UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO – UFERSA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS- GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ELISEU DO NASCIMENTO SILVA

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO

Mossoró / RN
2016

ELISEU DO NASCIMENTO SILVA

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática (PROFMAT), da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Profº. Dr. Maurício Zuluaga Martinez

Mossoró / RN

2016

S586i Silva, Eliseu do Nascimento.
Uma introdução ao estudo das derivadas no Ensino Médio / Eliseu do Nascimento Silva. - 2016.
57 f. : il.

Orientador: Prof°. Dr. Maurício Zuluaga Martinez.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2016.

1. coeficiente angular. 2. Limite. 3. Derivada. 4. Função do 1°grau. 5. Função do 2°grau. I. Martinez, Prof°. Dr. Maurício Zuluaga, orient. II. Título.

ELISEU DO NASCIMENTO SILVA

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS DERIVADAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM: 20 / 06 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Mauricio Zuluaga M.

Dr. Maurício Zuluaga Martinez - UFERSA

Presidente

FRCDAraújo

Dr[a]. Fabiane Regina da Cunha Dantas Araújo - UFERSA

Primeiro Membro

Maria Cristiane M. Brandão

Dr[a]. Maria Cristiane Magalhães Brandão - UECE

Terceiro Membro

MOSSORÓ/RN, 2016.

DEDICO,

Este trabalho primeiramente a DEUS, autor da minha vida, meu guia e amigo fiel, a ele, toda honra e glória!

Aos meus pais: Raimundo e Tereza, exemplos de perseverança e cuidado para com os filhos(as);

Aos meus irmãos e irmãs, pelo suporte e amizade; aos meus sobrinhos e sobrinhas, companheiros constantes desta jornada terrena, que torcem pelo meu sucesso;

A toda minha família, que é responsável por minhas conquistas nesta jornada chamada vida!

AGRADECIMENTOS:

Ao meu orientador, professor Dr. Maurício Zuluaga Martinez, pela orientação, leituras, correções e incentivo no decorrer da realização do presente trabalho;

A todos os professores do Curso de Mestrado Profissional em Matemática, pela dedicação no ensino das aulas, que foram fundamentais na formação teórica;

A Banca Examinadora, composta pelos professores: Dr. Maurício Zuluaga Martinez, Dra. Fabiane Regina da Cunha Dantas, Dra. Maria Cristiane Magalhães Brandão, pelas contribuições com o propósito de melhorar minha pesquisa;

À UFERSA, pela liberação e incentivo para meu aperfeiçoamento e qualificação profissional;

A Coordenação do PROFMAT, pela amizade e apoio em todos os momentos no decorrer do curso;

Aos colegas de curso do mestrado profissional PROFMAT, pelo incentivo e pela colaboração;

A minha família, pelo apoio constante, carinho e incentivo;

A todos, que direta ou indiretamente, contribuíram para o alcance deste êxito,

A DEUS, pela sabedoria a mim dispensada na realização deste trabalho;

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, meu muito obrigado!

Não basta ensinar ao homem uma especialidade. Porque se tornará assim uma máquina utilizável, mas não uma personalidade. É necessário que se adquira um senso prático daquilo que vale a pena ser empreendido, daquilo que é belo, do que é moralmente correto. A não ser assim, ele se assemelhará, com seus conhecimentos profissionais, mais a um cão ensinado do que uma criatura harmoniosamente desenvolvida. Deve aprender a compreender as motivações dos homens, suas quimeras e suas angústias para determinar com exatidão seu lugar exato em relação a seus próximos e à comunidade. Os excessos do sistema de competição e de especialização prematura, sob o falacioso pretexto da eficácia, assassinam o espírito, impossibilitam qualquer vida cultural e chegam a suprimir os progressos nas ciências do futuro. É preciso, enfim, tendo em vista a realização de uma educação perfeita, desenvolver o espírito crítico na inteligência do jovem. (EINSTEIN, 1953)

RESUMO

Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, que analisa, através de uma revisão de literatura, os resultados relativos à introdução, no Ensino Médio, das noções de limites e derivadas, aplicadas ao estudo das funções do 1º e 2º grau, cinemática, estudo dos sólidos geométricos e geometria analítica, objetivando a compreensão desses conteúdos com a finalidade de preparar os futuros alunos para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior. O objetivo geral da pesquisa foi identificar a importância das aplicações da derivada no ensino médio. Os objetivos específicos delineados foram: abordar em linguagem matemática o significado de Derivada; demonstrar as regras da Derivação e, enfatizar a utilidade da derivada como uma taxa de variação. Apresenta uma sequencia de passos para introduzir as ideias intuitivas de limite e derivadas concomitantes com os conteúdos acima citados. Os teóricos utilizados para dar embasamento à pesquisa foram: Geraldo Ávila, Louis Leithold, George F. Simmons, James Stewart, dentre outros. Como resultado, constatou-se que pode-se introduzir as noções básicas de limite e derivadas no Ensino Médio, em vários conteúdos matemáticos, com o objetivo de reduzir a evasão e reprovação, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, recorrente em vários cursos de nível superior. Salienta-se que há necessidade de realização de mais pesquisas com esta temática, a fim de destacar a importância da introdução das noções do Cálculo Diferencial no Ensino Médio. Conclama-se alunos e professores, amantes da matemática, que aprofundem e apresentem para os que estão ingressando no mundo escolar a amplidão das aplicações da derivada e da matemática, para que possam despertar o interesse dos discentes pelo aprendizado de Limites e Derivadas

Palavra-chave: Coeficiente angular. Limite. Derivada. Função do 1° grau. Função do 2° grau. Máximo. Mínimo.

ABSTRACT

This is a bibliographic research that examines, through a literature review, the results of the introduction, in high school, the notions of limits and derivatives, applied to the study of the functions of the 1st and 2nd degrees, kinematics, studies geometric solids and analytical geometry, in order to understand these contents in order to prepare future students for the discipline of Calculus Differential and Integral in higher education. The overall objective of the research was to identify the importance of the applications of the derivative in high school. The outlined specific objectives were to address in mathematical language the meaning of derivative; demonstrate the rules of Derivation and highlight the usefulness of the derivative as a rate of change. It presents a sequence of steps to enter the intuitive ideas of concurrent limit and derivatives with the above mentioned contents. The theoretical basis used to give the research were: Geraldo Ávila, Louis Leithold, George F. Simmons, James Stewart, among others. As a result, it was found that one can introduce the basics of limit and derivatives in high school, in various mathematical content, in order to reduce the dropout and failure in discipline Differential and Integral Calculus, recurring in various courses higher level. It is noted that there is need for further research on this theme in order to highlight the importance of the introduction of differential calculus notions in high school. Calls to students and teachers, math lovers, deepen and provide for those who are entering the school world the breadth of applications of derivative and mathematics so they can arouse the interest of students for learning limits and derivatives

Keyword: angular coefficient . Limit. Derived . Function of the 1st degree . Function of 2nd degree . Maximum. Minimum.

.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SIGLAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho traz uma abordagem do uso da derivada como um limite e a indagação da viabilidade de apresentação deste conteúdo nas turmas do Ensino Médio. As ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral estão presentes, de modo geral, em grande parte dos assuntos abordados nessa modalidade de ensino.

O objetivo principal de introduzir na grade curricular do Ensino Médio as ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral é proporcionar uma melhor compreensão do gráfico da função do 1° grau, ponto máximo e mínimo, crescimento e decrescimento nas funções do 2° grau, velocidade e aceleração instantânea em cinemática, cálculo do volume dos sólidos geométricos, coeficiente angular e equação de reta tangente a uma curva em um ponto da mesma, conteúdos presentes na grade curricular do 1°, 2º e 3º ano do ensino médio.

A abordagem às noções básicas sobre derivadas deve ser considerada eficiente, pois proporciona uma aprendizagem mais significativa, enfatizando outro modo de compreender os diversos conteúdos presentes nas disciplinas do Ensino Médio. Contribui como uma preparação para os alunos que ingressam nas universidades, onde a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral se faz presente na grade curricular. Através da mesma pode-se calcular custos e lucros, minimizar os custos de produção e maximizar os lucros da produtividade, temáticas importantes para os tempos atuais.

Provavelmente muitos alunos já ouviram falar sobre derivada, se não, no mínimo, já ouviram falar de cálculo, pois alguns livros de matemática do 3º ano do Ensino Médio abordam algumas noções sobre Cálculo Diferencial e Integral. A aplicação dessas noções se faz presente nessa etapa escolar, sendo fundamental para diversas ciências como: Matemática, Física, Química, Biologia, entre outras.

Na disciplina de Cálculo I se tem o primeiro contato com os limites, as derivadas e as integrais (conceitos de grande importância para a matemática e outras ciências). Devido à variedade de assuntos que precisam ser analisados, essa disciplina é uma das que causam mais receio nos alunos, provocando muitas vezes, uma apatia pela mesma, motivo esse que corrobora no déficit de aprendizagem dos discentes.

A ideia básica de derivada pode ser verificada a partir do conhecimento de coeficiente angular de uma reta, assunto abordado na geometria analítica, mas que se aplica no estudo do gráfico de qualquer função. Se o aluno tem contato com a temática, no ensino médio, poderá proporcionar melhores resultados na aprendizagem das disciplinas de Cálculo no ensino superior.

Como veremos no decorrer desta pesquisa, a derivada é um limite e pode ser vista como uma taxa de variação instantânea. No estudo de reta, a derivada representa o ângulo de inclinação que ela forma com o eixo das abscissas. Em funções cujo gráfico não são retas, a derivada depende do valor da abscissa “x” por exemplo, numa função cujo gráfico é uma parábola, a famosa função de segundo grau.

Para Howard (2002), a criação da derivada foi influenciada pela natureza. A partir dela o homem maturou ideias, que o aproximaram de realizar a sua criação. Para sua elaboração foi necessária análise de conceitos e métodos existentes e, conhecer, com mais profundidade, os infinitésimos, que são números muito pequenos próximos a um ponto, pois sem eles não seria admissível construir um instrumento formal de expressão e comunicação às demais ciências.

Dessa forma, podemos compreender que a derivada tem uma importância fundamental, pois auxilia o aluno em diversos campos de conhecimento. Destaca-se também que sua aplicação ajuda na melhor acepção de conhecimentos prévios e na preparação para adquirir posteriores. Assim sendo, sua aplicação no Ensino Médio tem suma importância para a elevação do conhecimento dos discentes.

JUSTIFICATIVA

Este estudo tem sua justificativa embasada no entendimento das dificuldades, que não são atuais, que os alunos enfrentam em relação aos conteúdos matemáticos abordados no ensino Fundamental e Médio. Essas objeções em relação ao conteúdo acontecem muitas vezes, pois os estudantes não encontram uma aplicação prática para os que aprendem, considerando-a uma disciplina sem uso; outra perspectiva abordada é preparar os futuros discentes para os cursos superiores, diminuindo a evasão e reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

OBJETIVOS

OBJETIVO GERAL:

Identificar a importância das aplicações da derivada no Ensino Médio.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Abordar, em linguagem matemática, o significado de Derivada;
- Demonstrar as regras da Derivação;
- Destacar a utilidade da derivada como uma taxa de variação.

METODOLOGIA

Esta dissertação caracteriza-se como pesquisa exploratória e bibliográfica. Apresenta-se como procedimento bibliográfico, isto é, um estudo sistematizado desenvolvido com base em material publicado em livros, revistas, dissertações, redes eletrônicas, isto é, material acessível ao público em geral.

A pesquisa bibliográfica é aquela baseada na análise da literatura já publicada em forma de livros, revistas, publicações avulsas, imprensa escrita e até eletrônica, disponibilizada na Internet. A pesquisa bibliográfica contribui para obter informações sobre a situação atual do tema ou problema pesquisado; conhecer publicações existentes sobre o exposto e os aspectos que já foram abordados e, verificar as opiniões similares e diferentes a respeito ou de aspectos relacionados ao problema de pesquisa.

Para Araujo (2003), seguir um procedimento bibliográfico é procurar a decisão de um problema por meio de referenciais teóricos divulgados, analisando e discutindo os diferentes aportes científicos. Esse tipo de pesquisa apresenta informações sobre o assunto estudado, como e sob que enfoque e/ou perspectivas foi tratado o assunto proporcionado na literatura científica.

A coleta de dados foi realizada por meio de artigos, livros e revistas, acrescidos de informações colhidas em trabalhos já produzidos sobre o tema, cujos dados foram levantados também por meio do acesso à rede mundial de computadores com os mais renomados autores que tratam sobre o assunto.

1. O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NO CURRÍCULO DO ENSINO MÉDIO NO BRASIL

Segundo o artigo 22 da LDB, a educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores. ”Uma das funções do Ensino Médio é fazer a ponte entre o Ensino Fundamental e o Ensino Superior, oferecendo aos discentes, um embasamento real e fidedigno aos componentes curriculares da maioria dos Cursos Superiores”.

Segundo Maria (2013, p.20), os resultados relativos aos conhecimentos matemáticos, obtidos através das avaliações institucionais como o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica) e o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), nos mostram as deficiências que muitos discentes apresentam no termino do Ensino Médio, não sabendo realizar operações matemáticas envolvendo os números reais, interpretação de gráficos e tabelas.

Destaca-se que em muitos cursos superiores a disciplina de Cálculo Diferencial se faz presente na grade curricular e o aluno advindo do Ensino Médio precisa estar preparado para enfrentá-la. Segundo estudos desenvolvidos pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), a má formação secundária acarreta um número elevado de reprovação e evasão nesta disciplina.

Uma resposta para essa problemática, sugerida por alguns estudiosos do assunto é incluir na grade curricular do Ensino Médio as noções de cálculo diferencial e integral proporcionando uma interdisciplinaridade e uma melhor compreensão dos conteúdos abordados no Ensino Médio.

Sobre a questão enfocada, o Professor Geraldo Ávila, faz a seguinte indagação sobre a inclusão de tópicos do Cálculo no Ensino Médio:

> Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por quê? Como fazer isso? (ÁVILA, 1991, p.1).

Uma resposta à pergunta de Ávila sobre o ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Brasil, especificamente nas escolas de Ensino Médio, está em um artigo publicado na Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT), que cita:

> No Brasil, em 1811, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral já fazia parte do currículo do segundo ano da Academia Real Militar. Em 1837, o ministro e secretário de estado da Justiça e interino do Império, Bernardo Pereira de Vasconcelos, criou a primeira escola secundária pública do Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II, e modificou radicalmente os programas do ensino da Matemática, de modo que, Aritmética, Geometria e Álgebra ocupassem seu lugar em todas as oito séries do curso (TORRES; GIRAFFA, 2009, p.6).

Na dissertação de Mota (2014), apresentada a Universidade Federal de Sergipe, o autor informa que uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral já fez parte do currículo das escolas secundárias por duas vezes, a primeira em 1891, com a reforma proposta por Benjamim Constant no início da República e uma segunda vez, no governo de Getúlio Vargas, na Reforma Capanema, em 1942, constando do currículo escolar oficialmente até 1961.

Conforme Maria (2013), nas décadas de 60 e 70, o ensino de matemática no Brasil e em alguns países sofreu influências decorrentes do movimento da matemática moderna, dessa forma ocorreu à exclusão de alguns conteúdos dos antigos programas, dentre eles o cálculo.

Na contemporaneidade, alguns tópicos referentes às noções do Cálculo Diferencial e Integral como limite, derivada e integral estão, sempre, no final de alguns livros de matemática do 3° ano do Ensino Médio, corroborando para que esses temas, na maioria das vezes, não sejam ensinados.

Sobre o pretexto de apresentarem um alto grau de dificuldade e o currículo da escola secundaria ser extenso esse conteúdo fica sempre esquecido nos planos docentes. Diante dessa realidade, surge um questionamento: Como introduzir as ideias intuitivas do Cálculo diferencial e integral no Ensino Médio?

Ávila (1991), afirma que “o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem no Ensino Médio conjuntamente com os estudos de funções”. A apresentação das noções de cálculo no Ensino Médio proporciona uma melhor interpretação dos conteúdos abordados durante esse período escolar, que poderá contribuir com o aprendizado, com mais qualidade, no ensino superior.

Para muitos teóricos matemáticos, a inclusão das noções do Cálculo Diferencial e Integral não torna a grade curricular extensa e não possibilita a perda de outros conteúdos. Deseja-se que as noções dessa disciplina sejam apresentadas simultaneamente a diversos conteúdos e resultem em compreensão dos assuntos abordados. Como exemplo cita-se as funções e a cinemática no 1° ano, sólidos geométricos no 2° ano e geometria analítica no 3º ano.

Infere-se que uma abordagem metodológica, concisa e responsável, com vistas ao ensino de qualidade, independente da rede pública ou particular, requer do docente um compromisso social com o aprendizado dos discentes. Nesse tocante, a responsabilidade social docente torna-se uma premissa fundamental no processo educacional.

Construir planos docentes que envolvam todo o conteúdo programático do livro didático é compromisso essencial do educador. Ressalta-se que todo processo de ensino pressupõe planejamento. Assim sendo, construir métodos que cooperem com o aprendizado é uma variável para o alcance das metas traçadas no plano docente. Destaca-se que a participação docente é fundamental para melhorar a qualidade do ensino da matemática.

2. A DERIVADA

Torna-se imprescindível destacar que há fenômenos que acontecem na natureza, sendo eles envolvidos por transformações, que em linguagem matemática são expressas por equações, as quais incluem quantidades de variáveis. Geometricamente falando, a derivada representa o coeficiente angular de uma reta, porém quando se trata de uma função ela representa uma taxa de variação instantânea.

Nota-se que a declividade da reta tangente, taxa de variação média e instantânea são conteúdos relacionados com a ideia intuitiva de derivadas e, serão abordados neste trabalho, fornecendo informações importantes para a construção do gráfico de uma função. De tal modo Simmons (2010) e Stewart (2006), exemplificaram a interpretação geométrica e física. Os autores descrevem, definem e interpretam graficamente funções, a reta tangente e secante, de forma a construir o conhecimento, onde elabora para cada passo um significado.

Acerca da Derivada Simmons destaca,

> [...] é uma das três ou quatro ideias mais fecundas que qualquer matemático já tenha tido, pois sem ela, não haveria o conceito de velocidade ou aceleração ou força física, nem dinâmica ou astronomia newtoniana, nem ciência física de qualquer natureza, excerto como uma mera descrição verbal de fenômenos, e certamente não teríamos a idade moderna de engenharia e tecnologia (SIMMONS, 2010, p.72).

A procedência da derivada está ligada absolutamente com a preocupação em resolver problemas geométricos clássicos, como os de tangência, e, além disso, a outros problemas pautados a mecânica, velocidade, aceleração, etc. Denota-se que estes problemas passaram a existir desde a antiguidade na Grécia antiga, ainda que estas questões tenham sido originalmente tratadas mais filosoficamente que matematicamente (THOMAS, 2006).

Deste modo, a ideia de derivada foi desenvolvida entre os séculos XVII e XVIII, com o aparecimento da Geometria Analítica e a dedicação de diferentes matemáticos como Pierre Fermat, René Descartes, John Wallis, Issac Barrow, Issac Newton, Gottfried Leibniz, dentre outros. Portanto, o desenvolvimento do cálculo não é mérito exclusivamente de um matemático, mas sim de diversos como os mencionados acima. (HOWARD, 2004).

É Importante salientar que o desenvolvimento histórico do cálculo seguiu na ordem contrária a apresentada em textos e cursos básicos contemporâneos sobre o assunto, ou seja, primeiro surgiu o Cálculo Integral e tempos depois o Cálculo Diferencial. Compete ressaltar que a ideia de integração teve procedência em processos somatórios ligados ao cálculo de área e de certos volumes, enfatiza-se que no ensino das progressões geométricas infinitas com razão **q,** tal que, **$0 < q < 1$,** o professor tem a oportunidade de apresentar aos seus alunos o processo de somatórios infinitos que apresentam as ideias básicas do Cálculo Integral. A diferenciação, criada bem mais tarde, resultou de problemas sobre tangentes e de questões a respeito de máximos e mínimos. A diferenciação é a operação inversa da integração (FLEMMING, 2006).

Leithold (1986) indica que a derivada pode ser definida de acordo com a geometria como a inclinação de uma reta tangente a uma curva. Todavia, quando interpretada como taxa de variação ela mostra sua importância em diferentes ramos das ciências tais como Física, Biologia, Química, Economia, em meio a outras.

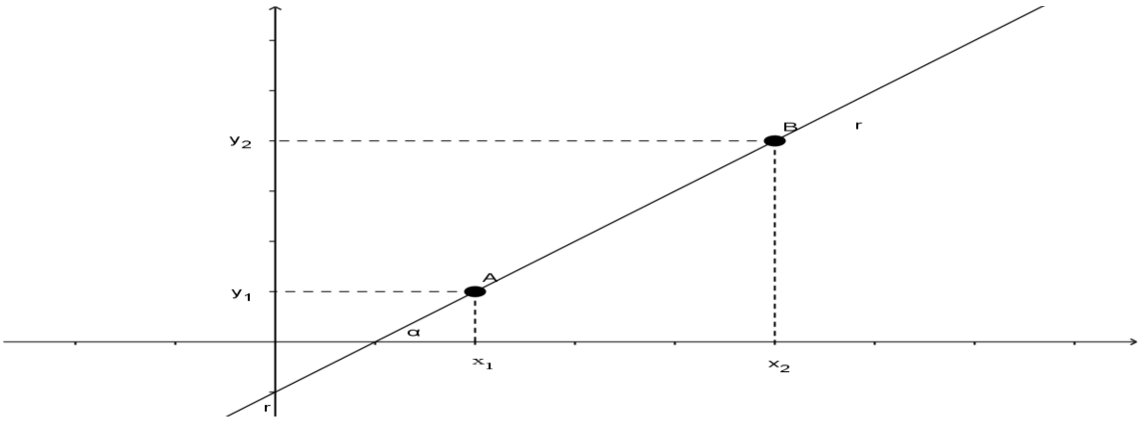
Assim, percebe-se que a Derivada é uma temática da matemática que está presente em várias outras ciências, daí a importância de um aprendizado mais eficiente no Ensino Médio. Sua introdução, nessas séries, é relevante para proporcionar melhoras no ensino dessa temática, cooperando assim para minimizar os déficits, muitas vezes, demonstrados nos relatórios governamentais sobre a qualidade da educação no país.

2.1. UMA SUGESTÃO PARA APRESENTAR NO ENSINO MÉDIO AS IDEIAS INTUITIVAS SOBRE DERIVADAS

Conjuntamente com o ensino sobre função do 1° grau, ao analisar o gráfico dessa função podemos apresentar aos alunos como determinar o coeficiente angular de uma reta, que é igual a tangente do ângulo que ela forma com o eixo das abscissas. Sendo a tangente de um ângulo no triangulo retângulo definida pelo quociente entre o cateto oposto e o cateto adjacente, podemos fazer uso desta informação para calcularmos o coeficiente angular de uma reta.

Para determinarmos a equação de uma reta precisamos, no mínimo, de dois pontos distintos pertencentes a ela. Conforme Goulart (2005, p.22), se $\mathrm{A} = (x_1, \mathrm{y}_1)$ e $\mathrm{B} = (x_2, \mathrm{y}_2)$ são dois pontos distintos do plano cartesiano e $x_1 \neq x_2$, define-se o coeficiente angular da reta m e da reta AB, como $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, portanto, consideremos uma reta r que passa pelos pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, conforme a **figura 01** e que forma um ângulo α de inclinação com o eixo x.

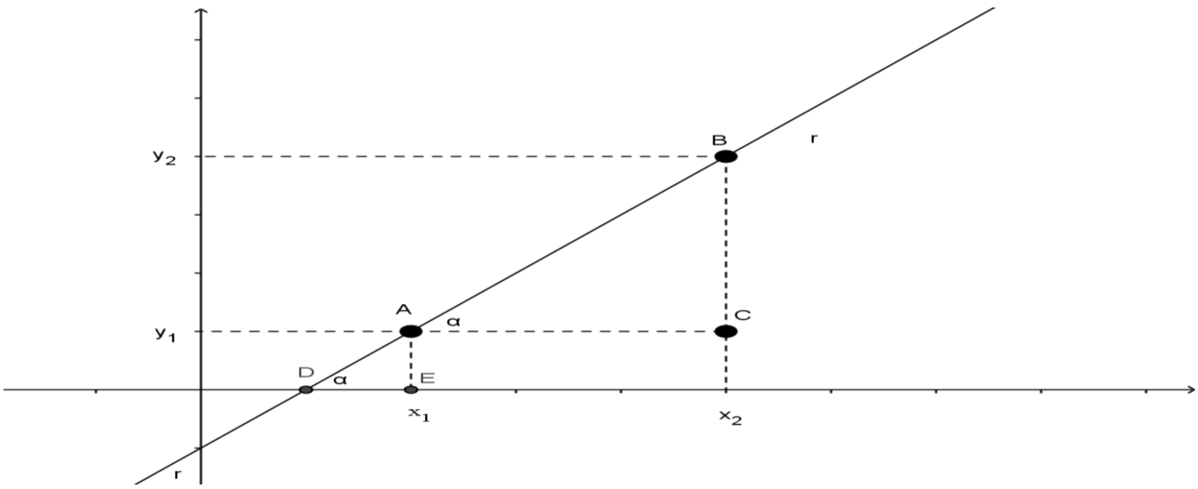
Figura 01 - Reta que passa pelos pontos A e B



Fonte: Autor

Prolongando o segmento de reta que passa pelo ponto A, que é paralela ao eixo x, forma-se um triângulo retângulo no ponto $C(x_2, y_1)$, como mostra a **figura 02**.

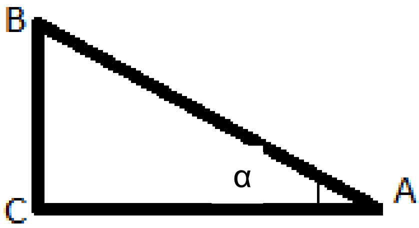
Figura 02- Reta que passa pelos pontos A e B



Fonte: Autor

O ângulo α do triângulo ABC será igual ao ângulo de inclinação da reta que passa por AB, pois os triângulos ABC e ADE são semelhantes, assim o resultado é que o coeficiente angular m da reta que passa pelos pontos **A** e **B**, se iguala à tangente do ângulo α, de acordo com a indicação da **figura 03**.

Figura 03 - Triângulo Retângulo



$A(x_1, y_1)$ $\quad$ $B(x_2, y_2)$ $\quad$ $C(x_2, y_1)$

$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Fonte: Autor

Como exemplos, destaca-se:

1) Qual é o coeficiente angular m da reta que passa pelos pontos $A = (5{,}5)$ e $B = (11{,}17)$?

$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{17 - 5}{11 - 5} = \frac{12}{6} = 2$$

2) Calcule o coeficiente angular m da reta que passa pelos pontos $A = (1{,}4)$ e $B = (4{,}13)$.

$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{13 - 4}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$$

3) Determine o coeficiente angular m da reta que passa pelos pontos $A = (8{,}5)$ e $B = (9{,}3)$.

$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{3 - 5}{9 - 8} = -\frac{2}{1} = -2$$

Para compreender a definição de derivada, em linguagem matemática, é necessário que o aluno se aproprie do entendimento do que é um limite, ou seja, o discente precisa entender que o limite de uma função $\boldsymbol{g(x)}$ é uma aproximação infinitesimal de x algum valor, mas sem que x seja exatamente aquele valor.

Vamos analisar o comportamento da função $\boldsymbol{g(x) = 2.x}$, atribuindo valores a x próximos de 3, conforme mostra as **tabelas 01 e 02**

Na **tabela 01** atribuiremos valores a $\boldsymbol{x}$ cada vez mais próximos de 3 pela esquerda e, na **tabela 02** atribuiremos valores a $\boldsymbol{x}$ cada vez mais próximos de 3 pela esquerda e analisaremos os resultados obtidos para g(x).

Tabela 01 - Função $\boldsymbol{g(x)}$ quando os valores de $\boldsymbol{x}$ se aproximam de **3** pela esquerda.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{g(x)}$
2,1	4,2
2,5	5
2,8	5,6
2,9	5,8
2,99	5,98
2,999	5,998
2,9999	5,9998

Fonte: Autor

Tabela 02 - Função $\boldsymbol{g(x)}$ quando os valores de $\boldsymbol{x}$ se aproximam de **3** pela direita.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{g(x)}$
3,9	7,8
3,5	7,0
3,2	6,4
3,1	6,2
3,01	6,02
3,001	6,002
3,0001	6,0002

Fonte: Autor.

Conclui-se, observando as **tabelas 01** e **02**, que se atribuirmos valores a x infinitamente próximos de 3, pela direita ou pela esquerda, a função $\boldsymbol{g(x) = 2.x}$ se aproxima do número 6. Portanto, o limite da função $\boldsymbol{g(x) = 2.x}$ com x se aproximando de 3 é igual a 6.

Por conseguinte, pode-se definir limite no Cálculo Diferencial e Integral como o valor numérico que uma função $\boldsymbol{g(x)}$ assume quando ocorre uma aproximação infinitesimal de $\boldsymbol{x}$ a algum valor, mas sem que $\boldsymbol{x}$ seja exatamente aquele valor.

Uma função $\boldsymbol{g(x)}$ é continua em um ponto de abscissa $\boldsymbol{a}$ quando satisfaz as condições 1, 2 e 3

1. Existe $\boldsymbol{g(a)}$ .2. Existe $\lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{g(x)}$ 3. $\boldsymbol{g(a)} = \lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{g(x)}$

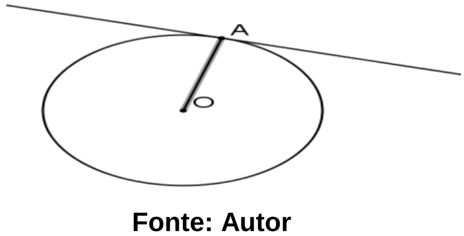
Conhecendo a ideia intuitiva de limite é possível abordarmos a respeito da derivada. Segundo o entendimento de Leithold (1986, p.109), “a maioria dos problemas de cálculo abrangem a determinação da reta tangente a uma curva sobre um determinado ponto”.

Denota-se que, em Geometria Plana, a reta tangente a um ponto é a reta que tem um único ponto em comum com a circunferência. Sendo a tangente apontada por sua inclinação ao ponto de tangência. De tal modo, Marques (2006) realça que a derivada pode ser compreendida de acordo com a geometria como sendo um método para calcular o coeficiente angular da reta tangente.

Os conceitos sobre derivadas estão fortemente relacionados com a noção de reta tangente a uma curva no plano. Uma ideia simples do que significa a reta tangente em um ponto A de uma circunferência, é uma reta que toca a circunferência exatamente em um ponto A, é perpendicular ao raio OA, sendo "O" o centro da circunferência.

Essa assertiva pode ser verificada na **figura 04**.

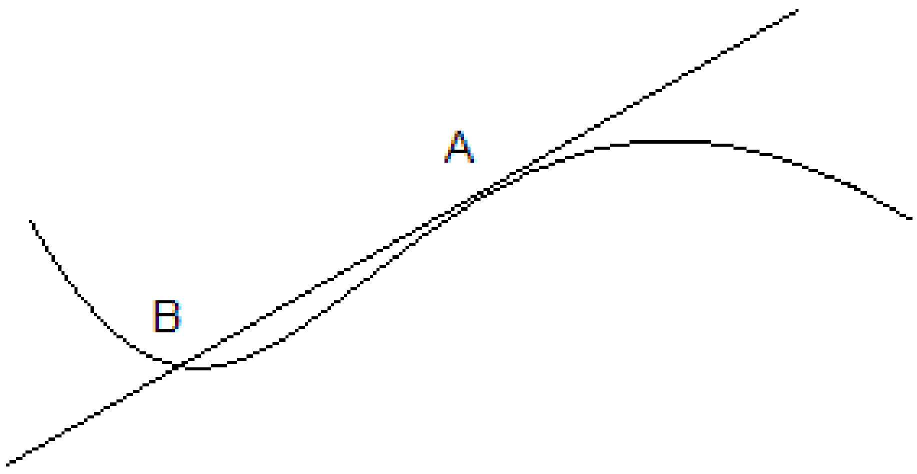
Figura 04 - Reta tangente a uma circunferência



Fonte: Autor

Ao tentar ampliar esta ideia acerca da reta tangente a uma curva qualquer e tomarmos um ponto A sobre a curva, esta definição perde o sentido, como mostra a **figura 05**.

Figura 05 - Reta secante a uma curva



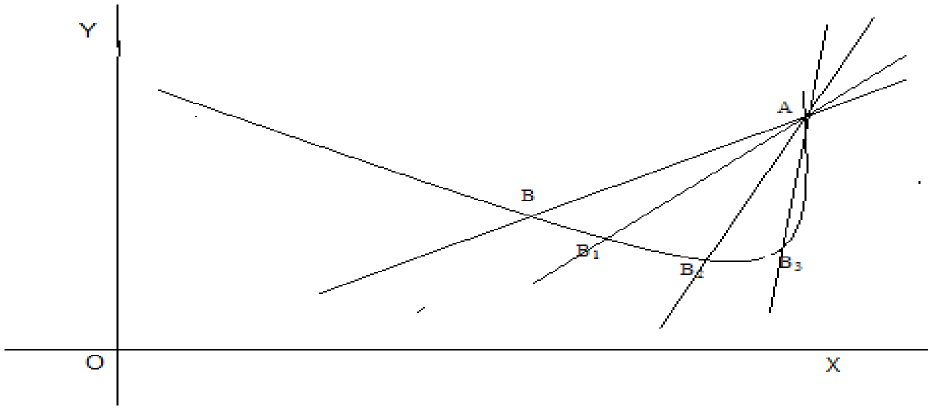
Fonte: Autor

Considerando a curva que representa o gráfico de uma função contínua f, tomemos como x_1 e $f(x_1)$ as coordenadas do ponto A onde se deseja traçar uma reta tangente. Seja agora outro ponto, B, do gráfico de f representado pelas coordenadas $(x_1 + \Delta x,\ f(x_1 + \Delta x))$, onde Δx é o deslocamento no eixo das abscissas, ocorrido do ponto A ao ponto B.

A reta que passa por A e B é secante à curva $y = f(x)$. O coeficiente angular desta reta é dado pela razão entre a variação ocorrida no eixo y e no eixo x, dada por: $m = \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{(x_1+\Delta x)-x_1}$, considerando o ponto A fixo e o ponto B movendo-se sobre a curva e se aproximando de A, passando pelas posições sucessivas B_1, B_2, B_3.

Observando a **figura 06**, deduz-se que as secantes assumirão as posições por AB_1, AB_2, AB_3. Pode-se observar que as inclinações dessas retas secantes ficarão cada vez mais próximas da inclinação da reta tangente à curva no ponto A.

Figura 06 - Retas secantes a uma curva



Fonte: Autor

A posição limite da reta secante, se existir, será exatamente a reta tangente à curva no ponto A. Leithold (1986) afirma: "Se a reta secante tem uma posição limite, desejamos que essa posição limite seja a reta tangente ao gráfico em A. (p. 109, 110)".

Nota-se que a forma para fazer B se aproximar de A, consiste em fazer o número Δx tender a **0**, isto é, tomar os valores de Δx cada vez mais próximos de **0**. Quando Δx se aproxima de 0 e $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ se aproxima do valor finito $\boldsymbol{m}$, dizemos que $\boldsymbol{m}$ é o limite de $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ com Δx tendendo a **0** e denotamos isto por: $\boldsymbol{m} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$. Este limite só terá sentido se o mesmo existir.

Se a função f for contínua no ponto $x = x_1$, então a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $A = (x_1, f(x_1))$, será dada por: $y - f(x_1) = m(x - x_1)$. Conforme Paiva (2003, p. 313), "se r é a reta não vertical que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m, então uma equação de r é $y - y_0 = m(x - x_0)$, denominada equação fundamental da reta".

Como exemplo destas afirmações, destacamos:

4) Seja a curva dada pela função $f(x) = 2x^2$. Encontre o coeficiente angular da reta tangente a esta curva no ponto $A = (2,8)$, e escreva a equação desta reta.

O coeficiente angular será dado por:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_1 + \Delta x)^2 - 2x_1^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1^2 + 4x_1.\Delta x + 2\Delta x^2 - 2x_1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x_1.\Delta x + 2\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 4x_1 + 2\,\Delta x = 4x_1$$

Logo, $m = 4.2 = 8$ e a equação da reta será determinada por:

$y - f(x_1) = m(x - x_1) \rightarrow y - 8 = 8(x - 2) \rightarrow y - 8 = 8x - 16 \rightarrow y = 8x - 8$ será a equação procurada.

Observa-se que este limite é de fácil resolução, pois existe apenas a necessidade de conhecimento sobre produtos notáveis e colocação de fator comum em evidência, conteúdos abordados no Ensino Fundamental, e o problema estará resolvido, o que certamente um aluno do Ensino Médio não terá dificuldades em realizar.

Quando Δx tende a 0, e existir um limite, dizemos que a derivada de f no ponto x_1 é denotada por: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$, se este limite não existir, dizemos que não existe a derivada de f em x_1. Se a função tem derivada em um ponto dizemos que f é derivável neste ponto. De acordo com Leithold (1986, p. 118), "A derivada de uma função f é a função indicada por f, tal que seu valor em qualquer número x no domínio de f é dado por $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$".

Para ilustrar a assertiva, tem-se,

5) Encontre a derivada da função $g(x) = 2x + 5$, no ponto $x_1 = 2$.

$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_1+\Delta x)-g(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x_1+\Delta x)+5-2(x_1+5)}{\Delta x} =$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_1+2\Delta x+5-2x_1-5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$

Logo a derivada de $g(x)$ é igual a 2.

Para calcular o coeficiente angular k de uma reta $y = a.x + b$ que forma um ângulo θ com o eixo x, tomamos dois pontos dessa reta, ponto A e B, sendo $A = (x_1 \cdot, ax_1 + b))$ e $B = (x_2, ax_2 + b)$, deste modo o coeficiente angular dessa reta é dado por: $k = tg\theta = \frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1} = \frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = a$.

Relacionando o assunto abordado com a função afim $f(x) = a.x + b$, o parâmetro a representa a taxa de variação dessa função (taxa de crescimento ou decrescimento) que pode ser obtido tomando dois pontos distintos da função considerada.

Dante (2008, p.55) afirma que: “o parâmetro a de uma função afim $f(x) = ax + b$ é chamado de taxa de variação (ou taxa de decrescimento), para calcularmos bastam dois pontos quaisquer, porém distintos, sendo $A = (x_1, f(x_1))$ e $B = (x_2, f(x_2))$ da função considerada”.

O autor enuncia:

> A diferença de nomenclatura, coeficiente angular nas equações da reta e taxa de variações nas afins, é fruto somente da interpretação que se pretende em cada caso, numa equação da reta é mais importante à informação relativa ao ângulo de inclinação da reta do que sobre a variação do y em relação à x, na função afim é o oposto, privilegiamos a informação relativa à variação de y em relação à x. (DANTE, 2008, p 60).

Percebe-se, nos dois exemplos anteriores, nas funções do 1º e 2º grau, que o uso do limite para cálculo da derivada, sem fazer uso das regras de derivação, não exige do aluno um estudo mais aprofundado do cálculo, pois este conhecimento obterá quando ingressar no Ensino Superior, porém precisa adquirir base sólida para compreender o que ele está fazendo no Ensino Médio.

Para exemplificar, destaca-se os exercícios abaixo:

Encontre a declividade da reta tangente a cada curva no ponto especificado.

6) $f(x) = x^2$ no ponto $A = (1,2)$.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x)^2 - f(x_1)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2.x_1\Delta x + \Delta x^2 - x_1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.x_1\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2.x_1 + \Delta x = 2.x_1$$

No ponto $A = (1,2)$, o coeficiente angular é igual a $m = 2.1 = 2$.

7) $f(x) = x^3$ no ponto $A = (2,8)$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x)^3 - f(x_1)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1\Delta x^2 + 3x_1^2\Delta x + \Delta x^3 - x_1^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1\Delta x^2 + 3x_1^2\Delta x + \Delta x^3}{\Delta x} = = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3.x_1\Delta x^2 + 3.x_1^2\Delta x + \Delta x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3.x_1\Delta x + 3.x_1^2 + \Delta x^2 = 3.x_1^2$$

No ponto $A = (2, 8)$, o coeficiente angular é $m = 3.2^2 = 12$.

8) $f(x) = x^2 - 5x$, no ponto $B = (5, 0)$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - 5(x_1 + \Delta x) - (x_{1-}^2 5x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2.x_1\Delta x + \Delta x^2 - 5x_1 - 5\Delta x - x_1^2 + 5x_1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.x_1\Delta x + \Delta x^2 - 5\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2.x_1 + \Delta x - 5 = 2.x_1 - 5$$

No ponto $B(5,0)$, o coeficiente angular é, $m = 2.5 - 5 = 5$.

9)$f(x) = 7 - 6x - x^2$, no ponto $A = (2, -9)$.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{7 - 6(x_1 + \Delta x) - (x_1 + \Delta x)^2 - (7 - 6x_1 - x_1^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7 - 6x_1 - 6\Delta x - x_1^2 - 2.x_1\Delta x - \Delta x^2 - 7 + 6x_1 + x_1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6\Delta x - 2.x_1\Delta x - \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} -6 - 2.x_1 - \Delta x = -2.x_1 - 6$$

No ponto $A = (2,9)$, o coeficiente angular é, $m = -2.2 - 6 = -10$

10) $f(x) = x^2 + 6x + 9$, no ponto $B(0,9)$

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 + 6(x_1 + \Delta x) + 9 - (x_1^2 + 6x_1 + 9)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2.x_1\Delta x + \Delta x^2 + 6x_1 + 6\Delta x + 9 - x_1^2 - 6x_1 - 9}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.x_1\Delta x + \Delta x^2 + 6\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2.x_1 + \Delta x + 6 = 2.x_1 + 6$$

No ponto $B = (0, 9)$, o coeficiente angular é , $m = 2.0 + 6 = 6$.

Sobre a reta normal à uma curva, em um determinado ponto, define-se que é a reta perpendicular à reta tangente a curva neste ponto, como ressalta Leithold (1986, p. 111): “A reta normal a uma curva num ponto dado é a reta perpendicular à reta tangente neste ponto".

Para exemplificar, destaca-se

Em cada caso determine a equação da reta normal à curva no ponto dado.

11) $f(x) = 2 - x^3$, no ponto $A = (-2, 4)$.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 - (x_1 + \Delta x)^3 - (2 - x_1^3}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 - x_1^3 - 3x_1^2\Delta x - 3x_1.\Delta x^2 - \Delta x^3 - 2 + x_1^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-3x_1^2\Delta x - 3x_1.\Delta x^2 - \Delta x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} - 3x_1^2 - 3x_1.\Delta x - \Delta x^2 = -3x_1^2$$

No ponto $A = (-2, 10)$, temos que o coeficiente angular m da reta tangente à curva é $m = -3.(-2)^2 = -12$. Sendo a reta normal perpendicular à reta tangente, o produto dos seus respectivos coeficientes angulares é igual a -1. Considerando m_1 o coeficiente angular da reta normal, temos: $m.m_1 = -1$, assim $m_1 = \frac{1}{12}$.

A equação da reta normal será Igual a:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 10 = \frac{1}{12}(x + 2) \rightarrow 12y - 120 = x + 2 \rightarrow x - 12y + 122 = 0$$

12) $f(x) = x^2 + 4x$, no ponto $A = (0, 0)$.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 + 4(x_1 + \Delta x) - (x_1^2 + 4x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2.x_1\Delta x + \Delta x^2 + 4x_1 + 4\Delta x - x_1^2 - 4x_1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.x_1\Delta x + \Delta x^2 + 4\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2.x_1 + \Delta x + 4 = 2.x_1 + 4$$

No ponto $A = (0, 0)$ temos que o coeficiente angular m da reta tangente à curva é $m = 2.0 + 4 = 4$. Sendo a reta normal perpendicular à reta tangente, o produto dos seus respectivos coeficientes angulares é igual a -1. Considerando m_1 o coeficiente angular da reta normal, temos: $m.m_1 = -1$, assim $m_1 = -\frac{1}{4}$.

A equação da reta normal será igual a:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 0 = -\frac{1}{4}(x - 0) \rightarrow 4y = -x \rightarrow x + 4y = 0$$

Denota-se que o próprio desenvolvimento do Cálculo e de seus conceitos fundamentais tem sua procedência a partir de situações reais. Logo, seu aparecimento foi a partir de soluções para diversos problemas.

Para Zuin:

> Calcular a distância percorrida por um corpo em movimento, sua velocidade e aceleração; comprimentos de curvas; áreas; volumes; analisar os valores de máximo e mínimo de uma função; relacionar declividade de uma curva e taxa de variação, são alguns dos problemas, entre muitos outros, que levaram ao desenvolvimento do Cálculo (ZUIN, 2001, p. 14).

Sabe-se que o estudo da derivada proporciona diversas aplicações práticas. Ela é constantemente aplicada em muitos problemas que envolvem o cotidiano do ser humano, possibilitando resolver situações que envolvam taxas de variação (MARQUES, 2006).

Nesse entendimento, enfatiza-se que a derivada tem sido um dos tópicos do Cálculo em que os estudantes apresentam muitas dificuldades de aprendizagem. Destarte, as pesquisas pautadas ao ensino de derivadas sinalizam que há problemas nesse processo e marcam caminhos a serem seguidos para superar essas dificuldades intrínsecas ao processo (BARBOSA, 2004).

ARAUJO (2016) também colabora com a afirmação quando ressalta os índices de aprovação e reprovação em quatro disciplinas de Cálculo ofertadas para os cursos de agronomia e saneamento ambiental durante os semestres 2014.1 e 2015.1. Com base em resultados de pesquisas, constatou-se um alto índice de reprovação nas disciplinas dos referidos cursos, chegando até 90% em uma dessas disciplinas.

Vale frisar que a derivada é um conceito que pode ser explorado a partir de diferentes focos: derivada como um limite, como inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado, além de situações que envolvam taxa de variação, máximos e mínimos. Nota-se que uma das possíveis causas para as dificuldades dos alunos na aprendizagem do conceito de derivada pode estar pautada a dificuldades na compreensão do conceito de limite, que, por sua vez, originam dificuldades na aplicação do conceito de derivada, em consequência da derivada ser um limite (LEME, 2003).

Importante salientar que a Derivada fornece informações precisas acerca do comportamento e variação de uma função em um dado intervalo. Sendo assim, tais informações promovem o esboço do gráfico que representa a função, pois dentro de um determinado intervalo a função é contínua, se está definida neste intervalo ou não, se a função é crescente ou decrescente, quais os pontos máximos e mínimos, os chamados pontos críticos, que são vistos como: pontos do gráfico em que sucedem mudanças de concavidade, lugares em que a inclinação da reta tangente é zero ou não existe (tangente vertical). É imperativo averiguar se há crescimento antes do ponto crítico e decrescimento, para então determinar se este é um ponto de máximo ou mínimo local, entre outros conhecimentos que aparecem a partir da derivação de uma função mais de uma vez, que para serem compreendidos precisam ser bem fundamentados por definições e teoremas (STEWART, 2006).

Conforme concepção de Ávila (2006): “o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções”. Observa-se que, para o autor, o ensino do cálculo é de grande valor, pois além de ajudar no tratamento de inúmeras propriedades das funções e de ter aplicações interessantes em problemas de máximo e mínimo, crescimento e decrescimento, dentre outros, integra-se harmoniosamente com muitas das ciências conhecidas, pois o Cálculo pode tornar o estudo de alguns destes tópicos mais simples e compreensíveis para os alunos do Ensino Médio.

3. REGRAS DE DERIVAÇÃO

O cálculo das derivadas usando a definição, muitas vezes, se torna um processo muito trabalhoso. Por este motivo, temos algumas regras de derivação que nos permitirão encontrar derivadas de funções de uma forma mais fácil e rápida.

Derivada de uma função constante.

Seja $g: R \longrightarrow R$ definida por $g(x) = a$, sendo a uma constante. A sua derivada em um ponto x qualquer do seu domínio é dada por: $g'(x) = 0$. O significado geométrico deste resultado é que o gráfico da função $g(x) = a$ é sempre uma reta paralela ao eixo do x, portanto o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g é sempre igual a 0.

Demonstração:

$$\mathrm{g}'(\mathrm{x}) = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{\mathrm{g}(\mathrm{x}_1 + \Delta \mathrm{x}) - \mathrm{g}(\mathrm{x}_1)}{\Delta \mathrm{x}} = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{\mathrm{a} - \mathrm{a}}{\Delta \mathrm{x}} = \lim_{\Delta \mathrm{x} \to 0} \frac{0}{\Delta \mathrm{x}} = 0$$

Como exemplo temos:

13) $g(x) = 5 \rightarrow g'(x) = 0$

Derivada da função Potência:

Se n é um número real e $f(x) = x^n$, então: $f\,'(x) = n\, x^{n-1}$

Como demonstração, tem-se:

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^n - (x_1)^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1)^n + \binom{n}{1} x_1^{n-1}.(\Delta x)^1 + \binom{n}{2} x_1^{n-2}.(\Delta x)^2 + \cdots ... + \binom{n}{n}.(\Delta x)^n - (x_1)^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\binom{n}{1} x_1^{n-1} + \binom{n}{2} x_1^{n-2}.(\Delta x)^1 + \cdots ... + \binom{n}{n}.(\Delta x)^{n-1})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\binom{n}{1} x_1^{n-1} + \binom{n}{2} x_1^{n-2}.(\Delta x)^1 + \cdots ... + \binom{n}{n}.(\Delta x)^{n-1}) = \binom{n}{1} x_1^{n-1} = n.x_1^{n-1}$$

Assim sendo, destaca-se,

14) $f(x) = x_1^5$, então: $f\,'(x) = 5\, x_1^{5-1} = 5.x_1^4$

No tocante a Derivada da soma de duas funções, exemplifica-se

Se f e g são funções deriváveis sobre R, então a função $h\,(x)$, definida por: $h(x) = f(x) + g(x)$, possui derivada dada por: $h'(x) = f\,'(x) + g'(x)$.

Como demonstração da assertiva acima, tem-se,

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_1 + \Delta x) - h(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) + g(x_1 + \Delta x) - f(x_1) - g(x_1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_1 + \Delta x) - g(x_1)}{\Delta x} = f\,'(x_1) + g'(x_1).$$

Como exemplo, destaca-se,

15) Seja $h(x) = x^2 + 5$, tomemos $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5$

Temos que $f'(x) = 2.x^{2-1} = 2.x$ e $g'(x) = 0 \;\rightarrow h'(x) = f(x) + g'(x) = 2.x$. Este resultado pode ser estendido a uma soma finita de funções, isto é, se: $h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \ldots + h_n(x)$, então, $h'(x) = h'_1(x) + h'_2(x) + \ldots + h'_n(x)$, ou seja, a derivada da soma de um número finito de funções deriváveis é igual à soma de suas derivadas.

No tocante a Derivada do produto de uma constante por uma função, temos:

Se f é uma função derivável, $\boldsymbol{c}$ é uma constante e $g\,(x_1)$ é a função definida por $g(x_1) = c.f(x_1)$, então, $g\,'(x) = c.f\,'(x_1)$.

Demonstração:

$$g'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_1 + \Delta x) - g(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_1 + \Delta x) - g(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c.f(x_1 + \Delta x) - c.f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = c.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= c.f\,'(x_1)$$

Exemplo:

16) $g(x_1) = 6x_1^5$

Sejam a constante $\boldsymbol{c} = 6$ e $f\,(x_1) = x_1^5$, assim $f\,'(x_1) = 5\,x_1^{5-1} = 5.x_1^4$, portanto $g'(x_1) = c.f\,'(x_1) = 6.5.x_1^4 = 30.x_1^4$

Derivada do produto de duas funções

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções deriváveis de $h(x) = f(x).g(x)$, então $h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

Demonstração:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_1 + \Delta x) - h(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x).g(x_1 + \Delta x) - f(x_1).g(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x).g(x_1 + \Delta x) - f(x_1 + \Delta x).g(x_1) + f(x_1 + \Delta x).g(x_1) - f(x_1).g(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x).\big(g(x_1 + \Delta x) - g(x_1)\big) + g(x_1).\big(f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)\big)}{\Delta x} =$$

$$= f(x_1) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_1 + \Delta x) - g(x_1)}{\Delta x} + g(x_1) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} =$$

$$= f\,(x_1)\, g'(x_1) + f'\,(x_1)\, g(x_1)$$

Exemplo:

17) $h(x) = (x + 3).x^2$

Sejam $f(x) = (x + 3)$ e $g(x) = x^2$

Temos que $f'(x) = 1$ e $g'(x) = 2.x^{2-1} = 2.x \rightarrow h'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x) = (x + 3).2.x^{2-1} + 1.x^2 = 2.x(x + 3) + x^2 = 3.x^2 + 6.x$

Derivada do quociente de duas funções:

Se f e g são funções deriváveis e se h é a função definida por $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ quando $g(x)$ é diferente de zero, então: $h^{'}(x) = \frac{f^{'}(x).g(x) - f(x).g^{'}(x)}{(g(x))^2}$

Demonstração:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_1 + \Delta x) - h(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x_1 + \Delta x)}{g(x_1 + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x).\, g(x_1) - f(x_1).\, g(x_1 + \Delta x)}{\Delta x.\, g(x_1).\, g(x_1 + \Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x).\, g(x_1) - f(x_1).\, g(x_1) - f(x_1).\, g(x_1 + \Delta x) + f(x_1).\, g(x_1)}{\Delta x.\, g(x_1).\, g(x_1 + \Delta x)} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_1)\left(\frac{f(x_1 + \Delta x) \; - f(x_1)}{\Delta x}\right) - f(x_1)\left(\frac{g(x_1 + \Delta x) \; - g(x_1)}{\Delta x}\right)}{g(x_1).\, g(x_1 + \Delta x)} =$$

$$= \frac{\lim_{\Delta x \to 0} g(x_1).\, \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x_1 + \Delta x) \; - f(x_1)}{\Delta x}\right) - \lim_{\Delta x \to 0} f(x_1).\, \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{g(x_1 + \Delta x) \; - g(x_1)}{\Delta x}\right)}{\lim_{\Delta x \to 0} g(x_1).\, \lim_{\Delta x \to 0} g(x_1 + \Delta x)} =$$

$$\frac{g(x_1).\, f'(x_1) - f(x_1).\, g'(x_1)}{g'(x_1).\, g'(x_1)} = \frac{f'\,(x_1)\; g(x_1) \; + f\;(x_1)\; g(x_1)}{g(x_1)^2}$$

Exemplo:

18) Consideremos a função $h(x) = \frac{x^2}{(x+2)}$ e calculemos $h^{'}(x)$. Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x + 2)$, logo $f'(x) = 2.\,x$ e $g'(x) = 1$ e assim

$$h'(x) = \frac{f'(x).\, g(x) - f(x).\, g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{2.\,x(x + 2) - x^2.\,1}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4.\,x}{(x + 2)^2}$$

4. APLICAÇÕES DA DERIVADA

Este capítulo trata da utilidade da derivada como uma taxa de variação média, taxa de variação instantânea, taxas relacionadas e no uso da otimização, onde será visto os valores de máximo e mínimo de uma função.

4.1. TAXA DE VARIAÇÃO MÉDIA E TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA

Sabe-se que as grandezas variam. Diariamente pensamos na variação de grandezas, como por exemplo: o tempo gasto para chegar à Universidade, o quanto engordamos ou emagrecemos no último mês, a variação da temperatura num dia específico, e assim por diante.

De modo geral, quando uma grandeza y está expressa em função de x , ou seja, $y = f(x)$, observamos que, para uma dada variação de x ocorre, em correspondência, uma dada variação de y, desde que y não seja uma função constante. Se $y = f(x) = x^2$ e, a partir de x_1 supomos uma variação Δx, ou seja, x varia de x_1 até $x_2 + \Delta x$ (podemos calcular a correspondente variação de y, que denominamos Δy). O quociente $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ é denominado razão média das variações ou taxa de variação média e normalmente depende do particular ponto x_1 e da variação Δx considerada. A taxa de variação instantânea é o limite da taxa de variação *média quando a variação* Δx torna-se bem pequena, isto é, tende a zero**.**

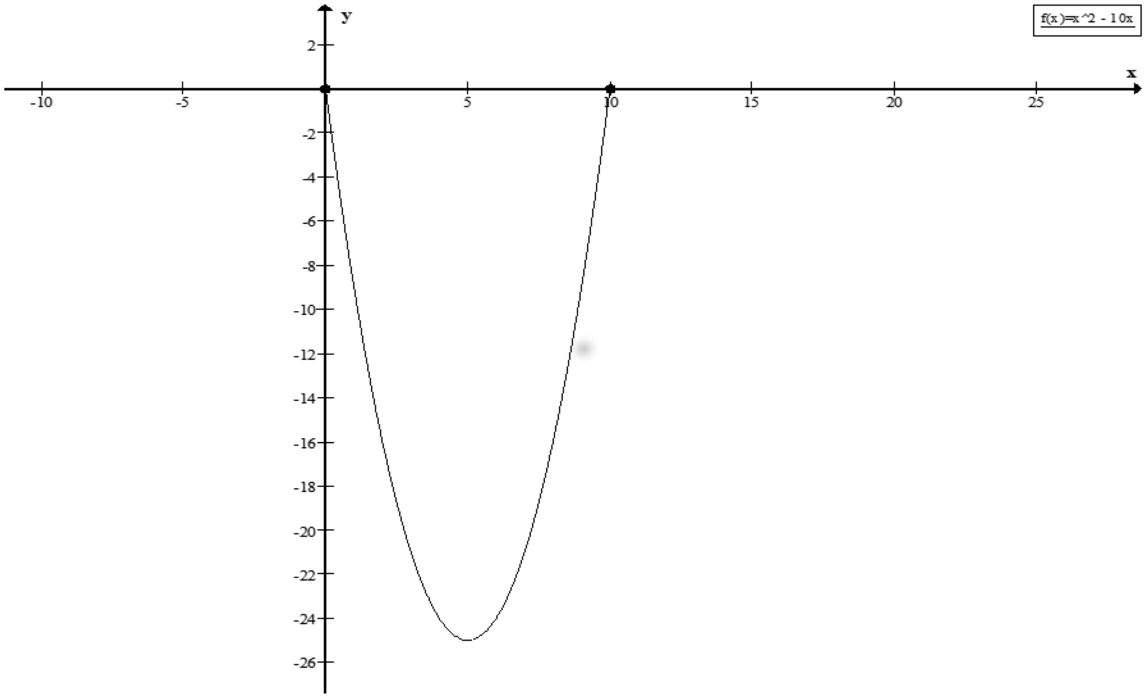
Lethold (1986, p.143) destaca:

> Então, a taxa média de variação de y por unidades de variação em x, quando x varia de x_1 a $x_1 + \Delta x$ será $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Se o limite desse quociente existir quando $\Delta x \to 0$, este limite será o que intuitivamente consideramos a taxa de variação instantânea de y por unidade de variação de x em x_1.

A previsão da temperatura numa cidade do sul do Brasil entre 0 h e 10 h de um determinado dia, é dada por: $t(x) = x^2 - 10x, 0 \leq x \leq 10,$ onde $t(x)$ representa a temperatura em graus Celsius e x o tempo decorrido em horas.

A **figura 07** mostra o gráfico da função $t(x)$.

Figura 07 - Gráfico da função do 2º grau



Fonte: Autor

O gráfico obtido é uma parábola. Quando x varia de 0 h às 5 hs a função é decrescente; e quando x varia de 5 hs às 10 hs a função é crescente. Isto significa que a temperatura diminuiu entre 0 h e 5 hs e subiu entre 5 hs e 10 hs. Um questionamento pertinente é se a descida e a subida das temperaturas ocorreram sempre com a mesma rapidez, isto é, a mesma taxa de variação. A resposta a esta questão é negativa. Para confirmá-la vamos registrar na **tabela 03** os valores da temperatura ocorridos de hora em hora, no intervalo [0, 5].

Tabela 03 - Valores da temperatura **t(x)** para **x** variando de **0h** às **5h.**

x	$t(x)$	**Variação da temperatura**
1	0	0
1	-9	-9
2	-16	-7
3	-21	-5
4	-24	-3
5	-25	-1

Fonte: Autor

Observamos que, a cada hora, aconteceu uma queda no valor da temperatura e não foi constante, no entanto a média do decaimento da temperatura por hora foi de $5\ ºC$. Analisando a tabela, temos:

$t_m = \frac{t(5)-t(0)}{5-0} = \frac{-25-0}{5} = -5°C/h$

O significado físico do valor obtido é que a temperatura decaiu em média $5\ ºC$ por hora no intervalo $[0,5]$. A variação média da temperatura em um dado intervalo chama-se taxa média de variação. Neste caso, a taxa média de variação no intervalo $[0,5]$ é $5\ ºC$.

Velocidade e aceleração são conceitos que todos conhecemos. Quando dirigimos um carro, podemos medir a distância percorrida num certo intervalo de tempo. O velocímetro marca, a cada instante, a velocidade. Se pisarmos no acelerador ou no freio, percebemos que a velocidade muda. Então, sentimos a aceleração. Suponhamos que um corpo se move em linha reta e que $s(t)$ represente o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então no intervalo de tempo $t = t_1 - \Delta t$, onde $t_1 = t + \Delta t$, o corpo sofre um deslocamento $\Delta s = s(t_1) - s(t)$, ou seja, $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Definimos a velocidade média como o quociente entre o espaço percorrido e o tempo gasto para percorrê-lo, e denotamos por: $v_m = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$, a derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função $y = f(x)$, quando a variável independente varia de x a x_1, o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ representa a taxa média de variação de y em relação à x e é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Exemplos:

19) A taxa de variação media da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de $2{,}6m$ a $2{,}8m$.

Seja y a área do quadrado e x o seu lado, então temos $y = f(x) = x^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(2{,}8) - f(2{,}6)}{2{,}8 - 2{,}6} = \frac{(2{,}8)^2 - (2{,}6)^2}{0{,}2} = \frac{7{,}84 - 6{,}76}{0{,}2} = 5{,}4$$

20) A taxa de variação da área do quadrado em relação ao lado quando este mede 3m.

A derivada de $f(x)$ é a taxa de variação instantânea, portanto $y' = f'(x) = 2x = 2.3 = 6$, logo, a taxa de variação instantânea da área quando $x = 3m$ será de $6m^2$.

21) Uma caixa d'água em forma cúbica de aresta x é preenchida com água, determine:

a) A taxa de variação media do seu volume t_m quando o nível da água passa de $x = 2m$ a $x = 2{,}5\,m$.

b) A taxa de variação instantânea de seu volume t em relação à aresta x no momento em que o nível da água esta a $x = 4m$

Solução: O volume t da caixa é dado por $t(x) = x^3$ e denotemos t_m a taxa de variação média do volume.

$$t_m = \frac{t(2{,}5) - t(2)}{2{,}5 - 2} = \frac{(2{,}5)^3 - 2^3}{0{,}5} = \frac{7{,}625}{0{,}5} = 15{,}25$$

b) $t'(x) = 3x^2$, quando $x = 4$, temos, $t'(4) = 3.4^2 = 48m^3$

22) Uma bola desloca-se numa rampa segundo a lei $f(t) = 2t^2$, onde $f(t)$ representa a distância percorrida em metros em t segundos. Determine:

a) A taxa média de variação da função no intervalo $(0, 8)$.

b) A taxa instantânea de variação da função no instante $t = 2s$.

Solução:

a) Seja $y = f(t)$, a taxa média de variação será dada por: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \frac{f(8)-f(0)}{8-0} = \frac{2.8^2-2.0^2}{8} = 16\,m/s$

b) A taxa instantânea de variação no instante $t = 2$ é o limite, se existir, da taxa média de variação quando $t \to 0$, isto é, a derivada de $f(t),$ no instante $t = 2s$.

$f^{'}(t) = 4t \to f^{'}(2) = 4.2 = 8m/s$. O valor obtido é a velocidade instantânea no instante $t = 2s$, que é $8\ m/s$.

23) A água de uma piscina está sendo escoada e V litros é o volume de água na piscina t minutos após o escoamento ter começado, onde $V(t) = 200.(20-t)^2$.

a) Encontre a taxa de variação média nos primeiros 4 minutos.

b) Determine a velocidade que a água flui 4 minutos após ter começado o escoamento.

Solução: seja V_m a taxa de variação média do volume V.

a) $V_m = \frac{v(4)-v(0)}{4-0} = \frac{200.(20-4)^2-200.(20-0)^2}{4} = \frac{200.(16^2-20^2)}{4} = -7200\frac{m^3}{min}$, o sinal negativo na taxa de variação média indica que a água esta sendo escoada.

b) $V'(t) = 2.(200).(20-t)^{2-1}.(0-1.t^{1-1}) = 400t - 8000 \to v'(4) = 400.4 - 8000 = -6400\frac{m^3}{min}$

24) Um balão mantém a forma de um cubo quando é inflado. Encontre a taxa de variação instantânea da área da superfície do cubo em relação ao lado quando o lado for igual a $2\ dm$.

A área B da superfície de um cubo em função do seu lado l é dada por $B(I) = 6l^2$, logo a taxa de variação instantânea da área em relação ao seu lado corresponde com a derivada da área B .

$B'(l) = 2.6.l^{2-1} = 12l \to B'(2) = 12.2 = 24dm^2$

4.2. TAXA RELACIONADA

Quando uma variável x é função de outra variável y, a taxa de variação instantânea de x em relação à y coincide com a derivada $\frac{dy}{dx}$. Em diversos setores, duas ou mais variáveis estão relacionadas entre si por outra variável. Situações em que duas ou mais variáveis estão relacionadas entre si e fazemos uso das taxas de variações instantâneas. Nesse aspecto, está trabalhando, segundo a matemática, com as taxas relacionadas.

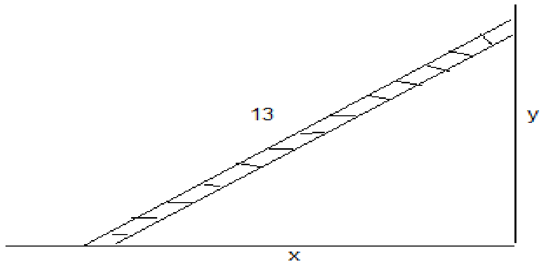
A produção de uma firma é resultado do número de empregados e do tempo em que eles permanecem em serviço, assim existe uma relação entre as variáveis empregadas, horas trabalhadas e produção. À medida que um tanque vai recebendo água, o nível de água sobe.

Para descrever a velocidade com que o nível da água sobe, usamos a taxa de variação da profundidade. Denotando-se a profundidade por $\boldsymbol{x}$ e sendo o tempo $\boldsymbol{t}$ medido a partir de um momento conveniente, a derivada $\frac{dx}{dt}$ fornece a taxa de variação da profundidade em relação ao tempo. Além disso, o volume V de água no tanque também está mudando e $\frac{dv}{dt}$ é sua taxa de variação instantânea. Logo, existe uma relação entre as variáveis: profundidade e volume.

Exemplos:

25) Uma escada de $13\,m$ esta apoiada em uma parede, de acordo com a figura 08. A base da escada esta sendo empurrada no sentido contrário ao da parede a uma taxa constante de $6\,m/min$. Qual a velocidade com que o topo da escada se move para baixo, encostado à parede, quando a base da escada está a $5\,m$ da parede?

Figura 08 - Triângulo retângulo



Fonte: Autor

Usando a **figura 08** podemos clarear as ideias, pois, $\frac{dx}{dt} = 6\,m/min$. Quanto valerá $\frac{dy}{dt}$ quando $x = 5$?

De um modo geral, conhecemos a variação de x em relação ao tempo t e queremos achar a variação de y em relação a t. Logo, procuramos uma equação ligando x e y da qual possamos obter uma segunda equação relacionando suas taxas de variação. Fica evidente, pela figura, que nosso ponto de partida deve ser o fato de que, $x^2 + y^2 = 13^2$, calculamos o valor de y para $x = 5$ e derivando essa equação em relação a *t*, obtemos:

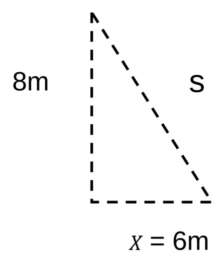
$x^2 + y^2 = 13^2 \rightarrow y^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \rightarrow y = 12$

$2.x\frac{dx}{dt} + 2.y\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow 2.y\frac{dy}{dt} = -2.x\frac{dx}{dt} \rightarrow y\frac{dy}{dt} = -x\frac{dx}{dt}$, quando $x = 5$, temos

$12.\frac{dy}{dt} = -5.6 \rightarrow \frac{dy}{dt} = -2{,}5 m/min$

26) Um homem com $1{,}80\,m$ de altura esta correndo à velocidade de $5\ m/s$ e passa embaixo de uma lâmpada num poste a $8\,m$ acima do solo, como mostra a figura 09. Encontre a velocidade com que o topo de sua sombra se move quando ele está a $6\,m$ depois da lâmpada.

Figura 09 - Triângulo Retângulo



Fonte: Autor

Usando o teorema de Pitágoras quando $x = 6$, temos que $s = 10$, como mostra a equação abaixo:

$x^2 + 64 = s^2 \rightarrow 6^2 + 64 = s^2 \rightarrow s^2 = 100 \rightarrow s = \sqrt{100} \rightarrow s = 10$

$\frac{dx}{dt} = 5$, vamos procurar o valor de $\frac{ds}{dt}$ quando $x = 6m$?

$x^2 + 64 = s^2$ derivando em relação a t temos

$2.x.\frac{dx}{dt} + 0 = 2.s.\frac{ds}{dt} \rightarrow 2.6.5 = 2.10.\frac{ds}{dt} \rightarrow \frac{ds}{dt} = 3\,m/s$m

27) Acumula-se areia em um monte de forma cônica, a taxa de $20\ dm^3/min$. Se a altura h do monte é sempre quatro vezes o raio R da base, a que taxa cresce a altura do monte quando esta for igual a $10\ dm$?

Dados do problema:

$\frac{dv}{dt} = 20dm^3,\ h = 4.R \rightarrow R = \frac{h}{4}$, queremos encontrar $\frac{dh}{dt}$ quando $h = 10\ dm$

$$V = \frac{1}{3}\pi.R^2.h \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(\frac{h}{4})^2 h \rightarrow V = \frac{\pi h^3}{48} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{3.\pi h^2}{48}.\frac{dh}{dt} \rightarrow 20 = \frac{3.\pi.10^2}{48}.\frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{48.20}{300\pi} = \frac{16}{5}dm/min$$

28) Uma bola de neve esférica é formada de tal modo que seu volume V varia de $15\ dm^3/min$. A que taxa o diâmetro D da bola cresce quando $D = 30\ dm$?

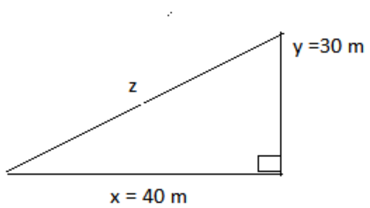
Dados do problema:

$\frac{dV}{dt} = 15\ dm^3/min,\ D = 30\ dm$, queremos encontrar $\frac{dD}{dt}$ quando $D = 30\ dm$.

O volume da bola é dado por $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ sendo $D = 2.R \rightarrow$ R=$\frac{D}{2} \rightarrow V = \frac{4}{3}.\pi.(\frac{D}{2})^3 \rightarrow V = \frac{4\pi D^3}{24}$, assim temos que $\frac{dV}{dt} = \frac{3.4.\pi.D^2.\frac{dD}{dt}}{24}. \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi.D^2.\frac{dD}{dt}}{2} \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi.(30)^2.\frac{dD}{dt}}{2} \rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{900\pi.\frac{dD}{dt}}{2} \rightarrow 15 = \frac{900\pi.\frac{dD}{dt}}{2} \rightarrow \frac{dD}{dt} = \frac{30.}{900\pi} \rightarrow \frac{dD}{dt} = \frac{1}{30\pi}\mathrm{dm/min}$

29) Um automóvel que viaja a $40\ m/s$, aproxima-se de um cruzamento. Quando o automóvel se encontra a $160\ m$ do cruzamento, um trem atravessa o cruzamento com velocidade de $10\ m/s$. O automóvel e o trem estão em trajetória que forma 90^o uma com a outra, veja a **figura 10**. Com que velocidade o automóvel e o trem se separam $3s$ após o trem atravessar o cruzamento?

Figura 10 - Triangulo Retângulo



Fonte: Autor

Observando a **figura 10**, queremos encontrar $\frac{dz}{dt}$, sendo $\frac{dx}{\mathrm{dt}} = 40\,m/s$, $\frac{dy}{dt} = 10\,m/s \;\; e\; t = 3s$

Para $t = 3s$, temos que $x = 160 - 40.3 = 40\mathrm{m}$ e $y = 10.3 = 30\mathrm{m}$.

Usando o teorema de Pitágoras temos: $x^2 + y^2 = z^2 \rightarrow$

$\rightarrow 40^2 + 30^2 = z^2 \rightarrow z^2 = 2500 \rightarrow z = \sqrt{2500} \rightarrow z = 50\;m$

Derivando as variáveis $x, y\; e\; z$ em relação ao tempo t temos:

$$2.x.\frac{dx}{dt} + 2.y.\frac{dy}{dt} = 2.z.\frac{dz}{dt} \rightarrow 2.40.40 + 2.30.10 = 2.50.\frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{3200 + 600}{100} \rightarrow \frac{dz}{dt} = 38\,m/s$$

30) Uma pipa de papel esta voando a uma altura h de $80m$, observe a figura 11. O menino está empinando a pipa de modo que esta se move a taxa de $6m/s$. Se a linha se mantém esticada, a que taxa o menino deve soltar a linha quando o comprimento desta for $100m$?

Dados do problema: $h = 80m, \frac{dx}{dt} = 6\,m/s,\; z = 100m,\; \frac{dh}{dt} = 0$.

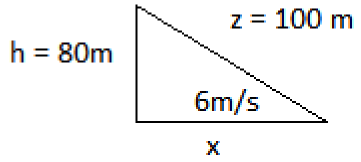
Queremos determinar $\frac{dz}{dt}$ quando $z = 100m$

Usando o teorema de Pitágoras no triangulo retângulo da figura 11, temos:

$x^2 + h^2 = z^2$, onde temos que $x^2 + 80^2 = 100^2 \rightarrow x^2 = 100^2 - 80^2 \rightarrow x^2 = 3600 \rightarrow x = \sqrt{3600} \rightarrow x = 60m$. Portanto, $2.x.\frac{dx}{dt} + 2.h.\frac{dh}{dt} = 2.z.\frac{dz}{dt} \rightarrow 2.60.6 + 2.80.0 = 2.100.\frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{720}{200} \rightarrow \frac{dz}{dt} = 3{,}6\,m/s$

O menino deve soltar a linha a uma taxa de $3{,}6\,m/s$

Figura 11- Triangulo retângulo

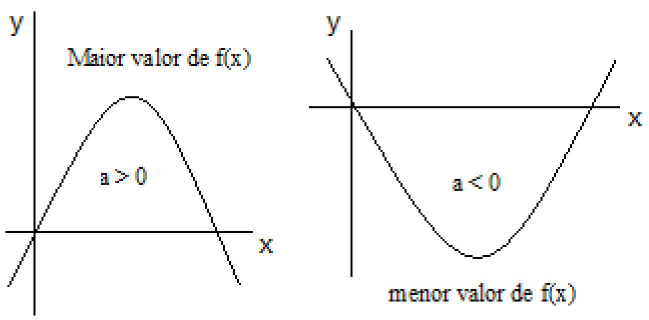


Fonte: Autor

5. VALORES DE MÁXIMO E MÍNIMO DE UMA FUNÇÃO

Toda expressão na forma $y = ax^2 + bx + c$ ou $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c números reais, sendo $a \neq 0$, é denominada função do 2^o grau. A representação gráfica de uma função do 2º grau (ver **fig.12**) é dada através de uma parábola, que pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo, conforme o sinal do coeficiente numérico *a*.

Figura 12 - Gráfico da função do $2°$ grau



Fonte: internet

Para determinarmos o ponto máximo e o ponto mínimo de uma função do 2º grau, encontramos o vértice da parábola utilizando as seguintes expressões matemáticas:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad , \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Conforme Smolle e Diniz (2003, p.139): “O vértice V é o ponto em que f assume seu menor ou maior valor.” Ao fazer uso da interpretação geométrica da derivada como sendo o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função, em cada ponto, podemos encontrar as coordenadas do vértice da parábola, percebendo-se que, no vértice da parábola, a reta tangente ao gráfico é paralela ao eixo das abscissas e, portanto, possui coeficiente angular igual a 0. Sendo a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem-se que a derivada da função no ponto x_v é igual a 0, ou seja,

$$f'(x_v) = 2ax + b = 0 \rightarrow \quad x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Portanto, observa-se que para determinar o ponto de máximo ou de mínimo de uma função, as ideias intuitivas sobre derivada proporciona ao professor uma excelente ferramenta para fomentar o conhecimento dos seus alunos. O ponto máximo e o ponto mínimo podem ser atribuídos a várias situações presentes em outras ciências, como Física, Biologia, Administração, entre outras.

Exemplos:

31) Na função $y = x^2 - 6x + 9$, temos que $a = 1$, $b = -6$ e $c = 9$. Podemos verificar que $a > 0$, então a parábola possui concavidade voltada para cima possuindo ponto mínimo. Vamos calcular as coordenadas do vértice da parábola.

$$x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2.1} = \frac{6}{2} = 3\,, \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4.a.c}{4a} = \frac{(-6)^2 - 4.1.9}{4.1} = \frac{36 - 36}{4}$$
$$= 0 \rightarrow x_v = -\frac{b}{2.a} = -\frac{(-6)}{2.1} = 3 \rightarrow V = (3{,}0)$$

Logo as coordenadas do vértice são $V = (3{,}0)$

Procurando as raízes temos:

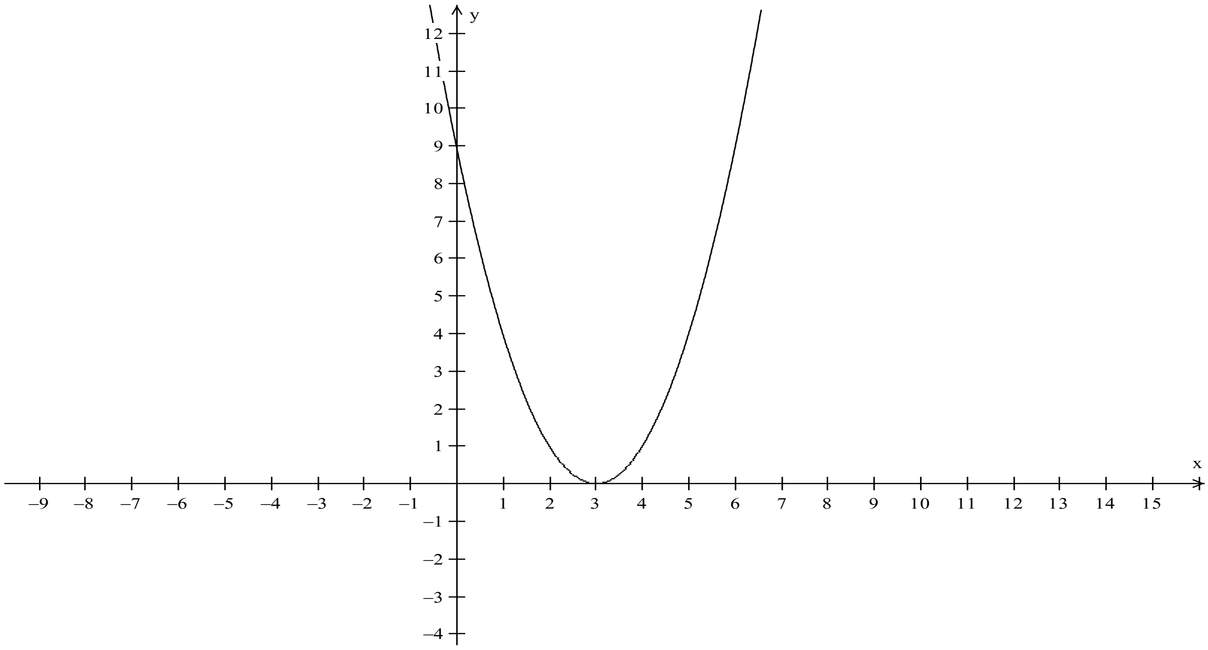
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{0} = 0$ assim $x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-6)+0}{2.1} = \frac{6}{2} = 3$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-6) - 0}{2.1} = \frac{6}{2} = 3$$

Como $\Delta = 0$ as duas raízes são iguais.

O gráfico da função está na **figura 13**, conforme observa-se:

Figura 13 - Gráfico da função do 2°grau



Fonte: Autor

Poderíamos ter encontrado a abscissa do vértice da parábola, derivando a função $y = x^2 - 6x + 9$ em relação à x e obteríamos $f'(x_v) = 2.x_v - 6$, como $f'(x_v) = 0$, temos que $2.x_v - 6 = 0$ e consequentemente $x_v = 3$ e substituindo na equação da função teríamos $y_v = 3^2 - 6.3 + 9 = 0$.

Desta forma, o vértice da parábola estaria determinado $V\,(3{,}0)$ e sendo $f'(x)$ o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função podemos trabalhar este aspecto para mostrar aos alunos os intervalos do domínio onde a função é crescente ou decrescente, mostrando que f é crescente onde $f'(x) > 0$ é decrescente onde $f'(x) < 0$ e isto veremos no último capítulo.

32) Dada a função $y = -x^2 + 7x - 12$ temos que $a = -1, b = +7\ e\ c = -12$. Temos que $a < 0$, então a parábola possui concavidade voltada para baixo tendo um ponto máximo. Os vértices da parábola podem ser calculados da seguinte maneira:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \rightarrow x_v = \frac{-(+7)}{2.(-1)} = \frac{7}{2}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \rightarrow y_v = -\frac{7^2 - 4.(-1).(-12)}{4.(-1)} = \frac{1}{4}$$

Logo as coordenadas do vértice V são $(\frac{7}{2}, \frac{1}{4})$

Procurando as raízes temos:

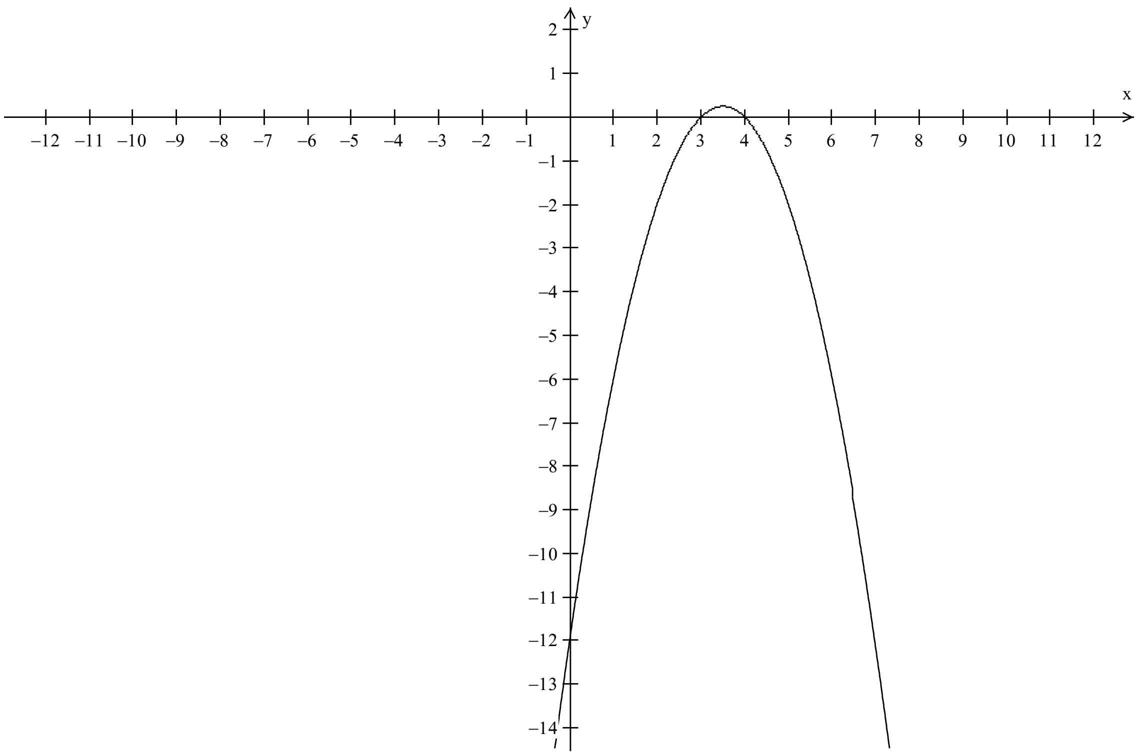
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + 1}{2.(-1)} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - 1}{2.(-1)} = 4$$

Como $\Delta > 0$ as duas raízes são diferentes e o gráfico da função está na **figura 14**,

Figura 14 - Gráfico da função do 2º grau



Fonte: Autor

Como a reta tangente ao gráfico da função dada é horizontal no seu ponto de máximo (mínimo), assim $f'(x_v) = 0$ e, portanto $f'(x_v) = 2.x + 7 = 0$, onde obteríamos que a abscissa do vértice corresponde a $x_v = \frac{7}{2}$ e a ordenada seria calculada substituindo este valor na equação da função, chegando ao resultado $y_v = \frac{1}{4}$, onde teríamos que o vértice da parábola é $V = (\frac{7}{2}, \frac{1}{4})$

Seja f uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$. Um ponto c pertencente ao intervalo $[a, b]$ é chamado ponto de máximo absoluto de f ou simplesmente de ponto de máximo, se $f(x) \leq f(c)$ para todo x em $[a, b]$. O valor $f(c)$ é chamado de valor máximo absoluto de f, neste intervalo ou simplesmente de valor máximo de f. Um ponto g de $[a, b]$ é chamado ponto de mínimo absoluto de f ou simplesmente ponto de mínimo de f, se $f(g) \leq f(x)$ para todo x em $[a, b]$. O valor $f(g)$ é chamado de valor mínimo absoluto de f neste intervalo ou simplesmente valor mínimo de f. Assim, se $f(c)$ é o máximo e $f(g)$ é o mínimo de f em $[a, b]$, teremos: $f(g) \leq f(x) \leq f(c)$ para todo x em $[a, b]$.

Nessa perspectiva, Quinet (1969, p. 86) afirma: Os valores máximo e mínimo de uma função f são chamados de valores extremos.

Quando uma função $y = f(x)$ passa por um Mínimo ou por um Máximo, sua derivada anula-se, mudando de sinal. Inversamente, se uma derivada se anula (mudando de sinal) é porque a função correspondente passa por um Máximo ou por um Mínimo. Stewart (2003) também colabora conosco afirmando:

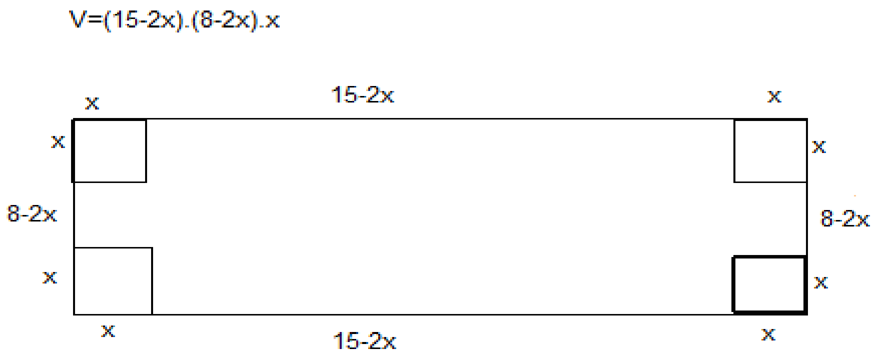
> "Uma função f tem um máximo local (ou Maximo relativo) em c se $f(c) \geq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c. Isso significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c. Analogamente, f tem um mínimo local em c se $f(c) \geq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de **c**". (Stewart, 2003, p. 278).

Exemplos:

33) Uma empresa quer fabricar caixas sem tampa. Cada caixa é construída a partir de uma folha retangular de papelão medindo $8\,cm$ por $15\,cm$. Para se construir a caixa, um quadrado de lado medindo $x\,cm$ é retirado de cada canto da folha de papelão, conforme **figura 15**. Determine o valor de x a fim de que a caixa correspondente tenha o maior volume possível.

Solução:

Figura 15 - Retângulo



Fonte: Autor

Observamos através da **figura 15** que o volume da caixa é obtido com a expressão $V(x) = (15 - 2x).(8 - 2x).x = 4x^3 - 46x^2 + 120x$, agora vamos determinar os valores de x que tornam o volume da caixa o máximo possível.

Sabendo que se $(x = 0 \rightarrow V = 0), (x = 7{,}5 \rightarrow V = 0), \quad (x = 4 \rightarrow V = 0)$ e assim o valor de x que procuramos está no intervalo $[0;\ 7{,}5]$. Sendo $V(x)$ continua no intervalo $[0;\ 7{,}5]$ segue-se que V tem um valor máximo absoluto neste intervalo que deve ocorrer num número critico ou em um dos extremos do intervalo.

Para encontrarmos os números críticos de $V(x)$, procuramos $V‘(x)$ e determinamos os valores de x onde $V’(x) = 0$ ou $V’(x)$ não existe.

$V’(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x = 12x^2 - 92x + 120$. Logo $V’(x)$ existe para todos os valores de x.

Fazendo $V’(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 0$

$a = 12, b = -92, \quad c = 120$

$\Delta = (92)^2 - 4.(12).(120) = 2704 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{2704} = 52$

$$\mathrm{x}_1 = \frac{-\mathrm{b} + \sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}} = \frac{-(-92) + 52}{2.(12)} = \frac{144}{24} = 6$$

$$\mathrm{x}_1 = \frac{-\mathrm{b} - \sqrt{\Delta}}{2.\mathrm{a}} = \frac{-(-92) - 52}{2.(12)} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$$

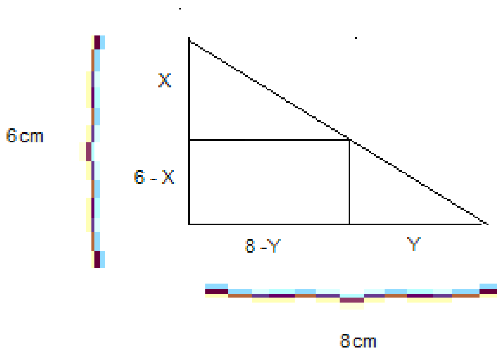
$V(6) = 0$ e $V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{850}{9}$

Logo o volume máximo será de $\frac{850}{9} cm^3$ quando $\mathrm{x} = \frac{5}{3}$

34) Observe o triângulo retângulo de catetos medindo $6\,cm$ e $8\,cm$. Cortando o triângulo na linha indicada resultará um retângulo, como mostra a **figura 16**. Determine esse retângulo sabendo que sua área é máxima.

Usando semelhança de triângulos temos:

Figura 16 - Triânulo retângulo



Fonte: Autor

$$\frac{x}{6-x} = \frac{8-y}{y} \rightarrow x.y = (6-x).(8-y) \rightarrow x.y = x.y - 8x - 6y + 48 \rightarrow 6y = 48 - 8x$$

$$\rightarrow y = 8 - \frac{4}{3}x$$

A área do retângulo é dada por $A = x.y,$ assim

$$A = x.\left(8 - \frac{4}{3}x\right) = -\frac{4}{3}x^2 + 8x$$

Logo, teremos um valor máximo em $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{-\frac{8}{3}} = 3 \rightarrow y_v = 4$

Portanto, o retângulo de área máxima terá os lados medindo $3\,cm$ e $4\,cm$.

Tratando essa situação com o uso das derivadas e reconhecendo que essa equação representa uma função do 2º grau, assim em seu ponto de máximo, a reta tangente ao seu gráfico é horizontal, paralela ao eixo das abscissas e, portanto $y' = 0$, onde decorre que $y' = -\frac{8}{3} + 8$, assim, $x = 3$, e substituindo esse valor na equação dada obtemos o valor $y = 4$ e, portanto temos um retângulo de lados medindo $3\,cm$ e $4\,cm$.

35) Dentre todos os números x e z de soma 6, determine aqueles cuja soma dos quadrados é mínima.

$x + y = 6 \rightarrow x = 6 - y$

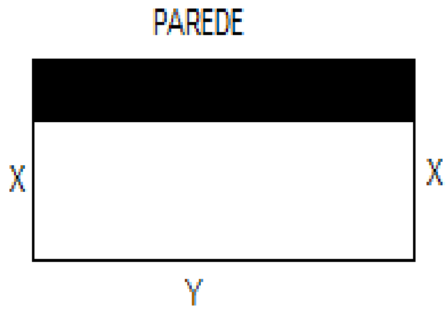
$x^2 + y^2 = y^2 + (6-y)^2 = y^2 + 36 - 12y + y^2 = 2y^2 - 12y + 36$

Temos um valor mínimo em $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-12)}{2.2} = 3 \rightarrow y_v = 3$

Tratando essa situação com o uso das derivadas e reconhecendo que essa equação representa uma função do 2º grau, assim no seu ponto de máximo, a reta tangente ao seu gráfico é horizontal e, portanto $y' = 0$, onde decorre que $4y - 12 = 0 \rightarrow y = 3$, substituindo esse valor na equação dada, obtemos o valor $x = 3$ e, portanto temos os valores numéricos $x = 3$ e $y = 3$.

36) Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular (ver **fig. 17**). Para os outros lados serão utilizados 400 metros de tela de arame, de modo a produzir a área máxima. Qual a medida de cada lado do retângulo?

Figura 17 - Retângulo



Fonte: Autor

Assim, temos que $2x + y = 400 \rightarrow y = 400 - 2x$

A área B do retângulo é dada por $B = x.y = x.(400 - 2x) = -2x^2 + 400x$. Retirando os coeficientes numéricos a, b e c desta função do 2° grau obtemos $a = -2,\ b = 400\ e\quad c = 0$.

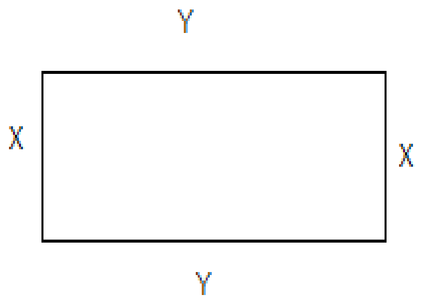
Temos um valor máximo em $\mathrm{x_v} = \frac{-\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} = \frac{-400}{-4} = 100 \rightarrow \mathrm{y_v} = 200$

Os lados terão medidas de $100m, 100m\ e\ 200m$

'Tratando essa situação com o uso das derivadas e reconhecendo que essa equação representa uma função do 2°grau, assim em seu ponto de máximo, a reta tangente ao seu gráfico é horizontal e, portanto, $B'(x) = 0$, onde decorre que $B'(x) = -4.x + 400 \rightarrow x = 100 \rightarrow y = 200$ e assim obtemos as seguintes medidas $x = 100m \;\; e\; y = \;200m$.

37) Dentre todos os retângulos de perímetro com $20\,cm$, (**fig.18**), determine o de área máxima.

Figura 18 - Retângulo



Fonte: Autor

Desta forma, temos que $2x + 2y = 20 \rightarrow x + y = 10 \rightarrow y = 10 - x$.

A área B do retângulo será dada por $B = x.y = x.(10 - x) = -x^2 + 10x$ Logo, o valor máximo é obtido em $B'(x) = -2.x + 10 = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow y = 5$. Portanto, o retângulo de área máxima nesse caso é um quadrado de lado igual a $5\;cm$.

38) A soma de dois números reais é 8, determine aqueles cujo produto é máximo.

Sendo x e y os números procurados, temos: $x + y = 8 \rightarrow y = 8 - x$.

O produto P é dado por $P = x.y$, assim $P = x.(8 - x) = -x^2 + 8x$ e consequentemente o valor máximo é obtido em $P'(x) = -x^2 + 8x = 0 \rightarrow -2.x + 8 = 0 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 4$.

Assim os números procurados são 4 e 4.

CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo principal mostrar á importância da introdução do Ensino da Derivada no Ensino Médio, com a finalidade de proporcionar uma visão mais aprofundada da aplicabilidade da matemática nos diversos ramos da sociedade, além de ser um suporte para os futuros alunos de cursos superiores que terão contato com a disciplina de Cálculo no Ensino Médio, buscando assim reduzir os índices de evasão e reprovação.

Observou-se no decorrer do trabalho que o conceito de derivada e taxa de variação são essenciais na resolução de várias aplicações, como na Física e Geometria. Entretanto, percebeu-se que nem sempre esses conceitos são compreendidos nos cursos iniciais de Cálculo, dificultando assim o aprendizado.

Por outro lado, notou-se que na antiguidade os estudiosos e filósofos já se preocupavam com problemas relacionados a tangentes, movimento dos corpos, entre outros, demonstrando a relevância da compreensão dessa temática para as problemáticas relacionadas para resolução de outros assuntos matemáticos.

Outra questão importante verificada, é que a derivada, de acordo com a Geometria, representa a inclinação de uma reta tangente a uma curva. Todavia, quando interpretada como uma taxa de variação, ela mostra sua importância em diferentes ramos das ciências tais como: Física, Biologia, Química, Economia e etc.

Nesta pesquisa, constatou-se que podemos introduzir as noções básicas de limite e derivadas no Ensino Médio ao lado de outros conteúdos (função do 1º e 2º grau, movimento uniforme e acelerado, volume de sólidos geométricos), os quais são abordados nesta modalidade de ensino, proporcionando melhor compreensão desses assuntos, preparando o aluno para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral bastante comum em vários cursos de níveis superiores.

Como desafio, conclama-se aos demais alunos e professores, amantes da matemática, que aprofundem e apresentem para os que estão ingressando no mundo escolar a amplidão das aplicações da derivada e da matemática. De um modo geral, desejamos despertar o interesse dos novos alunos pelo aprendizado da matemática.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Silvia Xavier Saraiva. **Uma introdução ao estudo de derivadas no ensino médio**. 2016. 74f. Dissertação (Mestrado em Matemática),Universidade Federal do Semi-árido, Mossoró, RN, 2016

ARAÚJO L. Z. S. de. Aspectos éticos da pesquisa científica. ***Pesqui Odonol Bras.,*** 2003, n.17, p.57-63. (Supl 1).

ÁVILA, Geraldo. Limites e Derivadas no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática**, n.60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p.30-38.

______. O ensino de calculo no 2° grau. **Revista do Professor de Matemática**, n.18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9

BARBOSA, M. A: **O insucesso no ensino e aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. 2004. 101f. Dissertação (Mestrado em Educação), Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, 2004.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB-Lei n° 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabele as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasilia: MEC,1996.

DANTE, Luis Roberto. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2008. Vol. único.

FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. **Cálculo A**: funções, limites, derivação e integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GOULART, Marcio Cintra. **Coleção Matemática no ensino médio**. 3. ed. São Paulo: Scipione, 2005.

HOWARD, Eves. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2002.

______. **Introdução à História da Matemática**. Editora da Unicamp. Campinas–SP 2004.

SMOLLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria ignez. **Matemática ensino médio**. São Paulo: Saraiva, 2003. v.1.

LEME, J. C. M.. **Aspectos processuais e estruturais da noção de derivada**. 2003. ___f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

LEITHOLD, Louis: O **Cálculo com geometria analítica**. 2. ed. Campinas: Edit. Harbra Ltda, 1986.. Tradução Antonio Paques, Otilia Teresinha W. Paques, Sebastião Antonio Jose Filho. v.1

MARQUES, Jair Mendes:**Matemática Aplicada**. Curitiba: Juruá, 2006.

MARIA ,Otoniel Soares d.: **Cálculo diferencial no ensino médio**: noções de limites, derivadas e aplicações. 2013. 62f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Semi-Árido, Mossoró, RN, 2013.

MOTA, Janaina Oliveira. **Derivadas no Ensino Médio**: reflexoes e Propostas. 2014. 37f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2014.

PAIVA, Manoel: **Matemática**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2003. vol. único

QUINET. J. **Matemática superior, cálculo diferencial e integral, geometria analítica plana**. 2 ed. Tradução Ruy Pinto da Silva Sieczkowski. Porto Alegre: Globo,1969.

SIMMONS, George F: **Cálculo com geometria Analítica**. São Paulo: Pearson, 2010.

STEWART, James. **Cálculo.** Tradução Cyro c. Patarra. Ana flora Humes, Claudio Asano, Márcia Tamanaha. 4. ed. São Paulo: Pioneira, 2003..

______. **Cálculo**. 5 ed. São Paulo: Thomson, 2006. v.1.

THOMAS, G.B. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Pearson, 2006. v.1.

TORRES ,Terezinha Ione Martins; GIRAFFA, Lucia Maria Martins. **O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica**. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Santa Catarina, v.4., p.18-25, 2009.

ZUIN, E. S. L. Cálculo: uma abordagem histórica. *In*: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Orgs.). **Educação Matemática**: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001, p. 13-36.