Universidade Federal do ABC

Centro de Matemática, Computação e Cognição

Cláudia Salomão Moya

Uma visão Matemática do Cubo Mágico

Orientador: Prof. Dr. Antônio Cândido Faleiros

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Matemática, Computação e Cognição para obtenção do título de Mestra em Matemática

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA CLÁUDIA SALOMÃO MOYA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ANTÔNIO CÂNDIDO FALEIROS.

Santo André, 2015

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha amiga e colega de profissão Fernanda Cristina Pereira Costa Nunes, por ter me incentivado a fazer inscrição nesse mestrado. Sua insistência foi de toda importância para essa conquista.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me abençoar diariamente, iluminando meu caminho, me concedendo tantas realizações, e por ter colocado pessoas maravilhosas ao meu lado.

Aos meus pais por terem me apoiado em todos os momentos, sempre me incentivando e orgulhando-se a cada pequena conquista.

À minha filha Bruna Moya Lazini, por ter ficado muitas vezes sem minha presença.

Ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Cândido Faleiros por acreditar e me apoiar na proposta desse trabalho, pela compreensão nos momentos que passei ao longo de nossa parceria. Agradeço, principalmente, por estar ao meu lado me acolhendo com um afago de belos e inquietos conhecimentos.

Ao Prof. Dr. Rafael Grisi, coordenador do Profmat, pelo incentivo aos meus estudos.

Aos meus colegas do Profmat, especialmente ao Thiago de Lima, por me levantarem a cada tropeço.

À minha incentivadora e amiga, professora Ieda Klarosk.

Ao meu amigo Dr. Luís Augusto Gomes Báring pelo apoio incansável ao meu trabalho.

À minha amiga Norma Terezinha de Lima por estar sempre presente em todos os momentos da minha vida, me ajudando a superar todos os problemas.

“Que es la lógica? Quién decide la razón? Siempre he creído em los numeros. En las ecuaciones y la logica que llevan a la razon. Pero, después de una vida de buscado a través de lo físico, lo metafísico, lo delirante, me digo: É SOMENTE NAS MISTERIOSAS EQUAÇÕES DO AMOR QUE QUALQUER LÓGICA OU RAZÃO PODE SER ENCONTRADA...”

John Forbes Nash

RESUMO

Esta dissertação mostra o quanto pode ser produtivo trabalhar com jogos de raciocínio lógico nas aulas de matemática, facilitando a articulação entre a matemática e o cubo mágico, focando, principalmente, a teoria dos grupos. Foi feito um estudo histórico sobre o desenvolvimento do jogo do cubo mágico, assim como um estudo dos aspectos práticos para jogá-lo. Em seguida, é apresentado um estudo da teoria dos grupos, para poder discutir o desenvolvimento do jogo, a partir das noções abordadas na definição de grupos. Ao final do estudo é apresentado um questionário que foi aplicado aos estudantes que participaram dessas aulas, na expectativa de verificar quais as contribuições da estratégia do jogo na motivação dos estudantes. Essas aulas diferenciadas contribuem com a autoestima dos alunos, com a sociabilização e, também, no desenvolvimento do raciocínio lógico e concentração. Em relação à motivação, percebe-se, neste grupo analisado, que os estudantes passaram a se sentir mais confiantes nos estudos de matemática.

Considera-se que é possível articular o jogo do cubo mágico com ideias da teoria de grupos também com os alunos da educação básica no que se refere à apresentação de um conjunto de elementos com uma operação binária, que é representado no jogo do cubo pela sequência de movimentos, verificando, além disso, as propriedades associativa, elemento neutro e elemento inverso.

Uma idéia do senso comum é que “A educação é a mais poderosa arma que se pode usar para mudar o mundo” (Nelson Mandela) e ela é vista como um poderoso instrumento de transformação social. No entanto, sabemos, pela experiência acumulada, que as metas, os planos e as leis por si só não mudam a realidade. é preciso ação e um grande envolvimento da sociedade, não só das pessoas que se interessam pelo tema ou que trabalham na área, mas de todos. O resultado de uma educação de qualidade traz reflexos na economia do país, na cultura, e até no dia-a-dia de cada um.

Nesta dissertação, abordo o trabalho que desenvolvi em sala de aula utilizando, principalmente, o quebra-cabeça conhecido como Cubo Mágico, mas também outros jogos, como o sudoku, rummikub.

Palavras-chave: Cubo Mágico, Teoria de Grupos, Solução do Cubo Mágico

ABSTRACT

The main goal of this work is to show that it is very beneficial to the students to use logical thinking games in the mathematics classes, particularly the one known as Rubik Cube, closely related to the group theory. We present a historical study on the developing of this game, as well as the practical aspects we use in its solution. We also present the group theory and show what are the relations between it and the Rubik Cube. Finally, we show a quiz the students answered after learning this game, in order to analyse in what aspects the game may contributed to the students activities in the school and in the learning process. This non-traditional classes are a good way of increasing the self-esteem of the students and, also, their sociability. It's also a good way of training the logical thinking and concentration, two of the main requisites for learning mathematics, as could be realized in all the groups which did this activities.

It is possible to teach notions of group theory to the basic student, because the Rubik Cube may be shown to be a set of elements with a binary operation, which, in this game, is the movements sequence. Furthermore, it is possible to verify the associative, neutral element and inverse element properties.

It is usually said that the "Education is the most powerful weapon you can use to change the world" (Nelson Mandela), that is, it is seen as a powerful social transformation instrument. However, our experience shows that goals and laws does not change the reality by themselves. We also need the society as a whole working and contributing, not only the directly interested people, teachers and other school professionals. When we have an education of high quality we can easily see the economic and cultural consequences for our country, as well as in the daily activities.

In this work I will present the conclusions I obtained proposing the mathematical games for my students, specially the Rubik Cube, but also other games, like the Sudoku and the Rummikub.

Keywords: Magic Cube, Group Theory, Magic Cube solution.

CONTEÚDO

1

MOTIVAÇÃO

O ensino do cubo mágico em minhas aulas durante o ano letivo começou com a necessidade de motivar os alunos para as aulas de matemática. Dependendo do nível deles, o jogo pode ser um meio de desenvolver algumas habilidades necessárias para essas aulas e, ao mesmo tempo, servir de exemplo prático de aplicação de conteúdos, como: permutações, sequências, geometria espacial, bem como a verificação das propriedades associativa, elementos neutro e inverso.

Resolver esse quebra cabeça acelera o raciocínio e a percepção, desenvolve a concentração e a memória, ajuda também na disciplina e na sociabilidade, além de trazer o universo da lógica e da probabilidade para o cotidiano dos alunos de uma forma prática e divertida. Por exemplo: embora não seja dito explicitamente aos alunos que as peças de canto não se tranformam em aresta nem em centro, com a prática eles acabam por perceber isso sozinhos, bem como descobrem atalhos para a solução. Entretanto, a aprendizagem da lógica não pode ser considerada um fim por si só, fazendo sentido somente como meio de garantir que nosso pensamento proceda corretamente, a fim de chegar a conhecimentos verdadeiros [12]. Não se tem idade para aprender o cubo mágico e nem é só para gênios, como muitos pensam: qualquer um pode, basta ter o brinquedo, criar interesse, persistência e concentração nas dicas dadas.

A formação e disponibilidade do professor para utilizar tal metodologia são colocadas como essenciais para o desenvolvimento de atividades de qualidade com os alunos. Perceber também o processo de aprendizagem do aluno é fundamental para que não se desista de buscar mais conhecimento, pois não se aprende a montar o cubo de um dia para o outro, são etapas que possuem muitos movimentos e exigem concentração. Isso leva o aluno a ser mais paciente, cauteloso, pois estão acostumados a terem respostas rápidas para tudo. Eu ensino esse jogo para alunos do 6° ano do ensino fundamental ao 3° ano do ensino médio há 6 anos. O interesse é o mesmo, mas quanto mais novo for o aluno, mais rápido ele aprende. Isso foi observado durante esses anos de experiência com esse jogo. Em sala de aula essa aprendizagem causa uma disputa saudável sobre a memorização dos passos, o que faz com que eles treinem cada vez mais ficando assim mais rápidos. Para alguns alunos essa aprendizagem faz muito bem para a autoestima, o que também leva a uma melhora nos resultados da escola. De acordo com a neurociência, a escola deve ser um espaço não somente conteudista mas, também, que estimule os alunos e, para isso, o papel do professor deve ser o de propor atividades que os estudantes estejam em condições de realizar e que despertem a curiosidade deles. Em outras palavras: é preciso desafiá-los e levá-los a fazer perguntas e procurar respostas [15].

De acordo com o cubista paranaense Aharon Campoli Tono, de 19 anos, sua concentração e capacidade de recordar das matérias aumentou depois da prática do cubo. Ele ministra aulas e palestras no Paraná e está se preparando para os próximos campeonatos.

No campeonato do cubo, o que importa é o tempo a ser montado. Os campeonatos que faço acontecem uma vez ao ano durante o mês de junho e a escola toda é convidada. Os alunos se apresentam individualmente, seu tempo é marcado e somente revelado no final. São premiados os dois primeiros colocados.

Os alunos adoram me desafiar: no começo eu venço todos, mas com o tempo ficam bem mais rápidos, pois treinam muito e isso dá um grande prazer a eles: "Sou mais rápido que a professora". Os pais agradecem e comparecem nos campeonatos e muito deles pedem para seus filhos ensiná-los. Hoje em dia sou cobrada pelos novos alunos e direção para o ensino desse jogo.

1.1 origem dos jogos lúdicos

Lúdico é um adjetivo masculino com origem no latim *ludus* que remete para jogos e divertimento. Cobarlán menciona o que entendemos ser uma excelente contribuição para que possamos expressar nossa concepção do lúdico e de seu uso como instrumento metodológico na formação dos professores para que mude sua prática nas aulas de matemática:

"Ensinar e aprender matemática pode e deve ser uma experiência com bom êxito no sentido de algo que traz felicidade aos alunos. Curiosamente quase nunca se cita a felicidade dentro dos objetivos a serem alcançados no processo ensino aprendizagem, é evidente que só poderemos falar de um trabalho docente bem feito quando todos alcançarmos um grau de felicidade satisfatório" [5].

Uma atividade lúdica é uma atividade de entretenimento, que dá prazer e diverte as pessoas envolvidas. Os conteúdos lúdicos são muito importantes para mostrar às crianças que aprender pode ser divertido. As iniciativas lúdicas nas escolas desenvolvem a criatividade e contribuem para o desenvolvimento intelectual dos alunos.

O jogo pode ser considerado como um importante meio educacional, pois propicia um desenvolvimento integral e dinâmico nas áreas cognitivas, afetivas na linguística, na socialização e na moralização do indivíduo perante a sociedade. O ser humano possui uma necessidade de diversão e está sempre buscando desenvolver novas percepções, expectativas e motivações. Segundo CAILLOIS [19], os jogos podem ser classificados segundo quatro categorias:

- AGON (origem grega, significa luta, desafio). Engloba um grupo de jogos que aparece sob a forma de competição.
- ALEA (origem do latim, significa sorte). É o nome dado aos jogos de dados baseados na sorte, ou seja, vencer ou perder não depende do jogador.
- MIMICRY (origem escandinava, significa disfarce). Engloba qualquer jogo que trabalha com o imaginário, como o RPG, mímica e circo.
- LLINX (origem do país de Gales, significa vertigem). Esse jogo consiste em uma tentativa de destruir por alguns instantes a percepção, infringindo a consciência lúcida.

Na história antiga há relatos de que o ato de brincar era desenvolvido por toda a família, até quando ensinavam os ofícios para seus filhos. PLATÃO, filósofo grego, em meados de 367 a.c., apontou a importância da utilização dos jogos para que o aprendizado das crianças pudesse ser desenvolvido. RABELAIS, escritor renascentista francês, no século XV, já proclamava que o ensinamento deveria ser através de jogos, dizendo a todos que deveriam ensinar às crianças o gosto pela leitura, pelo desenho, pelos jogos de cartas e fichas que serviam para ensinar a aritmética a até mesmo a geometria. Outros teóricos também contribuíram para que o lúdico pudesse ser utilizado na educação dentro do processo de ensino aprendizagem. Destacamos: ROSSEAU e PESTALOZZI, no século XVIII; DEWEY, no século XIX; e, no século XX, MONTESSORI, VYGOTSKY e PIAGET.

Na Grécia antiga era através dos jogos que se transmitia ensinamento às crianças. Os índios ensinavam seus costumes através da ludicidade. No Brasil da Idade Média, os jesuítas ensinavam utilizando brincadeiras com instrumentos para a aprendizagem. Desde os primórdios, a metodologia lúdica sempre foi valorizada pelos povos. Segundo Vygotsky o aprendizado envolve a interferência direta ou indireta de outros seres humanos, sendo que a mediação faz toda a diferença. Segundo ele, o jogo cria uma zona de desenvolvimento proximal (ZDP), proporcionando desafios e estímulos para a busca de conquistas mais avançadas e ensinando a separar objetos e significados. Ele também afirma que a ZDP é o percurso que o ser humano faz até chegar a um nível de amadurecimento real, sendo chamado por ele de zona de desenvolvimento real (ZDR), que é a capacidade do ser humano realizar tarefas independentes. Ao utilizar o lúdico para o ensino da matemática, o professor está sendo o mediador do aprendizado dos alunos que, a partir da ZDP, podem adquirir um conhecimento e proporcionar alterações em sua estrutura cognitiva. Será que nos dias atuais esse instrumento está sendo valorizado no ensino, principalmente no ensino da matemática?

O professor deve escolher uma metodologia de trabalho que permita a exploração do potencial da atividade lúdica no desenvolvimento das habilidades. A brincadeira é mais que passatempo, ela ajuda no desenvolvimento, promovendo processos de socialização e descoberta do mundo. Essa atividade provoca estímulos nas pessoas, explorando seus sentidos vitais, operatórios e psicomotores, propiciando o desenvolvimento completo das suas funções cognitivas. É importante ressaltar que o professor tem um papel fundamental para que as atividades não percam sua essência, resultando no objetivo esperado.

2 INTRODUÇÃO

Cubo Mágico é um quebra-cabeça fantástico que se espalhou pelo mundo nos anos 80. Ele é composto de 27 pequenos cubos empilhados que juntos formam um único cubo, numa configuração tridimensional $3 \times 3 \times 3$. Cada face do cubo tem uma cor marcante, quase sempre azul, verde, laranja, vermelha, amarela e branca. Esse mecanismo foi inventado em 1974 pelo professor húngaro Ernö Rubik e permite que quaisquer das seis faces do cubo possam ser giradas em relação ao centro da face. Movimente quatro ou cinco das faces de maneira aleatória, cinco ou seis vezes, e você terá um cubo com as faces tão desordenadas que somente com habilidade se pode reorganizá-las. O desafio desse quebra-cabeça é restaurar a ordem original, ou seja, cada face com uma cor única.

O Cubo de Rubik é um jogo de permutação, porque é baseado em movimentações, ou permutações dos pequenos cubos. O objetivo é rearrumar as partes desordenadas em um arranjo predeterminado, na ordem original. Jogos de permutação estão diretamente relacionados à área de matemática conhecida como análise combinatória, responsável pela análise das possibilidades e das combinações possíveis dos elementos do quebra-cabeça.

Figura 1: Cubo de Rubik's.

3 CUBO MÁGICO

É um quebra-cabeça com 6 faces de cores distintas: azul, verde, vermelha, amarela, laranja e branco. É formado por 27 cubinhos, sendo 9 em cada face. Há 3 tipos de cubinhos: centrais, de arestas e de cantos; os cubos do centro de cada face não se movem – figura 2. As faces opostas são: azul e verde, vermelho e laranja e amarelo e branco. O objetivo desse quebra-cabeça é deixar cada face com uma única cor. Existem vários campeonatos no mundo todo e o objetivo é rearrumar as partes desordenadas em menor tempo.

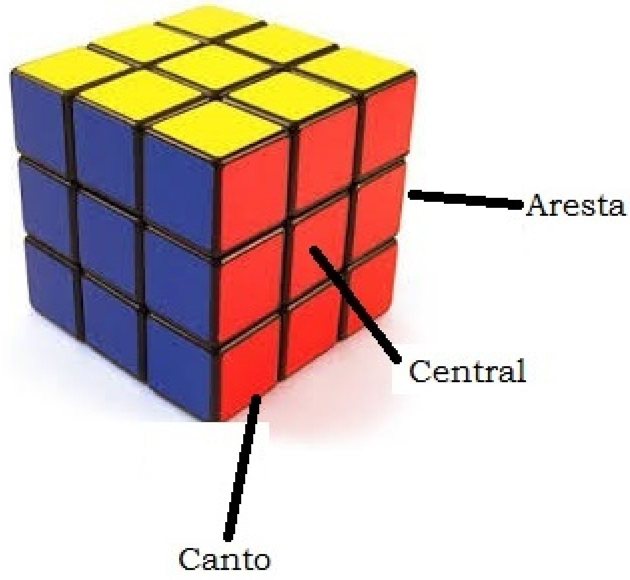


Figura 2: Tipos de cubinhos.

3.1 ERNÖ RUBIK: O INVENTOR

Nasceu em Budapeste, na Hungria, em 1944. Em 1970, tornou-se arquiteto e, três anos depois, recebeu o título de designer e se tornou professor. Em 1974, inventou o cubo mágico para ilustrar o conceito de simetria, relacionado à chamada *teoria dos grupos*. Ernö Rubik (figura 3) era apaixonado pela geometria no estudo de formas 3D, na construção e na exploração das possibilidades ocultas de combinações de formas e materiais na teoria e na prática. No decorrer de seu ensino, Ernö preferiu comunicar suas idéias com o uso de modelos reais, feitos de papel, papelão, madeira ou plástico, desafiando os alunos a experimentar, manipular formas claramente construídas e facilmente interpretadas. Esse foi o primeiro passo no longo caminho que levou ao cubo. No início do projeto, parecia impossível criar um mecanismo para sustentar os pequenos cubos devido à grande quantidade de movimentos possíveis, mas Rubik encontrou a solução enquanto observava o curso do rio Danúbio numa tarde de domingo.

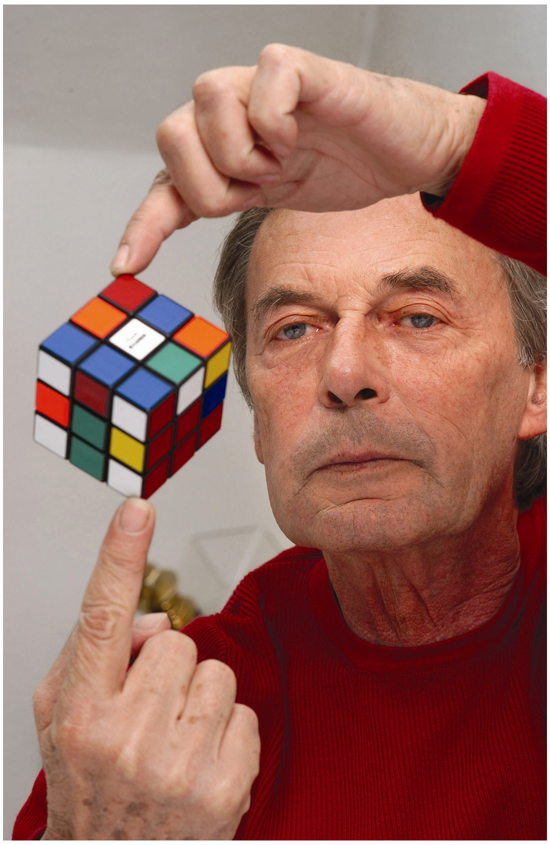


Figura 3: O inventor: Ernö Rubik.

O cubo foi criado baseado em alguns quebra-cabeças importantes: Tangram (figura 4), originado na China antiga, composto por 5 triângulos, um quadrado e um paralelogramo; o Pentomino (figura 5), inventado por Solomon Golombw, entre outros.

Em 1980, inicia-se a produção industrial e a distribuição mundial do cubo, que em dois anos vendeu 100 milhões de unidades. A Companhia de brinquedos que o produziu foi a Ideal Toys. O desejo das pessoas de ver as seis faces do cubo reorganizadas atingia todas as idades e profissões e por isso foram lançados 60 livros que ensinavam os passos dessa montagem. Segundo a lenda, Rubik demorou 1 mês para resolver o Cubo pela primeira vez. Em 1985 os direitos autorais sobre o Cubo foram comprados pela Seven Towns, que o reintroduziu no mercado. Hoje esse quebra-cabeça já se tornou um dos passatempos mais vendidos em escala global e Ernö Rubik, hoje com 70 anos, ainda se dedica a descobrir novos quebra-cabeças.

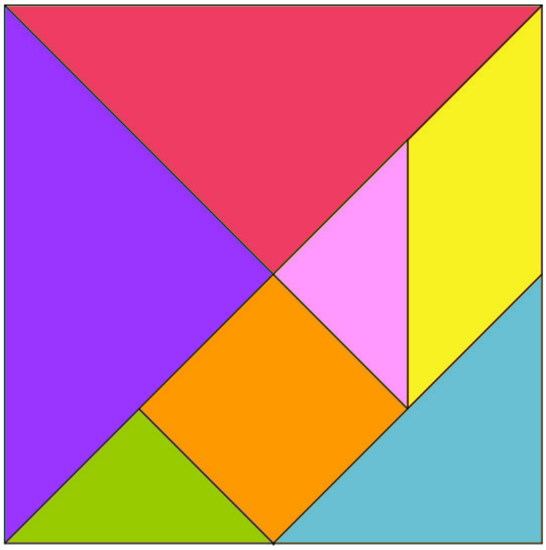


Figura 4: Tangram - fonte: http://ensinarevt.com/jogos/tangram/

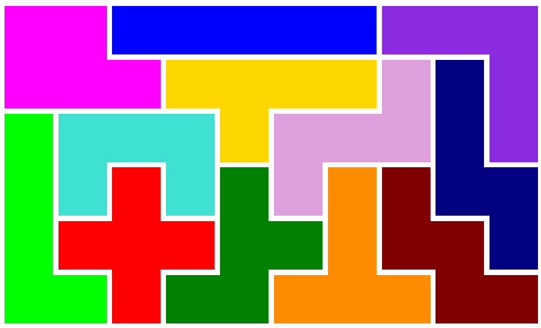


Figura 5: Pentomino - fonte: http://puzzler.sourceforge.net/docs/pentominoes.html

3.2 TEORIA DOS GRUPOS

A Teoria dos Grupos é o ramo da matemática que estuda as estruturas algébricas chamadas de grupos, é a linguagem adequada para a descrição das simetrias. Ela surgiu para encontrar raízes de equações algébricas, por Evariste Galois e outros matemáticos. O conceito de grupo é fundamental para a álgebra abstrata: as estruturas algébricas como os anéis, corpos e espaços vetoriais, podem ser vistas como grupos dotados de operações e axiomas adicionais. Axioma é algo que é admitido como verdade, sem demonstração.

Podemos dividir os grupos em discretos e contínuos. Os discretos são importantes no estudo da Mecânica Quântica, e os contínuos têm aplicações também na teoria de partículas elementares.

3.2.1 *Definição de Grupo*

Um grupo G é um conjunto de elementos que podem ser combinados por uma operação que designaremos genericamente pelo símbolo $*$ (multiplicação de grupo) e que satisfazem às seguintes propriedades:

1. FECHAMENTO: se a e b são dois elementos quaisquer de G, então seu produto $a * b$ também é um elemento de G;

2. ASSOCIATIVA: se a, b e c pertencem a G, então: $(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$;

3. ELEMENTO NEUTRO: existe um elemento I tal que, para todo $a \in$ G; $I * a = a * I = a$;

4. ELEMENTO INVERSO: todo $a \in$ G tem um elemento inverso $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I$.

Se os elementos a e b do grupo satisfizerem a propriedade COMUTATIVA , $a * b = b * a$, o grupo é dito COMUTATIVO ou ABELIANO. Se um subconjunto M' de M é fechado sob a respectiva tabela de multiplicação, ou seja, ele também é um grupo, M' é um subgrupo de M. O elemento I de qualquer grupo será sempre um subgrupo. O número de elementos do grupo M é sua ordem m, que pode ser finita ou infinita. Quando os elementos do grupo são enumeráveis, o grupo é dito discreto. Caso contrário o grupo é chamado contínuo. Exemplos:

- O conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, com a adição usual como a operação $*$ que chamamos de multiplicação, é um grupo discreto com ordem infinita, chamamos grupo aditivo de inteiros, é denotado por ($\mathbb{Z}$,+). O elemento neutro é o inteiro 0 e o elemento inverso de um inteiro n é $-n$. O conjunto dos inteiros pares 0,$\pm$2,$\pm$4,... forma um subgrupo de ($\mathbb{Z}$,+).

- O conjunto dos reais $\mathbb{R}$, com a adição usual $x + y$ como operação, é um grupo dito contínuo. O elemento neutro é 0 e inverso de x é $-x$. O grupo aditivo de inteiros ($\mathbb{Z}$,+) é um subgrupo dele. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ também é um subgrupo, pois é fechado em relação à adição, já que 0 continua sendo o elemento o elemento neutro e o elemento inverso do racional p/q (onde p e q são inteiros) é $-p/q$.

- O conjunto dos reais não nulos $\mathbb{R} - 0$, com a multiplicação usual $x.y$, é um grupo contínuo em que o elemento neutro é 1 e o inverso de x é $1/x$.

Um exemplo de grupo discreto de ordem $g = 4$ é o conjunto de elementos I, a, b, c, com a multiplicação de grupo definida pela tabela 1:
Nota-se que todas as propriedades de um grupo são satisfeitas:

- Propriedade do fechamento: a multiplicação de todos os elementos do grupo resulta em outro elemento do grupo;

*	I	a	b	c
I	I	a	b	c
a	a	b	c	I
b	b	c	I	a
c	c	I	a	b

Tabela 1: Exemplo de grupo discreto.

- Associatividade: $(a * b) * c = c * c = b$, $a * (b * c) = a * a = b$, o mesmo valendo para todos os outros elementos do grupo;
- Elemento neutro: o elemento I, multiplicado por qualquer outro dos elementos, resulta nesse último elemento;
- Elemento inverso: como $a * c = I$, $c = a^{-1}$; como $b * b = I$, $b^{-1} = b$; como $c * a = I$, $c^{-1} = a$.

3.2.2 *Representações de um grupo*

Dependendo do grupo e da situação em estudo pode-se representar os elementos de um grupo de diferentes maneiras. Por exemplo, se fizermos:

$$I = 1, \quad a = i, \quad b = -1, \quad c = -i$$

em que i se refere à unidade imaginária e $*$ sendo a multiplicação usual de números complexos, pode-se verificar que a tabela 1 é satisfeita. Esse grupo é chamado grupo cíclico, pois o produto de seus elementos exibe uma periodicidade, de forma que:

$$1 = i^0, \quad i = i^1, \quad -1 = i^2, \quad -i = i^3, \quad 1 = i^4, \quad \text{e assim por diante.}$$

Notamos que todos os elementos desse grupo podem ser obtidos a partir de potenciações do elemento i e que, a partir da quarta potência, os elementos começam a se repetir.

Outra maneira de se representar esse mesmo grupo é a partir das chamadas matrizes de rotação. Vamos supor um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Sejam (x, y) as coordenadas de um ponto qualquer nesse sistema cartesiano. Vamos, agora, supor que giramos os dois eixos desse sistema cartesiano de um ângulo θ e que, nesse novo sistema cartesiano, as coordenadas do mesmo ponto em questão sejam (x', y'), como mostrado na figura 6.

Pode-se escrever, usando trigonometria, as coordenadas (x', y') do ponto no sistema girado em termos das coordenadas em relação ao sistema original (x, y) como:

$$x' = x\cos\theta + y\text{sen}\theta \tag{1}$$
$$y' = -x\text{sen}\theta + y\cos\theta \tag{2}$$

ou, então, na forma matricial:

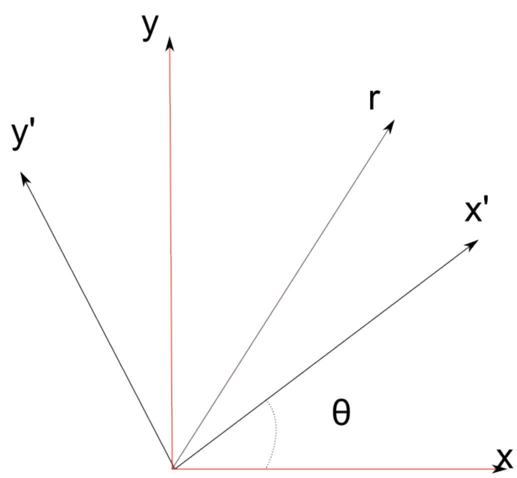


Figura 6: Rotação de sistema de eixos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Podemos, portanto, escrever essa relação como:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{r}$$

em que $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}$ são as matrizes-coluna referentes às coordenadas do ponto em questão nos sistemas girado e não girado, respectivamente e $\mathbf{R}(\theta)$ é a matriz de rotação:

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Se $\theta = \pi/2$, vemos que as matrizes:

$$\mathbf{R}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{I}, \quad \text{com } \mathsf{I} \text{ a matriz identidade,}$$

$$\mathbf{R}(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}(3\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

satisfazem todas as operações da tabela 1 e são, dessa forma, outra maneira de representar o mesmo grupo cíclico anteriormente mencionado.

Esse grupo cíclico de ordem 4 é de interesse em Física por estar associado, em Física do Estado Sólido, a rotações de $\pi/2$ nas chamadas redes de Bravais de simetria cúbica.

A teoria de grupos tem larga aplicação em diversas áreas, em campos como a cristalografia, física de partículas, teoria das cordas e em telecomunicações, além de seu envolvimento com a álgebra elementar [22].

3.3 TEORIA DE GRUPOS E O CUBO MÁGICO

O Cubo de Rubik, bem como outros jogos similares, são conhecidos como jogos de permutação, porque são baseados em movimentações, ou permutações, das partes do quebra-cabeça – no caso do cubo de Rubik, os pequenos cubos. Resolver o Cubo de Rubik nada mais é, então, do que encontrar, dentre todas as permutações possíveis, aquelas que permitem restaurar o cubo à sua configuração "virgem", ou seja, com uma única cor por face. Pode ser desafiador e de grande utilidade didática para estudantes, pesquisadores e cientistas, familiarizarem-se com a maneira pela qual os grupos se comportam. Desvendar uma solução para o Cubo é uma extraordinária forma de as pessoas sentirem como os elementos de um grupo qualquer podem ser combinados.

Uma permutação é um rearranjo de um conjunto de objetos. Por exemplo: tomemos o conjunto $(1,2,3)$. Se quisermos construir todas as permutações possíveis dele podemos tomar qualquer um dos três números e colocá-lo como o primeiro da lista: temos 3 possíveis escolhas. Depois, para escolher o segundo número da lista, não temos mais três opções, mas apenas duas, dado que um dos números já havia sido escolhido como o primeiro. Finalmente, sobra uma única possibilidade para o terceiro número. O número total de possibilidades será dado pelo produto $3 \times 2 \times 1$, ou 3! (lê-se **3 fatorial**) e vale seis. Não é muito difícil verificar que esse número está correto escrevendo explicitamente as permutações possíveis: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$. Um exercício frequentemente proposto pelos professores de Matemática para seus alunos é calcular o número total possível de anagramas, ou seja, permutações com as letras que compõem um nome. Por exemplo: Brasil – seis letras. Assim, procedendo segundo o mesmo método que acabamos de utilizar, chegamos à conclusão que se trata de $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ anagramas.

Pode-se representar uma permutação da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

significando que o elemento que estava na posição 1 vai para a posição 2 (primeira coluna), o que estava na posição 2 vai para a posição 1 (segunda coluna), e assim por diante. Se, por exemplo, tivermos quatro caixas cada uma contendo uma bola diferente, fazer uma permutação significa retirar todas de dentro das caixas e recolocá-las na mesma caixa ou em uma caixa diferente, cada caixa contendo exatamente uma bola. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

significa que a bola que estava na caixa 1 vai para a caixa 3, a que estava na caixa 2 permanece nessa mesma caixa, a bola que estava na caixa 3 vai para a caixa 4 e a bola que estava na caixa 4 vai para a caixa 1. Notando que a bola da caixa 2 permanece onde está, podemos representar o movimento das demais bolas por:

$$\sigma : 1 \to 3 \to 4 \to 1$$

ou, ainda:

$$\sigma = (1\,3\,4)$$

representando uma permutação cíclica delas: a bola da caixa 1 vai para a caixa 3, a da caixa 3 vai para a caixa 4 e a da caixa 4 vai para a caixa 1. Os seguintes ciclos são todos iguais:

$$\sigma = (1\,3\,4) = (3\,4\,1) = (4\,1\,3)$$

Uma das vantagens no uso da notação de ciclos é a simplificação da notação. Por exemplo, em vez de escrevermos:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

podemos escrever:

$$\rho = (1\,2)(4\,6\,5)$$

Na chamada *notação canônica por ciclos* o primeiro termo do ciclo deve ser, sempre, o de menor valor. Certos conjuntos de permutações também formam grupos. A operação $*$, nesse caso, nada mais é que aplicar a primeira permutação, seguida da segunda. Ou seja, se a for uma permutação e b outra, então $a * b$ consiste em aplicar a e, depois, aplicar b, abreviado, simplesmente, por ab.

Veremos agora a relação entre a teoria de grupos e a solução do Cubo Mágico.

3.4 AS FACES DO CUBO E SEUS MOVIMENTOS

É usual indicar as faces do Cubo pela primeira letra de seus respectivos nomes: Frente (F), Cima (C), Baixo (B), Direita (D), Esquerda (E) e Atrás (A). Chamamos de frente a face do cubo que fica sempre voltada para nossa direção.

Cada face pode ser girada tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário. Costuma-se indicar os respectivos movimentos de um quarto de volta em sentido horário por F, B, D, C, E, A, ou seja, F refere-se à rotação horária da face Frontal de um ângulo de 90°; a mesma convenção se aplica às outras faces. Por outro lado, indicamos os movimentos em sentido anti-horário um quarto de volta por FA, BA, DA, CA, EA, AA. Por outro lado, FA consiste em girar a face Frontal de 90° em sentido anti-horário, ou seja, FA é o inverso de F; novamente, o mesmo se aplica às demais faces. Os movimentos alteram a configuração das facetas dos cubinhos, mas preservam a forma geral do Cubo, por isso são chamados SIMETRIAS do Cubo. Nem todas as configurações são possíveis, há restrições obvias, como: cubinhos de arestas não podem ser trocados com os de canto, os de meio não podem ser trocados nem com os de aresta, nem com os de canto.

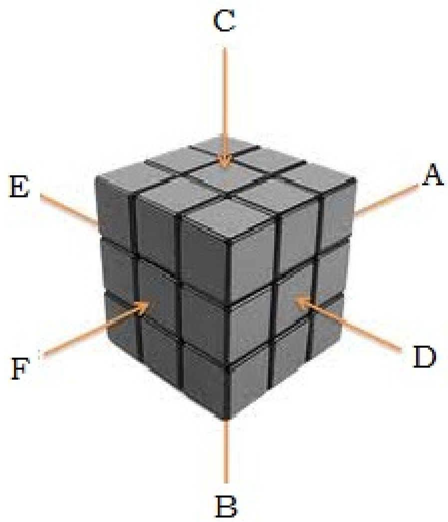


Figura 7: Indicação das faces do Cubo.

Normalmente, para ordenar o Cubo é preciso fazer vários movimentos em sequência, por exemplo, F seguido de D seguido de B e, às vezes, tem-se que memorizar essas sequências inteiras para poder repeti-las rapidamente. Podemos simplesmente escrever a sequência como F D B, como se fôssemos multiplicar F por D por B. Podemos também atribuir letras a uma sequência longa finita que possua dois ou mais movimentos, por exemplo W=F D B: executar W significa fazer F depois D depois B. A isto, chamamos de Macro. Uma macro também pode consistir de outras macros: se T=W D W, então executar T significa fazer F D B D F D B. As macros podem ser úteis na ordenação do cubo Mágico. Um movimento muito importante também é aquele que não altera o Cubo, que volta na mesma posição que estava, esse movimento é indicado por I, e o chamamos de IDENTIDADE. Por exemplo, se fizermos F FA, isso será I, pois fazer F seguido de FA é o mesmo que não fazer nada com o Cubo, pois ele volta para a posição inicial; o mesmo acontece com (F D B) (BA DA FA)=I. Se W=F D B , então WA=BA DA FA, pois faz o oposto de W. Portanto, para desfazer uma sequência de movimentos, devemos executar em ordem reversa os opostos dos movimentos individuais. Em relação aos movimentos repetitivos, como F F, convém indicar por F^2, F F F por F^3, DB DB DB por DB^3 e assim por diante. É interessante observar que, para qualquer movimento individual repetido 4 vezes, o cubo volta à posição inicial. Exemplo: F^4 = I, B^4= I, D^4= I, E^4=I e C^4= I. Portanto, dizemos que esse movimentos têm ordem 4. Por outro lado, todo movimento repetido 3 vezes é o mesmo que fazer um movimento anti-horário, exemplo: F^3 = FA, B^3= BA, D^3= DA, E^3= EA e C^3= CA . A macro S=E^2 F^2 tem ordem 6, a macro T=E F tem ordem 105. É só testar com o Cubo para verificar outras ordens. Resumindo: Seja P uma macro qualquer; P altera a configuração das facetas e se fizermos P P P . . . , em algum momento vamos certamente repetir uma configuração, pois há um número finito de facetas. Portanto, a configuração S^m movimentos, se repetirá para S^n movimentos, com $m, n \in \mathbb{N}^*$. Logo S^{n-m}=I. Chamamos de q o número de quartos de volta que uma sequência faz.

Comutatividade é a lei familiar da aritmética: "a ordem dos fatores não altera o produto": por exemplo, $5 \times 6 = 6 \times 5$. No Cubo, há alguns movimentos comutativos, por exemplo D E=E D, C B=B C, pois as faces não são adjacentes. Para as faces adjacentes, F D$\neq$ D F, esse fenômeno chamamos de não-comutatividade, e são esses movimentos que tornam o Cubo um quebra-cabeça interessante, que trabalha com o desenvolvimento do raciocínio lógico, coordenação motora e visuo-manual.

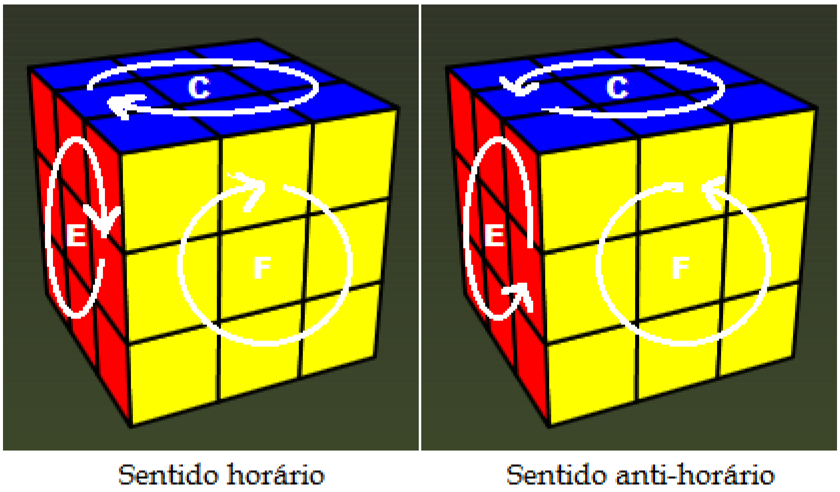


Figura 8: Sentidos horário e anti-horário.

O conjunto de todas as permutações das facetas do Cubo de Rubik forma um grupo $\mathcal{R}$, o *grupo de Rubik*. Esse grupo consiste dos movimentos F, B, D, C, E, A e de todas as macros S, assumindo que duas macros que produzem o mesmo resultado são iguais (F e F^5) e são o mesmo elemento do grupo $\mathcal{R}$. Nesse grupo, a ordem dos fatores é importante, ou seja, o grupo não é comutativo: FB$\neq$BF, por exemplo. O número total de elementos do grupo $\mathcal{R}$ é o número total de configurações do Cubo. No Cubo de Rubik, o número total de combinações distintas dos pequenos cubos é finito (apesar de o conjunto de todas as sequências permitidas para movimentar o Cubo ser infinito), mas gigantesco: 43.252.003.274.489.856.000 [25], de forma que, se nos dispuséssemos a organizar todas as combinações possíveis do Cubo de Rubik, fazendo uma combinação por segundo, sem repetição, necessitaríamos de cerca de 13,7 trilhões de séculos (!) para concluir a tarefa. Esse número pode ser facilmente calculado a partir do seguinte raciocínio:

- permuta-se os oito vértices do cubo, ou seja, temos 8! permutações possíveis;
- temos 12! permutações possíveis das doze arestas;
- entretanto, apenas metade das possibilidades possíveis é verdadeira, uma vez que não é possível permutar duas arestas sem trocar a posição de dois vértices e vice-versa;

- também é possível girar todos os vértices do cubo, exceto um, sem que nada mais mude no cubo. Dado que a orientação do último vértice será determinada pela orientação dos demais, temos 3^7 orientações distintas para os vértices;

- o mesmo vale para a orientação das arestas. Assim, temos 2^{11} possibilidades para elas.

Dessa forma, o número total de combinações no cubo mágico será:

$$\frac{8! \cdot 12! \cdot 3^7 \cdot 2^{11}}{2} = 43.252.003.274.489.856.000$$

Entretanto, apesar da magnitude astronômica desse número, não é difícil delinear uma solução para o cubo. Para isso, deve-se descobrir várias pequenas sequências de movimento para concluir tarefas específicas. A ideia é combinar as sequências sistematicamente para restaurar um cubo desordenado na sua configuração original. Assim, geralmente por tentativa e erro, acaba-se por encontrar sequências úteis que facilitam a solução do Cubo. Isso se deve à álgebra elementar à qual o Cubo de Rubik pertence, os chamados grupos simétricos, que são os grupos de todas as permutações de um determinado número de elementos, e seus aparentados, os grupos alternados, que contêm metade dos elementos do grupo simétrico correspondente. Assim, por exemplo, o grupo simétrico S_3 contém $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ elementos, ou seis permutações possíveis de três elementos e o grupo alternado A_3 possui três elementos. Dentre os conjuntos simétricos relacionados ao Cubo de Rubik está o grupo simétrico S_8, que contém todas as $8! = 40.320$ maneiras segundo as quais se pode arranjar os cubinhos dos cantos, e o grupo simétrico S_{12}, que contém todas as 479.001.600 maneiras de as doze arestas dos pequenos cubos serem posicionadas.

3.5 MÉTODOS DE SE MONTAR O CUBO MÁGICO

Embaralhar o Cubo significa aplicar uma sequência aleatória de movimentos S a um Cubo resolvido e resolver esse cubo significa encontrar alguma sequência de movimentos T, tal que S T=I. Mas resolver um Cubo não é necessariamente desembaralhar, pois T não precisa ser igual a S^{-1}. Por exemplo, se S= $(FEC)^{42}$, então $S^{-1} = C^{-42}\ E^{-42}\ F^{-42}$ quanto T=F E C^{-1} E^2 C^2 E^2 C F^{-1} C^2 E^{-1} C F^2 C^2 F^2 C^{-1} também resolvem esse Cubo, só que S^{-1} tem 126 q, enquanto T tem apenas 22 q. O desafio de resolver um Cubo mágico, também está no seu tempo, quanto mais rápido, melhor. É interessante notar que T S=I T S = S^{-1} S T=S^{-1} I S=I e, portanto S=T^{-1}.

Os métodos comuns de se resolver um cubo Mágico são:

- Método Empírico - é o método adotado pela maioria das pessoas. É demorado, mas com muita perseverança pode-se chegar lá. Esse método é mais conhecido como tentativa e erro;

- Método Estratégico - quando se usa um conjunto de macros para realizar tarefas específicas, a fim de chegar gradativamente à solução. Esse é o método que ensino para os alunos, que memorizam essas macros e conseguem participar de campeonatos;

- Método Algébrico - encontrar a solução fazendo cálculos. Requer conhecimentos da Teoria de Grupos, que apresentamos, anteriormente, neste trabalho.

3.6 RESOLVENDO O CUBO MÁGICO POR UM MÉTODO ESTRATÉGICO

A estratégia será a de resolver o Cubo Mágico por camadas. Eu uso essa estratégia há alguns anos com os alunos. Todo ano, um mês antes de acabar o primeiro semestre, começo a ensinar a resolver o cubo, que dura aproximadamente vinte dias. No começo os alunos sentem muita dificuldade em manuseá-lo, mas em pouco tempo pegam o jeito. Depois faço um campeonato, onde a escola toda assiste, com direito a medalhas e prêmio para o primeiro colocado.

Vamos começar:

1º PASSO - FAZER A CRUZ AZUL

Como o cubinho do centro é invariante por rotação da face em que está, a cor da face será a mesma que a dele. Pode-se começar por uma cor qualquer, mas como em sala se ensina para um número grande de alunos, é melhor estipular a cor para iniciar. Então comece pela face azul. Vire a face azul para cima e arrume as quatro arestas, formando uma cruz azul. É sempre bom lembrar que cada aresta tem que ter a cor azul e a outra de acordo com o meio de cada uma das quatro faces adjacentes – figura 9.

Figura 9: Cubo mágico com a cruz azul pronta. Note que a outra cor do cubinho de aresta é a mesma da face adjacente. Isso acontece em todas as faces do cubo.

Se a aresta dessa cruz estiver com as cores invertidas, é só posicionar o cubo com a peça virada para você e fazer o seguinte movimento: FA C EA CA, basta um único movimento para a peça se posicionar.

2º PASSO - COLOCAR OS CANTOS DA CRUZ AZUL

Depois da cruz azul feita, arrume os quatro cantos dessa camada. Esses cantos deverão estar na camada de baixo, que será a face verde. Sem virar o Cubo, deixando a face azul para cima, observe um canto debaixo que possui como uma das cores a azul e identifique quais são as outras duas cores – figura 10. Posicione esse canto exatamente abaixo do canto que ele deve ser e faça o seguinte movimento: DA BA D B.

Figura 10: Cubo mágico com o cubinho que possui como uma de suas cores a azul, bem como as cores das outras duas faces, posicionado abaixo de onde deverá ficar.

Esse movimento pode ser feito até quatro vezes, até que o canto suba na posição correta. Com o tempo os alunos percebem que é possível cortar caminhos, reparando na posição do canto. Repete-se o movimento para os outros quatro cantos. Depois dessa etapa, a face azul estará pronta.

3º PASSO - ARRUMAR A CAMADA DO MEIO

Arrume agora a camada do meio e para isso, vire a face azul para baixo. Observe na camada superior, quais arestas não possuem a cor verde, pois essas fazem parte da camada do meio – figura 11. Olhando uma aresta que não tem verde, coloque-a exatamente sobre o meio da mesma cor e verifique se essa aresta deverá cair à direita ou à esquerda e faça o movimento adequado:

Para DIREITA: C D CA DA CA FA C F
Para ESQUERDA: CA EA C E C F CA FA

Figura 11: Cubo mágico pronto para iniciar o 3º passo. Note que a aresta circulada não possui a cor verde e, neste caso, deverá se movida à direita.

Repita esse procedimento com todas as arestas que não possuem a cor verde e você verá que a camada do meio ficará toda organizada.

4º PASSO - FAZER A CRUZ VERDE

Arrume agora a camada restante, que será a face verde. A pior maneira que a face pode estar agora é somente com o centro de cor verde. Faça o movimento: F D C DA CA FA e aparecerão mais duas arestas com a cor verde, formando um L. Deixe esse L na posição invertida 180º e arrume essas arestas com a mesma cor do centro da camada do meio e faça novamente o movimento – figura 12.

Figura 12: Cubo mágico com o L na posição invertida 180º e as arestas com a mesma cor do centro da camada do meio

Agora aparecerão duas arestas com verde, mas elas estarão alinhadas com o centro, formando uma linha – figura 13. Deixe essa linha paralela a você e faça novamente o mesmo movimento, onde aparecerá, finalmente, a cruz verde. Às vezes alguma(s) dessas passagens para fazer a cruz verde pode(m) ser pulada(s), ou seja, passar diretamente para a próxima.

Figura 13: Cubo mágico com uma linha verde paralela ao jogador na face superior.

5º PASSO - ALINHAR A CRUZ VERDE

Essa cruz verde terá duas arestas pelo menos que estarão na posição certa em relação à cor do cubinho do centro da camada do meio – figura 14. Coloque essas arestas corretas na posição traseira e à direita, faça esse movimento: D C DA C D C C DA e a cruz verde ficará com todas arestas alinhadas.

Figura 14: Cubo mágico com duas arestas na posição correta. Essas arestas deverão ser colocadas na posição traseira e à direita.

6º PASSO - COLOCAR OS CANTOS NOS LUGARES CERTOS

Basta agora arrumar os cantos dessa face verde. Observe um canto que esteja no lugar certo, como na figura 15, mesmo que ele esteja virado e traga-o para sua frente do lado direito e faça o movimento: C D CA EA C DA CA E.

Figura 15: Cubo mágico, mostrando, no primeiro plano, com um canto no lugar certo, mas não na posição correta.

Esse movimento deverá ser feito até os quatro cantos ficarem exatamente em seu lugar, mesmo que esteja na posição errada.

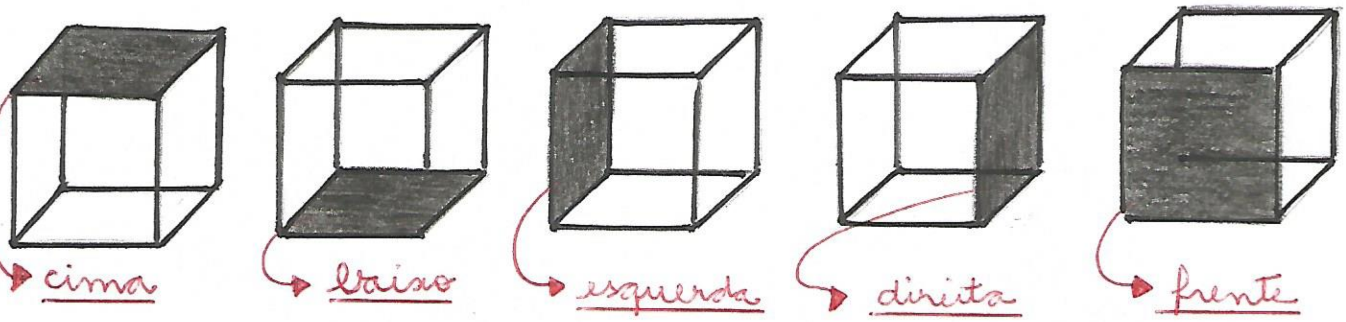
7º PASSO - COLOCAR OS CANTOS NA POSIÇÃO CERTA

Observe bem a cor da face que está virada para você, pois ela ficará assim até o final. Faça o seguinte movimento para o canto virar de posição: DA BA D B. Muito importante é fazer a sequência inteira dos quatro movimentos, mesmo que antes o canto já esteja na posição correta. Depois de arrumar um canto, vire somente a camada superior, trazendo o outro canto desalinhado para sua direita e repita o movimento. Faça isso para todos os cantos e o Cubo estará todo reorganizado – figura 16.

Figura 16: Cubo mágico pronto.

A folha seguinte é a utilizada por mim com os alunos em sala de aula. Os alunos memorizam esses movimentos em pouco tempo.

Cubo mágico 3 x 3



obs: A → anti-horário ↺

A cor da peça do meio é a cor do lado

↑EA ↓E ↓DA ↑D

1º lugar: Fazer a cruz azul

Tirar a peça da cruz: FA C ↑EA CA

2º lugar: Colocar os cantos da cruz azul

↓DA BA← ↑D B→

3º lugar: Arrumar os meios

p/ direita: C ↑D CA ↓DA CA FA C F

p/ esquerda: CA ↑EA C ↓E C F CA FA

4º lugar: Fazer a cruz verde

F ↑D C ↓DA CA FA

Etapas:

5º lugar: Alinhar a cruz verde

↑D C ↓DA C ↑D C C ↓DA

6º lugar: Colocar os cantos nos lugares certos

C ↑D CA ↑EA C ↓DA CA ↓E

obs: trazer o canto certo para você

7º lugar: Cantos posição certa

↓DA BA← ↑D B→

obs: trazer o canto errado para você

PROFª CLÁUDIA

3.7 VARIANTES DO CUBO MÁGICO

Existem diversos outros quebra-cabeças que foram criados como variantes do cubo mágico. Eis alguns deles:

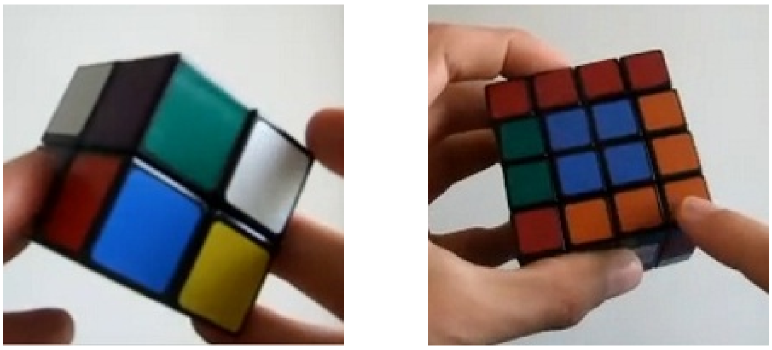


Figura 17: Cubo mágico $2 \times 2 \times 2$ (à esquerda) e $4 \times 4 \times 4$ (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

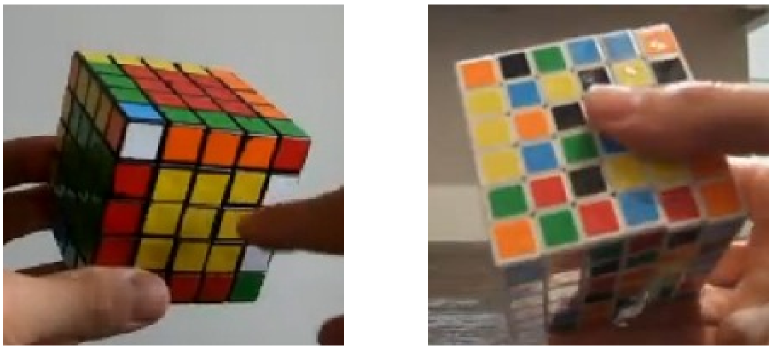


Figura 18: Cubo mágico $5 \times 5 \times 5$ (à esquerda) e $6 \times 6 \times 6$ (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

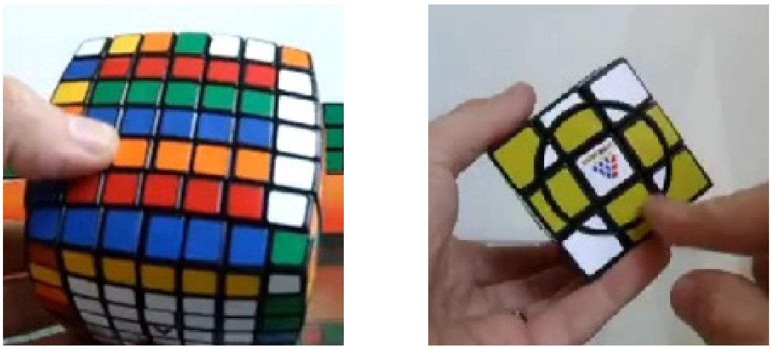


Figura 19: Cubo mágico $7 \times 7 \times 7$ (à esquerda) e Super $3 \times 3 \times 3$ (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

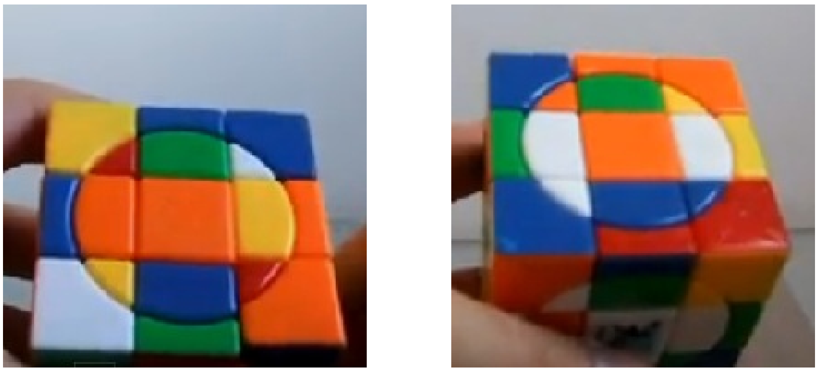


Figura 20: Cubo mágico Crazy Jupiter $3 \times 3 \times 3$ (à esquerda) e Crazy Urano $3 \times 3 \times 3$ (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

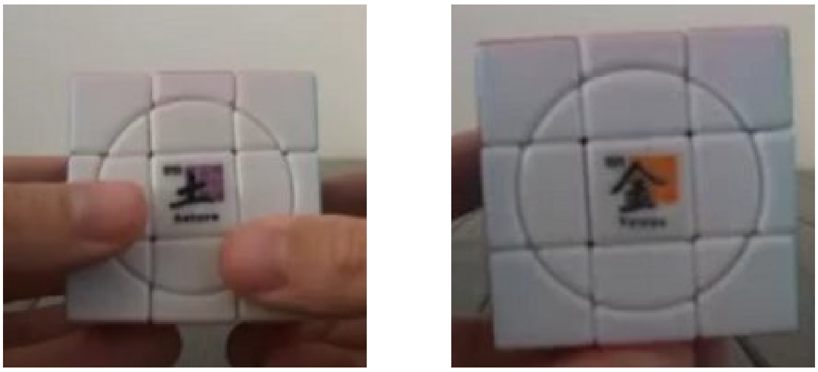


Figura 21: Cubo mágico Crazy Saturno $3 \times 3 \times 3$ (à esquerda) e Crazy Vênus $3 \times 3 \times 3$ (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

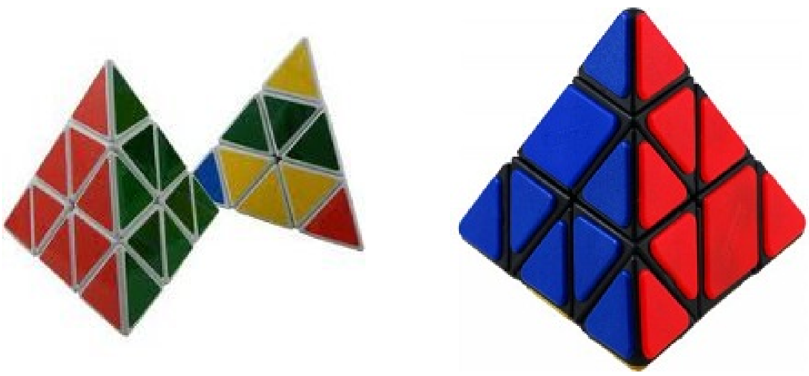


Figura 22: Pyraminx (à esquerda) e Bandaged Pyraminx (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

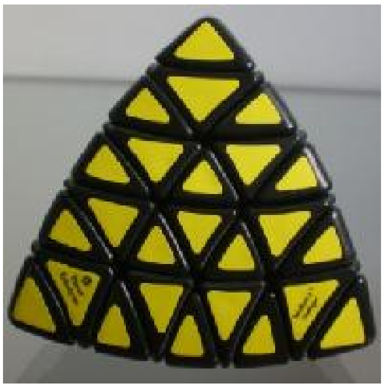
 

Figura 23: Vulcano (à esquerda) e Professor Pyraminx (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

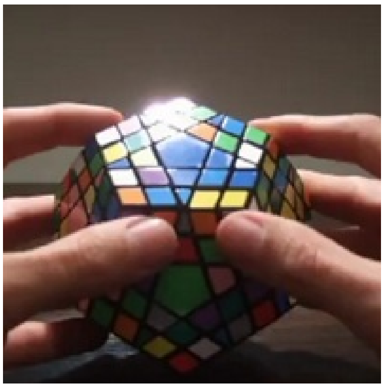
 

Figura 24: Gigaminx (à esquerda) e Square-1 (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

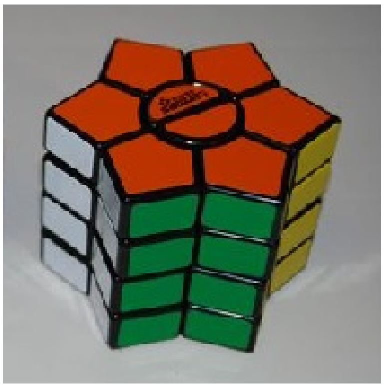
 

Figura 25: Super Square-1 (à esquerda) e Star Prisma (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

Figura 26: Square-2 (à esquerda) e Cubo Mágico Mirror Blocks (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

Figura 27: Void Cube (à esquerda) e Void Cube meios (à direita). Fonte: http://www.cinoto.com.br/website/index.php/tutoriais-96.

3.8 curiosidades acerca do cubo mágico

1. Em 2011 foi criado um robô feito com peças de Lego e um celular da Samsung que resolvia o cubo mágico em questão de segundos, mas três anos depois os engenheiros David Guilday e Mike Dobson criaram o robô CUBESTORMER 3 – figura 28. Esse projeto durou 18 meses, pois eles o faziam nas horas livres do trabalho. Esse robô resolve um cubo mágico em 3,253 segundos, 62% mais rápido que o anterior. O tempo recorde feito pelo humano Mats Valk é de 5,55 segundos, isso ocorreu em março de 2013. O robô possui seis braços, é utilizado oito LEGO MINDSTORMS EV3 e outras peças de robótica Mindstorms nesse projeto. Esse robô recordista é a terceira versão desse projeto. O CUBESTORMER 3 é comandado por um smartphone Galaxy 4 com o processador Exynos 5 Octa (quatro núcleos ARM Cortex-A15 e mais quatro Cortex-A7 de menor intensidade). Um aplicativo personalizado para Android faz a análise do cubo mágico e dos movimentos a serem feitos a partir de um algoritmo e envia as ações necessárias para a unidade de movimento. A configuração da comunicação entre aparelhos e

motores é tida como a operação mais complicada. Agora, a próxima conquista é o robô CUBESTORMER 4, com o tempo de montagem ainda menor.

Figura 28: O robô Cubestormer 3. Fonte: http://www.justsaying2u.com/2014/12/advent-count-down.html.

2. O cubo mágico já foi estrela de cinema na comédia "Cara, cadê meu carro?" (2000) – figura 29. Ele era um objeto que destruía o mundo.

Figura 29: Cena do filme "Cara, cadê meu carro?". Fonte: http://guiadoscuriosos.com.br/blog/2014/05/19/40-curiosidades-dos-40-anos-do-cubo-magico/

3. No filme "À Procura da Felicidade" (2006), o personagem interpretado por Will Smith consegue um emprego após impressionar um executivo resolvendo o cubo mágico em pouco tempo – figura 30.

4. Um site registrou todas aparições do cubo mágico nas telas de cinema: mais de 20 aparições.

5. Em 1981, o grupo britânico de pop The Barron Knights lançou a música "Mr. Rubik". A música fala sobre uma pessoa que enlouquece depois de brincar com um cubo mágico.

Figura 30: Cena do filme "À Procura da Felicidade". Fonte: http://guiadoscuriosos.com.br/blog/2014/05/19/40-curiosidades-dos-40-anos-do-cubo-magico/

6. O compositor Graham Parker passou 26 anos tentando resolver o cubo mágico. O inglês comprou o objeto em 1983, aos 33 anos, e só conseguiu resolvê-lo em janeiro de 2009, aos 59.

7. Em 2011, o coletivo Cubeworks recriou mais de 40 obras de arte famosas usando apenas cubos mágicos – figura 31.

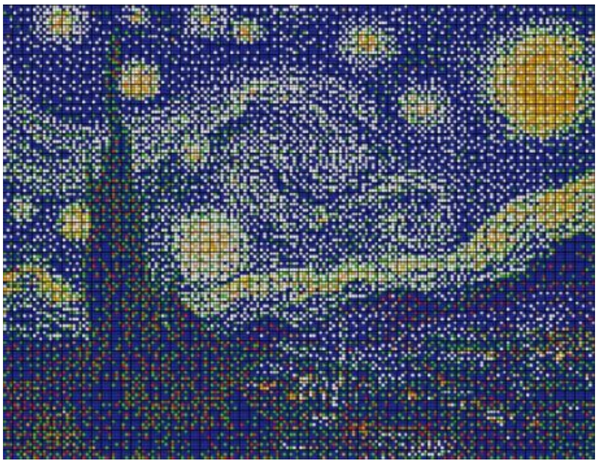


Figura 31: O quadro "Noite Estrelada", de Vincent van Gogh, recriado pelo coletivo Cubeworks, utilizando cubos mágicos. Fonte: http://guiadoscuriosos.com.br/blog/2014/05/19/40-curiosidades-dos-40-anos-do-cubo-magico/

8. Em homenagem ao mês da História Negra, em fevereiro deste ano, e ao ex-presidente da África do Sul, Nelson Mandela, estudantes da Rice University, nos Estados Unidos, criaram um mosaico da imagem de Mandela com o uso de 600 cubos mágicos – figura 32. A obra está exposta no prédio de Pesquisa em Biociência da Universidade.

Figura 32: Imagem de Nelson Mandela recriada com cubos mágicos. Fonte: http://guiadoscuriosos.com.br/blog/2014/05/19/40-curiosidades-dos-40-anos-do-cubo-magico/

9. Em 2007, dois cientistas da Universidade de Northeasterm, nos Estados Unidos, chegaram a um algoritmo capaz de resolver qualquer combinação do cubo mágico em, no máximo 26 movimentos.

10. Nos Estados Unidos, os obcecados pelo cubo mágico são chamados de “cubaholics”. Por ficarem horas jogando, essas pessoas acabam desenvolvendo dores no pulso e nos polegares.

11. O cubo mágico mais caro do mundo batizado de Masterpiece Cube (cubo obra-prima), foi feito por Fred Cueller, da Associação Internacional dos Lapidadores de Diamantes, para celebrar o 15° aniversário do inverno de Rubik, em 1989 – figura 33. Para a confecção da jóia, foi usado um bloco de 18 quilates de ouro sólido, incrustado com 22,5 quilates de ametista, 34 quilates de rubis e 34 quilates de esmeralda verde. A peça é avaliada em 1,5 milhão de dólares.

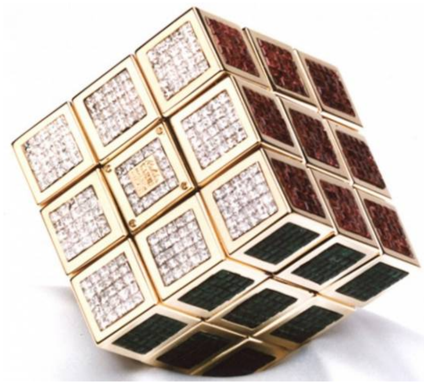


Figura 33: O cubo mágico mais caro do mundo, batizado de “Masterpiece Cube”. Fonte: http://guiadoscuriosos.com.br/blog/2014/05/19/40-curiosidades-dos-40-anos-do-cubo-magico/

12. O maior cubo mágico do mundo fica em Knoxville, cidade do estado norte-americano do Tennessee. O gigante tem 3 metros de altura e pesa cerca de 500 kg.

13. Até 2011, o menor cubo mágico do mundo tinha 10mm de largura, construído pelo russo Evgeniy Grigoriev, mas o artista superou seu próprio recorde, criando um mini cubo mágico que pode ser impresso por impressora 3D. A miniatura funciona igual a qualquer cubo mágico.

14. Uma criança chinesa de 3 anos ganhou fama na internet depois de conseguir resolver o cubo mágico em apenas 114 segundos.

15. Em 1981, Patrick Bossert lançou o livro "You Can Do The Cube" (Você Consegue Resolver o Cubo), que vendeu 1,5 milhão de exemplares – figura 34.

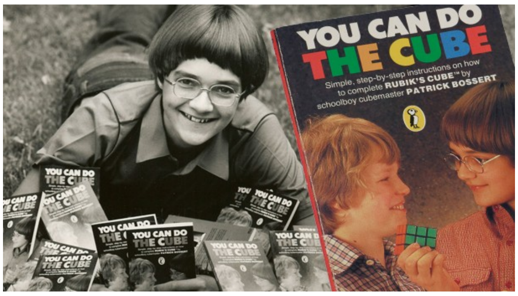


Figura 34: O livro "You Can Do The Cube". Fonte: http://guiadoscuriosos.com.br/blog/2014/05/19/40-curiosidades-dos-40-anos-do-cubo-magico/

16. A empresa alemã de Konstantin Datz inovou em nome da inclusão e criou uma versão do cubo mágico adaptado a deficientes visuais – figura 35. Essa adaptação, em vez de cores, usa palavras em braille nos quadradinhos. Desta forma, o jogador só precisa combinar as mesmas palavras juntas de cada lado do cubo.

Figura 35: No lugar das cores, o cubo mágico adaptado tem palavras em braille. Fonte: http://epocanegocios.globo.com/Revista/Common/0,,EMI127382-16352,00-EMPRESA+INVENTA+CUBO+MAGICO+PARA+CEGOS.html

17. No dia 19 de maio de 2014, o buscador de internet Google celebrou os 40 anos do Cubo Mágico em sua página principal com um *doodle*, como costumam chamar. Esse *doodle* ainda pode ser acessado: `https://www.google.com/logos/2014/rubiks/rubiks.html`, e permite, inclusive, uma resolução virtual do Cubo Mágico.

4 OS CAMPEONATOS DE CUBO MÁGICO

4.1 CAMPEONATOS OFICIAIS DE CUBO MÁGICO

A prática de se resolver cubo mágico, apesar de não reconhecida oficialmente como é o enxadrismo, pode, sim, ser considerada como esporte, pois, assim como o xadrez, envolve lógica e raciocínio, apesar de ser um jogo individual, diferentemente do xadrez, que é em dupla. Os aficcionados por cubo mágico não reduzem a resolução do quebra cabeça em uma simples brincadeira ou um hobby de final de semana. Eles organizam campeonatos no mundo todo com uma série de regras e várias categorias. A modalidade mais básica é descobrir quem resolve um cubo mágico em menor tempo possível. As habilidades físicas, nesse tipo de disputa, não tem o menor valor. O importante é pensar, dominar as técnicas e ser ágil. Por isso, existem competidores de todas as idades. E, por se tratar de uma atividade essencialmente de raciocínio, estudantes em busca de rapidez e agilidade nos estudos estão começando a descobrir esse esporte. Em 1982 aconteceu o primeiro campeonato mundial de cubo mágico na cidade de Budapeste e os resultados foram válidos para o ranking atual. A partir de então, ocorreram alguns eventos isolados. Porém, foi apenas em 2003 que se organizou novamente um campeonato de cubo mágico, já com uma nova geração de cubistas, que fez despertar a necessidade de se criar regras e também um ranking. Daí surgiu em 2004 a WCA (World Cube Association) que desde então gerencia os resultados e os recordes dos campeonatos do mundo todo através de "delegados" nomeados pela associação.

No Brasil, o primeiro campeonato oficial ocorreu em 2007, em Sumaré-SP. Em 2008, ocorreu outro, em Uberlândia-MG. Em 2009, foram 4: em janeiro aconteceu o São Paulo Open, em julho o Brasília Open, em novembro o Unesp Open em São José do Rio Preto e, em novembro, também aconteceu o UniverCidade Open, no Rio de Janeiro. Em 2010, aconteceram o ABC Open, em São Bernardo do Campo, o Colégio Cidade Open, no Rio de Janeiro e o Sesc/ Santos em Santos-SP. Hoje o Brasil tem 2 delegados e os campeonatos possuem 17 categorias. O número de participantes em campeonatos oficiais no Brasil é de mais de 800, sendo que o Brasil está em 6° lugar no mundo em número de competidores.

No dia 27 de julho de 2014, no campeonato de Cubo Mágico Nova Odessa Open 2014, evento internacional organizado pela Secretaria de Educação da cidade paulista, o estudante Gabriel Pereira Campanha, de 15 anos, bateu o novo recorde mundial, montando **com os pés** em 25 segundos e 15 milésimos. Ele mora em Osasco-SP e sua marca anterior era de 27 segundos e 17 milésimos. No total, participaram 122 inscritos de 15 cidades diferentes, em nove modalidades. O estudante , que começou a se interessar pelo cubo mágico há menos de quatro anos, conta que preferiu se especializar na montagem com os pés pela dificuldade.

Em 9 de novembro de 2014 realizou-se um campeonato na Escola Joana D´Arc Open 2014 e foi reconhecido internacionalmente pela Associação mundial de Cubo Mágico (WCA) e os resultados fizeram parte do ranking oficial. No campeonato, os cubos são embaralhados aleatoriamente, de acordo com um embaralhamento oficial gerado por um programa de computador. Todos os competidores recebem o cubo embaralhado da mesma forma e isso é feito 5 vezes para cada competidor, cada um com seu próprio cubo. Ao final das 5 tentativas, descartam-se o melhor e o pior tempo e calcula-se a média dos 3 tempos restantes. Quem tiver a menor média é o campeão daquela modalidade. O próprio competidor cronometra seu tempo e tem direito a 15 segundos para inspecionar o cubo antes de disparar o cronômetro. Para motivar os cubistas, existem prêmios simbólicos para os três primeiros colocados.

O clima das competições tanto no Brasil como no exterior é muito agradável, todos se divertem e torcem pelos outros competidores, trocam idéias de algoritmos, fazem brincadeiras com modalidades não oficiais. Os campeonatos são organizados, profissionais, estimulantes e educativos.

Esse ano, nos dias 16 e 17 de maio, aconteceu o Open Cubo Mágico Oficina 2015 no Colégio Oficina do Estudante, em Campinas (SP). Essa competição teve 187 categorias diferentes, incluindo a resolução com os pés, com os olhos vendados, com apenas uma mão e de cubos dos tipos $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$ e $7 \times 7 \times 7$. Um dos organizadores do torneio foi o Campeão Rafael Cinoto, 3° lugar no mundo em montagem com os pés. Participaram desse campeonato 62 pessoas e o campeão do Cubo $3 \times 3 \times 3$ foi o catarinense Christian de Sena, de 18 anos. Engana-se quem pensa que o rapaz tenha o boletim repleto de notas dez. Sena sequer era da turma da frente no colégio. Muito pelo contrário, tinha uma dificuldade tremenda em acompanhar a turma, tanto que no 2° ano ficou de recuperação em seis disciplinas. Sena percebeu que o Cubo Mágico o ajudou a melhorar na escola. Ao final de 2014, o rapaz já era um dos melhores do país no cubo mágico e acabou ficando de exame em apenas uma matéria, segundo ele, “do professor mais rigoroso de todos”. “Sem dúvida, o cubo mágico ajudou minha capacidade de raciocínio. Gradualmente, conforme fui ficando melhor no cubo, fui melhorando minhas notas na escola”. Agora Sena trabalha como assistente operacional em uma empresa têxtil de Blumenau (SC), onde vive e é o 2° melhor competidor sul-americano na categoria $4 \times 4 \times 4$ e está na 83ª posição do ranking mundial.

Em julho de 2015 aconteceu, no Colégio Etapa, em São Paulo, o primeiro e possivelmente o único campeonato mundial no Brasil.

O Campeonato Mundial de Cubo Mágico, diferente da Copa do Mundo de futebol, é organizado de dois em dois anos. Nos dias 22, 23 e 24 de maio no Shopping Brasil, aconteceu o Brasília Open 2015. Os próximos campeonatos serão:

- Santarém Open 2015, no dia 20 de junho no Colégio Batista de Santarém, no Pará.
- Campeonato Mundial 2015, nos dias 17, 18 e 19 de julho no Colégio Etapa, em São Paulo.
- I Etec Open 2015, no dia 16 de agosto no Cônego José Bento, em Jacarei.

- CBPS Open 2015, nos dias 3 e 4 de outubro, no Colégio Pedro Silvestre, em Manaus.
- Brasília Spring 2015, nos dias 24 e 25 de outubro, na Igreja Jesus Vive, em Brasília.

4.2 OS MEUS CAMPEONATOS DE CUBO MÁGICO

Promovo campeonatos de cubo mágico tanto na escola estadual, para o Ensino Médio, quanto na escola particular, para o Ensino Fundamental. Os campeonatos que faço acontecem uma vez ao ano durante o mês de junho e a escola toda é convidada. Todos os cubos (Rubik) são embaralhados da mesma forma. Nem todos os alunos possuem esse cubo, que custa em média R$49,00; alguns compram os mais baratos, de R$1,99, que não são utilizados na competição para não haver injustiça, pois eles são mais difíceis de manusear. As apresentações são individuais, o tempo dos alunos é registrado e somente revelado no final. São premiados os dois primeiros colocados. O recorde de tempo foi de 45 segundos. Já houve vencedores do sexo masculino e também feminino. Abaixo apresento algumas fotografias de um dos campeonatos. Para não expor a identidade dos participantes, as fotografias foram editadas.

Figura 36: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: aluno se apresentando.

Figura 37: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: aluna se apresentando.

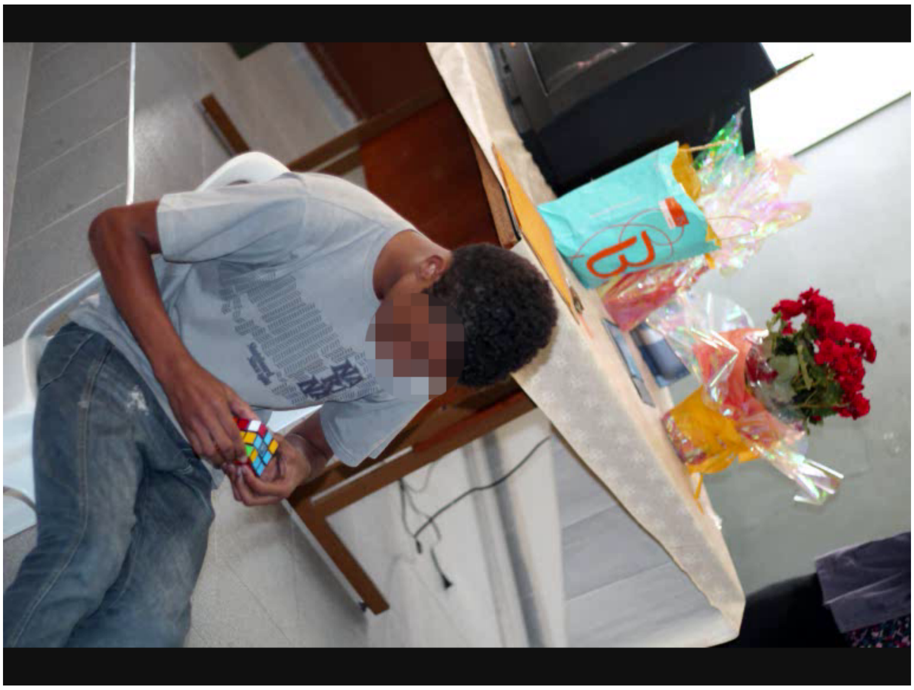


Figura 38: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: outro aluno se apresentando.

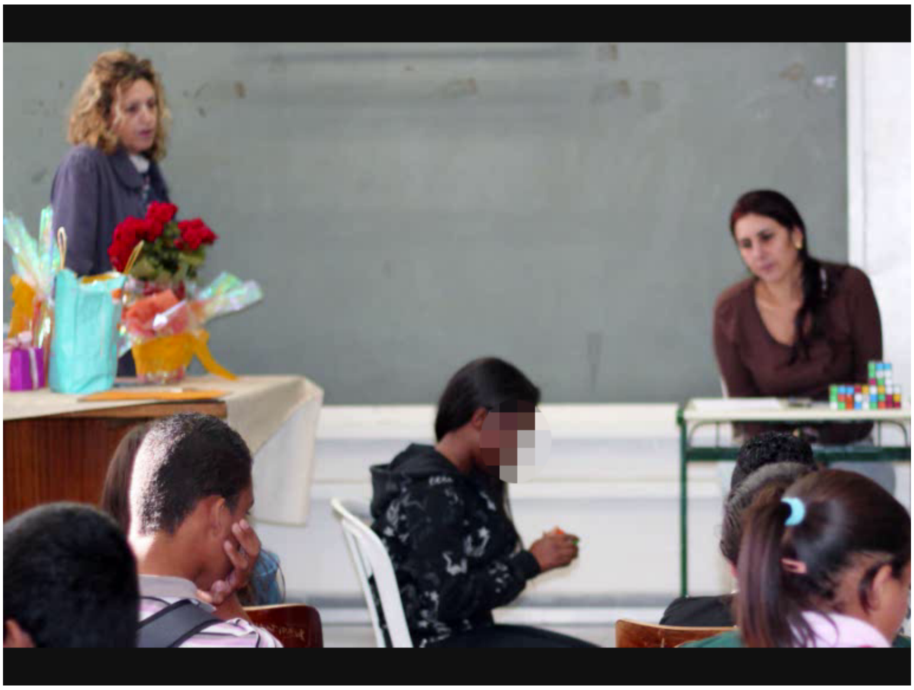


Figura 39: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: outra aluna se apresentando, sob observação da professora Norma Terezinha de Lima, de mim e de outros alunos.

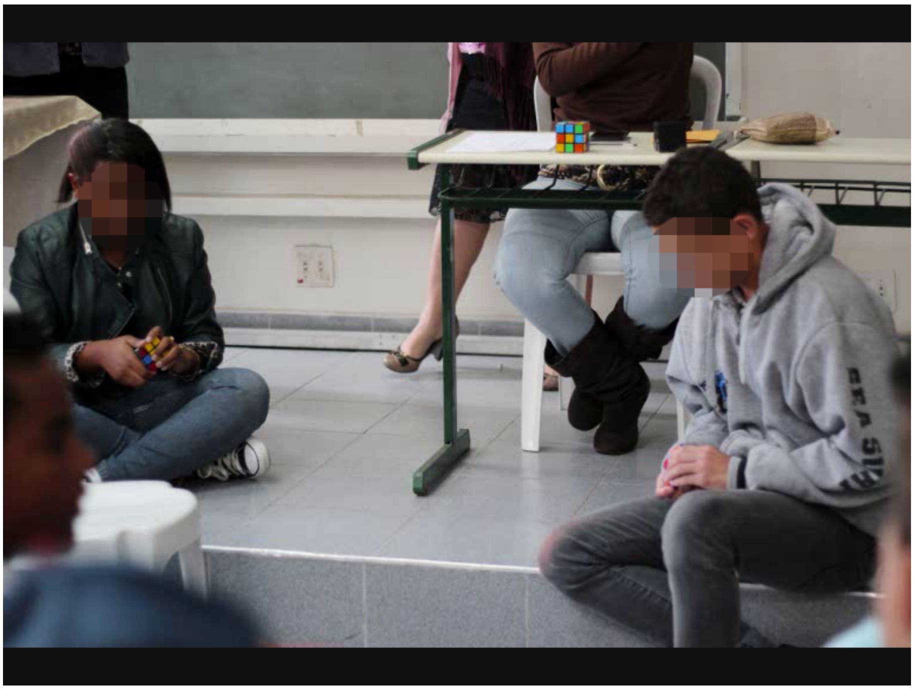


Figura 40: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: os alunos realmente se interessam pela competição.

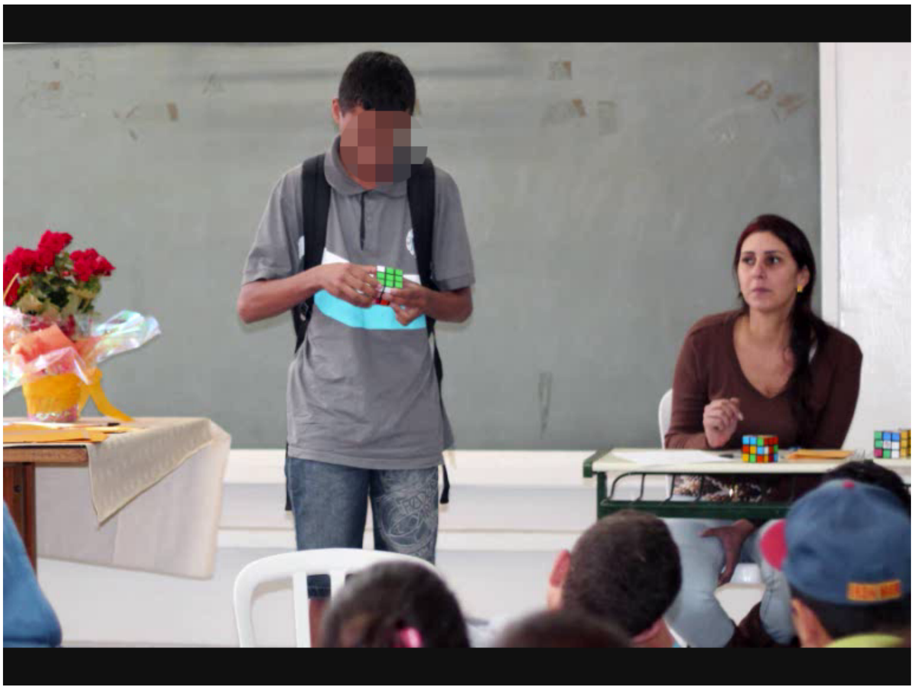


Figura 41: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: aluno se apresentando e eu e seus colegas observando.

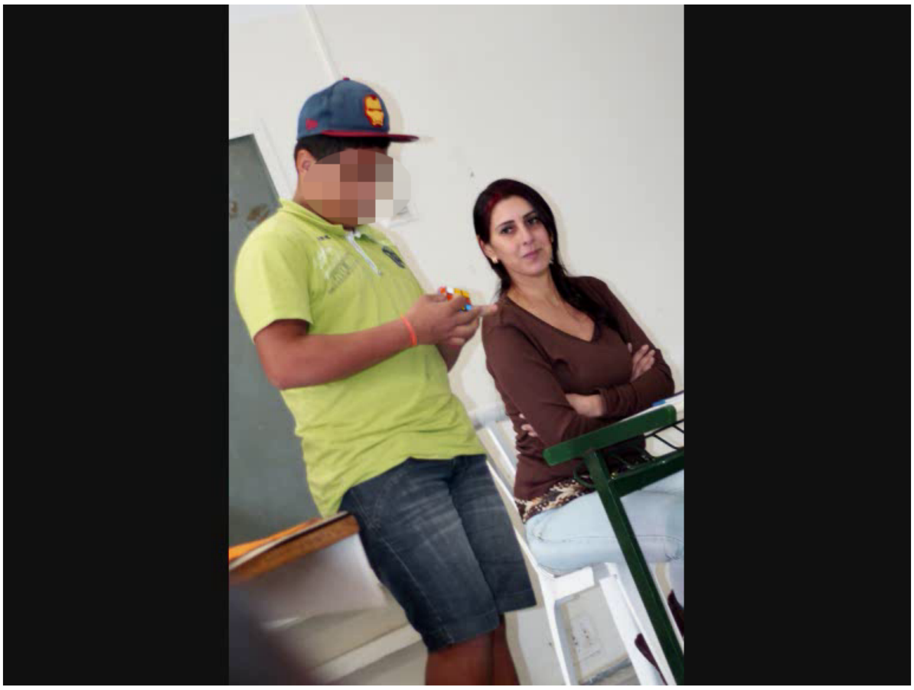


Figura 42: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: outro aluno se apresentando e eu observando.

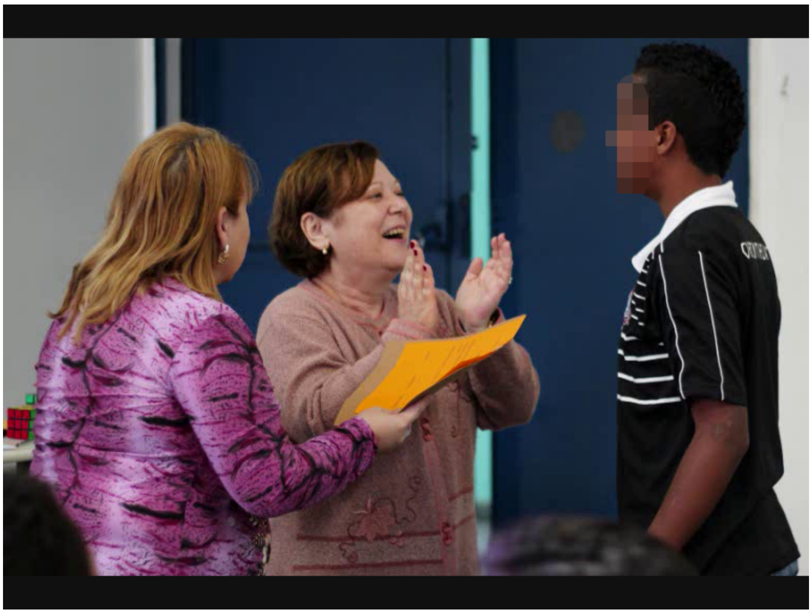


Figura 43: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: premiação para o terceiro colocado, sob os aplausos da diretora, professora Nilsen Aparecida Marchi, e da professora Soraia Piva.

Figura 44: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: da esquerda para a direita, as professoras Verani Regina, Norma Terezinha de Lima, Soraia, a aluna campeã, a diretora Nilsen Aparecida Marchi e eu.

Figura 45: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: da esquerda para a direita, as professoras Verani Regina, Norma Terezinha de Lima, Soraia, o aluno vice-campeão, a diretora Nilsen Aparecida Marchi e eu.

Figura 46: Campeonato de Cubo Mágico - Escola Estadual Prof. Maurício Antunes Ferraz - 2013: eu e a aluna campeã.

4.3 O PÓS COMPETIÇÃO

Questionário sobre cubo mágico após a aprendizagem:
Nome: N° Série:

1. Você gosta de estudar matemática? ( ) SIM ( ) NÃO
2. Acha a aula de Matemática:
   a) ( ) alegre ou ( ) maçante
   b) ( ) complicada ou ( ) estimulante
   c) ( ) fácil ou ( ) difícil
3. Sofre ou sofria de Matofobia?
   ( ) SIM ( ) NÃO
4. O que te fez interessar pelas aulas do Cubo Mágico?
5. Quando recebeu as instruções sequenciais pensou em desistir?
   ( ) SIM ( ) NÃO
6. Qual etapa achou mais difícil?
7. Quanto tempo demorou para aprender todas as etapas?
8. O campeonato tornou o assunto mais atraente na escola?
   ( ) SIM ( ) NÃO
9. O projeto Cubo Mágico mudou seu interesse pela Matemática?
   ( ) SIM ( ) NÃO
10. Ensinou a alguém?
    ( ) SIM ( ) NÃO

4.3.1 *Análise das respostas dadas no questionário*

Em relação ao questionário,

- Questão 1: ao contrário do que muitos pensam, 40% da sala gosta de matemática. Geralmente o aluno admira a matéria que sente mais facilidade em aprender. O jovem não gosta de se esforçar para nada, ele quer tudo pronto e rápido. O mundo de hoje é imediatista e nem sempre na matemática tudo é tão simples de se assimilar no primeiro momento, é preciso uma dedicação, persistência e isso pode levar à desistência.

- Questão 2: a maioria coloca que a aula é alegre, estimulante e difícil. O alegre eu acredito ser por utilizarmos em minha aula regras matemáticas cantadas (feitas durante as aulas, com a participação dos alunos, tendo como objetivo facilitar a memorização) e por dar pontos aos exercícios, onde quem ganha são os 10 primeiros. Tento sempre contextualizar a matemática, de forma a tornar o aprendizado significativo, utilizando metodologias ligadas à vivência dos alunos. Assim, a aula se torna mais estimulante, embora ainda sintam alguma dificuldade.
- Questão 3: os alunos não sabem o significado de Matofobia e depois de explicado, 50% colocam que sim, mas eu acredito que é por gostar da palavra nunca escutada, pois a quantidade não condiz com a questão 1.
- Questão 4: a maioria responde que nunca conseguiu montar o cubo mágico antes, achando impossível e algo acessível somente a gênios.
- Questão 5: muitos pensam em desistir, mas é o professor nesse momento que precisa interferir e estimular o aluno para que ele continue. O professor precisa estar sempre atento e presente em todos os passos dessa montagem e fazer com que a dificuldade seja menor que a vontade de aprender.
- Questão 6: 90% sem dúvida acha o terceiro passo o mais difícil, pois se erra muito nele e um movimento errado faz com que ele volte para o início, pois nesse passo o aluno ainda não assimilou bem os códigos dos movimentos. No começo, o primeiro passo também é muito complicado por não ter fórmula, mas com o tempo ele se torna o mais fácil.
- Questão 7: Geralmente um aluno demora em média de 15 a 20 dias para aprender todas as etapas sem errar tanto. Depois é só praticar para que o tempo de montagem seja cada vez menor.
- Questão 8: Os alunos que conseguem montar o cubo até o final, acham o campeonato um momento mágico onde vão poder se "exibir" para a escola.
- Questão 9: Muitos alunos que não tinham interesse em aprender a matemática, começam a olhar com outros olhos para a lousa, copiando e tentando executar as atividades propostas em aula. Parece que surge uma esperança em relação à matemática. Acho que ele pensa: "Se eu consegui aprender a montar o cubo mágico, também posso aprender matemática, pois a professora é a mesma". E nessa hora o professor precisa ter muita cautela com esse aluno, para que não se perca essa motivação.
- Questão 10: Todos adoram ensinar para os pais, irmãos, primos, vizinhos... isso faz muito bem ao ego, pois ele se sente capaz, importante, admirado. Montar o cubo não é fácil e não se aprende rápido, portanto esse sucesso faz bem à autoestima. A maioria dos alunos passa o tempo todo na escola com o cubo mágico na mão, o intervalo é uma febre e isso torna a escola alegre e motivadora.

5 OUTROS JOGOS QUE ENVOLVEM MATEMÁTICA

5.1 SUDOKU

5.1.1 *Introdução*

O nome Sudoku é a abreviação japonesa para a frase, *suuji wa dokushin ni kagiru* que significa "os dígitos devem permanecer únicos". O jogo é uma grade de dimensão 9 x 9 constituída de subgrades de dimensão 3 x 3 chamadas de regiões. Ao início do jogo algumas casas estão previamente preenchidas por números, cabendo ao jogador completar as casas restantes com algarismos de 1 a 9, de maneira que em cada coluna, linha e região os números naturais de 1 a 9 apenas uma vez. Cada quebra-cabeça tem uma única solução. Embora envolva números, o sudoku não exige conhecimento matemático: nenhuma operação numérica contribui para o preenchimento do quadrado, que, em princípio, poderá ser completado com qualquer conjunto de nove símbolos diferentes (letras, cores, figuras, etc). Apesar disso o sudoku oferece vários desafios a matemáticos e especialistas em computação.

As primeiras publicações do Sudoku ocorreram nos Estados Unidos no final dos anos 70 [8]. A editora Dell deu ao jogo o nome de Number Place (lugar dos números), que é usado até hoje nos Estados Unidos. Em 1984, a Nikoli, maior empresa japonesa de quebra-cabeças, descobriu o Number Place e decidiu levá-lo ao Japão. No Japão, os jogos numéricos são mais populares que palavras cruzadas e caça palavras, que não se adaptam bem ao alfabeto japonês. Em 1986 o Sudoku tornou-se um dos jogos mais vendidos do Japão, mas só se tornou mais popular no Ocidente no final de 2004, quando Wayne Gould, juiz aposentado de Hong Kong, que também era fã de quebra-cabeças, viajou a Londres e convenceu os editores do jornal The Times a publicar o Sudoku. Ele havia criado um programa de computador que gerava jogos de Sudoku com vários níveis de dificuldade, sem finalidade lucrativa nenhuma. O The Times decidiu arriscar e, no dia 12 de novembro de 2004, publicou seu primeiro Sudoku. No Brasil, o Sudoku é publicado pelas Revistas Coquetel (Ediouro) desde o início de 2005.

Somente com o uso da lógica e de computadores é possível estimar o número de quadrados de Sudoku possível: 6.670.903.752.021.072.936.960. Esse montante inclui as soluções derivadas de qualquer quadrado, por meio de operações elementares (rotações, simetrias, troca das três primeiras colunas, das três primeiras linhas, etc.). O resultado foi obtido por Bertram Felgenhauer, da Universidade Técnica de Dresden, Alemanha, e por Frazer Jarvis, da Universidade de Sheffield, Inglaterra, e confirmado diversas vezes [9]. Porém, se contarmos apenas uma vez os quadrados que podem ser reduzidos a uma configuração equivalente, ou seja, se levarmos em conta rotação, reflexão, enfim movimentos que podemos fazer e analisar que no final, segundo a teoria de grupos, o quadrado é o mesmo, o número final cai para 5.472.730.538 [8]. Apesar dessa queda, os fãs do sudoku não precisam temer pela extinção do jogo pois, mesmo que solucionasse um quadrado por minuto e vivesse cem anos, um indivíduo conseguiria cobrir apenas 1% do total.

Uma outra questão que nos vem à cabeça é em relação a unicidade. Dependendo da configuração inicial o problema pode não ter solução, então a resposta sobre quais ou quantas pistas iniciais mínimas devem ser dadas para garantir a unicidade não possui resposta exata. O que temos são inúmeros exemplos de Sudokus com 17 pistas iniciais que tem uma configuração única, mas não se tem nenhuma informação sobre os de 16 pistas [7]. Já são conhecidas pelo menos 48.826 configurações distintas de Sudoku com 17 pistas iniciais, a maioria delas geradas por um programa de computador. Todas estas configurações, segundo Gordon, possuem solução única. A figura abaixo mostra a grade 9 x 9 do jogo Sudoku dividida nas regiões 3 x 3 com algumas pistas iniciais. É um exemplo típico do jogo Sudoku.

		9			6	3		
		1		8		4		
3	8		4	9		6		
	1	2	9		4	8	6	
8		3		1	2		9	
9	4	7						
		6	2		9	7	5	8
	9		5	7		1		6
7			8			9	2	3

Figura 47: A grade 9 x 9 do jogo Sudoku dividida nas regiões 3 x 3 com algumas pistas iniciais. É um exemplo típico do jogo Sudoku – Fonte: referência [10].

5.1.2 *Dicas de Preenchimento*

Nesta seção apresentaremos algumas estratégias para a resolução manual do jogo [10]. Faremos, sempre, referência ao nível do Sudoku. Para tanto, vamos deixar claro o que queremos dizer quando nos referimos a um Sudoku fácil, moderado, difícil e diabólico. Um Sudoku fácil é aquele que necessita apenas das técnicas básicas e um expert em Sudoku consegue completá-lo em cerca de 10 minutos. Um moderado é aquele que necessita de um pouco mais de técnicas, mas ainda não precisa de anotações e um expert em Sudoku completa-o em aproximadamente 15 minutos. Um Sudoku difícil é aquele que as técnicas que resolvem um fácil não são suficientes, e é preciso fazer algumas anotações, um expert resolve um Sudoku difícil de 20 a 30 minutos. Já em um sodoku diabólico é preciso escrever todas as possibilidades e fazer uma análise complexa e um expert demora de 30 minutos a um dia para resolver um Sudoku deste nível.

5.1.3 *Técnicas Básicas*

A primeira técnica é chamada de *crosshatching* [18]. Primeiramente devemos nos concentrar em uma determinada região e, então, analisamos quais números não aparecem nesta região. Veja o exemplo abaixo:

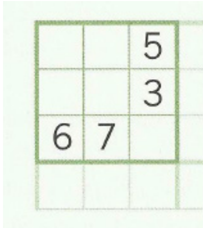


Figura 48: Região escolhida para análise – Fonte: referência [10].

Aqui vemos que faltam os números 1, 2, 4, 8 e 9. Agora faremos a análise de cada número faltante. No nosso exemplo, consideramos o número 1. Vamos olhar para o Sudoku e ver em quais células o número 1 aparece e o que essa célula influencia na colocação do 1 na região escolhida.

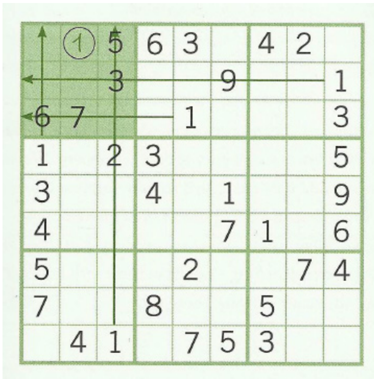


Figura 49: Prenchendo a região com o número 1 – Fonte: referência [10].

Observe que há um número 1 na segunda linha, logo não podemos ter o 1 nas células da região que estão nesta mesma linha e, com isso excluímos duas possibilidades para o 1. Também há um 1 na primeira coluna, o que impossibilita o 1 de ocupar as células que estão nesta coluna e, da mesma forma, o 1 não pode ocupar a célula vazia da região que se encontra na terceira coluna, pois nesta coluna há também um número 1. Então a única célula que está disponível para o número 1 é a segunda célula da primeira linha. Usamos esta análise para todos os números que ainda não estão na região. Somente preenchemos uma célula quando temos certeza do número que deve ocupa-la. Observamos, no nosso exemplo, que o número 2 não pode ocupar a célula vazia da primeira linha, pois já existe um 2 nesta linha. Também não pode ocupar a célula vazia da terceira linha, pois já existe um 2 na terceira coluna. Mas observamos que não temos informação nenhuma sobre as células que estão na segunda linha. Aparentemente o 2 pode ocupar qualquer uma dessas duas células. Quando nos deparamos com uma situação como esta devemos pular este número e analisar o próximo, após algumas análises provavelmente conseguiremos decidir qual de fato é a célula que este número deve ocupar. Ao longo do preenchimento devemos estar sempre atentos a situações em que em uma determinada linha, coluna ou região há uma única célula vazia. Neste caso, devemos preenchê-la tão logo a identifiquemos pois o número que deve ocupar esta célula pode influenciar o preenchimento das células ligadas a ela.

A segunda técnica é chamada de *grouphatching* [18]. Esta técnica é uma maneira alternativa de usar a técnica *crosshatching*, que acelera a resolução. Esta técnica trabalha com grupo de três regiões e baseia-se nas mesmas idéias da técnica *crosshatching*. Primeiramente, fixamos três regiões adjacentes e tentamos colocar todos os nove números nelas.

Iniciamos nossa análise com o número 1. Das três regiões, duas já contém o número 1: vamos analisar a região central como vimos na técnica *crosshatching*. Para que esta técnica de fato acelere a resolução devemos iniciar a análise por números que apareçam em duas das três regiões do grupo fixado. Fazendo a análise em grupos temos uma visão mais ampla do jogo e, assim, podemos perceber mais rapidamente qual é o lugar de cada número. Quando apresentamos a idéia da técnica *crosshatching*, vimos que nem sempre temos certeza de onde um número pode ser colocado e, para isso demos o exemplo do número 2. Quando estamos resolvendo o Sudoku com a técnica grouphatching, podemos aproveitar esta incerteza de onde colocar um número em uma determinada região para preencher uma célula de outra região do mesmo grupo. Observamos a figura 50 e vemos que não sabemos em que célula da primeira linha o número 4 será posicionado, mas a informação de que ele estará na primeira linha nós temos. Ou seja, não pode aparecer mais nenhum 4 nesta linha, desta forma na terceira região do grupo não pode existir um número 4 na primeira linha, e como há um 4 na região central na terceira linha concluímos que um número 4 deve ocupar a célula central da terceira região do grupo.

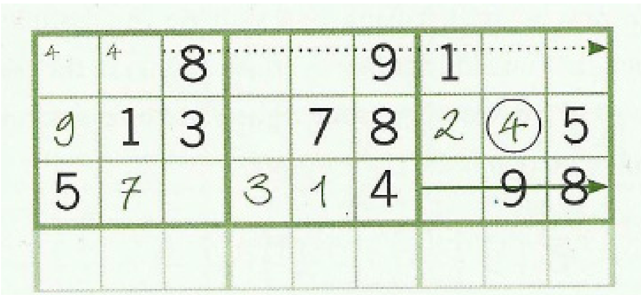


Figura 50: 4 fixado na terceira região através da análise da primeira – Fonte: referência [10].

Com essas técnicas já conseguimos resolver qualquer Sudoku fácil.

5.1.4 *Técnicas extras*

As técnicas a seguir são suficientes para resolver Sudokus moderados e difíceis. Primeiro, fazemos em linhas e em colunas o que o *crosshatching* faz com regiões. Depois, mudamos a estratégia e iremos encontrar células para a qual não há um único número possível e, então, vamos olhar para pares de números e listas de candidatos. Estas técnicas não substituem *crosshatching*. Tipicamente, usamos *crosshatching* para produzir alguns resultados e depois avançamos nestas novas técnicas.

- *Crosshatching* por linha e por coluna.

  Analisamos primeiramente a linha ou coluna que tenha maior quantidade de números dados. Verificamos quais números faltam e vemos se algum deles pertence à mesma região e coluna ou linha da casa vazia. A idéia usada para *crosshatching* por regiões é a mesma usada aqui.

- Candidatos e mudança de abordagem:

  Candidatos são os números que teoricamente podem ocupar a célula analisada. É fácil encontrá-los, eles são os números ausentes na região, na coluna e na linha desta célula. Assim, no exemplo da figura 51, os candidatos da célula da primeira coluna e segunda linha da região central são 4, 5 e 7. Devemos anotá-los naquela célula.

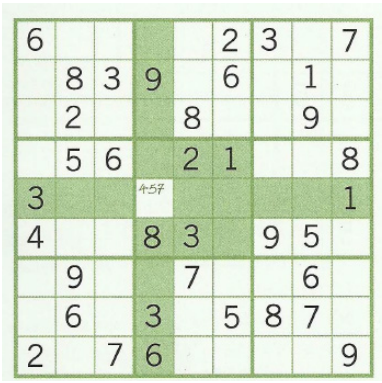


Figura 51: Candidatos da célula analisada – Fonte: referência [10].

Existem apenas duas regras lógicas que permitem colocar um número em uma célula do Sudoku. À primeira vista, estas regras podem parecer as mesmas, mas elas não são. Quando na célula só existe um candidato, é este que deverá ocupar a célula. Por exemplo, na figura abaixo, a única possibilidade para a última célula da região é o número 7, então é ele que deve ocupar esta célula. Quando o candidato aparece somente em uma célula é ele que deve ocupá-la. Por exemplo, o 6 aparece somente na célula central da região da figura abaixo, logo ele só pode ocupar essa célula disponível.

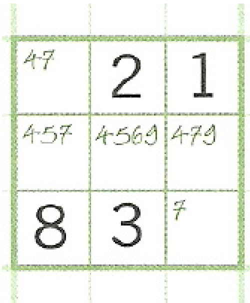


Figura 52: Célula e candidatos satisfazendo as regras lógicas do Sudoku – Fonte: referência [10].

5.1.5 *O poder do par*

Chamaremos de pares duas células com os mesmos dois candidatos. São fáceis de encontrar e fornecem informações valiosas para continuarmos a resolução do Sudoku. Na figura 53 o par não ajuda a resolver qualquer outra célula da mesma linha. Ele apenas ilustra o que seria um par. E nos diz que se o 1 ocupar a primeira célula, necessariamente o 3 ocupará a outra célula vazia e vice e versa.

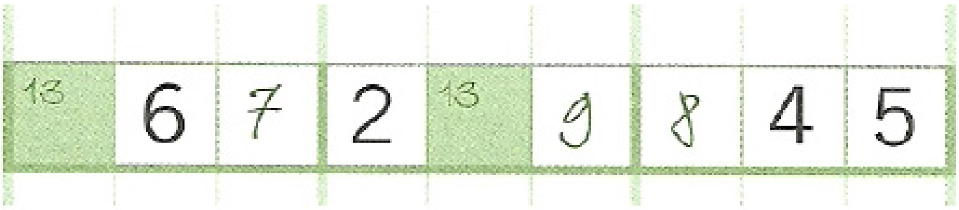


Figura 53: Duas células com os mesmos candidatos – Fonte: referência [10].

Já na figura 54, temos um par que nos ajuda na escolha dos candidatos da linha.

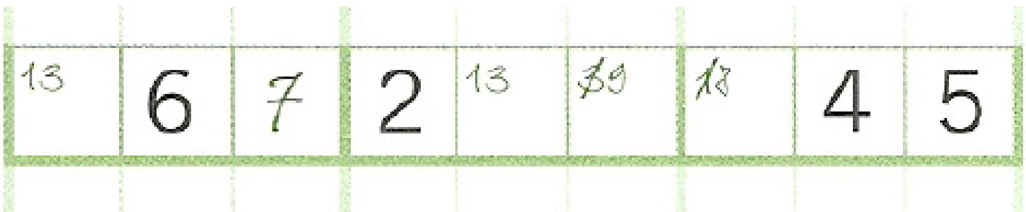


Figura 54: Candidatos eliminados – Fonte: referência [10].

Note que, na sexta célula, o 3 é um candidato para ocupá-la, mas temos o par 1-3 na primeira e quinta células, ou seja, o 3 ocupará necessariamente uma dessas células e, assim, descartamos a possibilidade de ele ocupar a sexta célula. Com raciocínio análogo também descartamos a possibilidade do 1 ocupar a sétima célula. Assim, temos células que contém apenas um candidato, nos dando a opção certa para estas células.

5.1.6 *Listas de Candidatos*

Agora entraremos em mais detalhes sobre listas de candidatos e como eliminá-los, para conseguir encontrar a solução. Veremos as formas de construção de listas de candidatos total, os sistemas de anotação e eliminação dos candidatos das células. Com esta técnica podemos chegar a resolver um Sudoku diabólico. *Crosshatching* é uma boa maneira de fazer listas de candidatos total. Analisamos cada região e escrevemos em cada célula os candidatos. Quando preenchemos alguma célula não podemos esquecer de riscar todos os candidatos desta célula e riscar este número das células das linhas, colunas e região em que este número se encontra.

5.1.7 *Eliminação de candidatos*

Apresentaremos algumas técnicas para a eliminação de candidatos das células. Após eliminarmos um número suficiente deles cairemos em uma das duas regras lógicas do Sudoku, as quais foram apresentadas no item anterior.

Pares, Trios e quádruplos

- Pares: quando as opções de 2 células são conjuntos ou subconjuntos de 2 elementos dados, podemos eliminá-los das demais células. Na figura 55 temos o par 2-6, e eliminamos todos os 2 e 6 que se encontram em outra célula.

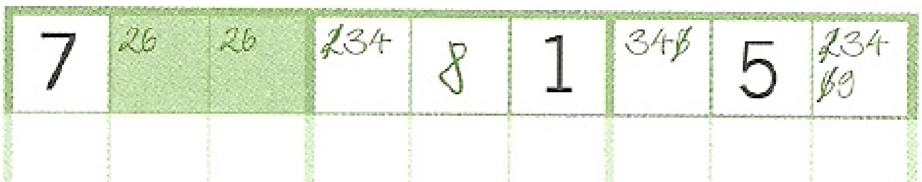


Figura 55: Candidatos eliminados a partir de um par – Fonte: referência [10].

  Podemos fazer isso, pois o 2 e o 6 necessariamente ocuparam uma das duas células pintadas.

- Trios: Quando as opções de 3 células são conjuntos ou subconjuntos de 3 elementos dados, podemos eliminá-los das demais células. Note que, na figura 56, temos o trio 2-4-5 em duas células e um subconjunto dele, 4-5, em outra célula. Desta forma, eliminamos os números 2-4-5 da célula central e 4 da célula que tem por candidatos 1, 4 e 7.

- Quádruplos: quando as opções de 4 células são conjuntos ou subconjuntos de 4 elementos dados, podemos eliminá-los das demais células. A figura 57 mostra um exemplo de um quádruplo e seus subconjuntos.

- Coluna e linha x Região

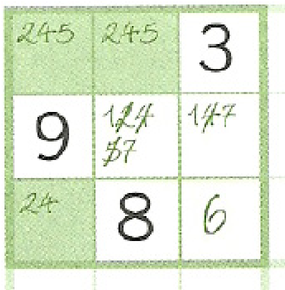


Figura 56: Candidatos eliminados a partir de um trio – Fonte: referência [10].

Figura 57: Quádruplo 1, 3, 4 e 5 – Fonte: referência [10].

Quando certo candidato só aparece nas células de uma coluna de uma determinada região, podemos excluí-lo de todas as células desta região. Na última coluna da figura 58, o número 4 só aparece como candidato na última região, sendo assim podemos excluir todos os outros algarismos 4 das células desta região. Note que, de fato, podemos fazer essa exclusão, pois sabemos que o 4 deve aparecer na coluna observada e suas opções são apenas as células que estão na região e, nesta, o 4 não pode aparecer mais de uma vez. Quando analisamos uma coluna (linha) e identificamos que um candidato aparece em uma única região, então podemos eliminá-lo das demais células daquela coluna (linha). Na figura 59, na primeira região o número 2 só aparece como candidato na terceira coluna, assim eliminamos todos os outros 2 que aparecem nesta coluna. Aqui também é fácil ver que podemos fazer essa exclusão, pois o 2 deve aparecer na região e as células possíveis estão apenas em uma coluna, em que o 2 não pode aparecer mais de uma vez.

- Pares interligados: se tivermos pares de candidatos em células que podemos relacionar, podemos excluir os candidatos das células da mesma região e da linha

Figura 58: Eliminação de candidatos através da análise de uma coluna – Fonte: referência [10].

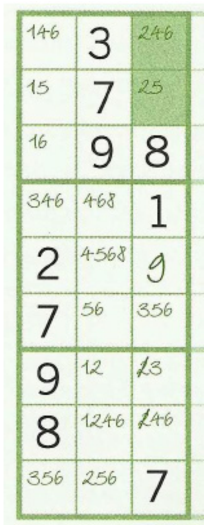


Figura 59: Eliminação de candidatos através da análise de uma região – Fonte: referência [10].

das células relacionadas. Observe na figura 60 que se na primeira célula A tiver o número 6, obrigatoriamente a célula B da mesma coluna terá que ter o número 8, o que implicará que a célula A da mesma linha terá que ter o número 6, e assim a célula B da mesma coluna terá que ter o número 8. Veja que podemos interligar essas células e de fato com esta relação as células A são iguais e as B também. Com isto, observe que os 6 e 8 que aparecem como candidatos nas células da primeira linha podem ser eliminados, pois se um 8 aparecer na mesma linha, no caso na célula A, então o 6 aparecerá na célula B da mesma região destas células.

De mesma forma com os candidatos 6 e 8 que aparecem na mesma região e linha de A e B, respectivamente.

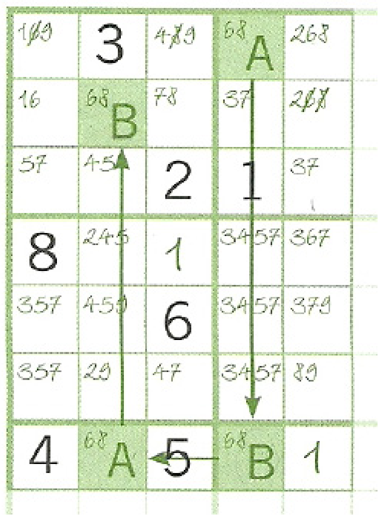


Figura 60: Eliminação de canditados a partir da relação de A e B – Fonte: referência [10].

- Retângulos

  Esta técnica é baseada no fato de que os Sudokus que estão disponíveis nas revistas e internet tem solução única. Ele permite fazer eliminação de candidatos para evitar que uma configuração tenha mais de uma possibilidade. Considere os pares dispostos como na figura 61.

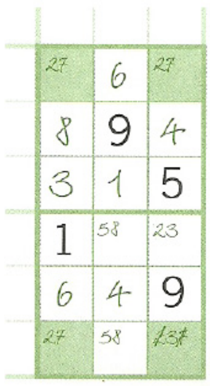


Figura 61: Eliminação de candidatos para se ter uma única configuração – Fonte: referência [10].

Vamos analisar porque podemos excluir os pares de uma célula que além deles possuem mais candidatos. Suponha, por absurdo, que a célula que o número 7 deve ocupar seja a que tem como candidatos 2, 3 e 7. Sendo assim, o 2 deve ocupar a célula superior desta mesma coluna, o que implica que a célula da mesma linha desta célula deve conter um número 7 e, assim, a célula inferior desta coluna deve conter o 2 e também a célula que tem por candidatos o 2 e o 3 deve conter o 3. Esta é uma configuração possível. Mas se o 2 ocupasse a célula que tem por candidatos 2,3 e 7, isso implicaria que o 3 iria ocupar a célula que tem por candidatos 2 e 3, que o 7 iria ocupar a célula superior desta mesma coluna, que o 2 iria ocupar a célula desta mesma linha e, por fim, que o 7 iria ocupar a célula inferior desta coluna. Ou seja, conseguimos mais uma configuração possível, o que pela unicidade do Sudoku não pode ocorrer. Assim, quem deve ocupar a casa que além dos pares tem outro candidato é este outro candidato, no nosso exemplo o 3. O que foi apresentado nesta seção são técnicas que são suficientes para a resolução de Sudokus dos níveis comentados. Há mais algumas técnicas que são úteis para resolver alguns Sudokus de nível diabólico, estas não abordaremos pois são usadas na minoria de Sudokus deste nível.

5.2 RUMMIKUB

Rummikub é um jogo que combina o conhecido jogo de baralho de Rumi, no Brasil chamado de mexe-mexe, com peças derivadas do jogo de dominó. Suas primeiras versões tinham as famosas bolinhas de dominó, que depois foram substituídas por algarismos. Com o tempo as regras também foram aprimoradas dando ao jogo uma dinâmica particular.

Figura 62: As peças do Rummikub. Fonte: http://entertainment.howstuffworks.com/leisure/brain-games/rummikub.htm--acessadoemmaiode2015

O jogo foi inventado no início dos anos 1930 por Ephraim Hertzano, um judeu nascido na Romênia que imigrou para a Palestina antes da criação do estado de Israel. Ele e sua família construíram à mão os primeiros conjuntos de peças no quintal de sua casa. Até que certo dia ele visitou uma fábrica que reciclava plástico do tipo Perspex para produzir escovas de dente e ele percebeu que esse seria o material ideal para fazer o jogo. Hertzano vendeu estes conjuntos pessoalmente, em consignação, para pequenas

Figura 63: As 106 peças do Rummikub. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Rummikub – acessado em maio de 2015

Figura 64: Uma trinca de 12. Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Rummikub – acessado em maio de 2015

lojas. Com o tempo, a família licenciou o uso para outros países, e o Rummikub se tornou o jogo mais exportado por Israel. No ano de 1977, foi o jogo mais vendido nos Estados Unidos. Hoje ele é vendido em 52 países de todos os continentes e está entre os 5 jogos mais populares do mundo. Mais de 45 milhões de Rummikubs foram vendidos até hoje e é o produto mais popular exportado por Israel. A Grow produz o Rummikub no Brasil desde 2003 e já realizou o circuito nacional de Rummikub duas vezes. Além disso,é possível também jogar na versão Online, através do site gametrack.com.br.

5.2.1 *Composição e regras*

O principal componente do Rummikub é um conjunto de 106 peças, sendo 104 delas numeradas e 2 coringas. As peças numeradas vão de 1 a 13, em quatro cores (azul, amarelo, preto e vermelho), duas de cada. Em geral são peças de plástico, de 18 $\times$ 25 mm, com 3 mm de espessura. Cada conjunto possui um suporte para colocar as suas peças e evitar que sejam vistas pelos oponentes. As 106 peças são colocadas sobre a mesa, com suas faces para baixo, para serem selecionadas. Cada jogador escolhe 14 peças, colocando-as no seu suporte, para o início do jogo. As peças não escolhidas permanecem no monte, com as faces viradas em um canto da mesa. Cada jogador, por sua vez, deve juntar as suas peças entre si ou com as peças que já estão na mesa, formando combinações e procurando esvaziar o seu suporte. Ganha o jogo quem primeiro conseguir colocar todas as peças sobre a mesa, em combinações aceitáveis.

Há dois tipos de combinações possíveis: os grupos e as sequências. Os grupos (trincas e quadras) são conjuntos de 3 ou 4 peças com o mesmo número e necessariamente com cores diferentes. As sequências são conjuntos de 3 a 13 peças de mesma cor, com números em sequência. O coringa pode completar qualquer combinação, passando a valer o número da peça que ele está substituindo, no grupo ou na sequência. A primeira jogada de cada jogador deve colocar sobre a mesa pelo menos 30 pontos. Sempre que um jogador não tiver nada para jogar, ou não puder fazer um mínimo de 30 pontos em sua primeira jogada, ele deverá comprar, ou seja, escolher mais uma peça do monte e adicioná-la às suas peças. Durante a vez de cada jogador, as peças sobre a mesa podem ser manipuladas à vontade, formando novas combinações. As únicas obrigações do jogador são: ao final de sua jogada, todas as peças sobre a mesa devem estar fazendo combinações válidas; ele deve ter jogado pelo menos uma peça nova sobre a mesa; se esta for a primeira jogada válida, as peças jogadas por ele devem somar pelo menos 30 pontos.

Exemplos de manipulações possíveis:

- Cortar uma sequência: o jogador pode retirar a peça inicial ou final de uma sequência para usá-la em outra combinação, desde que a sequência permaneça com pelo menos três peças.

- Cortar uma quadra: o jogador pode retirar uma das peças de uma quadra (que se torna, então,uma trinca) para usá-la em outra combinação. O mesmo não pode ser feito em uma trinca, já que uma combinação de apenas duas peças não seria válida.

- Deslocar uma sequência de três: ao se colocar uma peça na ponta (início ou final) de uma sequência de três peças, e portanto a outra ponta pode ser retirada para uso em outra combinação.

- Substituir numa trinca: numa trinca sobre a mesa, o jogador pode adicionar a peça de mesmo número e da cor que falta, transformando-a uma quadra, e portanto podendo retirar uma das outras peças da trinca para usá-la em outra combinação.

- Dividir uma sequência: um jogador pode dividir uma sequência longa e colocar as peças correspondentes no meio, desde que as sequências resultantes tenham, cada uma, um mínimo de três peças. Por exemplo, se há na mesa uma sequência azul de 6 a 10 e o jogador tem na mão um 8 azul, ele pode colocar a sua peça no meio e formar as sequências 6-7-8 e 8-9-10.

- Substituir um coringa: se o jogador possui a peça que substituiu um coringa em uma combinação sobre a mesa, ele pode trocá-la, podendo a seguir usar o coringa em qualquer outra combinação.

Ganha o jogo aquele que primeiro conseguir descartar todas as suas peças, mostrando aos demais que o seu suporte está vazio. Os demais jogadores, então, mostram as peças que lhes restaram e contam seu valor de face, sendo a soma destas peças o número de pontos negativos de cada jogador. Também para este efeito, o coringa vale 20 pontos. O vencedor fica com a soma, em valor positivo, dos escores de seus adversários.

5.2.2 *Campeonato Mundial*

Desde 1991, o Campeonato Mundial de Rummikub acontece a cada três anos em um diferente local, sempre patrocinado pelas empresas que distribuem o jogo. O circuito brasileiro, que classifica um representante para o certame mundial, foi instituído em 2003 pela Grow.

O campeonato de 2009 foi disputado de 6 a 9 de novembro, em Marbella, na Espanha, e teve como vencedor, pela primeira vez, um brasileiro: a jogadora Andréa Papazissis, de Campinas, que enfrentou na final jogadores do Japão, Hong Kong e Coreia. Além do troféu de campeã, Andréa recebeu de prêmio duas passagens para uma volta ao mundo. O nono campeonato mundial será disputado de 7 a 11 de novembro de 2015, em Berlim, Alemanha.

5.2.3 *Uso em sala de aula*

Em toda sala ambiente de matemática é possível ter alguns jogos Rummikubs e, ao final de qualquer atividade, ao invés do aluno ficar parado, ele pode ir treinando para um possível campeonato interno. Enquanto ele joga, se desenvolve o raciocínio, a memória, a criação de estratégias, o cálculo mental, a interação social, dentre outras. Durante os jogos, os alunos são mais atuantes. Não evidenciam medo de errar, sentem-se desafiados a superar obstáculos e esforçam-se para obter resultados satisfatórios. O Rummikub é ótimo para ter em casa também e jogar em família. A maioria dos alunos quando aprendem a jogar, pedem para seus pais comprarem e sentem prazer em ensiná-los.

6 CONCLUSÃO

O objetivo desse trabalho foi mostrar a importância de certos jogos, que podem ser aliados nas aulas de matemática, visando melhorar o desempenho dos estudantes que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. No decorrer do desenvolvimento do jogo é possível que os estudantes manifestem atitudes dinâmicas que permitam aflorar a motivação para a aprendizagem da matemática, pois ao mesmo tempo que eles falam sobre suas estratégias, organizam os pensamentos, melhorando assim o raciocínio lógico-matemático e tomando atitudes positivas frente a seus processos de aprendizagem.

O jogo torna o aluno autônomo e confiante, diminuindo assim, o sentimento de medo de cometer erros. Os jogos propiciam isso, pois há cooperação, colaboração e interação social. Segundo Doron (1998), interação social é o "processo interpessoal pelo qual indivíduos em contato modificam temporiamente seus comportamentos, uns em relação aos outros, por uma estimulação recíproca contínua" [20]. A interação social é o modo comportamental fundamental num grupo. O envolvimento de pessoas com o objetivo de criar estratégias a partir de regras fundamentadas no raciocínio lógico matemático é a essência dessa dissertação. A ação de jogar se desenvolve de um modo natural e progressivo, dependendo, assim, de um trabalho cooperativo.

O jogo, como elemento da Matemática recreativa, tem sido estudado por diversos teóricos, sob várias correntes metodológicas, elegendo-o como uma forma desafiadora e prazerosa de se adquirir conhecimento. Para Gallagher (1997) "...as habilidades adquiridas sob condições agradáveis de aprendizagem, geralmente, ficam retidas por longos períodos de tempo", e conclui que o professor deve oportunizar o sucesso dessa transferência [11].

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [17] temos a seguinte definição de jogos: "é um tipo de atividade que alia raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição de uma forma lúdica muito rica. Os jogos de equipe podem ainda favorecer o trabalho cooperativo. A prática de jogos, em particular dos jogos de estratégia, de observação e de memorização, contribui de forma articulada para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o desenvolvimento pessoal e social. Há jogos em todas as culturas e a matemática desenvolveu muito conhecimento a partir deles. Em sala de aula é possível trabalhar esses jogos que foram citados e muito mais. O professor precisa adequar o melhor jogo ao conteúdo ensinado. Por exemplo, os conceitos matemáticos explorados no Cubo Mágico são a Geometria Espacial e Análise Combinatória, no Rummikub é o conjunto dos números inteiros, abordando conceitos de sequência, sucessor e antecessor, no SUDOKU é o conjunto dos números naturais, e todos estimulam a memória, a manipulação de informações, a concentração e o raciocínio lógico.

O aluno pode levar o conhecimento do jogo para casa. Os jogos são excelentes para reunir a família, e os alunos sentem prazer em ensinar aos pais e irmãos.

Semanalmente ocorre, na escola, o ATPC (Aula de Trabalho Pedagógico Compartilhado). Em alguns deles, ensinei aos demais professores a solução do Cubo Mágico. Minha colega, a professora Fernanda Cristina Pereira Costa Nunes se interessou e, tendo aprendido, adotou o Cubo Mágico como atividade de recuperação após o tema Progressão Aritmética e Geométrica, em outra escola em que também leciona. Novamente, encontrou grande interesse dos seus alunos: ela apresenta os movimentos básicos e eles estudam sozinhos, sendo, posteriormente, avaliados quanto a isso.

[1] A. Garcia and Y. Lequain. Elementos de álgebra. 4ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[2] D. C. Figueiredo. Monografia Quadrados Mágicos. Ceará, 1997.

[3] D. Joyner. Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine & other Mathematical Toys, pág 310, 2ª edição, Baltimore: Johns Hopkins, 2008.

[4] D. P. A. Ausubel. Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. São Paulo, Morais, 1982.

[5] F. Corbalán. Juegos matemáticos para secondaria y bachillerato. Sintesis, Madrid, 1994.

[6] H. J. Bortolossi. Cálculo Diferencial a Várias Variáveis: Uma Introdução à Teoria de Otimização, 2ª edição. Editora PUC-Rio. Rio de Janeiro, 2003.

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Gordon_Royle. Acessado em março de 2015.

[8] http://pt.wikipedia.org/wiki/Sudoku. Acessado em março de 2015.

[9] http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/Sudoku. Acessado em março de 2015.

[10] Karla Cristiane Arsie. Jogos sudoku e quadrado mágico. http://people.ufpr.br/~ewkaras/ic/karla10.pdf. Acessado em fevereiro de 2015.

[11] K. Gallagher. Resolvendo Problemas com o Uso da Matemática Recreativa. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (Orgs.). "A Resolução de Problemas na Matemática Escolar". Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo, p. 235-246. Atual, São Paulo, 1997

[12] L. Almeida, M. Schünemann. Conceito de Lógica http://desenvolvendoseuraciocinio.blogspot.com.br Acessado em agosto de 2015.

[13] L. N. Andrade. Revista do Professor de Matemática n°41, SBM. Rio de Janeiro, 2000

[14] M. L. A. Aranha. História da educação, segunda edição revista e atualizada. São Paulo, Moderna, 1996.

[15] Neurociência: como ela ajuda a entender a aprendizagem. http://revistaescola.abril.com.br/formacao/neurociencia-como-ela-ajuda-entender-aprendizagem-691867.shtml. Acessado em junho de 2015.

[16] N. Jacobson. Basic Abstract Algebra. W. H. Freeman, pág. 528 p. (Dover Books on Mathematics), 2ª edição, San Francisco, 2009

[17] Parâmetros Curriculares Nacionais. http://portal.inep.gov.br/web/saeb/parametros-curriculares-nacionais

[18] P. Stephens. Mastering Sudoku week by week. Duncan Baird Publishers, Londres, 2007.

[19] R. Caillois trad. J. G. Palha. Os jogos e os homens. Cotovia, Lisboa, 1990.

[20] R. Doron. Dicionário de psicologia. São Paulo: Ática, 1998

[21] **Regras do jogo Rummikub** http://www.rummikub.com.br. Acessado em maio de 2015.

[22] Ricardo L. Viana. Teoria dos grupos. http://fisica.ufpr.br/viana/metodos/grupos.pdf. Acessado em agosto de 2014.

[23] T. Davis. The mathematics of Sudoku. http://www.geometer.org/matheireles, 2007.

[24] U. Sodré. Modelos Matemáticos. UEL. Londrina, 2007.

[25] Waldeck Schützer. Aprendendo álgebra com o cubo mágico. www.dm.ufscar.br~waldeck/. Acessado em novembro de 2014.

2007.