



*Universidade Federal do ABC*  
*PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática*

*Francisco Everton Pereira Maia*

*Curvas planas: clássicas, regulares e de preenchimento*

*Orientador: Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes*

Santo André, 23 de fevereiro de 2016



Universidade Federal do ABC

*Francisco Everton Pereira Maia*

*Curvas planas: clássicas, regulares e de preenchimento*

*Dissertação apresentada ao curso do PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do ABC, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.*

*Orientador: Prof. Dr. Vinicius Cifú Lopes*

Santo André, 23 de fevereiro de 2016

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho a todos aqueles que apoiaram e contribuíram no seu desenvolvimento, em especial a minha esposa Lucélia.

## **Agradecimentos**

Primeiramente aos idealizadores do PROFMAT pela oportunidade de participar do mesmo, à CAPES pelo suporte financeiro e em especial ao coordenador nacional Marcelo Viana e o ex-coordenador Elon Lages Lima, pelos quais tenho enorme admiração e sempre buscaram melhorar o ensino da Matemática.

Aos professores da UFABC pela compreensão e apoio nos momentos de dificuldade, dos quais destaco o professor Vinicius Cifú Lopes pelas orientações que tornaram possível esta pesquisa.

Agradeço aos professores participantes da banca examinadora que dividiram comigo este momento tão importante e pelas observações realizadas, as quais enriqueceram o trabalho.

Finalmente aos familiares, amigos e meus alunos que apoiaram e deram suporte durante o curso, especialmente a minha esposa que sempre estava presente nos momentos mais difíceis.

## **Resumo**

Neste trabalho apresentaremos uma visão sobre os princípios das curvas planas. Iniciamos o desenvolvimento dos estudos com as cônicas: parábola, elipse e hipérbole que são aplicadas no Ensino Médio normalmente usando equações cartesianas. Abordaremos o assunto destas e outras curvas usando equações paramétricas, com intuito de mostrar a vantagem de utilizá-las. Abrangeremos em nossos estudos a catenária, a cicloide e a curva de Bézier, curvas as quais não são estudadas no Ensino Básico, mas poderiam ser apresentadas como um desafio motivador ao estudo da Matemática, explorando suas várias aplicações que acontecem de maneira natural em nosso cotidiano. Apresentaremos propriedades gerais das curvas como: continuidade, parametrização, comprimento de arco, curva suave, curvatura e outras, além de realizar a demonstração do teorema fundamental das curvas planas e para finalizar estudaremos uma curva exótica, conhecida como curva de preenchimento de espaço, construída pela primeira vez pelo matemático italiano Giuseppe Peano.

**Palavras-chave:** Curvas planas; Parametrização; Curva de Peano.

## **Abstract**

In this work we will present an insight into the principles of flat curves. We start with the conics: parabola, ellipse and hyperbole which are applied in high school usually using Cartesian equations. We will discuss those and other curves using parametric equations, in order to show the advantage of using them. We will cover in our studies the catenary, the cycloid and a Bézier curve, curves which are not studied in basic education, but could be presented as a challenging motivation to the study of Mathematics by exploring their various uses that happen naturally in our everyday lives. We will introduce general properties of curves as: continuity, parameterization, arc length, smooth curve, curvature and others, in addition to the proof of the fundamental theorem of plane curves, and finally we will study an exotic curve, known as space-filling curve, built for the first time by the Italian mathematician Giuseppe Peano.

**Keywords:** Plane Curves; Parameterization; Peano curve.

# Sumário

<b>Lista de Figuras .....</b>	<b>9</b>
<b>Introdução .....</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares .....</b>	<b>12</b>
1. Distância entre pontos e vetores no plano .....	12
2. Funções reais e vetoriais .....	13
3. Limite, continuidade e diferenciabilidade.....	14
<b>2 Parametrização e aplicações de algumas curvas elementares. ....</b>	<b>16</b>
2.1 Parametrização .....	16
2.2 Parametrizações de curvas planas .....	18
2.3 Propriedades e aplicação de algumas curvas elementares .....	19
2.4.1. Cônicas.....	20
2.4.2 Parábola .....	21
2.4.3 Circunferência.....	24
2.4.4 Elipse .....	26
2.4.5 Hipérbole .....	30
2.5 Catenária.....	33
2.6 Cicloide .....	36
2.6.1 Plano de aula envolvendo a cicloide .....	40
<b>3 Propriedades e o teorema fundamental das curvas planas regulares..</b>	<b>42</b>
3.1 Curvas contínuas .....	42
3.2 Curvas suaves.....	42

3.3 Curva de Bézier.....	43
3.3.1 A função de Bézier .....	43
3.3.2 A cúbica de Bézier .....	44
3.4 Função comprimento de arco.....	48
3.5 Reparametrização .....	49
3.6 Invariantes de uma curva plana .....	53
3.7 Curvatura .....	53
3.8 Teorema Fundamental das Curvas Planas .....	54
<b>4 Curvas de preenchimento de espaço .....</b>	<b>58</b>
4.1 O conceito de cardinalidade .....	58
4.2 Transformações de sistemas de numeração de base diferentes .....	59
4.3 A curva de preenchimento de espaço de Peano.....	60
4.4 O gráfico da curva de preenchimento de espaço .....	66
<b>Considerações finais.....</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografia .....</b>	<b>70</b>

## Lista de Figuras

Figura 1: Curvas do tipo $F(x, y) = 0$ .....	16
Figura 2: Equação da reta $y = x/3 + 5/3$ .....	18
Figura 3: Secções no cone .....	20
Figura 4: Os elementos da parábola.....	21
Figura 5: O parâmetro $t$ na parábola .....	22
Figura 6: Divergência e convergência dos raios incidentes na parábola .....	23
Figura 7: Propriedade da reflexão .....	24
Figura 8: A circunferência .....	25
Figura 9: Parametrização da circunferência .....	25
Figura 10: A elipse .....	26
Figura 11: Parametrização da elipse. ....	28
Figura 12: Propriedade bissetora da elipse. ....	29
Figura 13: Propriedade bissetora da elipse II .....	30
Figura 14: A hipérbole.....	31
Figura 15: Parametrização da hipérbole. ....	32
Figura 16: A catenária.....	33
Figura 17: Forças que atuam na catenária .....	33
Figura 18: Forças que atuam em um ponto da catenária .....	34
Figura 19: Parametrização da cicloide.....	36
Figura 20: Rastro de $P$ , formando a cicloide .....	37
Figura 21: Curva linear de Bézier. ....	44
Figura 22: A cúbica de Bézier .....	46
Figura 23: Aproximação do arco de um círculo pela curva de Bézier .....	46
Figura 24: Segmento com relação ao quadrado.....	59
Figura 25: Representação da curva $\gamma_0$ .....	66
Figura 26: Representação da divisão do quadrado .....	66
Figura 27: Traços das primeiras quatro curvas.....	67
Figura 28: Representação dos vértices .....	68

# Introdução

Este trabalho apresenta alguns princípios sobre curvas planas. A motivação do tema é baseada nas disciplinas de MA 23 (Geometria Analítica) e MA 22 (Fundamentos de Cálculo) do curso PROFMAT. Além das duas disciplinas tomamos outros autores como referências de estudo. Dividimos a dissertação em cinco capítulos. O nosso público alvo são os professores do Ensino Médio, que deverão relembrar conteúdos de cálculo diferencial integral e geometria analítica.

O primeiro capítulo trata de conceitos preliminares dos quais faremos uso ao longo do trabalho, muitos deles pertencentes às disciplinas mencionadas acima.

No segundo capítulo iremos esclarecer o que é uma curva parametrizada e sua convenção para a expressão cartesiana. No estudo das curvas é comum utilizar equações cartesianas no Ensino Médio, isto é, uma variável dependente e outra independente, ou seja,  $y = f(x)$ . Mas existem traços impossíveis de serem descritos na forma  $y = f(x)$  como, por exemplo, a cicloide. Para resolver este problema e outros defendemos a introdução no Ensino Médio das equações paramétricas. Abordaremos ainda no segundo capítulo as cônicas, a catenária e a cicloide apresentando as equações paramétricas, propriedades e aplicações.

O terceiro capítulo apresentará propriedades gerais das curvas planas, definindo o que é uma curva contínua, o conceito de curva suave, curva regular, vetor velocidade, vetor aceleração e deduziremos a função comprimento de arco. O entendimento da função comprimento é fundamental para introdução ao conceito de reparametrização. Realizaremos uma breve análise do comportamento da curva de Bézier. Estudaremos os invariantes geométricos de uma curva, que permitem especificar a curva e as curvas obtidas dela por rotações e translações, na forma da função curvatura sujeita às equações de Frenet. Para finalizar este capítulo demonstraremos o teorema fundamental das curvas planas.

No quarto capítulo dedicamos o nosso estudo a uma curva conhecida como curva de preenchimento de espaço que tem características particulares e demonstraremos as propriedades de continuidade, sobrejetividade e não diferenciabilidade em nenhum ponto. A ideia de sua construção é o que a diferencia de qualquer outra curva, porque leva todos os pontos de um segmento  $[0,1]$  a todos os pontos de um

quadrado  $[0,1]^2$  de tal forma que atenda as propriedades citadas. Geometricamente é o mesmo que pegar todos os pontos de um segmento de reta e preencher um quadrado de mesma dimensão do segmento.

No quinto capítulo faremos algumas considerações finais sobre o nosso estudo, apontando a relevância da curva no estudo da Matemática.

# 1 Preliminares

Este capítulo destina-se a abordar conceitos de distância entre dois pontos, vetores, produto escalar, limite, continuidade, diferenciabilidade e funções vetoriais, termos que serão empregados ao longo deste trabalho. Também necessitaremos do conceito de base e sua orientação, advinda da geometria analítica.

## 1. Distância entre pontos e vetores no plano

**Definição 1.1** Sejam os pontos  $P = (x_P, y_P)$  e  $Q = (x_Q, y_Q)$  no plano  $\alpha$  dados por um sistema de eixos ortogonais  $\overrightarrow{OX}$  e  $\overrightarrow{OY}$ , a distância de  $P$  a  $Q$ , representada por  $d(P, Q)$  será calculada por:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

**Definição 1.2** Dados os pontos  $P = (x_P, y_P)$  e  $Q = (x_Q, y_Q)$  no plano, o segmento de reta orientado representado por  $u = \overrightarrow{PQ} = (a, b)$  é o que chamaremos de vetor de  $P$  a  $Q$ , onde  $a = x_Q - x_P$  e  $b = y_Q - y_P$ .

**Definição 1.3** A norma ou o comprimento do vetor  $v$  é o número positivo  $\|v\|$  dado pelo comprimento de segmento de reta representante de  $v$ . Se  $v = (a, b)$  a sua norma  $\|v\|$  é calculada por

$$\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**Definição 1.4** O produto escalar (ou produto interno) de dois vetores  $u = (a, b)$  e  $v = (c, d)$  é o escalar denotado por  $\langle u, v \rangle$  definido por:

$$\langle u, v \rangle = a \cdot c + b \cdot d$$

**Teorema 1.1** (Interpretação geométrica do produto escalar) Se  $u = (a, b)$  e  $v = (c, d)$  são dois vetores não-nulos, então

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$$

onde  $\theta$  é o menor ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$  quando aplicados a um mesmo ponto.

**Prova:** Sejam  $u = (a, b)$  e  $v = (c, d)$  e  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ , e  $w$  um vetor com coordenadas  $(a - c, b - d)$ , logo os vetores  $u$ ,  $v$  e  $w$  formam um triângulo com  $w$  oposto a  $\theta$ , aplicando a lei do cosseno,

$$\|w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| \cos \theta$$

$$(a - c)^2 + (b - d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$$

$$-2ab - 2cd = 2\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$$

$$ab + cd = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$$

Usando a definição 1.4, segue

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$$

Desse modo, dois vetores são ortogonais (ângulo de  $90^\circ$  entre si) precisamente quando são não nulos e têm produto escalar 0.

## 2. Funções reais e vetoriais

**Definição 1.5** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos contidos nos reais. Uma função real de uma variável é uma relação  $f: A \rightarrow B$  que, a cada elemento  $x \in A$ , associa um e somente um elemento  $y \in B$ .

Os conjuntos  $A$  e  $B$  são chamados de domínio e contradomínio de  $f$ . O conjunto  $f(A) = \{y \in B; \exists x \in A, f(x) = y\} \subset B$  é chamado de Imagem de  $f$ .

Uma função real de duas variáveis pode ser descrita pela relação  $f: A \rightarrow B$  que, a cada par de elementos  $(x, y) \in A$ , associa um e somente um elemento  $z \in B$ . Analogamente existem funções com várias variáveis.

**Exemplo 1.1** Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , então  $f$  é uma função de duas variáveis como domínio e contradomínio contido nos reais e a sua imagem é o conjunto dos reais positivos.

**Definição 1.6** Uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores é chamada de função vetorial.

Isso significa que para todo  $t$  no domínio de  $r$  existe um único vetor  $u$  denotado por  $r(t)$ . Se  $r(t)$  pertence ao plano, então  $r(t) = (f(t), g(t))$ , onde  $f(t)$  e  $g(t)$  são funções de valor real, chamadas de componentes de  $r$ . Uma forma equivalente de descrever é  $r(t) = f(t)i + g(t)j$ , onde  $i = (1, 0)$  e  $j = (0, 1)$  são os vetores unitários canônicos ou da base canônica.

**Exemplo 1.2** A função vetorial  $r(t) = (1 + t, 2 + 5t)$  descreve uma reta. De fato, as suas componentes são lineares, logo  $r(t)$  descreve um movimento retilíneo. Para demonstrar, veja que  $r(t) = (1, 2) + t(1, 5)$ , ou seja, o segmento de  $(1, 2)$  a  $r(t)$  é sempre paralelo ao vetor  $(1, 5)$ .

### 3. Limite, continuidade e diferenciabilidade.

**Definição 1.7** Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função de variável real em  $x$ . Dado um número  $a$ , diz-se que o vetor  $L$  é o limite de  $f(x)$  quando  $x \in X$  tende a  $a$ , e escrevemos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , se para todo  $\varepsilon > 0$  dado arbitrariamente, pode-se obter  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$$

No caso  $n = 1$ ,  $L$  será um número real.

**Exemplo 1.3** Seja a função real dada por  $f(x) = 4x - 5$ , prove que o limite de  $f$  é igual a 7 quando  $x$  tende a 3.

Usando da definição 1.7 a representação,

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Leftrightarrow |4x - 5 - 7| = |4(x - 3)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Como queremos  $0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow 0 < |x - 3| < \delta$ , isto sugere que podemos escolher  $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ .

**Exemplo 1.4** Seja a função vetorial dada por  $r(t) = (1 + t^3, e^t)$ , determine o  $\lim_{t \rightarrow 0} r(t)$ .

Determinar o limite de uma função vetorial é calcular o limite para cada componente,

$$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = (\lim_{t \rightarrow 0} 1 + t^3, \lim_{t \rightarrow 0} e^t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = (1, 1)$$

**Definição 1.8** Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diz-se que  $f$  é contínua no ponto  $a \in X$ , quando, para todo  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, pode-se obter um  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$  e  $|x - a| < \delta$  impliquem  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ . Uma forma equivalente de escrever é  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Dizemos que uma função é contínua se for contínua em todos os pontos de seu domínio.

**Definição 1.4** Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A função  $f$  diz-se diferenciável em  $a \in X$  se existir o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A este limite chama-se derivada de  $f$  em  $a$  e representa-se por  $f'(a)$ .

**Teorema 1.2** Seja  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se  $f$  for diferenciável em  $a$ , então  $f$  é contínua em  $a$ .

**Prova:** Para provar que é contínua em  $a$ , temos que mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Por hipótese  $f$  é diferenciável em  $a$  então  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe. Multiplicando e dividindo  $f(x) - f(a)$  por  $x - a$  ( $x \neq a$ ), temos

$$f(x) - f(a) = (f(x) - f(a)) \cdot \frac{(x-a)}{x-a}$$

Calculando o limite com  $x$  tendendo a  $a$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = f'(a) \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

Para usar a informação  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$ , vamos começar com  $f(x)$  e somar e subtrair  $f(a)$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [f(a) + f(x) - f(a)] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) \end{aligned}$$

Portanto  $f$  é contínua em  $a$ .

## 2 Parametrização e aplicações de algumas curvas elementares.

Apresentaremos a importância das curvas para o estudo de qualquer área da Matemática, com destaque no conceito de parametrização para análises das curvas e nas últimas seções deste capítulo faremos referências a grandes problemas de matemática relacionados a curvas elementares e por fim aplicações cotidianas.

### 2.1 Parametrização

A ideia precisa de curva é um trabalho longo e complexo, mas para um primeiro conceito deve ser considerado os princípios da geometria analítica, uma curva no plano é um conjunto de pontos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que satisfaz uma equação do tipo:

$$F(x, y) = 0, \text{ com } x \text{ e } y \in \mathbb{R}$$

Exemplos que se enquadram nessa definição:

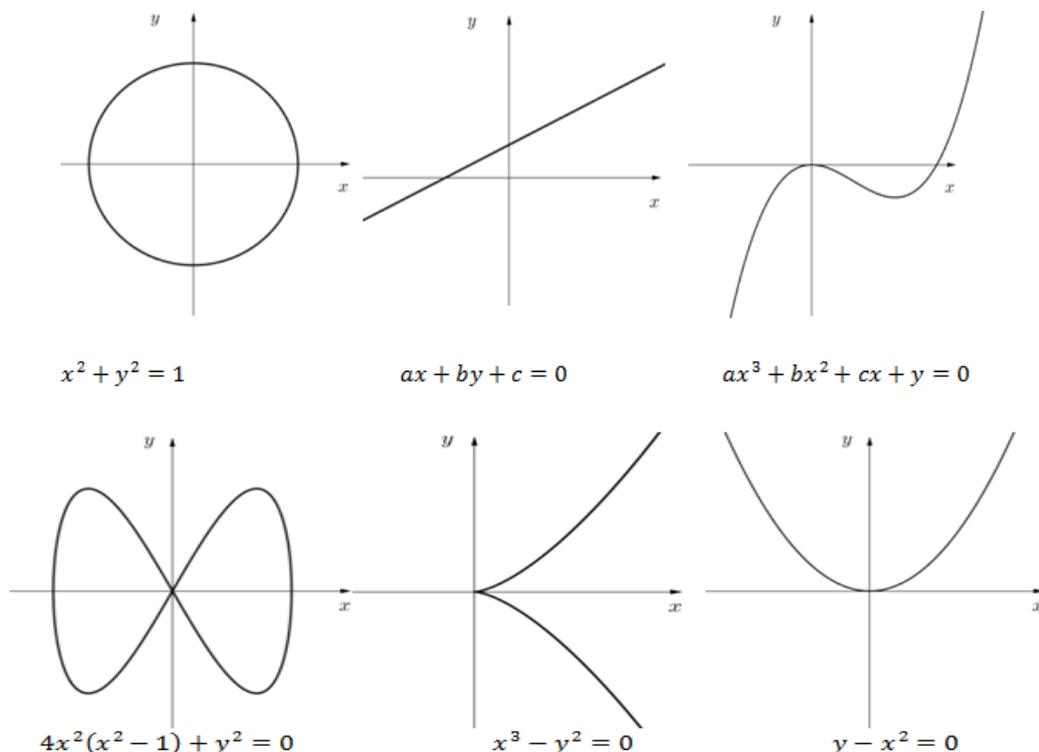


Figura 1: Curvas do tipo  $F(x, y) = 0$

As descrições da forma  $F(x, y) = 0$  ou  $F(x) = y$  são o que chamaremos de equações cartesianas.

A definição analítica nos leva à ideia intuitiva de curva contínua. Imagine uma partícula que se movimenta ao longo de uma curva e que sua posição depende do instante  $t$ , por exemplo, podemos descrever as suas coordenadas em função de  $t$ , isto é,  $P(t) = (x(t), y(t))$  representa a variação do ponto sobre o trajeto da curva  $C$  onde  $t \in [a, b]$  com  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Então podemos reescrever a definição de curva como:

**Definição 2.1** Se as coordenadas  $x$  e  $y$  do ponto  $P$  pertencente a uma curva  $C$  podem ser descritas em função de uma variável  $t$ , então a curva fica definida,

$$C = \{P(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2; t \in [a, b]\}$$

Na definição  $x(t)$  representa o avanço horizontal e  $y(t)$  o deslocamento vertical do ponto  $P(t)$ , isto é,  $x(t)$  e  $y(t)$  são coordenadas parametrizadas e o vetor  $(x(t), y(t))$  em função de  $t$  é a curva parametrizada.

Suponhamos  $P(a)$  ponto de partida e  $P(b)$  como ponto final, caso  $P(a) = P(b)$  dizemos que a curva é fechada. O conjunto  $C$  é o traço da curva.

As equações paramétricas são raramente utilizadas no Ensino Médio. Curvas elementares como retas, circunferências, parábolas e elipses podem ser descritas facilmente utilizando o conceito de equação paramétrica e, portanto, propomos que essa definição seja introduzida no currículo do Ensino Médio. No nível superior, a parametrização assume grande papel no estudo de teoria relacionada ao Cálculo, Geometria Analítica, e principalmente em Geometria Diferencial. Uma grande vantagem que também pode ser citada e que não faz parte deste trabalho é extensão para espaços qualquer ( $\mathbb{R}^n$ ).

A equação paramétrica vetorial da reta pode ser definida por um ponto  $(x_0, y_0)$  pertencente a reta  $r$ , um vetor  $u = (a, b)$  paralelo a  $r$  e um parâmetro  $t$ , todos os pontos  $(x, y)$  da reta  $r$  podem ser definidos por:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \text{ ou } (x, y) = (x_0, y_0) + (a, b)t$$

No próximo tópico aprofundaremos o conceito de parametrização de curvas planas utilizando algumas aplicações para a visão geral da importância do assunto.

## 2.2 Parametrizações de curvas planas

A parametrização é a descrição do traço formado pela movimentação de um ponto nos sistemas de coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ , onde  $x$  e  $y$  dependem do instante  $t$  ou em geral de um parâmetro  $t$ , isto é:

$$P(t): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ onde } t \text{ pertence a um intervalo } I.$$

As equações  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  são uma parametrização da curva. Podemos definir  $P: I \rightarrow \mathbb{R}^2, P(t) = (x(t), y(t))$  como a própria curva.

**Exemplo 2.1** Seja  $C$  uma curva descrita pela equação paramétrica

$$P(t): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Qual é a equação cartesiana que descreve a curva?}$$

Para descobrir a equação cartesiana que descreve a curva, vamos buscar uma expressão não dependente do parâmetro  $t$ .

Usando  $x = 1 + 3t$  e isolando  $t$  temos:

$$x = 1 + 3t$$

$$t = \frac{x-1}{3}$$

Substituindo  $t$  na segunda equação temos,

$$y = 2 + t$$

$$= 2 + \frac{x-1}{3}$$

$$y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$$

Note que a equação cartesiana é dada por um polinômio de primeiro grau, portanto a curva descrita é uma reta.

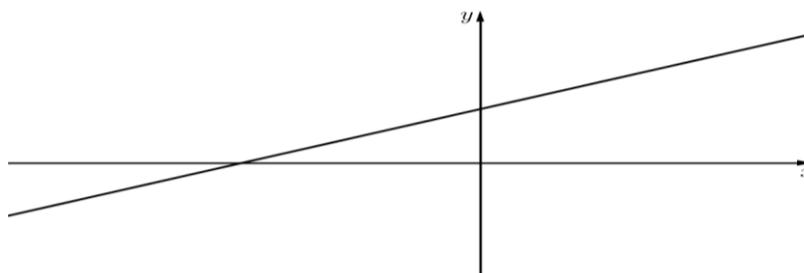


Figura 2: Equação da reta  $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$

**Exemplo 2.2** Seja  $y = 1 + 2x$  a equação cartesiana da curva, determine sua parametrização.

Note que  $y$  depende de  $x$  e procuramos uma expressão paramétrica das quais  $x$  e  $y$  dependam de uma determinada variável. A técnica consiste em atribuir uma expressão do qual  $x$  e  $y$  dependam somente do parâmetro  $t$ .

Se  $x = 2t$ , da equação  $y = 1 + 2x$ , temos que  $y = 1 + 2 \cdot 2t = 1 + 4t$ , isto é:

$$P(t) = \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$$

Portanto  $P(t)$  é uma parametrização da equação  $y = 1 + 2x$ .

Observe que  $P(t)$  não é única, poderíamos supor  $x = -t$  e usando o raciocínio análogo, obteremos  $y = 1 + 2x = 1 - 2t$ , logo a nova parametrização é dada por:

$$P_0(t) = \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

Para estudos posteriores utilizaremos com frequência o conceito de equações paramétricas.

### 2.3 Propriedades e aplicação de algumas curvas elementares

O estudo da Matemática sempre esteve ligado a curvas, sejam elas construídas através de conceitos puramente euclidianos como faziam os gregos ou com estudo analítico de coordenadas influenciadas por René Descartes e Fermat ou até mesmo pelo estudo infinitesimal da geometria diferencial protagonizado por Newton e Leibniz.

Os grandes problemas relacionados às curvas foram garimpados ao longo da história através da observação da natureza como a parábola, elipse, catenária, espiral, fractais, entre outras. Nesta seção estudaremos as origens e propriedades de algumas curvas naturais, para iniciar apresentaremos as cônicas. Para finalizar cada seção deste capítulo faremos uma breve reflexão sobre algumas curvas elementares, descrevendo suas definições, equações canônicas, propriedades e aplicações.

### 2.4.1. Cônicas

A elipse, a parábola, a hipérbole e a circunferência são chamadas de cônicas, devido a serem produzidas a partir de secções no cone, isto é, a intersecção de um plano com um cone ou uma reta.

- A parábola é gerada quando o plano é paralelo à linha geradora do cone (chamada geratriz);
- A elipse pode ser obtida cortando-se um cone reto com um plano transversal às geratrizes do cone interceptando todas do mesmo lado do vértice. Caso o corte seja paralelo à base do cone geramos a circunferência;
- A hipérbole pode ser obtida cortando-se um cone duplo reto com um plano paralelo ao eixo do cone duplo, que intercepta algumas geratrizes de um lado do vértice e outras no outro.
- Caso o plano passe pelo vértice do cone teremos simplesmente um ponto ou uma reta.

A visualização geométrica de cada secção cônica é apresentada abaixo.

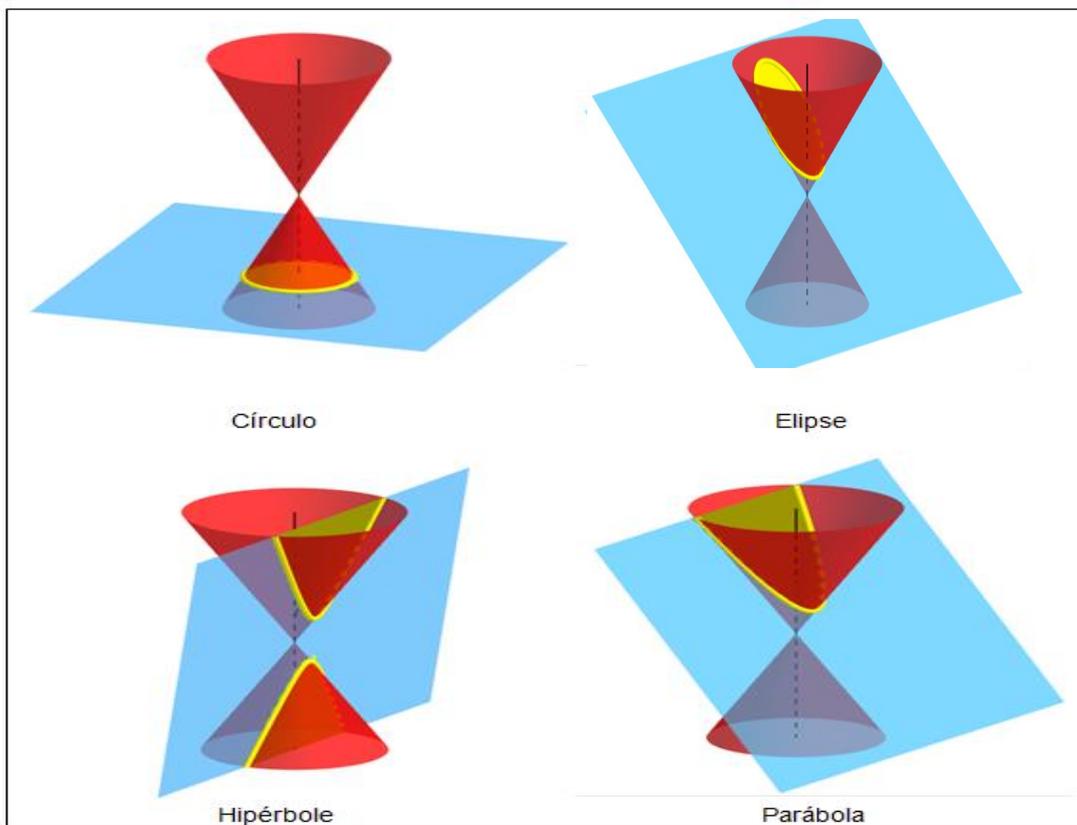


Figura 3: Secções no cone

Segundo Delgado; Frensel (2013), matematicamente as cônicas podem ser descritas pela equação quadrática da forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Onde  $a, b, c, d, e$  e  $f$  são coeficientes que caracterizam cada uma delas.

#### 2.4.2 Parábola

**Definição 2.2** Parábola é o conjunto dos pontos  $P$  do plano tal que,

$$d(P, F) = d(P, d)$$

sendo  $F$  um ponto fixo chamado de foco,  $d$  a reta diretriz da parábola,  $d(P, F)$  a distância do ponto  $P$  ao foco  $F$  e  $d(P, d)$  a distância do ponto  $P$  à reta  $d$ . O ponto  $V$  pertencente à parábola mais próximo da diretriz é chamado de vértice da parábola.

Para escrever a equação canônica da parábola em relação a um sistema de coordenadas cartesianas, onde  $V(0,0)$  e  $F(0,c)$  para algum  $c > 0$ , tomemos  $P(x,y)$  e  $Q(x,-c)$ , onde  $P$  pertence à parábola e  $Q$  à reta. Na figura abaixo podemos visualizar os elementos da parábola.

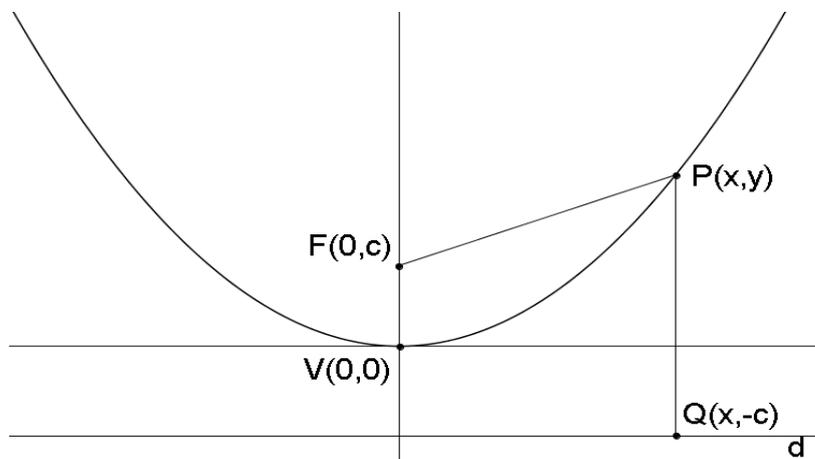


Figura 4: Os elementos da parábola

Usando a definição 2.2,  $d(P, F) = d(P, d)$  podemos escrever:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - c)^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y + c)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = y^2 + 2yc + c^2$$

$$4yc = x^2$$

$$y = \frac{x^2}{4c}$$

Portanto a equação cartesiana da parábola é dada por:  $y = \frac{x^2}{4c}$ .

Uma equação paramétrica para a parábola pode ser criada a partir da figura abaixo.

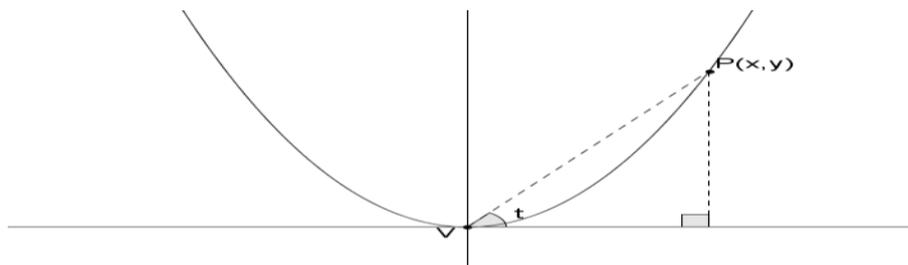


Figura 5: O parâmetro  $t$  na parábola

Do desenho temos:

$$\operatorname{tg} t = \frac{y}{x} \Rightarrow \operatorname{tg} t = \frac{\frac{x^2}{4c}}{x} \Rightarrow x = 4c \operatorname{tg} t$$

e como  $y = \frac{x^2}{4c} \Rightarrow y = 4c \operatorname{tg}^2 t$

Portanto uma equação paramétrica da parábola com eixo de simetria  $Oy$  pode ser dada por:

$$P(t): \begin{cases} x = 4c \operatorname{tg} t \\ y = 4c \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$$

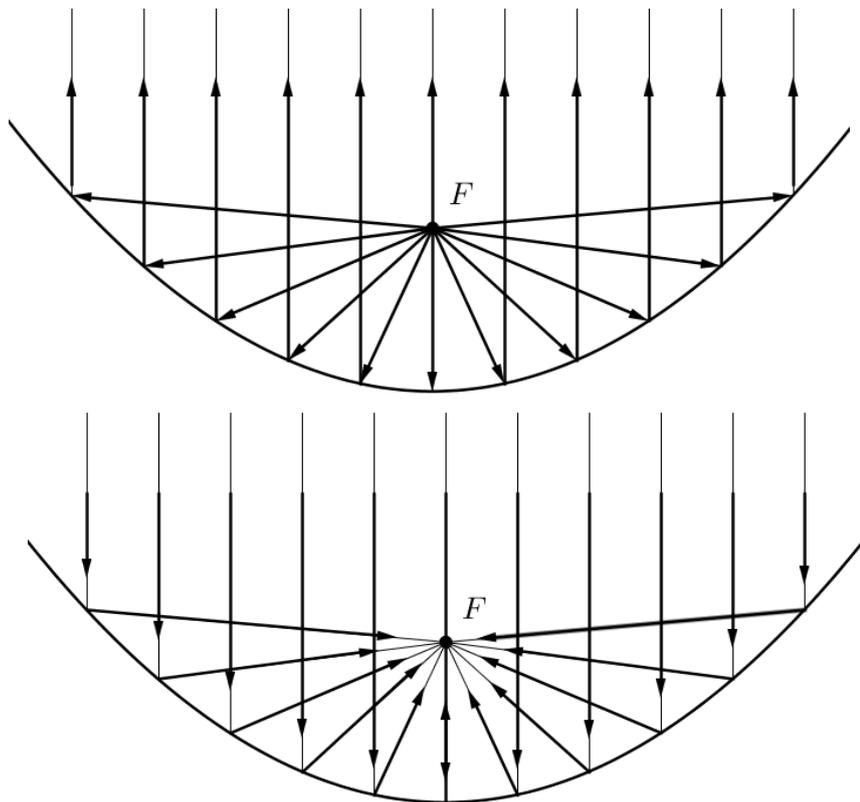
Também poderia ser  $P(t): \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{4c} \end{cases}$ , com uma simples substituição de  $x = t$ .

### Algumas aplicações da parábola.

Se giramos uma parábola em torno de seu eixo, ela vai gerar uma superfície chamada parabolóide de revolução. Esta região possui inúmeras aplicações todas proveniente de uma propriedade geométrica da parábola:

**Propriedade:** Considere que a parte interna da parabolóide seja espelhada, se uma fonte de luz for colocada no foco, os raios que esta fonte irradia serão refletidos todos paralelamente ao eixo de simetria (princípio dos refletores – Figura 6). De

acordo com Wagner (1997), se ao invés de uma fonte luminosa tivéssemos um elemento captador de sinais eletromagnéticos, as ondas eletromagnéticas emitidas por satélites, propagando-se paralelamente ao eixo de simetria, na superfície interna do parabolóide, convergiriam todas para o foco (princípio das antenas parabólicas Figura 6).



**Figura 6: Divergência e convergência dos raios incidentes na parábola**

**Aplicação** - Devido à propriedade de centralizar certo sinal eletromagnético no foco, é muito comum utilizar antenas ou radares com formato parabolóide ou no caso de todo raio luminoso partindo do foco a superfície, estes refletem todos os raios paralelos entre si, usamos esta característica nos faróis de carro e lanternas. Portanto as propriedades da parábola centralizam e potencializam o sinal.

Para a demonstração deste fato reproduziremos literalmente o raciocínio de Wagner (1997, p. 10-15).

**Demonstração:** Seja  $P$  um ponto qualquer da parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$ , tomamos  $D$  um ponto pertencente à diretriz tal que  $d(P, F) = d(P, D)$ , seja a reta  $t$  a

bissetriz do ângulo  $FPD$  (Figura 7). Vamos mostrar primeiramente que  $P$  é o único ponto tangente a parábola pertencente a  $t$ .

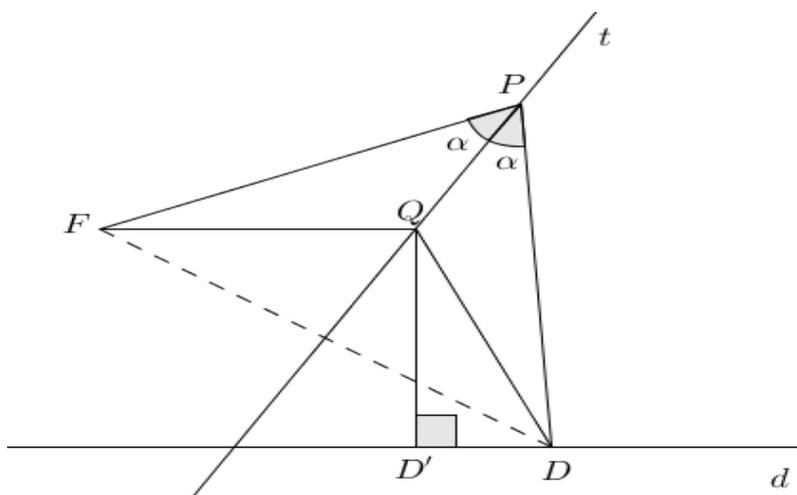


Figura 7: Propriedade da reflexão

No triângulo  $FPD$ , como  $d(P, F) = d(P, D)$ , segue que  $t$  é também mediana e altura deste triângulo, isto é,  $t$  é mediatriz do segmento  $FD$ . Tomando  $Q$  um ponto qualquer que pertence a  $t$ , mas distinto de  $P$ , se  $D'$  é a projeção de  $Q$  sobre  $d$ , temos

$$QF = QD > QD'$$

Segue que  $Q$  é exterior a parábola, e por consequência todos os pontos pertencentes à reta com exceção de  $P$  são exteriores a parábola. Portanto  $t$  é tangente a parábola em  $P$ .

Prolongando o segmento  $DP$ , obtemos a semirreta  $PY$ . Segue que o ângulo formado pela semirreta  $PY$  e  $t$  é congruente ao ângulo formado por  $PD$  com  $t$ , pois os ângulos são opostos pelo vértice. E como  $t$  é bissetriz do ângulo  $FPD$ , o ângulo entre  $PF$  com  $t$  é congruente ao ângulo formado pela semirreta  $PY$  com  $t$ . Como a semirreta  $PY$  é paralela à reta ortogonal a  $d$  e que passa por  $F$  (eixo da parábola), todo raio que incide de maneira paralela ao eixo da parábola passará pelo foco.

### 2.4.3 Circunferência

**Definição 2.3: Circunferência** é o lugar geométrico de todos os pontos  $P(x, y)$  equidistantes de um ponto fixo  $O(a, b)$ , onde chamamos esta distância de raio  $r$ .

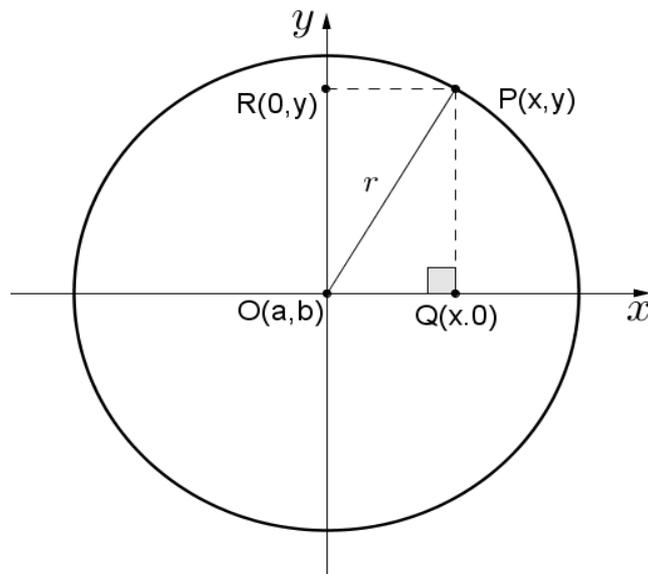


Figura 8: A circunferência

Tomemos os pontos de acordo com  $(a, b) = (0, 0)$ , considerando a **definição 2.3** e usando o teorema de Pitágoras temos:

$$[d(O, Q)]^2 + [d(Q, P)]^2 = [d(O, P)]^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Uma equação paramétrica para a circunferência pode ser dada em função do ângulo  $t$ , veja Figura 9:

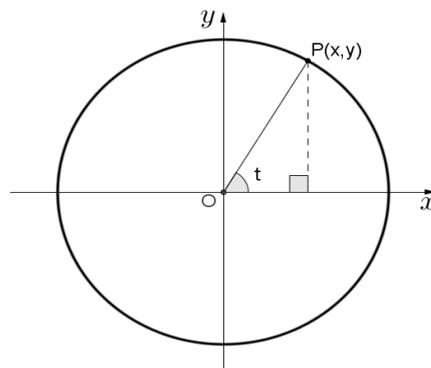


Figura 9: Parametrização da circunferência

Seja  $t$  o ângulo entre o raio  $r$  com o eixo da abscissa, considerando as relações trigonométricas teremos,

$$\cos t = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cdot \cos t$$

$$\text{sen } t = \frac{y}{r} \implies y = r \cdot \text{sen } t$$

Portanto uma equação paramétrica para circunferência com centro na origem é da forma:

$$P(t): \begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \text{sen } t \end{cases} \text{ com } t \in [0, 2\pi]$$

**Aplicação** – Uma das aplicações mais notável e ainda pré-histórica é a invenção da própria roda para meio de transporte.

#### 2.4.4 Elipse

**Definição 2.4 Elipse** é o conjunto dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que:

$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \kappa$ , onde  $\kappa$  é uma constante,  $F_1$  e  $F_2$  são pontos fixos chamados de focos.

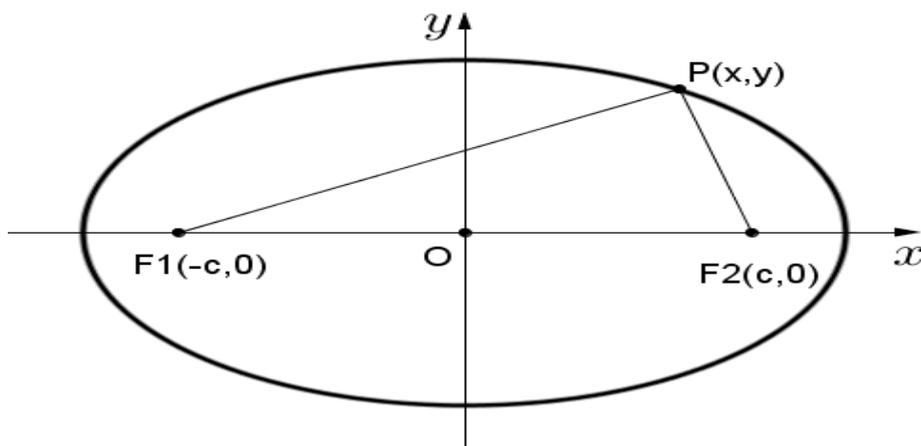


Figura 10: A elipse

Vamos determinar a equação analítica que representa a elipse, para simplificar, vamos centralizar a elipse na origem do plano cartesiano com seus focos em  $(-c, 0)$  e  $(c, 0)$  e tomar  $\kappa = 2a$ , com  $a > c$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Aplicando a **definição 2.4** com as configurações da figura 10, teremos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \kappa$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

Elevando ambos os membros ao quadrado novamente,

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = a^4 - 2xca^2 + x^2c^2$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2xca^2 + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2xca^2 + c^2a^2 + y^2a^2 = a^4 - 2xca^2 + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + c^2a^2 + y^2a^2 = a^4 + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + y^2a^2 = a^4 - c^2a^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como  $a > c$  e tomando  $a^2 - c^2 = b^2$ ,  $x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2$ , ao dividir ambos os membros por  $a^2b^2$ , temos,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Portanto a equação reduzida da elipse é  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a$  e  $b$  são chamados de semieixo maior e semieixo menor. O valor de  $a$  corresponde ao segmento de reta formado pela distância do centro à intersecção do eixo focal (eixo que contém os focos) com a elipse. A medida  $b$  corresponde ao segmento de reta formado pela distância do centro com a intersecção da elipse com o eixo não focal (eixo perpendicular à origem) conforme figura 11.

Uma equação paramétrica pode ser obtida em função do ângulo  $t$  entre o eixo  $Ox$  e o vetor de origem em  $O(0,0)$  e com um ponto  $P(x,y)$  pertencente à elipse. Considerando duas circunferências concêntricas de centro  $O(0,0)$  e com raios  $a$  e  $b$ , iguais ao eixo maior e menor da elipse, conforme figura 11.

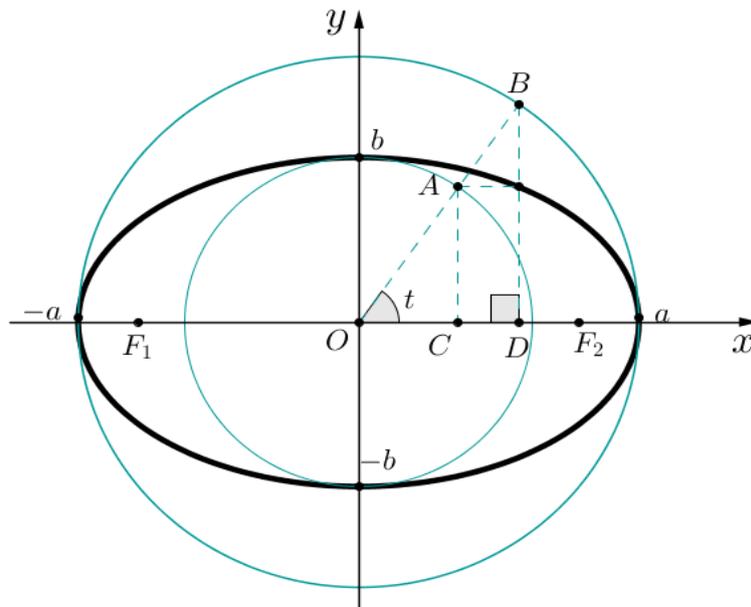


Figura 11: Parametrização da elipse.

Para associar  $x$  e  $y$  com ângulo  $t$  podemos escrever:

$$\text{No } \Delta_{OAC}, \text{sen } t = \frac{y}{b} \quad \Rightarrow \quad y = b \cdot \text{sen } t$$

$$\text{No } \Delta_{OBD}, \text{cos } t = \frac{x}{a} \quad \Rightarrow \quad x = a \cdot \text{cos } t$$

Portanto uma equação paramétrica para elipse pode ser dada por:

$$P(t): \begin{cases} y = b \cdot \text{sen } t \\ x = a \cdot \text{cos } t \end{cases}, \text{ para } t \in \mathbb{R}$$

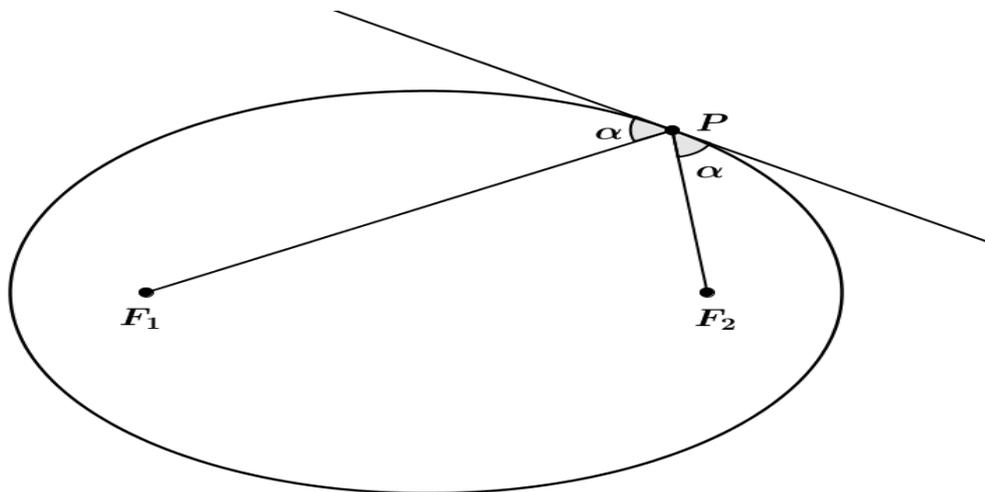
### Aplicações da elipse

Uma aplicação conhecida da elipse é o estudo do movimento dos corpos celestes. O cientista alemão Johannes Kepler, durante os seus estudos concluiu que os planetas descrevem orbitas elípticas, entre eles a própria Terra, dos quais o Sol fica posicionado em um dos focos da elipse.

Uma segunda aplicação pode ser observada na óptica: as clínicas odontológicas usam uma luminária com espelho elíptico, do qual a lâmpada fica

localizada em um dos focos da elipse e o dentista ajusta o aparelho para que o dente tratado fique localizado próximo ao outro foco.

Note que essa aplicação tem como objetivo concentrar sinal em um determinado ponto, tal fenômeno é explicado pela propriedade refletora e bissetora da elipse. A propriedade refletora afirma que raios partindo de um foco, ao refletir na elipse, chegam ao outro foco ao mesmo tempo. E a propriedade bissetora diz que qualquer raio emitido em um dos focos, ao refletir na elipse, sempre dirigirá para o outro foco. Seja  $P$  um ponto pertencente a uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$  e seja  $t$  uma reta tangente à elipse em  $P$ , então  $t$  forma ângulos iguais com os segmentos  $F_1P$  e  $F_2P$ .



**Figura 12: Propriedade bissetora da elipse.**

A demonstração da propriedade bissetora será reproduzida literalmente do raciocínio de Valladares (1988, p. 24-28).

**Demonstração:** Seja uma elipse  $E$ , com focos em  $F_1$  e  $F_2$ , tomando um ponto  $P \in E$  e uma reta  $t$  que reflete de  $F_1$  para  $F_2$  em  $P$  (Figura 12). Queremos mostrar que  $t$  é tangente a  $E$  em  $P$ . Segue da definição de elipse que,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = \kappa \text{ (ou } 2a\text{)}$$

Então um ponto  $Q \notin E$ , se e somente se

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) \neq \kappa$$

Logo, para qualquer  $Q \in t$  com  $P \neq Q$ , queremos que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) \neq d(Q, F_1) + d(Q, F_2)$$

Seja  $F_1'$  o simétrico de  $F_1$  com relação a  $t$ , tome sobre  $t$  um ponto  $Q \neq P$  (Figura 13).

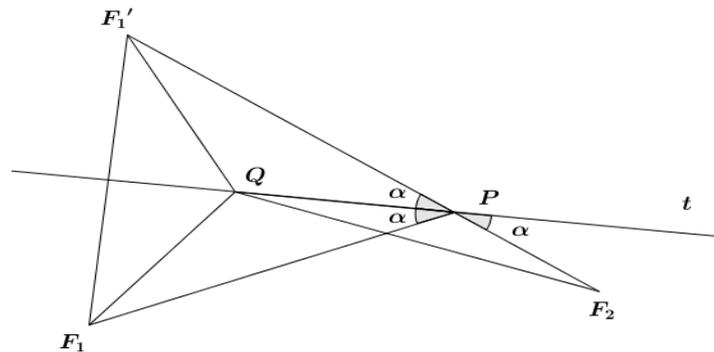


Figura 13: Propriedade bissetora da elipse II

Note que a reta  $t$  é mediatriz de  $F_1F_1'$ , segue que  $d(P, F_1) = d(P, F_1')$  e também  $d(Q, F_1) = d(Q, F_1')$ . Pela construção a reta  $t$  faz ângulos congruentes com  $PF_1$  e  $PF_2$  e os ângulos  $QPF_1$  e  $QPF_1'$  também são congruentes, segue que  $PF_2$  e  $PF_1'$  fazem ângulos iguais com  $t$  e, portanto  $F_2, P$  e  $F_1'$  são colineares. Então

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= d(P, F_1') + d(P, F_2) \\ &= d(F_1', F_2) < d(Q, F_1') + d(Q, F_2) \text{ (desigualdade triangular em } QF_2F_1') \\ &= d(Q, F_1) + d(Q, F_2) \end{aligned}$$

Como  $d(Q, F_1) + d(Q, F_2) > d(P, F_1) + d(P, F_2)$ , concluímos que  $P$  é o único ponto de  $t$  que pertence à elipse, o que mostra a tangência.

## 2.4.5 Hipérbole

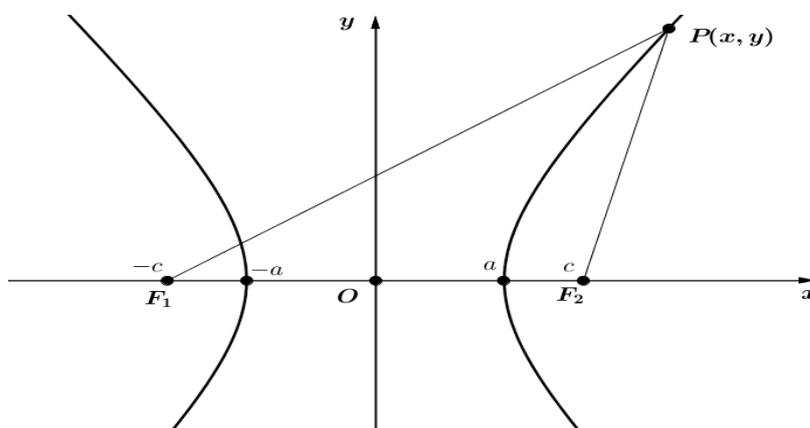
**Definição 2.5: Hipérbole** é o conjunto dos pontos  $P(x, y)$  do plano tais que:

$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  são pontos fixos chamados de focos e  $a$  é uma constante.

Uma equação analítica da hipérbole pode ser mostrada usando raciocínio análogo ao procedimento adotado para determinar a equação da elipse, isto é, tomando como ponto de partida a própria definição e chegaremos a concluir que

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  é a equação reduzida da hipérbole centrada na origem e com eixo focal em  $Ox$ .

A constante  $a$  é a distância do centro ao ponto de intersecção da hipérbole com o eixo focal (eixo que contém os focos) e chamando de  $c$  a distância do centro a um dos focos, a medida  $b$  fica determinada pela relação  $b^2 = c^2 - a^2$ .



**Figura 14: A hipérbole**

Uma equação paramétrica pode ser obtida em função do ângulo entre um vetor e o eixo  $Ox$  do plano cartesiano. Considere a hipérbole  $\gamma$  centrada na origem e com semieixo real (ou eixo transverso) medindo  $a$  e o semieixo imaginário (ou eixo conjugado) medindo  $b$ . Trace as circunferências  $C_1$  e  $C_2$  concêntricas de centro  $O = (0,0)$  e com raios respectivamente  $a$  e  $b$ . Tome o ponto  $P = (x, y) \in \gamma$  e trace pelos pontos  $G = (b, 0)$  e  $J = (b, y)$  a reta  $r$  que é tangente a  $C_2$  em  $G$ . Chame  $t$  o ângulo  $GOJ$ , seja  $H_2$  a intersecção de  $OJ$  com  $C_1$  e trace do ponto  $Q = (x, 0)$  uma reta tangente a  $C_1$  no ponto  $H_1$ . Vamos mostrar que  $H_1 = H_2$ , calculando os ângulos  $QOH_1$  e  $GOH_2$ , temos,

$$\cos QOH_1 = \frac{OH_1}{OQ} = \frac{a}{x} \text{ e } \cos GOH_2 = \frac{OG}{OJ} = \frac{b}{\sqrt{b^2+y^2}} = \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2}}} = \frac{a}{x}$$

segue que os ângulos  $QOH_1$  e  $GOH_2$  são iguais, então  $H_1 \in OJ$ , conforme construção (figura 15).

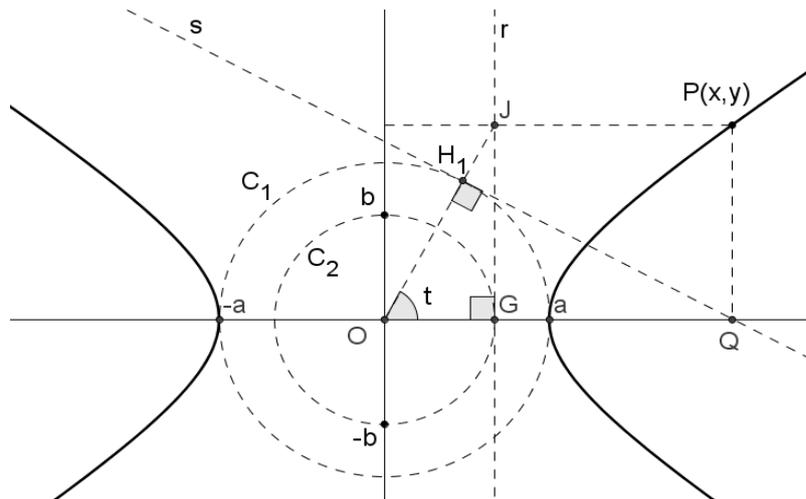


Figura 15: Parametrização da hipérbole.

Note que o  $\Delta OGJ$  é reto em  $G$ , então podemos escrever:

$$\operatorname{tg} t = \frac{y}{b} \Rightarrow y = b \cdot \operatorname{tg} t$$

O  $\Delta OHQ$  é reto em  $H$ , então:

$$\cos t = \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow x = a \cdot \sec t$$

Portanto uma equação paramétrica pode ser dada por:

$$P(t): \begin{cases} y = b \cdot \operatorname{tg} t \\ x = a \cdot \sec t \end{cases}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}$$

### Aplicação da Hipérbole

Segundo Wagner (1997) na área da astronomia a hipérbole é utilizada para fabricar lentes de telescópio e também existem cometas com velocidades altas que descrevem órbita hiperbólica ou parabólica, a velocidade é determinante no tipo de órbita descrita pelo cometa. Os astros que descrevem tal movimento aparecem uma única vez, isto é, sua órbita não é periódica. A engenharia é outra área de vasta aplicação tanto para fins estéticos, *Planetário de Sant Louis\** e *Kobe Port Tower\*\** ou estruturais, Torre de refrigeração\*\*\*.

\* *Planetário de Sant Louis* – fundado 1963, Estados Unidos ([https://en.wikipedia.org/wiki/Saint\\_Louis\\_Science\\_Center](https://en.wikipedia.org/wiki/Saint_Louis_Science_Center)).

\*\* *Kobe Port Tower* – concluída em 1963, Japão ([https://en.wikipedia.org/wiki/Kobe\\_Port\\_Tower](https://en.wikipedia.org/wiki/Kobe_Port_Tower)).

\*\*\* Torre de refrigeração - ([https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre\\_de\\_resfriamento](https://pt.wikipedia.org/wiki/Torre_de_resfriamento)).

## 2.5 Catenária

A catenária é uma curva plana semelhante ao traço descrito por uma corrente ou corda de densidade uniforme, suspensa pelos extremos e submetida apenas à força da gravidade.

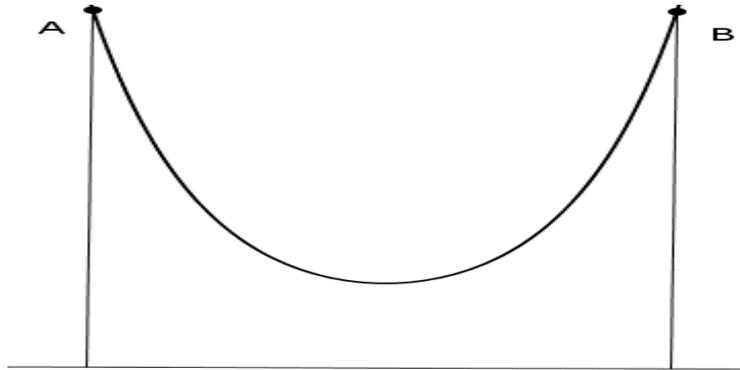


Figura 16: A catenária.

Por muito tempo a catenária e a parábola foram consideradas a mesma curva por vários matemáticos, esta teoria ganhou apoio de cientistas como o renomado Galileu Galilei, mas o matemático holandês Christiaan Huygen mostrou que tal teoria estava errada e ainda propôs para os grandes matemáticos da época, que descobrissem uma equação que descreva tal curva. Em 1691 sugeriram três resoluções com mesma solução, que foi dada pelo próprio Christiaan Huygens, por Leibniz e Johann Bernoulli.

Vamos mostrar de forma análoga a demonstração dada por Leibniz e Johann Bernoulli, com auxílio das figuras 17 e 18 e usando princípios de corpos estáticos da Física e conhecimentos básicos de Cálculo diferencial integral, seguindo o raciocínio de Lopes (2015, p.120-121).

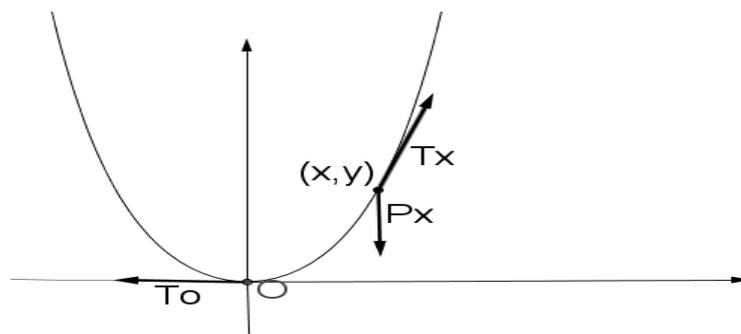


Figura 17: Forças que atuam na catenária

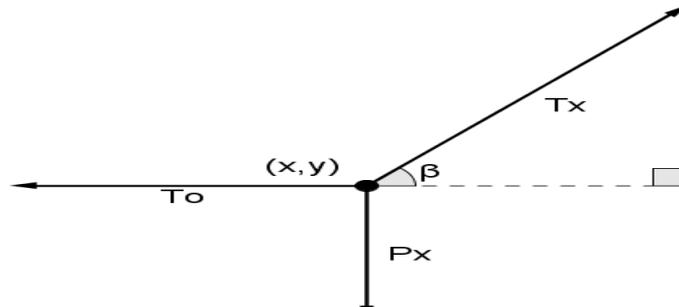


Figura 18: Forças que atuam em um ponto da catenária

**Demonstração:** Seja  $xOy$  o plano onde a catenária esteja localizada, tomando como referência o eixo  $Ox$  horizontal e o  $Oy$  vertical, então a curva pode ser descrita por uma função do tipo  $y(x)$ . Ajuste a origem  $O$  no ponto mais baixo da curva, onde se localiza o vértice da catenária. A reta tangente em um ponto  $(x, y)$  que pertence à curva tem coeficiente angular  $y' = \text{tg } \beta$ . Considere  $T_x$  a intensidade da força tensora sofrida pela curva em  $(x, y)$ , logo, o traço da catenária entre a origem e o ponto  $(x, y)$  está em equilíbrio por três forças: a tensão na origem que chamaremos de  $T_o$ , a tensão em  $(x, y)$  e seu próprio peso que representaremos por  $P_x$ . O equilíbrio vertical é definido por

$$T_x \text{sen } \beta = P_x$$

O equilíbrio horizontal é definido por

$$T_x \text{cos } \beta = T_o$$

Ao dividir a primeira expressão pela segunda temos

$$\frac{T_x \text{sen } \beta}{T_x \text{cos } \beta} = \frac{P_x}{T_o} \Rightarrow \frac{P_x}{T_o} = \text{tg } \beta$$

$$\frac{P_x}{T_o} = y'(x) \quad (1)$$

Ao usar a noção de física básica sabemos que a força peso é o produto da massa ( $m$ ) pela gravidade  $g$ , então

$$P_x = m \cdot g \quad (2)$$

Considere  $\delta$  a densidade linear e  $\lambda$  o comprimento do cabo, temos

$$P_x = m \cdot g$$

$$P_x = \delta \cdot \lambda \cdot g \quad (3)$$

No capítulo 2 veremos que o comprimento de uma seção curva pode ser calculado por

$$\lambda = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \quad (4)$$

Usando (4), (3), (2) e (1) chegamos em

$$y'(x) = \frac{\delta \cdot g}{T_0} \cdot \int_0^x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Derivando a expressão e chamando  $a = \frac{\delta \cdot g}{T_0}$ , assim obtendo a relação

$$y''(x) = a \sqrt{1 + (y'(x))^2}$$

Substitua  $y'(x) = z(x)$ , onde  $z$  é uma variável auxiliar, temos

$$\frac{dz}{dx} = a \sqrt{1 + z^2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = a \cdot dx$$

Fazendo  $z = \operatorname{tg} \theta$ ,  $dz = (\sec \theta)^2$  e integrando a última expressão, teremos

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz = \int a dx$$

$$\int \frac{(\sec t)^2}{\sec \theta} d\theta = \int a dx$$

$$\int \sec \theta d\theta = ax + c_1$$

$$\ln|\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| = ax + c_1$$

Onde  $c_1$  representa uma constante produzida pelo processo de primitivação, colocando a última expressão em função da variável  $z$ , escrevemos

$$\ln|\sqrt{1+z^2} + z| = ax + c_1$$

Isolando  $z$ ,

$$\ln|\sqrt{1+z^2} + z| = ax + c_1$$

$$\sqrt{1+z^2} + z = e^{ax+c_1}$$

$$\sqrt{1+z^2} = e^{ax+c_1} - z$$

$$1 + z^2 = e^{2ax+2c_1} - 2 \cdot e^{ax+c_1} \cdot z + z^2$$

$$1 = e^{2ax+2c_1} - 2 \cdot e^{ax+c_1} \cdot z$$

$$z = \frac{1 - e^{2ax+2c_1}}{-2 \cdot e^{ax+c_1}}$$

$$z = \frac{e^{ax} e^{c_1}}{2} - \frac{e^{-ax}}{2 \cdot e^{c_1}}$$

Chamando a constante  $e^{c_1} = c_2$  temos,

$$z = \frac{e^{ax} c_2}{2} - \frac{e^{-ax}}{2 \cdot c_2}$$

Lembramos que temos  $y(0) = 0$ , pois supomos que a origem coincide com o vértice da catenária, e que no vértice a tangente é horizontal, logo  $y'(0) = 0$  e temos que  $z(0) = 0$ . Substituindo, obtemos  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 1$  e como queremos calcular

$$y = \int z dz = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} + c = \frac{1}{a} \cosh(ax) + c$$

Considerando  $y(0) = 0$ , concluímos que  $c = -\frac{1}{a}$  e finalmente chegamos em

$$y = \frac{1}{a} \cosh(ax) - \frac{1}{a}$$

onde a última expressão representa a equação da catenária.

## Aplicação da catenária

Segundo Talavera (2008) a catenária invertida tem uma característica especial, se aplicamos uma força na catenária, esta força será distribuída ao longo de seu comprimento. Neste processo a carga aplicada é translada para a fundação da estrutura e assim aumentando a sua capacidade.

## 2.6 Cicloide

**Definição:** Sejam  $C$  um círculo de raio  $r$ ,  $s$  uma reta tangente em  $C$  e  $P$  um ponto pertencente a  $C$ . Chamaremos de cicloide a curva descrita por  $P$  quando  $C$  rola sobre  $s$  sem deslizar.

Para gerarmos a equação paramétrica da curva adotaremos as seguintes condições:

- A reta  $s$  coincide com o eixo  $Ox$ ;
- O centro do círculo  $C$  no início do movimento é o ponto  $(0, r)$ ;
- O ponto  $P$  coincide com a origem do sistema de coordenadas no início do movimento.

Sejam os círculos de centros  $C_0$  e  $C$  com raio  $r$  antes do movimento e pós-movimento respectivamente. A equação da cicloide fica caracterizada pelo traçado do ponto  $P = (x, y)$ , conforme mostra a figura 19.

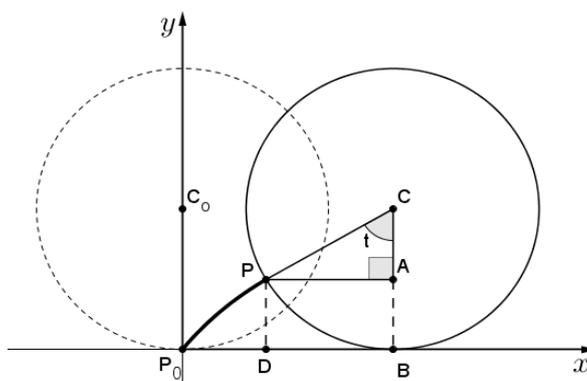


Figura 19: Parametrização da cicloide

**Dedução:** Sejam  $(x, y)$  as coordenadas do ponto  $P$  e  $t$  o ângulo entre  $\overrightarrow{CA}$  e  $\overrightarrow{CP}$  conforme mostra a figura 19, podemos escrever  $\overline{CA} = r \cdot \cos t$  e  $\overline{AP} = r \cdot \sin t$ . Note que podemos escrever a abscissa da forma,

$$x = \overline{BP} - \overline{BD} = \overline{BP}_0 - \overline{AP} = \overline{BP}_0 - r \cdot \sin t$$

Observe que  $\overline{BP}_0$  é igual ao arco  $(BP)$  e como o arco pode ser escrito como  $r \cdot t$  para  $t$  em radianos, então

$$x = \overline{BP}_0 - r \cdot \sin t$$

$$= r \cdot t - r \sin t$$

$$x = r(t - \sin t)$$

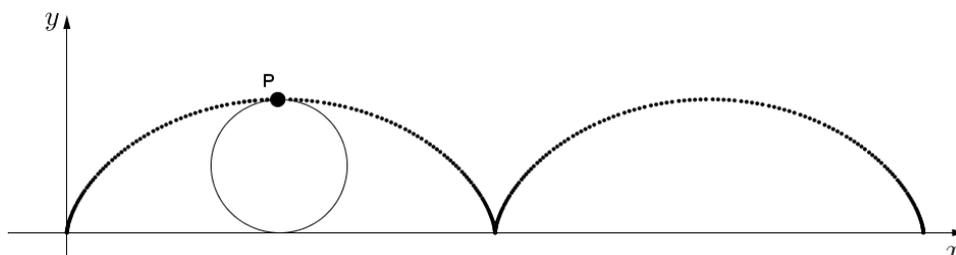
Para a ordenada podemos descrevê-la

$$y = \overline{CB} - \overline{CA} = r - r \cdot \cos t$$

$$y = r(1 - \cos t)$$

Portanto a equação paramétrica da cicloide é

$$P(t): \begin{cases} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(1 - \cos t) \end{cases}, \text{ para } t \in \mathbb{R}$$



**Figura 20: Rastro de  $P$ , formando a cicloide**

Note que os pontos mais altos da cicloide são dados por  $(\pi + n2\pi, 2r)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

### Aplicação da cicloide

Consideremos uma rampa onde gostaríamos de soltar uma bola de um ponto  $A$  a um ponto  $B$ , onde  $B$  está localizado abaixo de  $A$ , ambos não pertencentes à mesma reta vertical, de tal forma que o tempo de descida seja menor possível, qual é a curva que dita este trajeto?

O desafio foi proposto por Bernoulli em 1696, obteve como solução a cicloide invertida. A cicloide invertida é produzida pela reflexão da própria cicloide sobre um eixo horizontal. A curva ficou conhecida como braquistócrona que deriva da junção das palavras gregas *brakhisto* (*rápido*) e *chronos* (*tempo*).

Uma propriedade interessante da cicloide invertida é que o tempo de chegada da bola no ponto mínimo independe do seu ponto de partida, por esta propriedade ficou conhecida como tautócrona. Para demonstrar este fato usaremos o raciocínio de Caetano (2008, p.19).

**Demonstração:** Seja um  $A$  ponto pertencente à curva, tal que  $A = (x, y)$  é o ponto mais alto onde foi solta a partícula (bola), considerando a curva no plano  $xOy$ , onde  $Ox$  representa o eixo horizontal,  $Oy$  o eixo vertical, o ponto mínimo da cicloide invertida coincide com  $O$  e que o sistema seja conservativo.

Pela conservação de energia, energia potencial em  $A$  ( $E_{P_A}$ ) é igual à energia cinética em  $B$  ( $E_{C_B}$ ), podemos escrever

$$\begin{aligned} E_{P_A} &= E_{C_B} \\ m \cdot g \cdot y &= \frac{m \cdot v^2}{2} \\ v &= \sqrt{2gy} \end{aligned} \quad (1)$$

Derivando as equações paramétricas da cicloide em função do parâmetro  $t$ , temos

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \text{sen } t) \\ y(t) = r(1 - \text{cos } t) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} dx = r(1 - \text{cos } t) \cdot dt \\ dy = r \cdot \text{sen } t \cdot dt \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) na fórmula  $v = \frac{ds}{dT} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dT}$ ,  $dT$  representa o tempo de queda da bola. Note que  $dT$  não é  $dt$  diferencial do parâmetro da curva que não está associada a este movimento. Isolando  $dT$ , temos

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot g \cdot r(1 - \text{cos } t)} &= \frac{\sqrt{[r(1 - \text{cos } t) \cdot dt]^2 + [r \cdot \text{sen } t \cdot dt]^2}}{dT} \\ dT &= \frac{\sqrt{r^2(1 - 2 \text{cos } t + \text{cos}^2 t + \text{sen}^2 t) \cdot dt^2}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot r(1 - \text{cos } t)}} \\ dT &= \frac{\sqrt{r^2(2 - 2 \text{cos } t)}}{2 \cdot g \cdot r(1 - \text{cos } t)} dt \\ dT &= \sqrt{\frac{r}{g}} dt \end{aligned}$$

Como a partícula desliza do topo ao ponto mais baixo então percorre  $(0, \pi)$ , logo o tempo é definido por

$$T = \int_0^\pi \sqrt{\frac{r}{g}} dt$$

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \pi$$

Mas para um ponto intermediário  $y(t_0)$  temos

$$v = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

$$v = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dT} \quad (4)$$

Como a altura  $h$  é medida pelo eixo  $Oy$  usando a equação paramétrica,  $y(t) = r(1 - \cos t)$ , temos

$$\begin{aligned} h &= y_A - y_o \\ &= r(1 - \cos t) - r(1 - \cos t_o) \\ &= r(\cos t_o - \cos t) \end{aligned} \quad (5)$$

Substituindo (3) e (5) em (4) e isolando  $dT$ , temos

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot g \cdot r(\cos t_o - \cos t)} &= \frac{\sqrt{[r(1-\cos t).dt]^2 + (r.\text{sen } t.dt)^2}}{dT} \\ dT &= \frac{\sqrt{r^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\text{sen}^2 t).dt^2}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot r(\cos t_o - \cos t)}} \\ dT &= \frac{\sqrt{r^2(2-2\cos t)}}{\sqrt{2 \cdot g \cdot r(\cos t_o - \cos t)}} dt \\ dT &= \frac{\sqrt{r(1-\cos t)}}{\sqrt{g(\cos t_o - \cos t)}} dt \\ dT &= \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{\cos t_o - \cos t}} dt \end{aligned} \quad (6)$$

A integração da expressão (6) resulta no tempo de descida da partícula,

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int_{t_o}^{\pi} \frac{\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{\cos t_o - \cos t}} dt \quad (7)$$

Usando a fórmula do ângulo-metade

$$\text{sen } \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} \quad (8)$$

$$\cos \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}$$

$$\cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1 \quad (9)$$

Substitua (8) e (9) em (7), temos

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int_{t_o}^{\pi} \frac{\text{sen } \frac{t}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{t_o}{2} - \cos^2 \frac{t}{2}}} dt \quad (10)$$

Para integração de (10) escrevemos

$$u = \frac{\cos \frac{t}{2}}{\cos \frac{t_0}{2}}$$
$$du = -\frac{\sin \frac{t}{2}}{\cos \frac{t_0}{2}} dt$$

Usando a substituição de variável temos

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{t_0}{2} - \cos^2 \frac{t}{2}}} dt$$
$$= 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$
$$= 2 \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} [\text{arc sen } t]_0^1$$
$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}$$

Logo o tempo de chegada depende apenas do raio da curva  $r$  e da gravidade  $g$ .

### 2.6.1 Plano de aula envolvendo a cicloide

O objetivo deste tópico é apresentar um possível plano de aula para alunos do 3º ano do Ensino Médio com objetivo de quebrar alguns conceitos intuitivos como, por exemplo, soltar uma bolinha em diferentes alturas sobre uma mesma curva e mostrar que ambas chegam juntas ao ponto mínimo da curva. Outra curiosidade é: qual a trajetória que faz com que uma bolinha se desloque mais rápido de um ponto a outro localizado em alturas diferentes e não pertencente à mesma reta vertical? A resposta intuitiva do aluno é que seja uma reta e do tópico 2.6 sabemos que o resultado é uma cicloide invertida. O plano de aula se dividiria em 2 aulas:

1ª aula, parte I: Deixar os alunos apresentarem intuitivamente as hipóteses sobre os problemas levantados;

1ª aula, parte II: Apresentar a teoria sobre a braquistócrona e tautócrona, adaptando para o currículo do Ensino Médio, isto é, descrever a equação paramétrica e os resultados finais, sem realizar sua demonstração que requer derivadas e integrais, pois os mesmos não fazem parte do currículo da educação básica;

2ª aula: Realizar duas atividades experimentais.

Na primeira parte da aula lançaremos os problemas, deixando os alunos à vontade para argumentar e compartilhar as ideias entre si, sem intervenção direta do professor. Provavelmente os discentes levantarão várias hipóteses baseadas no senso intuitivo.

Na segunda parte da primeira aula definiremos o que é uma cicloide, deduziremos a sua equação paramétrica e indicaremos que a solução dos problemas apontados é uma cicloide invertida.

Finalmente na segunda aula podemos verificar os resultados teóricos com o auxílio do dispositivo de rampas adquiridas nas lojas Físico Didático (código do produto: 1305130015) ou Didática Center (código do produto: LA 59177). Ambos os aparelhos são compostos por duas rampas uma retilínea e outra em forma de cicloide invertida e três esferas. Podemos solicitar que um dos alunos solte duas esferas em pontos diferentes sobre a cicloide invertida e será observado que ambas colidirão no ponto mínimo da curva, mostrando a propriedade da tautócrona da cicloide. O outro experimento pode ser realizado soltando uma esfera sobre a cicloide e outra sobre rampa retilínea ambas de mesma altura, os alunos observarão que a bolinha que partiu da cicloide fez um percurso maior, mas com menor tempo, isto é, a esfera da cicloide vai chegar primeiro.

## 3 Propriedades e o teorema fundamental das curvas planas regulares

Estudaremos neste capítulo a estrutura de uma curva e como determiná-la através de sua curvatura. Para tanto abordaremos conceitos de curva contínua, suave, regular, reparametrização, comprimento de arco, curvatura, equação de Frenet e o teorema fundamental das curvas planas. A principal referência de estudo para este capítulo é o livro *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Carmo (2005).

### 3.1 Curvas contínuas

Para iniciarmos precisamos definir o que é uma curva contínua, sabemos intuitivamente que uma curva  $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é um traço realizado sem tirar o lápis do papel, isto é, durante a sua criação não existe salto.

**Solução:**  $\alpha(t)$  é dita contínua se as suas componentes  $x(t)$  e  $y(t)$  são funções contínuas, para  $t \in I$  onde  $I \subset \mathbb{R}$ .

As curvas estudadas posteriormente no trabalho são todas contínuas, portanto quando nos referimos ao termo curva estamos tratando de curvas contínuas.

### 3.2 Curvas suaves

Dizemos que uma curva é suave quando for contínua e não existe bico, isto é, equivale à definição abaixo:

**Definição 3.1**  $\alpha(t)$  é suave se as suas componentes  $x(t)$  e  $y(t)$  possuem derivadas contínuas de qualquer ordem em todo ponto de  $I$ .

O problema desta definição é que existem alguns objetos que se comportam de maneira singular, podemos considerar como exemplo  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $\alpha(t) = (1, 1)$ , isto significa que ao passar do tempo a partícula permanece parada, o que caracterizou um ponto. Para eliminar este tipo de patologia iremos introduzir a definição de curva regular. Para o desenvolvimento da teoria das curvas planas, é necessário que exista uma reta tangente a uma curva  $\alpha$  para cada valor do

parâmetro  $t$ , isto requer que  $\alpha'(t)$  seja não nulo  $\forall t$ . Essa derivada é calculada em cada componente, assim  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ .

**Definição 3.2** Uma curva parametrizada plana é uma função  $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$ . A curva é chamada de regular se  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ .

**Definição 3.3** O vetor  $\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt}$  é a velocidade de  $\alpha(t)$  ou simplesmente o vetor tangente de  $\alpha(t)$ , isto é, tangente à curva  $\alpha$  no ponto  $\alpha(t)$ , para  $t$  especificado.

**Exemplo 3.1** Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (e^{2t}, e^{-2t})$ , a curva  $\alpha$  é regular. De fato,  $\alpha'(t) = (2e^{2t}, -2e^{-2t})$  é diferente de zero para qualquer  $t \in I$  e  $\alpha$  é suave já que as suas componentes são diferenciáveis em qualquer ordem. A equação da reta tangente em geral é dada por  $(x, y) = \alpha(t_0) + \alpha'(t_0)(t - t_0)$  e para o caso do nosso exemplo,  $(x, y) = (e^{2t_0}, e^{-2t_0}) + (2e^{2t_0}, -2e^{-2t_0})(t - t_0)$ , tomando em particular o valor  $t_0 = 0$  segue  $(x, y) = (1, 1) + (2, -2)t$  ou simplesmente  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

### 3.3 Curva de Bézier

Segundo Guillod (2008) as curvas de Bézier têm como origem aplicações em design de modelos automobilísticos e posteriormente tornou-se base para modelos gráficos como Adobe PostScript. A teoria foi desenvolvida entre as décadas de 50 e 60 de maneira independente pelos engenheiros Pierre Bézier e Paul de Casteljau funcionários da Renault e da Citroën respectivamente. Dentro do estudo de matemática destacamos a sua versatilidade, podendo em alguns momentos se comportar como uma curva suave, mas também apresentar formas bruscas, pode descrever boas aproximações das cônicas em particular veremos um problema relacionado a este assunto no tópico 3.3.2.

#### 3.3.1 A função de Bézier

A função de Bézier é definida pela fórmula:

$$B(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} P_k, \text{ com } t \in [0, 1]$$

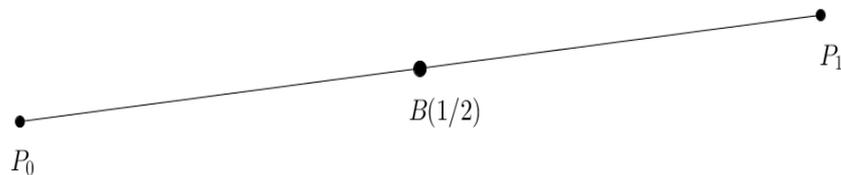
Os pontos  $P_k$  são chamados de pontos de controle e a expressão  $\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  é conhecida como polinômio de Bernstein. Se a curva tem  $n + 1$  pontos de controle então dizemos que a curva é de grau  $n$ .

Para  $n = 1$  a curva linear é dada por:

$$B(t) = (1-t) \cdot P_0 + t \cdot P_1 = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

com início em  $P_0$  e direção  $\overrightarrow{P_0P_1}$ .

Note que a expressão representa exatamente um segmento de reta, se tomando  $t = \frac{1}{2}$  é natural que a localização de  $B\left(\frac{1}{2}\right)$  seja o ponto médio do segmento  $P_0P_1$  conforme figura 21.



**Figura 21: Curva linear de Bézier.**

No tópico 3.3.2 veremos que a curva de Bézier é diferenciável. Na quadrática de Bézier, podemos observar um papel importante dos pontos de controle:

$$B(t) = (1-t)^2 \cdot P_0 + (1-t)t \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2$$

derivando a última expressão

$$\begin{aligned} B'(t) &= -2(1-t) \cdot P_0 + 2(1-t)P_1 - 2tP_1 + 2tP_2 \\ &= 2(1-t)(P_1 - P_0) + 2t(P_2 - P_1) \end{aligned}$$

para  $t = 0$ ,  $B'(0) = 2(P_1 - P_0)$ , ou seja, a tangente é paralela a  $P_1 - P_0$  e se  $t = 1$ ,  $B'(1) = 2(P_2 - P_1)$ , isto é, a tangente é paralela a  $P_2 - P_1$ .

Trataremos as cúbicas de forma especial no próximo tópico, explorando resultados de dois problemas.

### 3.3.2 A cúbica de Bézier

Neste tópico trataremos de dois problemas relacionados à cúbica de Bézier, o primeiro será subdividido em quatro tarefas clássicas e o segundo problema trata da aproximação do arco de um círculo por uma cúbica de Bézier.

### Problema 1

Seja  $B: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$ , onde  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são os pontos de controle, queremos mostrar:

- (i) A curva é contínua e diferenciável;
- (ii) Os pontos extremos são  $P_0$  e  $P_3$ ;
- (iii) As tangentes em  $t = 0$  e  $t = 1$  são paralelas a  $P_0 P_1$  e  $P_2 P_3$  respectivamente;
- (iv) O gráfico de  $B(t)$ .

**Solução:** Primeiramente em (i) vamos mostrar que a curva é diferenciável e a continuidade segue como consequência. Para  $t_0 \in [0,1]$  devemos mostrar que o

$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{B(t) - B(t_0)}{t - t_0}$  existe.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{B(t) - B(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 - [(1-t_0)^3 P_0 + 3t_0(1-t_0)^2 P_1 + 3t_0^2(1-t_0) P_2 + t_0^3 P_3]}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_0[(1-t)^3 - (1-t_0)^3] + 3P_1[t(1-t)^2 - t_0(1-t_0)^2] + 3P_2[t^2(1-t) - t_0^2(1-t_0)] + P_3(t^3 - t_0^3)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_0[(1-t)^3 - (1-t_0)^3] + 3P_1[t - 2t^2 + t^3 - t_0 + 2t_0^2 - t_0^3] + 3P_2[t^2 - t^3 - t_0^2 + t_0^3] + P_3(t^3 - t_0^3)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{P_0[(1-t)^3 - (1-t_0)^3] + 3P_1[(t-t_0) - 2(t^2 - t_0^2) + (t^3 - t_0^3)] + 3P_2[(t^2 - t_0^2) - (t^3 - t_0^3)] + P_3(t^3 - t_0^3)}{t - t_0} \end{aligned}$$

Usando fatorações

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Podemos reescrever o último limite

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow t_0} [P_0[(1-t) - (1-t_0)][(1-t)^2 + (1-t)(1-t_0) + (1-t_0)^2] + \\ &\quad 3P_1[(t-t_0) - 2(t-t_0)(t+t_0) + (t-t_0)(t^2 + tt_0 + t_0^2)] + 3P_2[(t-t_0)(t+t_0) - \\ &\quad (t-t_0)(t^2 + tt_0 + t_0^2)] + P_3(t^3 - t_0^3)] / (t - t_0) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} -P_0[(1-t)^2 + (1-t)(1-t_0) + (1-t_0)^2] + 3P_1[1 - 2(t+t_0) + (t^2 + \\ &\quad tt_0 + t_0^2)] + 3P_2[(t+t_0) - (t^2 + tt_0 + t_0^2)] + P_3(t^2 + tt_0 + t_0^2) \\ &= -P_0[(1-t_0)^2 + (1-t_0)^2 + (1-t_0)^2] + 3P_1(1 - 4t_0 + t_0^2 + t_0^2 + t_0^2) + \\ &\quad 3P_2(2t_0 - (t_0^2 + t_0^2 + t_0^2) + P_3(t_0^2 + t_0^2 + t_0^2) \\ &= -3P_0(1-t_0)^2 + 3P_1(1 - 4t_0 + 3t_0^2) + 3P_2(2t_0 - 3t_0^2) + 3P_3t_0^2 \end{aligned}$$

Logo o limite existe, então  $B(t)$  é diferenciável segue que também é contínua. Para provar (ii) usaremos o fato que  $B(t)$  é contínua e que o parâmetro  $t$  varia de 0 a 1, calculando  $B(0) = P_0$  e  $B(1) = P_3$ , logo  $P_0$  e  $P_3$  são extremos da curva. Agora vamos provar (iii) usando a derivação  $B(t)$ ,

$$B'(t) = -3P_0(1-t)^2 + 3P_1(1-4t+3t^2) + 3P_2(2t-3t^2) + 3P_3t^2$$

calculando  $B'(0) = 3(P_1 - P_0)$ , o que mostra que a tangente em  $t = 0$  é paralela a  $P_1P_0$  e de forma análoga,  $B'(1) = 3(P_3 - P_2)$  o que também mostra que a tangente em  $t = 1$  é paralela a  $P_3P_2$ . E finalmente a figura 22 mostra o gráfico de  $B(t)$  feito no Geogebra para duas configurações dos pontos de controle, respondendo (iv). Os passos da construção da cúbica de Bézier estão disponíveis em Wangenheim (2009).

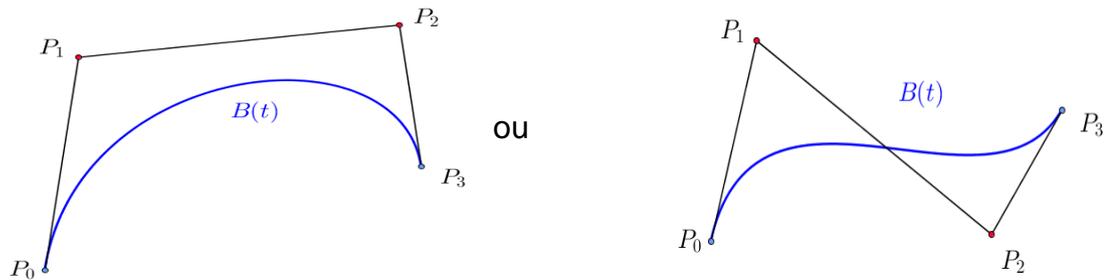


Figura 22: A cúbica de Bézier

### Problema 2

O problema é baseado no trabalho de Gomes (1989) e consiste em determinar quais são as coordenadas dos pontos de controle da cúbica de Bézier que melhor aproxima um arco  $C$  de um círculo, dado o centro  $O$ , o raio  $R$  e o ângulo central  $\beta$ ?

**Solução:** Seja  $B: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2, B(t) = (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3$ , para facilitar os cálculos, consideramos um arco de círculo com  $R = 1$ ,  $O = (0,0)$  e tomando o eixo  $x$  como a bissetriz do ângulo  $\beta$ , conforme indica a figura 23.

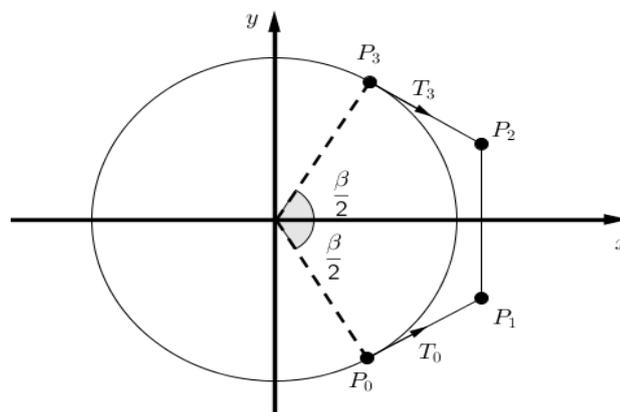


Figura 23: Aproximação do arco de um círculo pela curva de Bézier

Escrevendo  $P_3 = \left(\cos\frac{\beta}{2}, \sin\frac{\beta}{2}\right)$  e  $P_0 = \left(\cos\frac{\beta}{2}, -\sin\frac{\beta}{2}\right)$  calculando os seus respectivos vetores tangentes temos,

$$T_3 = \left( \sin \frac{\beta}{2}, -\cos \frac{\beta}{2} \right) \text{ e } T_0 = \left( \sin \frac{\beta}{2}, \cos \frac{\beta}{2} \right)$$

como queremos que  $P_2$  pertença à reta determinada por  $P_3$  e  $T_3$ , existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$P_2 = P_3 + \lambda T_3$$

de forma similar existe  $\mu$  tal que

$$P_1 = P_0 + \mu T_0, \text{ por simetria assumiremos } \mu = \lambda.$$

Em resumo para encontrar os pontos de controle, precisamos determinar  $\lambda$ , de tal forma que solucione o sistema,

$$\begin{cases} P_0 = \left( \cos \frac{\beta}{2}, -\sin \frac{\beta}{2} \right) \\ P_1 = P_0 + \lambda T_0 \\ P_2 = P_3 + \lambda T_3 \\ P_3 = \left( \cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_0 = \left( \cos \frac{\beta}{2}, -\sin \frac{\beta}{2} \right) \\ P_1 = \left( \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \lambda, -\sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \lambda \right) \\ P_2 = \left( \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \lambda, \sin \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\beta}{2} \lambda \right) \\ P_3 = \left( \cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2} \right) \end{cases} \quad (1)$$

Calculando  $t = \frac{1}{2}$  em  $B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3$ , segue

$$B\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}(P_0 + 3(P_1 + P_2) + P_3) \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8} \left[ \left( \cos \frac{\beta}{2}, -\sin \frac{\beta}{2} \right) + 3 \left( \begin{array}{l} \left( \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \lambda, -\sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \lambda \right) + \\ \left( \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \lambda, \sin \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\beta}{2} \lambda \right) \end{array} \right) + \left( \cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \left[ \left( \cos \frac{\beta}{2}, -\sin \frac{\beta}{2} \right) + \left( 6 \cos \frac{\beta}{2} + 6 \sin \frac{\beta}{2} \lambda, 0 \right) + \left( \cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$B\left(\frac{1}{2}\right) = \left( \cos \frac{\beta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{\beta}{2} \lambda, 0 \right) \quad (3)$$

Note que para uma boa aproximação da curva de Bézier ao arco do círculo, a distância de  $B\left(\frac{1}{2}\right)$  ao centro  $O = (0,0)$  do círculo deve ser igual ao raio, isto é

$$\text{dist} \left( B\left(\frac{1}{2}\right), O \right) = 1 \quad (4)$$

Substitua (3) em (4). Fazendo as contas,

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \lambda + \left( \frac{3}{4} \sin \frac{\beta}{2} \lambda \right)^2 = 1$$

$$16 \cos^2 \frac{\beta}{2} + 24 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \lambda + 9 \sin^2 \frac{\beta}{2} \lambda^2 = 16$$

$$9 \sin^2 \frac{\beta}{2} \lambda^2 + 24 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \lambda - 16 \left( 1 - \cos^2 \frac{\beta}{2} \right) = 0$$

Pela relação fundamental da trigonometria  $\sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\beta}{2}$ , calculando a solução da equação do segundo grau, segue

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-24 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{(-24 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2})^2 + 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{2 \cdot 9 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}} \\
&= \frac{-2^3 \cdot 3 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{2^6 3^2 \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} + 2^6 \cdot 3^2 \cdot \sin^4 \frac{\beta}{2}}}{2 \cdot 3^2 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}} \\
&= \frac{-2^3 \cdot 3 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \pm \sqrt{2^6 3^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 2^6 \cdot 3^2 \cdot \sin^4 \frac{\beta}{2}}}{2 \cdot 3^2 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}} \\
&= \frac{-2^3 \cdot 3 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \pm 2^3 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2}}}{2 \cdot 3^2 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}} \\
\lambda &= \frac{-4 \cdot \cos \frac{\beta}{2} \pm 4}{3 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}}
\end{aligned}$$

Portanto para  $\lambda = \frac{-4 \cdot \cos \frac{\beta}{2} \pm 4}{3 \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}}$  determinamos os pontos de controle da cúbica de Bézier que se aproxima do arco de um círculo de raio unitário.

### 3.4 Função comprimento de arco

Seja  $\alpha(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana, qual é a função  $s(t)$  que determina o comprimento de  $\alpha$  entre os pontos  $\alpha(a)$  e  $\alpha(t)$ ?

Para a solução do problema seguiremos o raciocínio do Guidorizzi (1986).

**Solução:** Seja  $\alpha(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva. Tomando  $P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$  uma determinada partição de  $[a, b]$ , denotando por  $L(\alpha, P)$  o comprimento da poligonal de vértices  $P_0 = \alpha(t_0)$ ,  $P_1 = \alpha(t_1)$ ,  $P_2 = \alpha(t_2)$ , ...,  $P_n = \alpha(t_n)$ , segue que,

$$L(\alpha, P) = \sum_{k=1}^n \|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\|$$

Suponhamos  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  então podemos escrever,

$$\|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| = \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2}$$

$$\|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (I)$$

Pelo teorema do valor médio, existem  $\bar{t}_k$  e  $\bar{\bar{t}}_k \in ]t_{k-1}, t_k[$  tais que

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\bar{t}_k)(t_k - t_{k-1}) \Rightarrow \Delta x = x'(\bar{t}_k)\Delta t \quad (II)$$

$$y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\bar{\bar{t}}_k)(t_k - t_{k-1}) \Rightarrow \Delta y = y'(\bar{\bar{t}}_k)\Delta t \quad (III)$$

Substitua (II) e (III) em (I):

$$\|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| = \sqrt{[x'(\bar{t}_k)\Delta t]^2 + [y'(\bar{t}_k)\Delta t]^2}$$

$$\|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\| = \Delta t \cdot \sqrt{[x'(\bar{t}_k)]^2 + [y'(\bar{t}_k)]^2}$$

Denotando por  $s(t)$  a função comprimento de arco do  $[a, b]$ , segue que,

$$s(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sum_{k=1}^n \sqrt{[x'(\bar{t}_k)]^2 + [y'(\bar{t}_k)]^2}$$

embora a última expressão não seja exatamente uma soma de Riemann, pois  $\bar{t}_k \neq \bar{\bar{t}}_k$ , contudo, como  $x'(t)$  e  $y'(t)$  são contínuas, pode ser mostrado que o último limite é o mesmo se  $\bar{t}_k$  e  $\bar{\bar{t}}_k$  fossem iguais, então podemos concluir

$$s(t) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

ou simplesmente

$$s(t) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

**Exemplo 3.2** Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$  calcule o comprimento de  $\alpha$  no intervalo  $[0, \pi]$ . Usando a função comprimento temos,

$$\begin{aligned} s &= \int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \Rightarrow \\ &= \int_0^\pi \sqrt{(\cos' t)^2 + (\sin' t)^2} dt \Rightarrow \\ &= \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \Rightarrow \\ s &= t \Big|_0^\pi = \pi - 0 = \pi \end{aligned}$$

### 3.5 Reparametrização

A reparametrização de uma curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  é uma mudança da forma com que um ponto  $P$  descreve a curva  $\alpha$ , isto é, a reparametrização dita as diferentes formas como  $P$  percorre a curva, dando outra parametrização.

**Exemplo 3.3** Considere a seguinte curva  $x^2 + y^2 = r^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , uma parametrização da curva (circunferência) pode ser dada por:

$$\alpha(t): \begin{cases} x(t) = r \cos \omega t \\ y(t) = r \sin \omega t \end{cases}, \omega \in \mathbb{R}$$

Mas  $\alpha(t)$  não é única, pois para cada escolha de  $\omega$  existe uma nova curva com a mesma imagem que  $\alpha(t)$ , mas com a velocidade diferente.

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\| &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{r^2 \cdot \text{sen}^2(\omega t) \cdot \omega^2 + r^2 \cdot \text{cos}^2(\omega t) \cdot \omega^2} \\ \|\alpha'(t)\| &= |\omega \cdot r|\end{aligned}\tag{I}$$

Pela equação (I), veja que o vetor velocidade depende de  $\omega$ , portanto, para cada  $\omega$ ,  $\alpha(t)$  tem velocidade diferente.

Em geral podemos definir uma reparametrização da seguinte forma:

**Definição 3.4** Dada  $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular, considere uma função  $\bar{\alpha}: (a', b') \rightarrow (a, b)$  bijetora e diferenciável e tome  $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\beta: (a', b') \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\beta(t) = \alpha(\bar{\alpha}(t))$ . Dizemos que  $\beta$  é uma reparametrização de  $\alpha$ .

**Exemplo 3.4** Seja  $\alpha: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(t) = (t, t^2)$ . A curva  $\beta: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\beta(t) = (-t, t^2)$  é uma reparametrização de  $\alpha$ .

Note que  $\beta = \alpha(h(t))$  em que  $h: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  tal que  $h(t) = -t$ .

A função  $h$  é contínua e bijetora e tanto  $\alpha$  como  $\beta$  representam o traço de uma parábola.

**Exemplo 3.5** Seja  $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ . Reparametrizaremos com a função comprimento. Considerando  $t_0 = 0$ , temos:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt$$

Calculando a norma da velocidade temos

$$\begin{aligned}\|\alpha'(t)\| &= \sqrt{[(2 \cos t)']^2 + [(2 \sin t)']^2} \\ \|\alpha'(t)\| &= 2\end{aligned}$$

Integrando a última expressão

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t 2 dt \\ s(t) &= 2t\end{aligned}$$

Note que  $s(t)$  é bijetora de  $[0, 2\pi]$  a  $[0, 4\pi]$ , assim  $\beta = \alpha \circ s^{-1}: (0, 4\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\beta(s) = \left(2 \cos \frac{s}{2}, 2 \sin \frac{s}{2}\right)$$

$\beta(s)$  é uma reparametrização de  $\alpha$ . Note que  $\beta(s) = \left(-\text{sen} \frac{s}{2}, \text{cos} \frac{s}{2}\right)$  e portanto  $\|\beta'(t)\| = 1$ .

O exemplo anterior mostrou que ao reparametrizar usando a função comprimento, geramos uma curva tal que o vetor velocidade tem norma 1. Este fato não é particular, mas acontece sempre quando parametrizamos uma curva usando a função comprimento.

**Proposição 3.1** Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular. A curva obtida a partir de  $\alpha$  por reparametrização usando a função comprimento de arco é percorrida com velocidade escalar constante e igual a 1.

**Demonstração:** Seja  $s$  a função comprimento da curva regular  $\alpha$  definida por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt, \text{ note que } s'(t) = \|\alpha'(t)\|.$$

Como  $s$  representa o comprimento da trajetória da partícula entre os instantes  $t_0$  e  $t$ , logo  $s(t) \geq 0$  e como  $s(t)$  é contínua, temos ainda que  $s(I)$  é um intervalo  $J$ , concluímos que  $s$  admite uma inversa diferenciável. Sabendo que  $\alpha(t)$  é regular então o integrando  $\|\alpha'(t)\| > 0$  é contínuo e positivo e segue que  $s'(t) > 0$  para qualquer  $t \in I$ .

Portanto  $s$  aplica bijetoramente  $I$  num intervalo  $J$  e podemos reparametrizar  $\alpha$  pela função comprimento,

$$\beta = \alpha \circ s^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Usando a regra da cadeia, para calcular o vetor velocidade,

$$\begin{aligned} \beta'(\tau) &= (\alpha \circ s^{-1})'(\tau) \\ \beta'(\tau) &= \alpha'(s^{-1}(\tau)) \cdot (s^{-1})'(\tau) \end{aligned} \quad (1)$$

Pela regra da cadeia também:

$$(s^{-1})'(\tau) = \frac{1}{s'(s^{-1}(\tau))} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) temos com  $s^{-1}(\tau) = t$ :

$$\begin{aligned} \beta'(\tau) &= \alpha'(t) \cdot \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \\ \|\beta'(\tau)\| &= 1 \end{aligned}$$

Portanto se  $\alpha(t)$  é regular a sua reparametrização  $\beta(\tau)$  tem vetor velocidade de norma igual a 1.

**Exemplo 3.6** Seja o círculo de raio  $r$  dado pelo traço da curva parametrizada por  $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t \in (0, 2\pi)$ .

Tomando  $t_0 = 0$  temos

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \sqrt{[(r \cos t)']^2 + [(r \sin t)']^2} dt \\
&= \int_0^t \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\
&= r t
\end{aligned}$$

assim uma reparametrização pode ser descrita pelo comprimento de arco definida por

$$\begin{aligned}
\beta(\tau) &= \alpha \circ s^{-1}(\tau) \\
\beta(\tau) &= \left( r \cos \frac{\tau}{r}, r \sin \frac{\tau}{r} \right)
\end{aligned}$$

onde  $\beta: [0, 2\pi r] \rightarrow \mathbb{R}^2$

Calculando a sua velocidade

$$\begin{aligned}
\|\beta'(\tau)\| &= \sqrt{\left[ \left( r \cos \frac{\tau}{r} \right)' \right]^2 + \left[ \left( r \sin \frac{\tau}{r} \right)' \right]^2} \\
&= \sqrt{\left[ r \left( -\sin \frac{\tau}{r} \right) \cdot \frac{1}{r} \right]^2 + \left[ r \left( \cos \frac{\tau}{r} \right) \cdot \frac{1}{r} \right]^2} \\
&= \sqrt{\sin^2 \frac{\tau}{r} + \cos^2 \frac{\tau}{r}} \\
\|\beta'(\tau)\| &= 1
\end{aligned}$$

Temos que  $\alpha(t)$  admite uma reparametrização pelo comprimento de arco tal que a sua velocidade seja igual a 1.

**Exemplo 3.7** Seja  $\alpha$  uma curva definida por

$$\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t), t \in \mathbb{R}$$

A função comprimento  $s$  é dada por

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(t_1)\| dt_1 = (1 - e^{-t})\sqrt{2} \text{ para } t > 0.$$

assim temos,

$$s^{-1}(\tau) = -\ln \left( 1 - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right)$$

uma reparametrização  $\alpha(t)$  pode ser descrita pela função comprimento,

$$\begin{aligned}
\beta(\tau) &= \alpha \circ s^{-1}(\tau) \\
\beta(\tau) &= \left( 1 - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \left[ \cos \left( \ln \left( 1 - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \right), -\sin \left( \ln \left( 1 - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

e para qualquer  $\tau \in ]0, \sqrt{2}[$  é possível achar  $\|\beta'(\tau)\| = 1$ .

### 3.6 Invariantes de uma curva plana

Nos próximos tópicos deste capítulo buscaremos definir alguns invariantes geométricos das curvas regulares, isto é, objetos que são conservados se as mesmas sofrem movimentos de rotação e translação no plano.

### 3.7 Curvatura

A ideia intuitiva de curvatura é que ela meça a taxa da variação da velocidade com que a curva dobra e que não dependa da sua parametrização.

Lembrando que uma curva regular é definida por  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  diferenciável em todos os pontos de modo que  $\alpha'(t) \neq 0 \forall t \in I$ .

As curvas que vamos tratar são regulares e podem ser parametrizadas pelo comprimento do arco. Esta parametrização é importante pelo fato que  $\|\alpha'(s)\| = 1$ . Note que  $\|\alpha'(s)\|$  não depende de  $s$ . Vamos relembrar o vetor tangente a uma curva.

**Proposição 3.2** Seja  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $\|\alpha'(s)\| \equiv 1$ . Se  $T(s)$  é o vetor tangente unitário a  $\alpha(s)$ , isto é,  $T(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \alpha'(s)$ , então  $\langle T(s), T'(s) \rangle = 0$ , portanto  $T(s)$  e  $T'(s)$  são ortogonais.

#### Demonstração:

Por hipótese  $\|T(s)\| \equiv 1$  então,

$$\langle T(s), T(s) \rangle \equiv 1$$

derivando ambos os membros

$$\langle T'(s), T(s) \rangle + \langle T(s), T'(s) \rangle = 0$$

$$2 \cdot \langle T(s), T'(s) \rangle = 0$$

$$\langle T(s), T'(s) \rangle = 0$$

Como  $\langle T(s), T'(s) \rangle = \|T(s)\| \cdot \|T'(s)\| \cdot \cos \theta$  onde  $\theta$  é o ângulo entre  $T(s)$  e  $T'(s)$ , logo  $\cos \theta = \frac{\langle T(s), T'(s) \rangle}{\|T(s)\| \cdot \|T'(s)\|} = 0$  e portanto  $T(s)$  e  $T'(s)$  são ortogonais.

**Definição 3.6** Seja  $N(s)$  um vetor unitário e ortogonal a  $T(s) = (x'(s), y'(s))$  e tal que  $(T, N)$  tem a mesma orientação que a base canônica  $e_1(1,0)$  e  $e_2(0,1)$ . Então  $N(s) = (-y'(s), x'(s))$  e a curvatura de  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  onde  $\alpha$  está reparametrizada pelo comprimento de arco com  $\|\alpha'(s)\| \equiv 1$ , é a função  $K(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ .

Da definição segue que

$$\langle N, T \rangle \equiv 0 \Rightarrow \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = 0 \Rightarrow \langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -K$$

$$\langle N, N \rangle \equiv 1 \Rightarrow \langle N', N \rangle = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N' \perp N \\ \text{mas } N \perp T \end{array} \right\} \Rightarrow N' // T$$

Mas  $T'(s)$  também é ortogonal a  $T(s)$  então  $N(s) // T'(s)$  e  $N'(s) // T(s)$ . Como  $N(s)$  e  $T(s)$  são unitários e  $N'(s)$  e  $T'(s)$  tem a mesma norma, temos:

$$\begin{cases} T'(s) = K(s).N(s) \\ N'(s) = -K(s).T(s) \end{cases}$$

Essas equações diferenciais são conhecidas como referenciais de Frenet para uma curva plana.

**Proposição 3.3** A interpretação geométrica da curvatura pode ser descrita como a taxa de variação do ângulo  $\theta(s)$  formado por  $\alpha'(s)$  com a horizontal.

**Demonstração:** Seja  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Escreva  $\alpha'(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$  porque é unitário, derivando ambos os lados

$$\alpha''(s) = \theta'(s).(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s)))$$

Note que o vetor normal  $\alpha''(s) = \theta'(s).(-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s)))$ , pois  $\alpha'(s)$  é perpendicular a  $N(s)$ , da definição de curvatura temos

$$\begin{aligned} K(s) &= \langle T'(s), N(s) \rangle \\ &= \langle \alpha''(s), N(s) \rangle \\ K(s) &= \theta'(s). \end{aligned}$$

### 3.8 Teorema Fundamental das Curvas Planas

O teorema fundamental das curvas planas garante, como consequência, que se duas curvas tem a mesma função curvatura como característica, então as duas curvas diferenciam apenas por movimentos de rotação e translação.

#### Teorema Fundamental das Curvas Planas

Seja  $K: I \rightarrow \mathbb{R}$  função diferenciável. Dados  $s_0 \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $P = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $V = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$ , sendo  $\|V\| = 1$ , existe uma curva regular  $\alpha(s)$  associada de maneira única a  $K(s)$  quando fixamos  $\alpha(s_0) = P$  e  $\alpha'(s_0) = V$ , sendo  $\alpha$  parametrizada pela função comprimento de arco  $s$ .

Reproduziremos literalmente o raciocínio de Alencar; Santos (2002, p. 55-57) para demonstração do teorema fundamental das curvas planas e do corolário 3.1. O

texto requer compreensão de sistemas de equações diferenciais e problemas de valor inicial como definidos em Lopes (2015).

**Demonstração:**

Seja  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , dada uma curva parametrizada pelo comprimento de arco que tenha curvatura  $K$ . Sendo  $T(s) = (x'(s), y'(s))$  e  $N(s) = (-y'(s), x'(s))$  os vetores tangentes e normais unitários de  $\alpha(s)$ , usando as equações de Frenet temos,

$$\begin{cases} T'(s) = K(s).N(s) \\ N'(s) = -K(s).T(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x''(s), y''(s)) = K(s)(-y'(s), x'(s)) \\ (-y''(s), x''(s)) = -K(s)(x'(s), y'(s)) \end{cases}$$

segue do sistema de equações que  $x''(s) = -K(s)y'(s)$  e  $y''(s) = K(s)x'(s)$ , usando as condições iniciais  $x(s_0) = P_1$ ,  $y(s_0) = P_2$ ,  $x'(s_0) = V_1$  e  $y'(s_0) = V_2$ , então  $x''(s)$  e  $y''(s)$  admitem uma integral primeira da forma

$$\begin{cases} x'(s) = \cos\left(\int_{s_0}^s K(t) dt + a\right) \\ y'(s) = \sin\left(\int_{s_0}^s K(t) dt + a\right) \end{cases} \quad (1)$$

onde  $a$  é calculado pelas equações  $\cos a = V_1$  e  $\sin a = V_2$ . Integrando (1), temos

$$\begin{cases} x(s) = P_1 + \int_{s_0}^s \cos\left(\int_{s_0}^\psi K(t) dt + a\right) d\psi \\ y(s) = P_2 + \int_{s_0}^s \sin\left(\int_{s_0}^\psi K(t) dt + a\right) d\psi \end{cases}$$

A curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  atende as condições do teorema. Agora vamos verificar a unicidade de tal curva. Vamos supor que exista duas curvas  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  e  $\beta(s) = (w(s), r(s))$  satisfazendo as condições do teorema. Construindo as funções

$$\begin{cases} f(s) = x'(s) - w'(s) \\ h(s) = y'(s) - r'(s) \end{cases} \quad (2)$$

e usando as equações de Frenet, segue

$$\begin{cases} f'(s) = -K(s).h(s) \\ h'(s) = K(s).f(s) \end{cases} \quad (3)$$

calculando  $\frac{1}{2}(f^2 + h^2)'(s)$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f^2 + h^2)'(s) &= \frac{1}{2}(2.f(s).f'(s) + 2.h(s).h'(s)) \\ \frac{1}{2}(f^2 + h^2)'(s) &= f(s).f'(s) + h(s).h'(s) \end{aligned} \quad (4)$$

Substituindo (3) em (4)

$$\frac{1}{2}(f^2 + h^2)'(s) = 0$$

Segue que  $(f^2 + h^2)$  é uma função constante e sabendo que é nula em  $s = s_0$ , porque  $\alpha'(s_0) = V = \beta'(s_0)$ , implica que  $(f^2 + h^2)(s) \equiv 0$ , logo  $f(s) = h(s) = 0$ .

Portanto  $\alpha'(s) = \beta'(s), \forall s \in I$ . Analogamente, usando o fato que  $\alpha(s_0) = \beta(s_0) = P$  e que mostramos  $x' \equiv w', y' \equiv r'$ , segue que  $\alpha(s) \equiv \beta(s)$ , o que termina a prova.

O resultado do teorema fundamental das curvas planas tem como consequência que se duas curvas tem a mesma curvatura, então elas se diferenciam apenas por um movimento rígido (composto de translação e rotação).

**Corolário 3.1** Seja  $K_0: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  função diferenciável. Então existe uma curva plana diferenciável  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \in I$ , com curvatura  $K(s) = K_0(s)$ . Se  $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma curva plana com curvatura  $K_\beta(s) = K_0(s), \forall s \in I$ , então existe um movimento rígido  $M$  tal que  $\beta(s) = M(\alpha(s))$ , isto é, existe uma rotação  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e uma translação por um vetor  $b \in \mathbb{R}^2$ , tal que, para todo  $s \in I$ ,

$$\beta(s) = (A \circ \alpha)(s) + b.$$

**Prova:** Fixe  $s_0 \in I$ . Seja  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a rotação no sentido positivo que leva  $\alpha'(s_0)$  em  $\beta'(s_0)$ , e escreva  $b = \beta(s_0) - \alpha(s_0)$ . Temos que a curva  $\gamma$ , representada por  $\gamma(s) = (A \circ \alpha)(s) + b$ , é tal que  $\gamma(s_0) = \beta(s_0), \gamma'(s_0) = \beta'(s_0)$  e a curvatura em cada ponto  $\gamma(s)$  é  $K(s)$ , o que o leitor pode calcular explicitamente a partir das definições. Pelo teorema fundamental das curvas planas,  $\gamma(s) \equiv \beta(s)$ .

O teorema fundamental das curvas planas e o corolário 3.1 garantem que uma curva pode ser caracterizada pela sua função curvatura. Para determinar a curva partindo da curvatura, usaremos os seguintes passos:

(I). Determinar  $\theta(s) = \int_{s_0}^s K(t) dt$ .

(II). Escrever a curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  como  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ , onde

$$x(s) = \int_{s_0}^s \cos \theta(s) dt \text{ e } y(s) = \int_{s_0}^s \text{sen } \theta(s) dt.$$

**Exemplo 3.8** As curvas que têm curvatura constante.

Usando os passos I e II, queremos,

$$K(s) = k \text{ (constante).}$$

$$\text{Escrevemos } \theta(s) = \int_{s_0}^s k(s) dt = \int_{s_0}^s k dt = ks - ks_0$$

Se  $k \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_{s_0}^s \cos(kt - ks_0) dt \\ &= \frac{\text{sen}(ks - ks_0)}{k} - \frac{\text{sen } 0}{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{sen}(ks - ks_0)}{k}, \\
y(s) &= \int_{s_0}^s \text{sen}(kt - ks_0) dt \\
&= -\frac{\cos(ks - ks_0)}{k} + \frac{\cos 0}{k} \\
&= -\frac{\cos(ks - ks_0)}{k} + \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha(s) = \left( \frac{1}{k} \text{sen}(ks - ks_0), \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \cos(ks - ks_0) \right)$$

Fazendo  $R = 1/k$ , segue que

$$\alpha(s) = \left( R \cdot \text{sen} \left( \frac{s-s_0}{R} \right), R - R \cos \left( \frac{s-s_0}{R} \right) \right)$$

Escrevendo  $\beta(s) = (A \circ \alpha)(s) + b$ , onde  $A$  e  $b$  representam a rotação e a translação sobre  $\alpha$ , conforme corolário 3.1, temos

$$\beta(s) = (A \circ \alpha)(s) + b$$

Tomando  $b = (0, -R)$  e notando que  $\alpha$  é uma circunferência então não depende da rotação, assim

$$\beta(s) = \alpha(s) + (0, -R) = \left( R \cdot \text{sen} \left( \frac{s-s_0}{R} \right), R \cos \left( \frac{s-s_0}{R} \right) \right)$$

então para  $k \neq 0$ , as curvas de curvatura constante não nula são circunferências ou arcos de circunferência de raio  $\frac{1}{k}$ .

Se  $k = 0$ , temos

$$x(s) = \int_{s_0}^s \cos 0 dt = s - s_0; y(s) = \int_{s_0}^s \text{sen} 0 dt = 0.$$

Temos que  $\alpha(s) = (s - s_0, 0)$ , isto é, as curvas com curvatura constante nula são retas ou segmentos de retas.

## 4 Curvas de preenchimento de espaço

Estudaremos neste capítulo um tipo de curva com característica bem particular, baseada inicialmente nas ideias de cardinalidade de Cantor e construída por Peano. O objeto de estudo são as curvas de preenchimento de espaço, buscaremos entender o seu comportamento e para referência principal do conceito seguiremos Sagan (1994).

### 4.1 O conceito de cardinalidade

A ideia de contagem é uma das mais primitivas noções matemáticas, o conceito de contar é mais antigo que os próprios símbolos numéricos. Segundo Eves (1997) o ser humano utilizava objetos menores para representar objetos maiores, fazendo entre estes uma relação biunívoca. O homem primitivo levava o seu rebanho para pastar e mais tarde era preciso voltar para casa e fazer a recontagem dos animais, para descobrir se tinha ficado algum perdido no caminho, para tanto utilizava a relação de cada pedra para cada animal que tinha, fazendo assim a sua contagem.

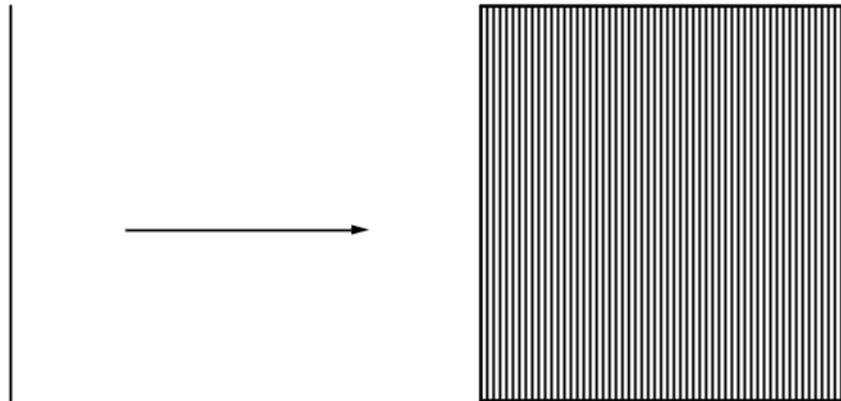
A cardinalidade de um conjunto  $P$  finito (notação  $|P|$ ) é o número de elementos do conjunto  $P$ . Para um conjunto infinito, existem meios de definir  $|P|$ , mas o que faremos aqui é definir somente a relação  $|P| = |Q|$  entre conjuntos, retomando a ideia do homem primitivo.

**Definição 4.1** Dados dois conjuntos  $P$  e  $Q$  se existe  $f: P \rightarrow Q$  bijetora então dizemos que  $|P| = |Q|$ .

Dado o conjunto  $P$  qualquer, defina  $Q = P \times P = \{(a, b); a, b \in P\}$ , isto é,  $Q$  é o produto cartesiano de  $P$  por  $P$ . Se  $P = \{0,1\}$  então  $Q = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ . Então podemos dizer  $|P| = 2$  e  $|Q| = 4$ , em geral para um conjunto finito  $|P| = n > 1$  então  $|Q| = n^2$ , sendo assim para todo conjunto finito não unitário  $P$ ,  $|Q| \neq |P|$ . Mas para o caso de  $P$  infinito esta desigualdade continua verdadeira?

A resposta veio nos estudos de Georg Cantor, nascido na Rússia em 1845 e um dos principais contribuintes para a Teoria dos Conjuntos. No seu trabalho, entre outras coisas, ele fez a definição acima de comparar a cardinalidade de dois conjuntos infinitos.

A definição 4.1 é muito simples, mas para os matemáticos da época de Cantor foi difícil aceitar as suas aplicações. Por exemplo, se tomarmos  $P$  como intervalo  $[0,1] \subset \mathbb{R}$  e dado o quadrado  $Q = P \times P = [0,1] \times [0,1]$  a nossa intuição nos leva a crer que  $|Q| \neq |P|$ . Geometricamente podemos pensar que o quadrado  $Q$  tem mais pontos que o segmento  $P$  e que precisaríamos de “vários” segmentos  $P$  para preencher o quadrado  $Q$ , conforme figura 24.



**Figura 24: Segmento com relação ao quadrado.**

No entanto a nossa intuição não está correta, Cantor provou que o quadrado  $Q$  e o segmento  $P$  satisfazem  $|P| = |Q|$ . Há, na verdade, vários modos de fazê-lo e Peano mostra como realizar bijeções contínuas que relacionam pontos de  $P$  com pontos de  $Q$ . A construção de Peano baseia-se em um sistema de numeração não decimal, no próximo tópico vamos tratar de transformação de sistema numeração de bases diferentes.

## 4.2 Transformações de sistemas de numeração de base diferentes

Segundo Lima (2012) a representação de um número real positivo  $m$  no sistema de numeração de base decimal pode ser escrita,

$$m = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

onde  $a_0$  é um número natural maior ou igual a zero e  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , são dígitos, isto é, inteiros tais que  $0 \leq a_n \leq 9$ , para todo  $n \geq 1$ .

Usando o mesmo raciocínio um número  $m$  na base ternária pode ser escrito na forma

$$m = b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$$

onde  $b_0$  é um número natural descrito somente com algarismos 0, 1 e 2 e  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ , são inteiros tais que  $0 \leq b_n \leq 2$ , para todo  $n \geq 1$ . De forma análoga podemos escrever qualquer número decimal em uma base qualquer.

**Exemplo 4.1** Seja o número 549 na base decimal, vamos transformar na base ternária e binária.

O processo de transformação consiste em escrever o número em potência de base do sistema numérico dado, isto é, o número 549,

$$\text{base decimal} \Rightarrow 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 9 \Rightarrow 549$$

$$\text{base ternária} \Rightarrow 2 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 \Rightarrow 202100$$

$$\text{base binária} \Rightarrow 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \Rightarrow 1000100101.$$

Logo 549 na base decimal é equivalente ao número 202100 na base ternária e 1000100101 na binária.

**Exemplo 4.2** Considere o número 0,122 na base ternária, vamos transformar para base decimal.

Como 0,122 está escrito na base 3 podemos escrever:

$$0,122 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} = 0, \bar{3} + 0, \bar{2} + 0, \overline{074} = 0, \overline{629}$$

Logo 0,122 na base ternária equivale a  $0, \overline{629}$  na base decimal.

### 4.3 A curva de preenchimento de espaço de Peano

O matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) apresenta em um dos seus trabalhos, uma função contínua e sobrejetora que tem como domínio um segmento de reta unitário e imagem um quadrado de lado unitário.

A ideia de Peano é que tenha duas componentes onde uma é construída com os valores de índices pares e a outra com os valores de índices ímpares do domínio da função. Fazendo uma analogia, tome as palavras “aritmética” e “professor”. Dentre todos os anagramas destas palavras juntas (isto é, “aritméticaprofessor”), tomamos aquela que lista a primeira letra de uma e a primeira letra de outra, depois a segunda letra de uma e a segunda letra de outra etc. A ideia de Peano é inverter esse processo:

$$P(\text{aprriotfmeéstsiocra}) = (\text{aritmética}, \text{professor})$$

Note que os elementos de índices pares do domínio da função correspondem à palavra “aritmética” e os de índices ímpares a palavra “professor”.

Para a construção da função de Peano, usaremos o raciocínio semelhante apresentado por Sagan (1994, seções 3.1 e 3.2).

Vamos tomar  $t$  como parâmetro e representar os números reais entre 0 e 1 usando a representação ternária, isto é, vamos escrever usando o sistema de numeração na base 3 já definido anteriormente por:

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^i} = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \dots$$

com  $t \in [0,1]$  e  $t_i \in \{0,1,2\}$ .

Para construção da curva de Peano usaremos as funções definidas a seguir:

**Definição 4.2** Seja  $\sigma: \{0,1,2\} \rightarrow \{0,1,2\}$  tal que

$$\sigma(0) = 2$$

$$\sigma(1) = 1$$

$$\sigma(2) = 0$$

Note que  $\sigma$  pode ser composta consigo mesma e que:

$$\sigma \circ \sigma(0) = \sigma(2) = 0$$

$$\sigma \circ \sigma(1) = \sigma(1) = 1$$

$$\sigma \circ \sigma(2) = \sigma(0) = 2$$

Assim  $\sigma \circ \sigma(a) = a$ , dizemos que  $\sigma$  é igual a sua própria inversa. Denotando por  $\sigma^n$  a composição de  $\sigma$  por  $\sigma$   $n$  vezes, isto é,  $\sigma^n(x) = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma(x)}_{n \text{ vezes}}$  e  $\sigma^0(x) = x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

observamos que  $\begin{cases} \sigma^n(x) = x, & \text{se } n \text{ é par} \\ \sigma^n(x) = \sigma(x), & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ .

**Definição 4.3** Seja  $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,1]$  tal que

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^i}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma^{\left(\sum_{j=1}^{i-1} t_j\right)}(t_{2i-1})}{3^i} \\ &= \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{9} + \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{27} + \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6}(t_7)}{81} + \dots \end{aligned}$$

**Proposição 4.1** A função  $\varphi(t)$  está bem definida.

**Demonstração:**

Seja  $t \in [0,1]$ , queremos mostrar que  $\varphi(t)$  independe da representação ternária de  $t$  quando  $t$  tem duas expansões,

$$t = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{3^i} + \sum_{i>n} \frac{0}{3^i} = 0, t_1 t_2 t_3 \dots t_n 000 \dots \quad \text{ou}$$

$$t = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{3^i} + \frac{t_{n-1}}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = 0, t_1 t_2 t_3 \dots t_{n-1} (t_n - 1) 222 \dots$$

no caso  $t_n \in \{1,2\}$ .

Devemos ter  $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{3^i} + \sum_{i>n} \frac{0}{3^i}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{3^i} + \frac{t_{n-1}}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}\right)$ . Para mostrar que as imagens das expansões são iguais, consideraremos a paridade de  $n$  combinada com a paridade de  $t_2+t_4+t_6+\dots+t_n$  o que resulta em quatro casos:

- $n$  par e  $t_2+t_4+t_6+\dots+t_n$  par;
- $n$  par e  $t_2+t_4+t_6+\dots+t_n$  ímpar;
- $n$  ímpar e  $t_2+t_4+t_6+\dots+t_{n-1}$  par;
- $n$  ímpar e  $t_2+t_4+t_6+\dots+t_{n-1}$  ímpar;

**1º Caso:**  $n$  par e  $t_2+t_4+t_6+\dots+t_n$  par; chamamos de  $n = 2k$ .

Pela definição 4.3

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^i}\right) = \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{3^2} + \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \dots + \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2k}}(t_{2k+1})}{3^{k+1}} + \dots$$

aplicando  $\varphi$  na primeira representação ternária de  $t$ , temos,

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{2k} \frac{t_i}{3^i} + \sum_{i>2k} \frac{0}{3^i}\right) = \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{3^2} + \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \dots + \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2k}}(t_{2k+1}=0)}{3^{k+1}}$$

e demais termos nulos porque  $t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2k}+0+0+\dots$  são pares e  $t_{2k+1}, t_{2k+3}, t_{2k+5}, \dots$  são todos iguais a 0 e  $\sigma^{2s}(0) = 0$ , com  $s \in \mathbb{N}$ .

Calculando  $\varphi$  na segunda representação ternária, temos,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sum_{i=1}^{2k-1} \frac{t_i}{3^i} + \frac{t_{2k-1}}{3^{2k}} + \sum_{i=2k+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}\right) &= \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{3^2} + \\ &+ \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \dots + \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6+\dots+(t_{2k-1})}(t_{2k+1}=2)}{3^{k+1}} \end{aligned}$$

e demais termos nulos porque  $t_2+t_4+t_6+\dots+(t_{2k}-1)+2+2+\dots$  são ímpares e  $t_{2k+1}, t_{2k+3}, t_{2k+5}, \dots$  são todos iguais a 2 e  $\sigma^{2s+1}(2) = \sigma(2) = 0$ .

Então basta comparar  $\sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2k}}(0)$  e  $\sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2k-1}}(2)$ , note que o valor  $t_{2k+1}$  é diferente em cada caso, mas como  $t_2+\dots+t_{2k}$  é par, segue  $\sigma^{2s}(0) = 0$  e  $\sigma^{2s-1}(2) = \sigma(2) = 0$  com  $s \in \mathbb{N}$ .

Portanto  $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{3^i} + \sum_{i>n} \frac{0}{3^i}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{3^i} + \frac{t_{n-1}}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i}\right)$ .

A demonstração do 2º, 3º e 4º caso não será realizada, mas o raciocínio é análogo ao 1º caso.

**Definição 4.4** A curva  $\gamma: [0,1] \rightarrow [0,1]^2$ ,  $\gamma(t) = \left(\varphi(t), 3\varphi\left(\frac{t}{3}\right)\right)$ , é chamada de curva de Peano.

Sendo  $t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^i} = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \dots$  então

$$\frac{t}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^{i+1}} = \frac{0}{3} + \frac{t_1}{3^2} + \frac{t_2}{3^3} + \dots$$

e

$$3s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{3^{i-1}} = s_1 + \frac{s_2}{3} + \frac{s_3}{3^2} + \dots$$

**Proposição 4.2** A função  $\gamma(t)$  é sobrejetora.

**Demonstração:**

Dados  $x, y \in [0,1]$ , queremos achar  $t \in [0,1]$  com  $\varphi(t) = x$  e  $3\varphi\left(\frac{t}{3}\right) = y$ .

Escrevendo

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \dots + \frac{x_n}{3^n} + \dots$$

e desenvolvendo  $\varphi(t)$  temos

$$\varphi(t) = \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{3^2} + \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6}(t_7)}{3^4} + \dots + \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2(n-1)}}(t_{2n-1})}{3^n} + \dots$$

comparando  $\varphi(t)$  com  $x$  determinamos que,

$$x_1 = t_1, x_2 = \sigma^{t_2}(t_3), x_3 = \sigma^{t_2+t_4}(t_5), x_4 = \sigma^{t_2+t_4+t_6}(t_7), \dots$$

assim sucessivamente.

Calculando  $3\varphi\left(\frac{t}{3}\right)$  pela definição 4.3 temos,

$$3\varphi\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{\sigma^{t_1}(t_2)}{3} + \frac{\sigma^{t_1+t_3}(t_4)}{3^2} + \frac{\sigma^{t_1+t_3+t_5}(t_6)}{3^3} + \dots + \frac{\sigma^{t_1+t_3+t_5+\dots+t_{2n-1}}(t_{2n})}{3^n} + \dots$$

Fazendo,

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{3^i} = \frac{y_1}{3} + \frac{y_2}{3^2} + \frac{y_3}{3^3} + \dots + \frac{y_n}{3^n} + \dots$$

e comparando com  $3\varphi\left(\frac{t}{3}\right)$ ,

$$y_1 = \sigma^{t_1}(t_2), y_2 = \sigma^{t_1+t_3}(t_4), y_3 = \sigma^{t_1+t_3+t_5}(t_6), y_4 = \sigma^{t_1+t_3+t_5+t_7}(t_8), \dots$$

Determinamos  $t_1 = x_1$  depois  $t_2 = (\sigma^{t_1})^{-1}(y_1)$ , depois  $t_3 = (\sigma^{t_2})^{-1}(x_2)$ , depois  $t_4 = (\sigma^{t_1+t_3})^{-1}(y_2)$ , ...,  $t_{2n-1} = (\sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2n-2}})^{-1}(x_n)$ ,  $t_{2n} = (\sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}})^{-1}(y_n)$  usando as equações e  $t_1, \dots, t_{n-1}$  para determinar  $t_n$ , para cada  $n \geq 1$ .

Portanto para todo  $(x, y) \in [0,1]$  podemos achar  $t \in [0,1]$  tal que  $\gamma(t) = (x, y)$ , isto é,  $\gamma(t)$  é sobrejetora.

Nas próximas demonstrações, usaremos sempre a expressão infinita no caso de um número exato (isto é,  $0, t_1 \dots (t_k - 1)222 \dots$  em vez de,  $0, t_1 \dots t_k000 \dots$ ).

**Proposição 4.3** A função  $\varphi(t)$  é contínua.

**Demonstração:**

Seja  $t_0 \in [0,1]$  tal que  $t_0 = 0, t_1 t_2 \dots t_{2n} t_{2n+1} \dots$ , escrevendo

$$\delta = 3^{-2n} - 0,000 \dots t_{2n+1} t_{2n+2} \dots,$$

temos,

$$\begin{aligned} t_0 + \delta &= 0, t_1 t_2 \dots t_{2n} t_{2n+1} \dots + 3^{-2n} - 0,000 \dots t_{2n+1} t_{2n+2} \dots \\ &= 0, t_1 t_2 \dots t_{2n} 222 \dots \end{aligned}$$

Note que para qualquer  $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ , os  $2n$  primeiros dígitos são iguais aos de  $t_0$ :

$$t = t_1 t_2 \dots t_{2n} \tau_{2n+1} \tau_{2n+2} \dots$$

Fazendo  $T = t_2 + t_4 + t_6 + \dots + t_{2n}$ , calculamos

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| &= \left| \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{3^2} + \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \dots + \frac{\sigma^T(\tau_{2n+1})}{3^n} + \dots \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{3^2} + \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \dots + \frac{\sigma^T(t_{2n+1})}{3^n} + \dots \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{\sigma^T(\tau_{2n+1}) - \sigma^T(t_{2n+1})}{3^{n+1}} \right| + \left| \frac{\sigma^{T+\tau_{2n+2}}(\tau_{2n+3}) - \sigma^{T+t_{2n+2}}(t_{2n+3})}{3^{n+1}} \right| + \dots \\ &\leq \frac{2}{3^{n+1}} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{3^n} \end{aligned}$$

Isso mostra que  $\varphi$  é contínua pela direita.

Vamos mostrar que  $\varphi$  é contínua pela esquerda em  $[0,1]$ , assumiremos

$$t_0 = 0, t_1 t_2 \dots t_{2n} t_{2n+1} \dots,$$

E tomando

$$\delta = 0,000 \dots t_{2n+1} t_{2n+2} \dots$$

Então

$$t_0 - \delta = 0, t_1 t_2 \dots t_{2n} \dots$$

Para qualquer  $t \in (t_0 - \delta, t_0)$ , os  $2n$  primeiros dígitos são iguais e, analogamente a acima,

$$|\varphi(t) - \varphi(t_0)| = \left| \begin{array}{l} \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{3^2} + \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \dots + \frac{\sigma^T(\tau_{2n+1})}{3^n} + \dots \\ - \left( \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{3^2} + \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \dots + \frac{\sigma^T(t_{2n+1})}{3^n} + \dots \right) \end{array} \right|$$

$$\leq \frac{2}{3^{n+1}} \left( 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{3^n}$$

O que mostra a continuidade de  $\varphi$  pela esquerda.

**Corolário 4.1** A curva  $\gamma$  é contínua.

**Demonstração:** Como  $\varphi$  é contínua, também a função  $t \rightarrow 3\varphi\left(\frac{t}{3}\right)$  é contínua, de modo que as duas componentes de  $\gamma$  são contínuas.

**Proposição 4.4**  $\varphi(t)$  não é diferenciável em nenhum ponto  $t \in [0,1]$ .

**Demonstração:**

Fixado  $t \in [0,1]$  e dado  $n \in \mathbb{Z}_+^*$ , substitua  $t_{2n-1}$  por  $\tau_{2n-1}$  assim: 0 por 1, 1 por 0 ou 2 por 1, construindo  $t'_n$  de modo que  $|t - t'_n| = \frac{1}{3^{2n-1}}$ .

Calculamos a distância entre  $\varphi(t)$  e  $\varphi(t'_n)$ :

$$|\varphi(t) - \varphi(t'_n)| = \left| \begin{array}{l} \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{3^2} + \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \dots + \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2(n-1)}}(t_{2n-1})}{3^n} + \dots \\ - \left( \frac{t_1}{3} + \frac{\sigma^{t_2}(t_3)}{3^2} + \frac{\sigma^{t_2+t_4}(t_5)}{3^3} + \dots + \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2(n-1)}}(\tau_{2n-1})}{3^n} + \dots \right) \end{array} \right|$$

$$= \left| \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2(n-1)}}(t_{2n-1})}{3^n} - \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2(n-1)}}(\tau_{2n-1})}{3^n} \right|$$

Note que  $\varphi(t)$  e  $\varphi(t'_n)$  diferem apenas na  $n$ -ésima casa ternária. No caso particular de  $t_2 + t_4 + \dots + t_{2(n-1)}$  par e  $t_{2n-1} = 0$  temos  $\tau_{2n-1} = 1$ , segue

$$|\varphi(t) - \varphi(t'_n)| = \left| \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2(n-1)}}(t_{2n-1}=0)}{3^n} - \frac{\sigma^{t_2+t_4+t_6+\dots+t_{2(n-1)}}(\tau_{2n-1}=1)}{3^n} \right|$$

$$= \left| \frac{0}{3^n} - \frac{1}{3^n} \right|$$

$$|\varphi(t) - \varphi(t'_n)| = \frac{1}{3^n}$$

Assim temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} t'_n = t$  mas  $\frac{|\varphi(t) - \varphi(t'_n)|}{|t - t'_n|} = \frac{3^{2n-1}}{3^n}$  é limitada. Isso mostra que  $\varphi(t)$  não é diferenciável, então  $\gamma(t)$  também não é diferenciável.



Os passos de todo o processo da curva  $\gamma$  estão resumido na figura 27.

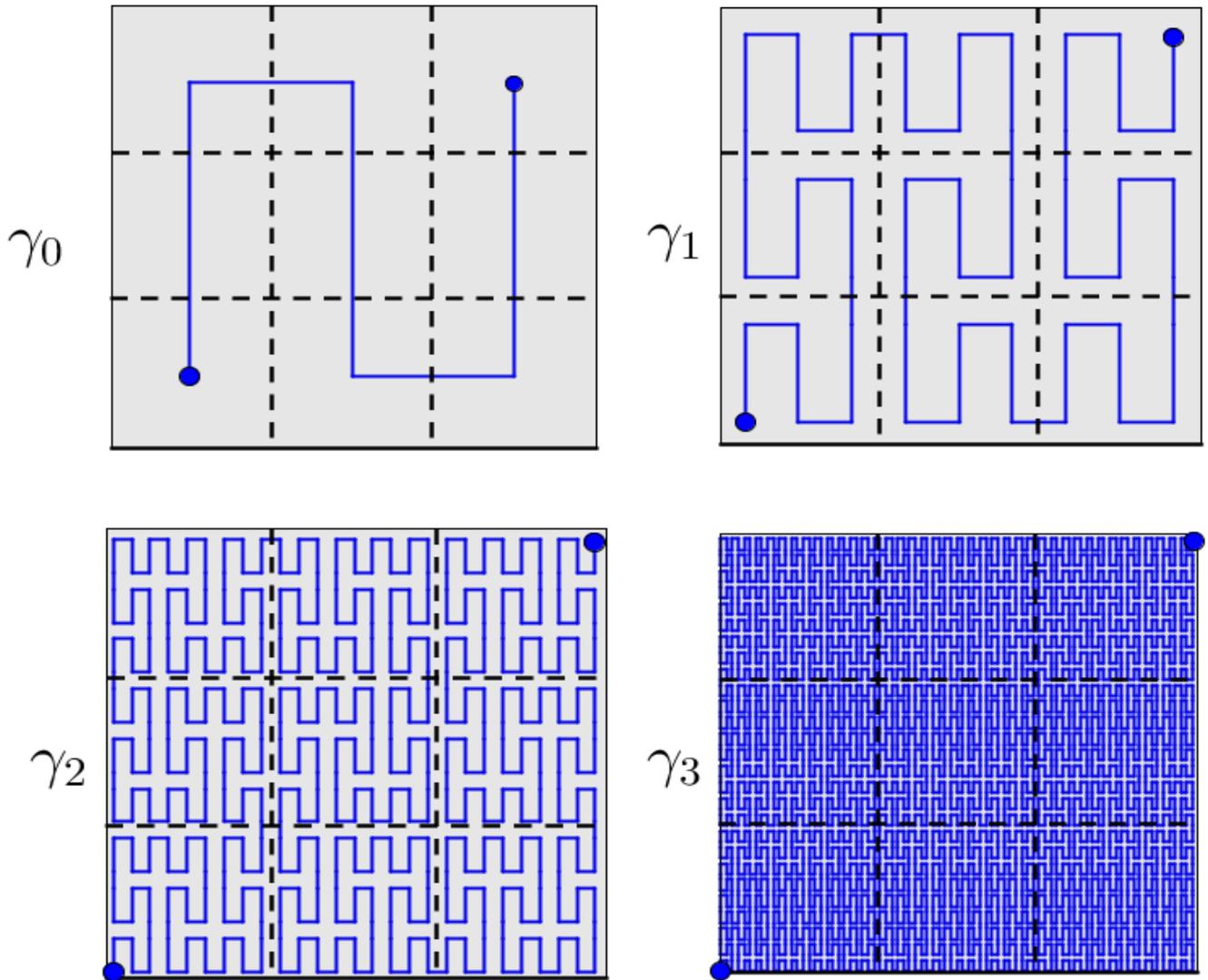
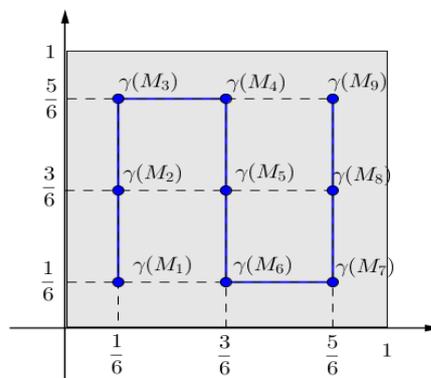


Figura 27: Traços das primeiras quatro curvas

Fazer a demonstração desse processo fica além do conteúdo proposto, mas podemos verificar que a curva  $\gamma$  passa pelos vértices de  $\gamma_0$  precisamente nos pontos médios dos subintervalos de  $[0,1]$ : veja o resumo na tabela e na figura 25. Os cálculos foram feitos para uma aproximação de 5 dígitos, indicada com símbolo  $\cong$ .

Intervalo	Ponto médio ( $M_n$ )	$\gamma(M_n) = \left( \varphi(M_n), 3\varphi\left(\frac{M_n}{3}\right) \right)$
$\left[0, \frac{1}{9}\right]$	$M_1 = \frac{1}{18} \cong (0,00111)_{\text{base } 3}$	$\gamma(M_1) = (0.01111, 0.01111)$ $\cong \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)_{\text{base } 10}$

$\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$	$M_2 = \frac{3}{18} \cong (0,01111)_{\text{base } 3}$	$\gamma(M_2) = (0.01111, 0.11111)$ $\cong \left(\frac{1}{6}, \frac{3}{6}\right)_{\text{base } 10}$
$\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]$	$M_3 = \frac{5}{18} \cong (0,02111)_{\text{base } 3}$	$\gamma(M_3) = (0.01111, 0.21111)$ $\cong \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)_{\text{base } 10}$
$\left[\frac{3}{9}, \frac{4}{9}\right]$	$M_4 = \frac{7}{18} \cong (0,10111)_{\text{base } 3}$	$\gamma(M_4) = (0.11111, 0.21111)$ $\cong \left(\frac{3}{6}, \frac{5}{6}\right)_{\text{base } 10}$
$\left[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right]$	$M_5 = \frac{9}{18} \cong (0,11111)_{\text{base } 3}$	$\gamma(M_5) = (0.11111, 0.11111)$ $\cong \left(\frac{3}{6}, \frac{3}{6}\right)_{\text{base } 10}$
$\left[\frac{5}{9}, \frac{6}{9}\right]$	$M_6 = \frac{11}{18} \cong (0,12111)_{\text{base } 3}$	$\gamma(M_6) = (0.11111, 0.01111)$ $\cong \left(\frac{3}{6}, \frac{1}{6}\right)_{\text{base } 10}$
$\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]$	$M_7 = \frac{13}{18} \cong (0,20111)_{\text{base } 3}$	$\gamma(M_7) = (0.21111, 0.01111)$ $\cong \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)_{\text{base } 10}$
$\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$	$M_8 = \frac{15}{18} \cong (0,21111)_{\text{base } 3}$	$\gamma(M_8) = (0.21111, 0.11111)$ $\cong \left(\frac{5}{6}, \frac{3}{6}\right)_{\text{base } 10}$
$\left[\frac{8}{9}, 1\right]$	$M_9 = \frac{17}{18} \cong (0,22111)_{\text{base } 3}$	$\gamma(M_9) = (0.21111, 0.21111)$ $\cong \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)_{\text{base } 10}$



**Figura 28: Representação dos vértices**

## Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo fazer uma reflexão sobre o conceito de curva plana, apresentamos a sua importância e o seu desenvolvimento ao longo da história. Estudamos propriedades específicas de algumas curvas e teoremas gerais que caracterizam uma curva no plano. Apontamos alguns teoremas e propriedades que dão base rigorosa para o estudo das curvas, destacando os referenciais de Frenet e o teorema fundamental das curvas planas.

Descrevemos as curvas por meio de equações paramétricas, diferentemente das cartesianas que são comumente utilizadas no Ensino Básico, pois as paramétricas podem descrever algebricamente qualquer curva deste trabalho e o conceito pode ser ampliado para o  $\mathbb{R}^3$  com mais facilidade. Um ponto alto da pesquisa foi a exploração das belas e interessantes aplicações das cônicas, catenária, cicloide e das curvas de Bézier, originando destas juntamente com a capacidade humana grandes monumentos, avanços tecnológicos e compreensão do funcionamento do universo.

É importante destacar que o estudante tenha noção destas e outras aplicações ao se deparar com matérias relacionadas a esta, sentindo-se motivado para os seus estudos, percebendo que não são assuntos desligados do seu cotidiano.

Estudamos a curva de Peano com propriedades bem exóticas e abstratas, dedicando este tópico para análise do professor do Ensino Médio. A curva tem como característica preencher um quadrado de lado unitário com um segmento de mesmo comprimento do lado do quadrado, este conceito busca a reflexão sobre uma nova ideia de curva.

Tomando o conceito das curvas de preenchimento de espaço como ponto de partida indicamos ao leitor o estudo das propriedades e aplicações das curvas produzidas por fractais, tendo como referência Janos (2008).

## Bibliografia

ALENCAR, Hilário; SANTOS, Walcy: *Geometria Diferencial das Curvas Planas*. Goiânia: Editora da UFG, 2002.

CAETANO, Wellington de Lima. *Queda em curvas de menor tempo e tempo independente da altura - Braquistócrona e Tautócrona*. 2008. Disponível em: [http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530\\_F590\\_F690\\_F809\\_F895/F809/F809\\_sem1\\_2008/WellingtonL-Firer\\_RF2.pdf](http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem1_2008/WellingtonL-Firer_RF2.pdf). Acesso em: 02 de maio de 2015.

CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 3ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2005.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria Analítica*. Coleção PROFMAT. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2013.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 2ª ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 1997.

GOMES, Jonas de Miranda. *Representação de arcos por curvas de Bézier*. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA E PROCESSAMENTO DE IMAGENS, 2. (SIBGRAPI), 1989, Águas de Lindóia. Anais... Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 1989. p. 519-523.

GUIDORIZZI, Hamilton Luis. *Um Curso de Cálculo vol. 2*. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1986.

GUILLOD, Thomas. Interpolations, courbes de Bézier et B-Splines. *Bulletin de la Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences*, 34, 2008. Disponível em: <http://www.sens-neuchatel.ch/bulletin/no34/art3-34.pdf>. Acesso em: 14 de dezembro de 2015.

JANOS, M. *Geometria Fractal*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda, 2008.

LIMA, Elon Lages, et al. *A matemática do ensino médio. vol. I*. Coleção do Professor de Matemática. 10ª ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2012.

LOPES, Vinicius Cifú. *Equações Diferenciais Ordinárias na Graduação*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2015.

NETO, Antonio Caminha Muniz. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2014.

RANGEL, Alcyr Pinheiro. *Curvas*. Rio de Janeiro: Ilha Universitária, 1974.

SAGAN, H. *Space Filling Curves*. New York: Editora Springer-Verlag, 1994.

TALAVERA, L. M. B. *Parábola e Catenária: história e aplicações*. 2008. Dissertação (mestrado em educação), Universidade de São Paulo. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-17062008-135338/pt-br.php>  
Acesso em: 13 de fevereiro de 2015.

TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. 2ª Ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

VALLADARES, Renato J.C. Propriedade refletora. *Revista do Professor de Matemática*, 36, p.27-28, 1988.

WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas. *Revista do Professor de Matemática*, 33, p.10-15. Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

WANGENHEIM, Aldo Von. e WAGNER H. M., “INE 5341 - Programa da Disciplina Computação Gráfica,” 2009. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/~grafica/CG4.pdf>.  
Acesso em 08 de fevereiro de 2015.