS, J. W. Practical Conic Sections: The Geometric Properties of Ellipses, Parabolas and Hyperbolas. Courier Corporation, 1993.
- [14] EDITORA SABER LTDA (Ed.). Mecatrônica Atual: Medidor de vazão tipo "Engrenagens Ovais". 2013. Originalmente publicada na revista Mecatrônica Atual nº13 dez/2003. Disponível em: <http://www.mecatronicaatual.com.br/educacao/1125-medidor-de-vazo-tipo-engrenagens-ovais>. Acesso em: 13 /07/2003.
- [15] EVES, Howard. Introdução à história da matemática. 3. ed. Campinas - Sp: Unicamp, 2008. Tradução de: Higyno H. Domingues.
- [16] FREIXO, Luísa. Puzzles de vida. 2009. Disponível em <http://puzzlesdevida.blogspot.com.br/2009_03_01_archive.html>. Acesso em: 19 jul. 2015.
- [17] G1 (Brasil) (Ed.). Português reinventa roda de bicicleta e promete menor fadiga muscular: Jacinto produziu dez protótipos com a roda elíptica. Bicicleta chamou a atenção de ciclistas e crianças. Objetivo é criar um movimento irregular.. 2014. Disponível em: <<http://glo.bo/1A1riKW>>. Acesso em: 18 jul. 2015.
- [18] GARCÍA, Isabel. Elipse. Método del jardinero. 2003. Disponível em: <http://platea.pntic.mec.es/~migarcia/conicas/elipse_elipsografo.html>. Acesso em: 19 jul. 2015.
- [19] GÓMEZ, Jorge Joaquín Delgado; FRENSEL, Katia Rosenvald; CRISSAFF, Lhaylla dos Santos. Geometria Analítica. Rio de Janeiro: Sbm, 201?.
- [20] GONÇALVES, Prof. Msc. Anderson Dias. Inversão Geométrica: Um enfoque computacional. 2008. Disponível em: <http://andersonmatematico.xpg.uol.com.br/Arquivos/Inversao_geometrica.pdf>. Acesso em: 25 abr. 20015.
- [21] GONÇALVES, Vladimir Sicca. Curvas, Superfícies e Arquitetura. Disponível em: <<https://curvasearquitetura.wordpress.com/>>. Acesso em: 07 jul. 2015.

- [22] M.C. ESCHER FOUNDATION (Países Baixos). The M.c. Escher Company B.v. (Org.). M.C.Escher. 2013. Disponível em: <<http://www.mcescher.com/>>. Acesso em: 19 jul. 2015.
- [23] MEC (Org.). Geometria: Corte e Costura. 2005. Adaptação do artigo de Ernesto Rosa Neto. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_3.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2014.
- [24] MEC (Org.). Elipse, sorrisos e sussuros. 2005. Adaptação do artigo de Renato J. C. Valladares. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_3.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2014.
- [25] MLODINOW, Leonard. A janela de Euclides: A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2004. Tradução: Enézio E. de Almeida.
- [26] NACION, La (Ed.). Copérnico y la teoría heliocéntrica. 2003. Disponível em: <<http://www.nacion.com/zurqui/2003/mayo/21/home.html>>. Acesso em: 05 jan. 2015.
- [27] OGILVY, Charles Stanley. Excursions in geometry. Courier Corporation, 1990.
- [28] OLIVEIRA, Pedro Miguel; Será o infinito um ponto?! Educação e matemática: Revista da associação de Professores de Matemática. Portugal. Nº 95 nov/dez 2007, p 76 - 79.
- [29] P3 (Portugal). Sara Sampaio (Ed.). Apresentamos-te a ELIP, a primeira bicicleta sem rodas redondas. 2014. Disponível em: <<http://p3.publico.pt/vicios/em-transito/14228/apresentamos-te-elip-primeira-bicicleta-sem-rodas-redondas>>. Acesso em: 18 jul. 2015.
- [30] PAULO, Prof. Me. João; Secções Cônicas: Estudo Analítico das Cônicas. 20???. Disponível em: <http://www.adesc.blog.br/crbst_5.html>. Acessado em: 03/02/2015.
- [31] PEDOE, Dan; Geometry: a comprehensive course. Ed de 2014, Cambridge, England. Dover edition, 1988. p 75-76.
- [32] PELO mundo no meu 14 bis. 2010. Disponível em: <<http://ultimachamadaviagem.blogspot.com.br/2010/07/chicago.html>>. Acesso em: 07 jul. 2015.

BIBLIOGRAFIA

- [33] PROPRIEDADE refletora da elipse. Disponível em: <http://educar.sc.usp.br/sam/kepler_roteiro.html>. Acesso em: 07 jul. 2015.
- [34] PROPRIEDADES das cônicas. Disponível em: <http://www.adesc.blog.br/crbst_6.html.anchor-5-1>. Acesso em: 06 jul. 2015.
- [35] RAMÍREZ, José L.. Inversions in an Ellipse. 2014. Forum Geometricorum - Volume 14. Disponível em: <<http://forumgeom.fau.edu/FG2014volume14/FG201408.pdf>>. Acesso em: 27 ago. 2014.
- [36] RICKDIMYRICK. Aplicação de Secções. 2014. Disponível em: <<http://www.trabalhosfeitos.com/ensaios/Aplicao-De-Secoes/52918544.html>>. Acesso em: 02 fev. 2015.
- [37] ROSA, Márcio. Aprofundamento em cônicas.: "As Cônicas desde os gregos até a Geometria Analítica". 2000. Teia do Saber - IMECC - Unicamp. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/marcio/hpteia/teia.htm>>. Acesso em: 03 fev. 2015.
- [38] SAILOR Babo has adventures in Chicago! 2012. Disponível em: <<http://dalje.com/en/foto.php?id=19&rbr=21249&idrf=871882>>. Acesso em: 14 jul. 2015.
- [39] SALLUM, Elvia Mureb; GARCIA, Sonia Regina Leite. A INVERSAÇÃO CIRCULAR E SISTEMAS ARTICULADOS. 2011. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/matemateca/textos/inversao.pdf>>. Acesso em: 29 dez. 2014.
- [40] SINUCA Elíptica / PIBID-IFPI-Teresina Central. Realização de Fernando Rocha. Piauí, 2013. (1 min.), son., color. Disponível em: <<https://youtu.be/NGiMw4dI8fk>>. Acesso em: 12 julho 2015.
- [41] VIRTUOUS, Grupo (Org.). Leis de Kepler: 1ª Lei de Kepler - Lei das Órbitas. 20???. Disponível em: <<http://www.sofisica.com.br/sobrenos.php>>. Acesso em: 15 jul. 2015.
- [42] VISION. Espelhos convexos. 2011. Disponível em: <http://www.vision.ind.br/espelho_teto/02_espelho_teto.jpg>. Acesso em: 02 jul. 2015.

- [43] WIKIMEDIA (Comp.). Secções do cone. Disponível em: <<http://commons.wikimedia.org>>. Acesso em: 02 dez. 2014.