UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

O Teorema de Ptolomeu e aplicações

Raimundo Alves Maia Filho

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande - PB
Julho/2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UEPB.

M217t Maia Filho, Raimundo Alves.

O Teorema de Ptolomeu e aplicações [manuscrito]: Raimundo Alves Maia Filho. - 2016.

43 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016

"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática".

1. Teorema de Ptolomeu. 2. Teorema de Casey. 3. Teorema de Viette. 4. Matemática. I. Título.

21. ed. CDD 510

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

O Teorema de Ptolomeu e aplicações

por

Raimundo Alves Maia Filho †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

O Teorema de Ptolomeu e aplicações

por

Raimundo Alves Maia Filho

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Julho/2016

O Teorema de Ptolomeu e aplicações

por

Raimundo Alves Maia Filho

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Severino Horácio da Silva

Prof. Dr. Severino Horácio da Silva
Dpto. Matemática - CCT/UFCG
EXAMINADOR

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque
Dpto. Matemática - CCEA/UEPB
EXAMINADOR

Aldo Trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo
Dpto. Matemática - CCT/UEPB
ORIENTADOR

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Julho/2016

Dedicatória

Aos meus filhos Rayanne Dantas Maia, Rayzza Dantas Maia, Rute Clementino Lúcio Maia e Miguel Cavalcante Maia, Aos meus Pais Raimundo Alves Maia e Rita Soares Maia, Aos meus irmãos Luzia Soares Maia, Leoberto Soares Maia e Lucivan Soares Maia.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus pela força nos momentos difíceis durante os anos de curso. Ao orientador Aldo Trajano Lourêdo, pela orientação, por todo o incentivo nas pesquisas, por sua preocupação constante em estar presente em todos os momentos a fim de esclarecer quaisquer dúvidas e, em geral, por toda a formação dada.
Aos professores doutores, Severino Horácio da Silva e Francisco Sibério Bezerra Albuquerque, por suas importantes observações e sugestões.
Ao meu gestor, Carlos Magno Farias Rodrigues e ao gestor adjunto Jailton que me liberaram, principalmente na fase final do Mestrado, dando-me condições de concluí-lo.
À coordenadora pedagógica Ailza Mércia pelo apoio e valorização durante o Mestrado.
Aos professores do PROFMAT pela dedicação e preocupação com o processo de Ensino e Aprendizagem.
Aos colegas que tornaram-se grandes amigos: Herede (o humorista da turma), Felipe (sempre pode melhorar), Maxsuel (o segundo gordo), John Cleidson (companheiro do café e de boas conversas), Ronaldo, Josimar (Trukin), Wilson, Uelder, Loana, Weskley, Cícero e Mailson(companheiro de viagens).
Ao genial Stanley Borges que, com sua simplicidade e grande sapiência nos ajudou, consideravelmente, nas disciplinas do PROFMAT.
Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

O presente trabalho mostra um breve histórico de Claudio Ptolomeu e suas contribuições para a Matemática, Astronomia e outras áreas de conhecimento. Em seguida foram feitas algumas demonstrações de seu teorema através do qual realizou-se a demonstração original, sua generalização feita por Casey e outras demonstrações. Por fim foram apresentadas algumas aplicações nas quais o teorema de Ptolomeu está inserido dentre os quais obtemos o teorema de Pitágoras como consequência do teorema de Ptolomeu mostrando assim a importância de sua aplicação no ensino da matemática. Para a realização deste trabalho foi feito um levantamento bibliográfico em fontes escritas e eletrônicas.

Palavras Chaves: Teorema de Ptolomeu, Teorema de Casey, Aplicações.

Abstract

The present work shows a brief history of Cláudio Ptolemeu and his contributions to mathematics, astronomy and other areas of knowledge. Then we made some statements of his theorem through the original demonstration, his generalization made by Casey and other statements. Finally we have a few applications in which Ptolemeu's theorem is inserted from which we get the Pitágoras theorem as a result of Ptolemeu's theorem showing the importance of their application in the teaching of mathematics. For the realization of this work was done a literature in written and electronic sources.

Keywords: Ptolemeu's theorem; Casey's theorem; applications.

Lista de Figuras

Um dia você irá olhar para todas as dificuldades que enfrentou e verá que elas foram essenciais, pois a fizeram chegar no topo.
(Zé Ramalho)

Sumário

Introdução

O presente trabalho consta de uma abordagem histórica acerca da vida do astrônomo e matemático Ptolomeu, cujo trabalho serviu de norte para chegar aos resultados obtidos seguindo as referências [1], [2], [3], [9] e [10].

A seguir faremos uma breve introdução a respeito da vida de Ptolomeu.

Inicialmente, Ptolomeu (Cláudio Ptolomeu, Ptolomaeus, Klaudios Ptolemaios, Ptolomeu) viveu em Alexandria, Egito tendo papel importante na história da Astronomia e Geografia. Pouco se sabe sobre a vida de Ptolomeu, incluindo suas datas de nascimento e morte. Diante disso, várias fontes relatam diferentes anos para a realização de suas observações, sendo que a primeira data 26 de março 127, e a última de 2 de Fevereiro 141.

Um dos astrônomos gregos mais influentes e geógrafos de seu tempo, Ptolomeu propôs a teoria geocêntrica de uma forma que prevaleceu durante 1400 anos. No entanto, de todos os antigos matemáticos gregos, pode-se dizer que seu trabalho gerou mais discussão e argumento que qualquer outro, sendo que para alguns historiadores Ptolomeu era um matemático do ranking superior, enquanto outros revelam que ele não era mais do que um expositor excelente, porém, alguns chegam a afirmar que ele cometeu um crime contra seus colegas cientistas por trair a ética e integridade de sua profissão.

Ele fez observações astronômicas de Alexandria, no Egito durante o ano AD 127-141. Na verdade, sua primeira observação pode ser datada exatamente em 26 de Março 127, enquanto o último foi feito em 2 de fevereiro 141. Foi alegado por Teodoro de Melitene, em torno de 1360, que Ptolomeu nasceu em Hermiou (que é no Alto Egito, em vez do Baixo Egito, onde Alexandria situa-se), mas desde que esta asserção aparece pela primeira vez há mais de mil anos depois que Ptolomeu viveu, ele deve ser tratado como relativamente improvável que seja verdade.

Seu nome, Cláudio Ptolomeu, é, naturalmente, uma mistura do egípcio grego "Ptolomeu" e o romano de "Cláudio." Isto indicaria que ele era descendente de uma família grega que viveu no Egito e que ele era um cidadão de Roma, o que seria, como resultado de um imperador romano dado por "recompensa"a um dos antepassados.

Ptolomeu realizou progressos na Trigonometria para a qual obteve novas fórmulas que não eram conhecidas por Hiparco. Seus trabalhos estão contidos em sua obra imortal denominada pelos árabes de Magiste (o maior). Desse vocábulo ao qual foi adicionado o artigo Al, surgiu o nome de Almagesto (Al-magiste) com o que hoje é conhecida a obra, que significa síntese matemática. O Almagesto descreve matematicamente o funcionamento do sistema solar. Pontos que a terra era o centro do sistema solar eram defendido na teoria geocêntrica. Posteriormente, esta teoria foi substituída no século XV por Nicolas Copérnico (1473-1343) que propõe que era o sol e não a terra que era o centro do universo (teoria heliocêntrica). Em um segundo livro Ptolomeu difunde uma tabela de cordas e conceitos rudimentares de trigonométria esférica.

Em geometria demonstra-se um teorema que leva o seu nome: Este teorema, em um caso particular de um dos lados do quadrilátero ser o diâmetro, conduz as indentidades trigonométricas do seno e cosseno da soma e diferença de arcos, $sen(\alpha \pm \beta) = sen\beta cos\beta \pm cos\alpha sen\beta$ e $cos(\alpha \pm \beta) = sen\beta sen\beta \pm cos\alpha cos\beta$.

Todas as medidas usadas por Ptolomeu são baseadas na função corda, $cord\, \alpha$ a qual mede o comprimento de uma corda em um círculo de raio 1 (ou 60^o) como função do ângulo de medida central α. A tabela de cordas é dada por Ptolomeu no Almageste para ângulo entre $\frac{1}{2}^o$ e 180^o em etapas de $\frac{1}{2}^o$ (ver figura 1). As cordas são dadas para razão de 60, usando o sistema sexagesimal babilônico, refinado por adicionar dois digitos após o ponto sexagesimal, (usualmente todos corretos com erro menor do que 1 sec). Ele chamou estes dígitos de (*partes minutae primae*) primeira pequena parte e (*partes minutae secondae*) segunda pequena parte, a qual é a origem de nossos minutos e segundos.

O que fez Ptolomeu calcular essa tabela? Para particularmente, os ângulos de 36^o ou 60^o o comprimento da corda correspondente pode ser calculado a partir do hexágono regular ou de um decágono regular.

Portanto, a $cord\alpha$ foi conhecida para obter a $cord\frac{\alpha}{2}$ como feito por Arquimedes. Para a soma e diferença de cordas, ele usou a seguinte identidade da função corda

$$2cord(\alpha + \beta) = cord\alpha cord(180^o - \beta) + cord(180^o - \alpha)cord\beta. \qquad (1)$$

A partir da fórmula (1), Ptolomeu encontrava as cordas

$$cord3^o, cord1,5^o \text{ e } cord1,75^o.$$

onde na tabela 1, n significa o número de lados, R o raio da circunferência que circunscreve o polígono e ρ significa corda. Contudo, a $cord1^o$ não foi possível encontrar (trisseção de um ângulo). Portanto, Ptolomeu calculou a $cord1^o$ por interpolação bruta, para a precisão dada.

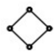
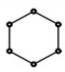
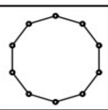
n		R	ρ
3		$R = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}$
4		$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\rho = \frac{1}{2}$
5		$R = \frac{1}{\sqrt{3 - \Phi}} = \frac{\sqrt{2 + \Phi}}{\sqrt{5}}$	$\rho = \frac{\sqrt{3 + 4\Phi}}{2\sqrt{5}}$
6		$R = 1$	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}$
10		$R = \Phi$	$\rho = \frac{\sqrt{3 + 4\Phi}}{2}$

Figura 1: Tabela de raio da circunferência

Capítulo 1

Teorema de Ptolomeu

Pesquisas mostram a necessidade de aprimoramento no ensino de Matemática. Essa necessidade vem permitindo mudar o conceito de ensino aprendizagem e, com isso, contribuído de forma significativa para o ensino de matemática.

Nesta seção, serão apresentadas algumas demonstrações do teorema de Ptolomeu dentre elas a prova original desse teorema bem como outras demonstrações e a sua generalização.

Dessa foram serão apresentados alguns resultados relacionados acerca desse teorema para a posteriori chegar à sua prova original.

1.1 Teorema de Ptolomeu: Prova original

No que segue serão enunciados alguns resultados em forma de lema sem demonstrações por serem suas provas conhecidas.

Lema 1.1 (Teorema do ângulo bisector) *Considere o triângulo $\triangle ABC$ de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e seja $\overline{CD}$ segmento bisector do ângulo $\gamma = \angle A\hat{C}B$, onde $\overline{AD} = q$ e $\overline{DB} = p$. Então,*

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}.$$

Lema 1.2 (Teorema do ângulo central) *A medida do ângulo central de um círculo é duas vezes a medida de qualquer ângulo inscrito sobre o mesmo arco.*

Nas aplicações que seguem, usou-se os teoremas de Pitágoras, de Tales e os Lemas 1.1 e 1.2, cujas demonstrações serão omitidas, e poderão ser vistas em [6] ou [7].

Para os exemplos que seguem, serão usadas as figuras 1.1 e 1.2, as quais ajudarão na resolução dos referidos exemplos no que segue. Baseado nas figuras 1.1 e 1.2 resulta que os triângulos são semelhantes.
$AB\Gamma$, $AH\Gamma$ e ΓHZ são semelhantes.

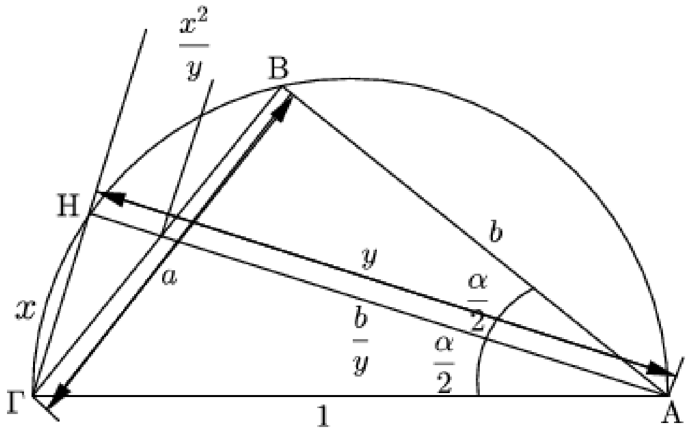


Figura 1.1: Triângulo inscrito no semicírculo

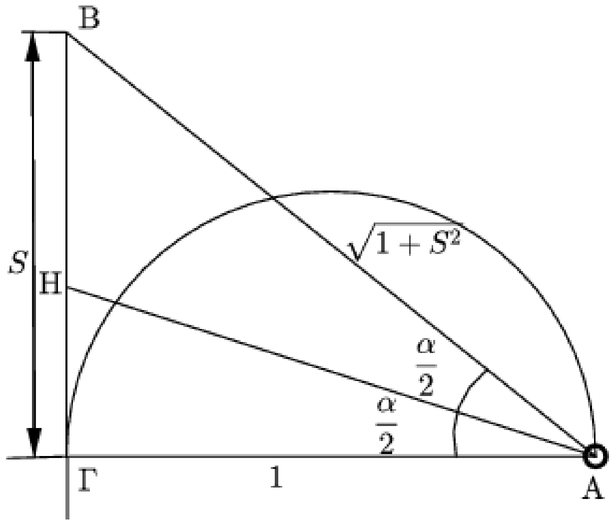


Figura 1.2: Bissecção de um ângulo

Exemplo 1.1 (Cálculo de Archimedes of the regular inscrito 96-gon) *Seja $a = B\Gamma$ e H é o ponto médio do arco $B\Gamma$. (Ver figura 1.1). Mostre que, $x = H\Gamma$. Isto perminte calcular sucessivamente, iniciando a partir do hexágono, os perímetros do dodecágono regular, 24-gon, 48-gon e 96-gon.*[1]

Sugestão: Para a solução deste exemplo, usa-se o teorema de Pitágoras, o de Tales e o Lema 1.1.

Exemplo 1.2 (Cálculo de Archimedes of the regular circunscrito 96-gon) *Seja $s = Z\Gamma$, como feito na figura 1.2. Mostre que $t = H\Gamma$. Isto produzirá similarmente os perímetros dos*

[1]Gon: Número de lados de um polígono regular inscrito em uma circunferência

n-gons regular circunscritos.
Sugestão: *Para a solução deste exemplo, usa-se o Lema 1.2.*

Decorre dos Exemplos 1.1 e 1.2, o seguinte resultado devido a Arquimedes.

Proposição 1.1 (Cálculo de Arquimedes para encontar o π) *Calcule o perímetro de polígono regular de 96 gons, inscrito e circunscrito de um círculo de raio* 1 *para mostar que*

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Teorema 1.1 (Ptolomeu) *O produto das diagonais de um quadrilátero inscrito em uma circunferência é igual a soma dos produto dos lados opostos.*

A prova original da identidade (1) dada por Ptolomeu é baseada no seguinte Lema. Ver figura 5.3.

Lema 1.3 *Seja $\triangle ABC$ inscrito em um círculo, como na figura 1.1. Mostre que o comprimento do ângulo α é independente da posição de A no círculo.*

Demonstração 1 *Seja A um ponto sobre a circunferência tal que $\angle(B\hat{A}C)$ seja um ângulo inscrito sobre o arco $\widehat{BC}$. Seja A'um ponto qualquer sobre a circunferência tal que $\angle(B\hat{A}'C)$ esteja inscrito sobre o mesmo arco $\widehat{BC}$, então $\angle(B\hat{A}C) \equiv \angle(B\hat{A}'C)$. Ver figura (1.3). Portanto, o*

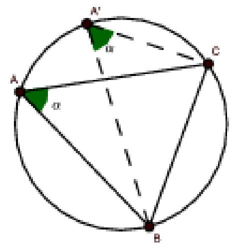


Figura 1.3: Ângulo inscrito no círculo

comprimento do ângulo α é o mesmo independente da posição de A no círculo.

Lema 1.4 (Ptolomeu) *Seja $ABCD$ um quadrilátero de lados a, b, c e d respectivamente inscrito em um círculo. Então, as diagonais δ_1 e δ_2 satisfaz*

$$\delta_1\delta_2 = ac + bd.$$

Demonstração 2 *Notemos inicialmente que $u + v = \delta_2$. Seja E o único ponto sobre o lado $\overline{AC}$ tal que o ângulo $\angle E\widehat{D}A$ é igual ao ângulo $\angle C\widehat{D}B$ (Ver figura (1.4)). Pelo Lema 1.3, os dois ângulos os quais serão denotados por β e γ respectivamente são iguais. Portanto, os triângulos*

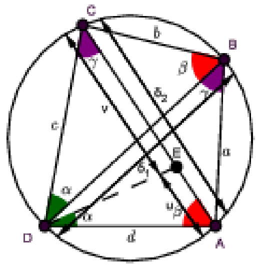


Figura 1.4: Quadrilátero inscrito

ΔEDA e ΔCDB são semelhantes e também os triângulos ΔDCE e ΔDBA são semelhantes. Portanto,

$$\frac{b}{\delta_1} = \frac{u}{d} \text{ e } \frac{a}{\delta_1} = \frac{v}{c}$$

o que implica

$$ac + bd = \delta_1(u + v) = \delta_1\delta_2.$$

1.2 Outra abordagem do Teorema de Ptolomeu

A seguir será proposta outra prova do teorema de Ptolomeu, baseado nas referências [3] e [9].

Teorema 1.2 *Num quadrilátero qualquer inscrito numa circunferência, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto de suas diagonais.*

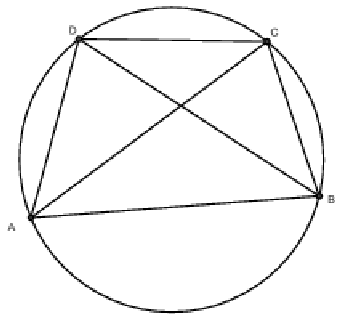


Figura 1.5: Quadrilátero inscrito na circunferência

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

Demonstração 3 *Considere o quadrilátero ABCD inscritível da figura abaixo.*

Tomemos um ponto E sobre o segmento $\overline{AC}$ tal que $\angle(A\hat{D}E) = \angle(C\hat{D}B)$.

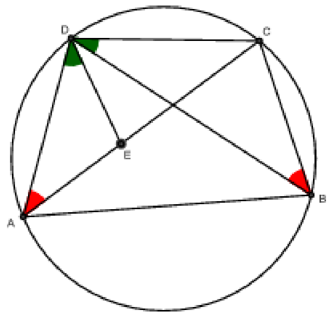


Figura 1.6: Quadrilátero inscrito na circunferência

Aplicando a relação de ângulos inscritos e arcos correspondentes, tem-se que $\angle(C\hat{A}D) = \angle(C\hat{B}D)$*, pois esses ângulos estão inscrito sobre o arco* $\widehat{CD}$*. Logo,*

$$\angle(D\hat{A}E) = \angle(C\hat{B}D)$$

$$\angle(C\hat{D}B) = \angle(A\hat{D}E)$$

Portanto, pelo segundo caso de semelhança (AA), os triângulos ADE e BCD são semelhantes.

Daí, segue-se que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}},$$

ou seja,

$$\overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{AD} \tag{1.1}$$

Sabendo que, em qualquer triângulo, o ângulos externo é igual a soma dos dois ângulos não adjacentes a ele. Logo, podemos concluir que: $\angle(C\hat{E}D) = \angle(A\hat{D}E) + \angle(D\hat{A}E)$ *conforme na figura 1.7.*

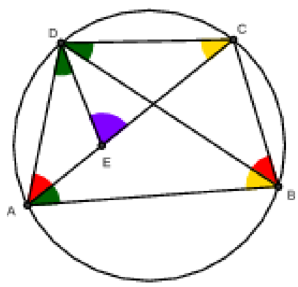


Figura 1.7: Quadrilátero inscrito na circunferência

Sabe-se ainda que os ângulos $\angle(B\hat{A}C)$ *e* $\angle(C\hat{D}B)$ *estão inscritos sobre o arco* $\widehat{BC}$ *logo,* $\angle(B\hat{A}C) = \angle(C\hat{D}B)$*. Como, por construção, tem-se que* $\angle(B\hat{D}C) = \angle(A\hat{D}E)$ *então, por transitividade,* $\angle(A\hat{D}E) = \angle(B\hat{A}C)$*. Logo, temos que:*

$$\angle(D\hat{E}C) = \angle(B\hat{A}D)$$

$$\angle(A\hat{B}D) = \angle(A\hat{C}D)$$

Portanto, pelo segundo caso de semelhança (AA) $\triangle\ CDE \sim \triangle\ ABD$.

Daí, segue-se que:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}},$$

ou seja,

$$\overline{CE} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} \tag{1.2}$$

Somando membro a membro as equações (1.1) e (1.2), obtem-se:

$$\overline{CE} \cdot \overline{BD} + \overline{AE} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

Colocando o segmento $\overline{BD}$ em evidência, resulta:

$$\overline{BD}(\overline{CE} + \overline{AE}) = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

Como a soma dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{CE}$ é igual ao segmento $\overline{AC}$. Logo, conclui-se que:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} \tag{1.3}$$

Finalizamos esta seção, mostrado que podemos obter o teorema de Pitágoras como uma consequência do teorema de Ptolomeu.

Corolário 1.1 (Teorema de Pitágoras) *O teorema de Ptolomeu implica no teorema de Pitágoras.*

Demonstração 4 *Consideremos o triângulo ABC, o qual têm ângulo reto em B. Este triângulo pode ser inscrito no círculo C, com a hipótenusa $\overline{AC}$ sendo o raio do círculo C, como feito na figura abaixo.*

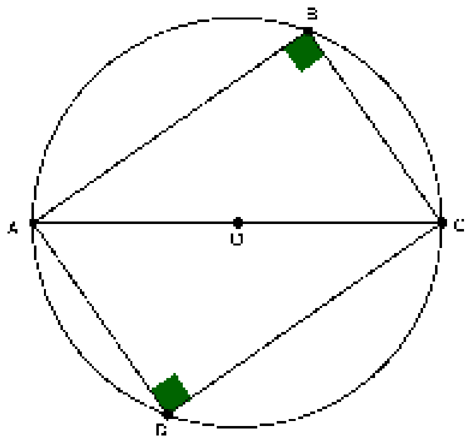


Figura 1.8: Quadrilátero inscritível na circunferência

Seja D um ponto do círculo $\mathcal{C}$, tal que, os triângulos ADC com ângulo reto em D e ABC sejam semelhantes. Logo, pelo teorema de Ptolomeu, obtemos

$$\overline{AC}.\overline{AC} = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{AD}$$

Usando o fato que, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$, obtemos

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$

o que prova o corolário.

1.3 Teorema de Viette

Nesta seção será provada uma generalização do Teorema de Ptolomeu. Esta generalização do teorema de Ptolomeu, foi dada por Cardano Viette.

Teorema 1.3 (Teorema de Cardano Viette) *Em todo quadrilátero inscritível em uma circunferência, a razão dos comprimentos das diagonais é igual a razão das somas dos produtos dos seus lados partindo de cada diagonal respectivamente.*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{BC}\cdot\overline{CD}}{\overline{AB}\cdot\overline{BC} + \overline{AD}\cdot\overline{CD}}$$

Demonstração 5 *Seja o quadrilátero ABCD inscritível em uma circunferência. Seja P o ponto de intersecção das diagonais desse quadrilátero ABCD. Como na figura abaixo:*

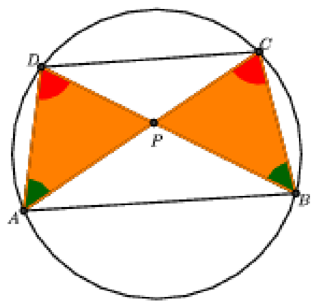


Figura 1.9: Quadrilátero inscrito na circunferência

Da figura 1.9, tem-se que, $\angle C\hat{A}D \equiv \angle C\hat{B}D$, pois estão inscritos no mesmo arco $\widehat{CD}$. Do mesmo modo os ângulos $\angle A\hat{D}B \equiv \angle A\hat{C}B$, estão inscritos no mesmo arco $\widehat{AB}$, ou seja, $\angle A\hat{D}B \equiv \angle A\hat{C}B$.
Portanto pelo segundo caso de semelhança (AA) é possível garantir que $\triangle APD$ e $\triangle BCP$ são semelhantes. Logo,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}},$$

isto é,

$$\overline{AP} = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{AD}}{\overline{BC}} \tag{1.4}$$

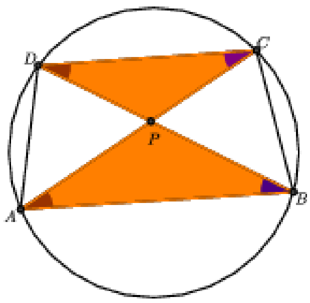


Figura 1.10: Quadrilátero inscrito na circunferência

Considere agora a figura 1.10, em que, $\angle C\hat{A}B$ e $\angle C\hat{D}B$ estão inscritos sobre o mesmo arco $\widehat{BC}$. Logo, $\angle C\hat{A}B \equiv \angle C\hat{D}B$.
Do mesmo modo que $\angle A\hat{B}D$ e $\angle A\hat{C}D$ estão inscritos no mesmo arco $\widehat{AD}$. Então, $\angle A\hat{B}D \equiv \angle A\hat{C}D$. Portanto, pelo segundo caso de semelhança (AA) $\triangle ABP$ e $\triangle CDP$ são semelhantes. então:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}},$$

ou seja,

$$\overline{CP} = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB}} \tag{1.5}$$

Dividindo a equação (1.5) por (1.6), obtem-se:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\frac{\overline{BP} \cdot \overline{AD}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{BP} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB}}},$$

assim sendo,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BP}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{CD} \cdot \overline{BP}},$$

isto é,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

Aplicando a propriedade das proporções, resulta que:

$$\frac{\overline{AP} + \overline{CP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{BC} \cdot \overline{CD}}$$

Como $\overline{AP} + \overline{CP} = \overline{AC}$, *então:*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{BC} \cdot \overline{CD}} \tag{1.6}$$

Por outro lado, os ângulos $\angle A\hat{D}B \equiv \angle A\hat{C}B$ *ângulos inscritos no mesmo arco* $\widehat{AB}$ *e* $\angle D\hat{A}C \equiv \angle D\hat{B}C$*, ângulos inscritos no mesmo arco* $\widehat{CD}$*, Como mostra a figura 1.11.*

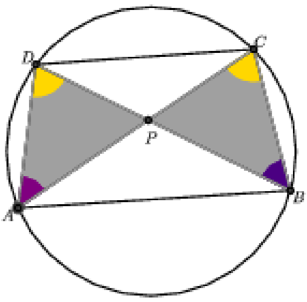


Figura 1.11: Quadrilátero inscrito na circunferência

Logo, pelo segundo caso de semelhança (AA) $\triangle BCP$ *E* $\triangle ADP$*, são semelhantes. Daí, tem-se que:*

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}},$$

ou seja,

$$\overline{BP} = \frac{\overline{AP} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD}}. \tag{1.7}$$

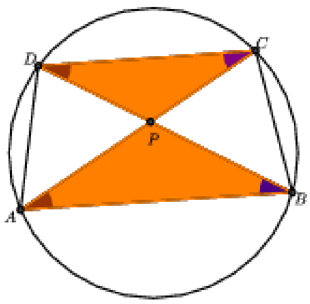


Figura 1.12: Quadrilátero inscrito na circunferência

Da figura 1.12, os ângulos $\angle C\hat{D}B \equiv \angle C\hat{A}B$*, pois estão inscritos sobre o mesmo arco* $\widehat{BC}$*. Do mesmo modo* $\angle A\hat{C}D \equiv \angle A\hat{B}D$*, ângulos inscritos no arco* $\widehat{AD}$*. Logo, pelo segundo caso de semelhança (AA),* $\triangle ABP$ *e* $\triangle CDP$ *são semelhantes. Logo por semelhança, obtém-se:*

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}},$$

isto é,

$$\overline{DP} = \frac{\overline{CD}\cdot\overline{AP}}{\overline{AB}} \tag{1.8}$$

Dividindo a equação (1.8) por (1.9), teremos:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{DP}} = \frac{\frac{\overline{AP}\cdot\overline{BC}}{\overline{AD}}}{\frac{\overline{AP}\cdot\overline{CD}}{\overline{AB}}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AP}\cdot\overline{BC}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}\cdot\overline{CD}},$$

isto é,

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AB\cdot\overline{BC}}}{\overline{AD}\cdot\overline{CD}}$$

Aplicando a propriedade das proporções, obtém-se:

$$\frac{\overline{BP}+\overline{DP}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{CD}}.$$

Como, $\overline{DP}+\overline{BP}=\overline{BD}$*, segue-se que:*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DP}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{CD}} \tag{1.9}$$

Dividindo a equação (1.6) por (1.9), obtem-se:

$$\frac{\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}}{\frac{\overline{BD}}{\overline{DP}}} = \frac{\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}}{\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AD}\cdot\overline{CD}}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}\cdot\frac{\overline{DP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{AD}\cdot\overline{CD}}{\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}},$$

isto é,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}\cdot\frac{\overline{DP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}}{\overline{AB}\cdot\overline{BC}+\overline{AD}\cdot\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \tag{1.10}$$

Como $\triangle ADP$ *e* $\triangle BCP$ *são semelhantes, resulta:*

$$\frac{\overline{DP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} \tag{1.11}$$

Substituindo (1.11) em (1.10), obtemos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AD} \cdot \overline{CD}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}},$$

donde tem-se,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{BC} \cdot \overline{CD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AD} \cdot \overline{CD}} \tag{1.12}$$

1.4 Teorema de Casey: Generalização do teorema de Ptolomeu

A seguir será enunciado e demonstrado o teorema de John Casey (1820-1891), o qual é uma generalização do teorema de Ptolomeu. Para a prova do teorema de Casey, foram utilizadas as referências [2] e [3].

Considere inicialmente dois pontos X e Y sobre Γ, e sejam U e V os pontos de tangência de t_{XY} com K_X e K_Y, respectivamente. Em primeiro lugar, serão mostrados dois lemas, que são fundamentais para esta demonstração.

Teorema 1.4 (Teorema de Casey) *Considere a circunferência Γ de raio R e quatro pontos, A, B, C e D sobre Γ, dispostos nesta ordem no sentido anti-horário. Sejam K_A, K_B, K_C e K_D circunferências arbitrárias tangentes internamente a Γ nos pontos A, B, C e D, respectivamente. Se t_{XY} denota o comprimento da tangente externa comum às circunferências K_X e K_Y, então*

$$t_{AC}t_{BD} = t_{AB}t_{CD} + t_{AD}t_{BC}$$

Lema 1.5 *Para quaisquer dois pontos X e Y sobre Γ, as retas XU e YV concorrem em um ponto Z sobre Γ.*

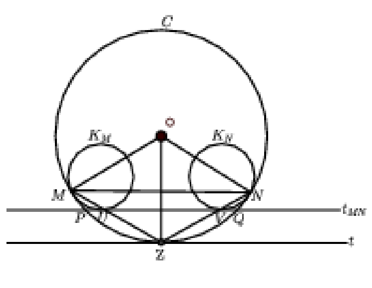


Figura 1.13: Círculos Tangentes internos

Prova do Lema 1.5

Sejam R, r_x e r_y os raios das circunferências Γ, K_X e K_Y, respectivamente. Considere as homotetias de centros X e Y e razões $\frac{R}{r_x}$ e $\frac{R}{r_y}$, respectivamente, que transformam a reta t_{XY} em uma reta t paralela t_{XY} e tangente a Γ. As imagens de U e V por estas homotetias coincidirão com o ponto médio Z do arco $\widehat{PQ}$, onde $\{P, Q\} \equiv t_{XY} \cap \Gamma$, o que significa dizer que XU e YV concorrem em Z.

Lema 1.6 *Se R, r_x e r_y são os raios das circunferências Γ, K_X e K_Y, respectivamente, então*

$$t_{XY} = \frac{\overline{XY} \cdot \sqrt{(R - r_x)(R - r_y)}}{R}$$

Prova do Lema 1.6:

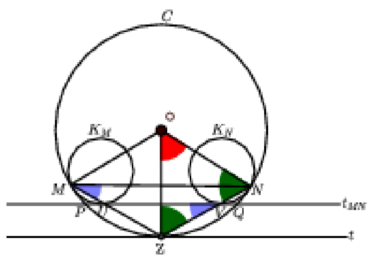


Figura 1.14: Círculos tangentes internos

Seja O o centro de Γ. Observe que $\overline{OZ} \perp$t, pois t é tangente a Γ e $\overline{OZ}$ é p raio de Γ e Z é o ponto de tangência.

Se $\angle(O\hat{Z}Y) = \alpha$, então $\angle(Z\hat{O}Y) = 180^o - 2\alpha$, pois os segmentos $\overline{OZ} \equiv \overline{OY}$, ou seja, $\overline{OZ}$ e $\overline{OY}$ são os raios de Γ. como, $\angle(Z\hat{X}Y)$ é um ângulo inscrito no mesmo, então $\angle(Z\hat{X}Y) = 90^0 - 2\alpha$. Como $\overline{OZ} \perp$t, segue-se que $\angle(Z\hat{V}U) = 90^0 - \alpha$. Logo pelo segundo caso de semelhança (AA) $\triangle$XYZ e $\triangle$VUZ são semelhantes. Daí segue-se:

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{UV}} = \frac{\overline{XZ}}{\overline{VZ}} = \frac{\overline{YZ}}{\overline{UZ}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{t_{XY}}}.$$

como $\overline{UV} \equiv \overline{t_{XY}}$, então

$$\left(\frac{\overline{XY}}{\overline{t_{XY}}}\right)^2 = \frac{\overline{XZ} \cdot \overline{YZ}}{\overline{VZ} \cdot \overline{UZ}} \tag{1.13}$$

Mas, a homotetia de centro X e razão $\frac{R}{r_x}$ transforma U em Z, tal que

$$\frac{R}{r_x} = \frac{\overline{XZ}}{\overline{XU}},$$

$$\frac{\overline{XZ}}{\overline{UZ}} = \frac{R}{R - r_x} \tag{1.14}$$

Do mesmo modo tem-se que:

$$\frac{\overline{YZ}}{\overline{YV}} = \frac{R}{r_y},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{YZ}}{\overline{VZ}} = \frac{R}{R - r_y} \tag{1.15}$$

Substituindo as equações (1.14) e (1.15) em (1.13), obtém-se:

$$(\frac{\overline{XY}}{t_{XY}})^2 = \frac{R}{R - r_x} \cdot \frac{R}{R - r_y},$$

isto é,

$$\frac{\overline{XY}}{t_{XY}} = \sqrt{\frac{R^2}{(R - r_x)(R - r_y)}},$$

ou seja,

$$\frac{\overline{XY}}{t_{XY}} = \frac{R}{\sqrt{(R - r_x)(R - r_y)}},$$

o que implica,

$$Rt_{XY} = \overline{XY}\sqrt{(R - r_x)(R - r_y)},$$

o que resulta,

$$t_{XY} = \frac{\overline{XY} \cdot \sqrt{(R - r_x)(R - r_y)}}{R}$$

e o Lema 1.6 está provado.

Segue a demonstração do teorema de Casey.

Demonstração 6 *Usando o Lema provado anteriormente, nota-se que* $t_{AC} = \frac{\overline{AC}\sqrt{(R-r_a)(R-r_c)}}{R}$ *e* $t_{BD} = \frac{\overline{BD}\sqrt{(R-r_b)(R-r_d)}}{R}$*. Daí:*

$$t_{AC} \cdot t_{BD} = \frac{\overline{AC}\sqrt{(R - r_a)(R - r_c)}}{R} \cdot \frac{\overline{BD}\sqrt{(R - r_b)(R - r_d)}}{R},$$

isto é,

$$t_{AC} \cdot t_{BD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}\sqrt{(R - r_a)(R - r_b)(R - r_c)(R - r_d)}}{R^2}. \tag{1.16}$$

Do teorema de Ptolomeu é possível observar que:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \tag{1.17}$$

Substituindo a equação (1.17) em (1.16), obtém-se:

$$t_{AC} \cdot t_{BD} = \frac{(\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD})\sqrt{(R - r_a)(R - r_b)(R - r_c)(R - r_d)}}{R^2},$$

ou seja,

$$t_{AC} \cdot t_{BD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}\sqrt{(R - r_a)(R - r_b)(R - r_c)(R - r_d)}}{R^2} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}\sqrt{(R - r_a)(R - r_b)(R - r_c)(R - r_d)}}{R^2},$$

isto é,

$$t_{AC}\cdot t_{BD} = \frac{\overline{AB}\sqrt{(R-r_a)(R-r_b)}\cdot\overline{CD}\sqrt{(R-r_c)(R-r_d)}}{R^2} + \frac{\overline{BC}\sqrt{(R-r_b)(R-r_c)}\cdot\overline{AD}\sqrt{(R-r_a)(R-r_d)}}{R^2},$$

dessa forma,

$$t_{AC}\cdot t_{BD} = \frac{\overline{AB}\sqrt{(R-r_a)(R-r_b)}}{R}\cdot\frac{\overline{CD}\sqrt{(R-r_c)(R-r_d)}}{R} + \frac{\overline{BC}\sqrt{(R-r_b)(R-r_c)}}{R}\cdot\frac{\overline{AD}\sqrt{(R-r_a)(R-r_d)}}{R} \tag{1.18}$$

do Lema 1.6 tem-se que:

$$t_{AB} = \frac{\overline{AB}\sqrt{(R-r_a)(R-r_b)}}{R} \tag{1.19}$$

$$t_{BC} = \frac{\overline{BC}\sqrt{(R-r_b)(R-r_c)}}{R} \tag{1.20}$$

$$t_{CD} = \frac{\overline{CD}\sqrt{(R-r_c)(R-r_d)}}{R} \tag{1.21}$$

$$t_{AD} = \frac{\overline{AD}\sqrt{(R-r_a)(R-r_d)}}{R} \tag{1.22}$$

Substituindo as equações (1.19), (1.20), (1.21) e (1.22) em (1.18) pode ser obtido:

$$t_{AC}\cdot t_{BD} = t_{AB}\cdot t_{CD} + t_{BC}\cdot t_{AD} \tag{1.23}$$

Obs.: O teorema de Ptolomeu passa a ser um caso particular do teorema de Casey se considerarmos os raios das circunferências k_A, k_B, k_C e k_D todos nulos.

1.5 Extensão do teorema de Ptolomeu

Nesta seção será apresentada uma extensão do teorema de Ptolomeu, ao mesmo tempo em que será provado o problema de Fermat. Antes porém, será feita uma breve introdução sobre a inversão de um ponto. No que segue será denotado o círculo por $\mathcal{C}$, o centro do círculo por O e o raio por r.

A **Inversão** é uma transformação um a um de pontos do plano por meio de um dado círculo $\mathcal{C}$. (Ver figura (1.15))

Para obter a transformação X' de qualquer ponto X, ou o inverso de X no círculo $\mathcal{C}$, juntamos X a O, e encontramos X' sobre $\overline{OX}$ tal que $\overline{OX}.\overline{OX'} = r^2$.

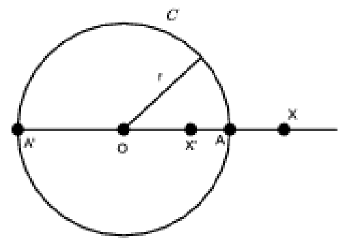


Figura 1.15: Inversão de um ponto

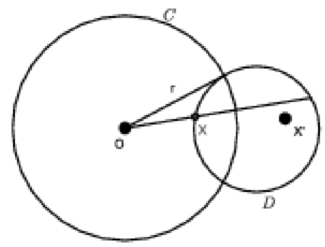


Figura 1.16: Inversão de um ponto

Todos os círculos através de X e X' cortam C ortogonalmente, desde que o quadrado da tangente a partir de O a um tal círculo é igual a: $\overline{OX}.\overline{OX'} = r^2$.

Note que o próprio ponto O em si é excluído dos pontos do plano que podem ser transformados. Para maiores detalhes sobre inversão ver [8] ou [5].

Teorema 1.5 *Se A, B, C, D são quatro pontos em um plano, então*

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC} > \overline{AC}.\overline{BD} \tag{1.24}$$

A menos que a posição de A, B, C, D nesta ordem $ABCD$, esteja sobre um círculo ou um segmento de reta. Neste último caso, a desigualdade torna-se uma igualdade.

Demonstração 7 *Isto é provado, notando a influência de inversão sobre o comprimento de um segmento. Ver figura 1.17.*

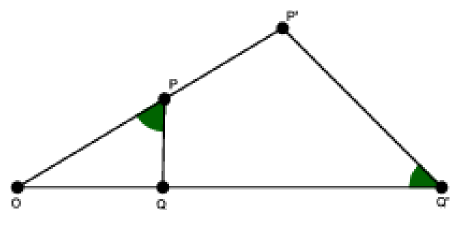


Figura 1.17: Inversão dos pontos P e Q

Se os pontos P, Q inverte os pontos P' e Q', com O como o centro de inversão, então $\triangle OPQ$ e $\triangle OQ'P'$ são semelhantes. Portanto,

$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP}.\overline{OP'}}{\overline{OP}.\overline{OQ}} = \frac{k^2}{\overline{OP}.\overline{OQ}}$$

o que implica

$$\overline{P'Q'} = \frac{k^2\overline{PQ}}{\overline{OP}.\overline{OQ}} \tag{1.25}$$

Agora, dado quatro pontos A, B, C, D, foi invertido x com respeito a A. Seja B', C', D' os respectivos inversos de B, C, D. Então,

$$\overline{B'C'} + \overline{C'D'} > \overline{B'D'} \tag{1.26}$$

a menos que C' esteja no segmento $\overline{B'C'}$ entre B' e D'. Neste último caso, tem-se:

$$\overline{B'C'} + \overline{C'D'} = \overline{B'D'} \tag{1.27}$$

Usando, (1.25) a desigualdade (1.26) torna-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}.\overline{AC}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}.\overline{AD}} > \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}.\overline{AD}}. \tag{1.28}$$

De (1.28), obtem-se:

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC} > \overline{AC}.\overline{BD}, \tag{1.29}$$

a menos que C' esteja no segmento $B'D'$ entre B' e D', em cujo caso, A, B, C, D estão sobre um círculo na ordem $ABCD$, ou sobre um segmento de reta.

Exemplo 1.1 (Problema de Fermat) *Sejam A, B, C três pontos quaisquer de um plano. Encontre um ponto P tal que $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ seja mínimo.*

Solução: Sejam B e C ângulos agudos do triângulo ABC. Sobre o lado $\overline{BC}$ e longe de A, trasse um triângulo equilátero BCD. Então, pelo teorema da extensão de Ptolomeu, a menos que P esteja no círculo BCD (Ver figura 1.18) de modo que a ordem dos pontos

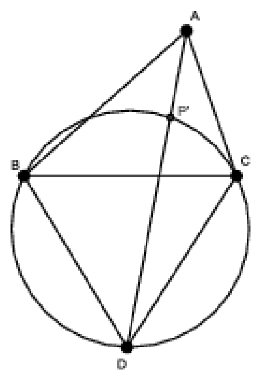


Figura 1.18: Triângulo equilátero inscrito

é $BPCD$, tem-se:

$$\overline{PB} + \overline{PC} > \overline{PD},$$

visto que $\overline{CD} = \overline{DB} = \overline{BC}$. Portanto,

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} > \overline{PA} + \overline{PD}.$$

Agora, a menos que P esteja sobre $\overline{AD}$, tem-se

$$\overline{PA} + \overline{PD} > \overline{AD}.$$

Portanto, a menos que P seja P' (a outra interseção de $\overline{AD}$ com o círculo BCD), tem-se que:

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} > \overline{AD}.$$

Mas, se P é um P', ambas as desigualdades acima, torna-se a igualdade:

$$\overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} = \overline{AD}.$$

Contudo,

$$\overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} < \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}.$$

Portanto, P' é o ponto desejado.

- Se $\angle BAC = 120^o$, $A = P'$, e A é o ponto desejado.
- Se $\angle BAC > 120^o$, A é ainda o ponto desejado.

Capítulo 2

Aplicações

Nesta seção serão apresentadas algumas aplicações do teorema de Ptolomeu para as demonstrações de cosseno da soma e seno da soma, dando ênfase ao sentido de utilização dessas fórmulas sem a necessidade de decorar, despertando assim a curiosidade e o interesse do aluno. Além dessas aplicações, serão também utilizadas na resolução de outros problemas de aplicações práticas.
Para as aplicações foram utilizadas as referências bibliográficas, [2], [3] e [9].

2.1 Problema 1:

Mostre que $sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha$

Solução: Considere o quadrilátero inscritível em uma circunferência de raio R. Pela lei

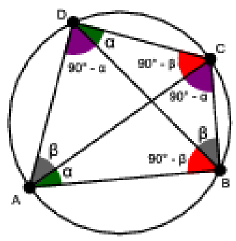


Figura 2.1: Quadrilátero inscrito na circunferência

dos senos aplicada num triângulo qualquer, temos que:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R$$

onde a, b e c são as medidas dos lados e 2R a medida do diâmetro da circunferência que circunscreve esse triângulo.
Seja α a medida do ângulo $\angle(B\hat{A}C)$. Como o ângulo $\angle(B\hat{A}C)$ e $\angle(B\hat{D}C)$ estão inscritos no mesmo arco $\widehat{BC}$, então $\angle(B\hat{A}C) \equiv \angle(B\hat{D}C)$.

Sendo $\angle(C\hat{A}D) = \beta$, então $\angle(C\hat{B}D) = \beta$, pois estão inscritos no mesmo arco $\widehat{CD}$.
Sendo $\overline{AC}$ o diâmetro dessa circunferência então $\angle(A\hat{B}C)$ é reto. Logo, tem-se que, $\angle(A\hat{C}B) = 90^0 - \alpha$. Do mesmo modo, $\angle(A\hat{D}C)$ também é reto então, $\angle(A\hat{C}D) = 90^o - \beta$. vê-se ainda que o ângulo $\angle(A\hat{D}B) = 90^o - \alpha$, pois está inscrito arco $\widehat{AB}$. Logo, $\angle(A\hat{C}B) \equiv \angle(A\hat{D}B)$ e por fim, $\angle(A\hat{B}D) \equiv \angle(A\hat{C}D)$, pois estão inscritos no mesmo arco. Então $\angle(A\hat{B}D) = 90^o - \beta$. Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC, obtém-se:

$$\frac{\overline{AB}}{sen(90^o - \alpha)} = \overline{AC},$$

isto é,

$$\overline{AB} = \overline{AC}sen(90^o - \alpha) \tag{2.1}$$

Novamente, aplicando a lei dos senos no triângulo ABC, observa-se:

$$\frac{\overline{BC}}{sen\alpha} = \overline{AC},$$

ou seja,

$$\overline{BC} = \overline{AC}sen(\alpha) \tag{2.2}$$

No triângulo ACD, aplicando a lei dos senos, tem-se que:

$$\frac{\overline{CD}}{sen\beta} = \overline{AC},$$

dessa forma,

$$\overline{DC} = \overline{AC}sen(\beta) \tag{2.3}$$

Novamente, fazendo uso da lei dos senos no triângulo ACD, nota-se:

$$\frac{\overline{AD}}{sen(90^o - \beta)} = \overline{AC},$$

desse modo,

$$\overline{AD} = \overline{AC}sen(90^o - \beta) \tag{2.4}$$

No triângulo ABD, aplicando a lei dos senos, resulta em:

$$\frac{\overline{AD}}{sen(\alpha + \beta)} = \overline{AC},$$

onde $\overline{AC}$ é o diâmetro do círculo, tem-se:

$$\overline{AD} = \overline{AC}sen(\alpha + \beta) \tag{2.5}$$

Do teorema de Ptolomeu, observa-se que:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \tag{2.6}$$

Substituindo as equações (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5), na equção (2.6), tem-se:

$$\overline{AC}\cdot\overline{AC}sen(\alpha+\beta) = \overline{AC}sen(90^o-\alpha)\cdot\overline{AC}sen\beta + \overline{AC}sen\alpha\cdot\overline{AC}sen(90^o-\beta) \tag{2.7}$$

como seno e cosseno são complementares, então pode ser escrito

$$sen(90^o-\alpha) = cos\alpha \tag{2.8}$$

e

$$sen(90^o-\beta) = cos\beta \tag{2.9}$$

Substituindo as equações (2.8) e (2.9), na equação (2.7), obtem-se:

$$\overline{AC}\cdot\overline{AC}sen(\alpha+\beta) = \overline{AC}cos\alpha\cdot\overline{AC}sen\beta + \overline{AC}sen\alpha\cdot\overline{AC}cos\beta \tag{2.10}$$

Dividindo ambos os membros da equação (2.10), por $\frac{1}{\overline{AC}\cdot\overline{AC}}$, com $\overline{AC}\neq 0$ observa-se:

$$sen(\alpha+\beta) = sen\beta cos\alpha + sen\alpha cos\beta,$$

ou seja,

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha \tag{2.11}$$

2.2 Problema 2:

Mostre que $cos(\alpha+\beta) = cos\alpha\cdot cos\beta - sen\alpha\cdot sen\beta$.

Solução: Considere o quadrilátero ABCD inscritível da figura abaixo. Seja $\overline{AD}$ o

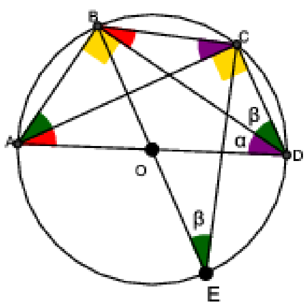


Figura 2.2: Quadrilátero inscrito na circunferência

diâmetro da circunferência, então $\angle(A\hat{B}D)$ é reto. Logo o triângulo ABD é retângulo em B. Daí, tem-se que:

$$sen\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}},$$

ou seja,

$$\overline{AB} = \overline{AD}sen\alpha \tag{2.12}$$

Ainda no triângulo ABD, tem-se que:

$$cos\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}},$$

isto é,

$$\overline{BD} = \overline{AD}cos\alpha \tag{2.13}$$

No triângulo ACD, o ângulo $\angle(A\hat{C}D)$ é ângulo inscrito no arco $\widehat{AD}$. Como o segmento $\overline{AD}$ é o diâmetro da circunferência, então $\angle(A\hat{C}D)$ é reto e portando o triângulo ACD é retângulo em C. Daí, segue-se que:

$$cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}},$$

desse modo,

$$\overline{CD} = \overline{AD}cos(\alpha + \beta) \tag{2.14}$$

Sabe-se ainda que:

$$sen(\alpha + \beta) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}},$$

dessa forma,

$$\overline{AC} = \overline{AD}sen(\alpha + \beta) \tag{2.15}$$

Tomando, agora um ponto E sobre a circunferência tal que $\overline{BE}$ seja o diâmetro da circunferência. Como o ângulo $\angle(B\hat{E}C)$ está inscrito no arco $\widehat{BC}$, então $\angle(B\hat{E}C) \equiv \angle(B\hat{D}C)$. Logo, $\angle(B\hat{E}C) = \beta$. Como $\overline{AE}$ é o diâmetro da circunferência, então:

$$sen\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}},$$

ou seja,

$$\overline{BC} = \overline{BE}sen\beta.$$

Como $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ são diâmetros da circunferência, então $\overline{BE} \equiv \overline{AD}$. Logo:

$$\overline{BC} = \overline{AD}sen(\beta) \tag{2.16}$$

Do teorema de Ptolomeu, tem-se que:

$$\overline{AC}\cdot \overline{BD} = \overline{AB}\cdot \overline{CD} + \overline{BC}\cdot \overline{AD} \tag{2.17}$$

Substituindo as equações (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) em (2.22), obtem-se:

$$\overline{AD}sen(\alpha + \beta)\cdot \overline{AD}cos\alpha = \overline{AD}sen\alpha\cdot \overline{AD}cos(\alpha + \beta) + \overline{AD}sen\beta\cdot \overline{AD}$$

Dividindo ambos os membros da equação por $\frac{1}{\overline{AD}^2}$, com $\overline{AD}^2 \neq 0$, tem-se:

$$sen(\alpha + \beta)\cdot cos\alpha = sen\alpha\cdot cos(\alpha + \beta) + sen\beta,$$

ou seja,

$$sen\alpha\cdot cos(\alpha+\beta) = sen(\alpha+\beta)\cdot cos\alpha - sen\beta \tag{2.18}$$

do resultado do problema 1 deste capítulo, tem-se que:

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cdot cos\beta + sen\beta\cdot cos\alpha \tag{2.19}$$

Substituindo a equação (2.24) em (2.23), observa-se:

$$sen\alpha\cdot cos(\alpha+\beta) = [sen\alpha\cdot cos\beta + sen\beta\cdot cos\alpha]\cdot cos\alpha - sen\beta,$$

isto é,

$$sen\alpha\cdot cos(\alpha+\beta) = sen\alpha\cdot cos\alpha\cdot cos\beta + cos^2\alpha\cdot sen\beta - sen\beta$$

Como $cos^2(\alpha) = 1 - sen^2(\alpha)$, nota-se:

$$sen\alpha\cdot cos(\alpha+\beta) = [sen\alpha\cdot cos\beta + sen\beta\cdot cos\alpha]\cdot cos\alpha - sen\beta,$$

desse modo,

$$sen\alpha\cdot cos(\alpha+\beta) = sen\alpha\cdot cos\alpha\cdot cos\beta + [1 - sen^2(\alpha)]\cdot sen\beta - sen\beta,$$

dessa forma,

$$sen\alpha\cdot cos(\alpha+\beta) = [sen\alpha\cdot cos\beta + sen\beta\cdot cos\alpha]\cdot cos\alpha - sen\beta,$$

o que implica,

$$sen\alpha\cdot cos(\alpha+\beta) = sen\alpha\cdot cos\alpha\cdot cos\beta + sen\beta - sen^2(\alpha)\cdot sen\beta - sen\beta,$$

assim,

$$sen\alpha\cdot cos(\alpha+\beta) = sen\alpha\cdot cos\alpha\cdot cos\beta - sen^2(\alpha)\cdot sen\beta.$$

Dividindo ambos os membros da equação por $\frac{1}{sen(\alpha)}$, resulta:

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha\cdot cos\beta - sen\alpha\cdot sen\beta.$$

2.3 Problema 3:

Em uma circunferência se localizam os pontos A, B, C e D, tal que $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BC}) = m(\widehat{CD})$ e $\overline{AD} = 2\overline{AB}$. Calcule a $m(\widehat{CD})$.

Solução: De acordo com os dados da questão, tem-se que $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BC}) = m(\widehat{CD})$ logo, os segmentos $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Como $\overline{AD} = 2\overline{AB}$ e $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, então $\overline{AD}$ é

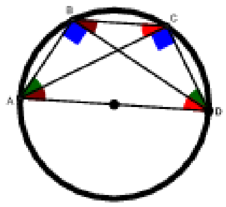


Figura 2.3: Quadrilátero inscrito na circunferência

o diâmetro da circunferência. Sendo assim, $\angle(A\hat{B}D)$ é reto. Logo, o triângulo ABD é triângulo retângulo em B. Daí, aplicando o teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2,$$

isto é,

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2. \tag{2.20}$$

Do mesmo modo, $\angle(A\hat{C}D)$ é reto pois está inscrito no mesmo arco $\widehat{AD}$. Logo, o triângulo ACD é retângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras obtem-se:

$$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2,$$

ou seja,

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CD}^2.$$

Como $\overline{CD} = \overline{AB}$, segue-se, daí que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2. \tag{2.21}$$

Comparando as equações, (2.12) e (2.13), tem-se:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BD}^2,$$

o que implica,

$$\overline{AC} = \overline{BD}. \tag{2.22}$$

Tomando para $\overline{AB} = a$, então, como $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$, conclui-se que: $\overline{BC} = \overline{CD} = a$. Como a medida do segmento $\overline{AD} = 2\overline{AB}$, então $\overline{AD} = 2a$. Seja, $\overline{AC} = b$, como $\overline{AC} = \overline{BD}$, então $\overline{BD} = b$. Aplicando o teorema de Ptolomeu, obtém-se:

$$b.b = 2a.a + a.a,$$

o que implica,

$$b^2 = 3a^2,$$

assim sendo,

$$b = a\sqrt{3}.$$

Como o triângulo ACD é retângulo em C, então aplicando a tangente em $\hat{A}$, tem-se:

$$tg(D\hat{A}C) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}.$$

Como $\overline{CD} = a$ e $\overline{AC} = a\sqrt{3}$, então:

$$tg(D\hat{A}C) = \frac{a}{a\sqrt{3}},$$

e portanto,

$$tg(D\hat{A}C) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Racionalizando o denominador, observa-se:

$$tg(D\hat{A}C) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $tg(D\hat{A}C) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então $D\hat{A}C = arctg(\frac{\sqrt{3}}{3})$, ou seja, $D\hat{A}C = 30^o$. Como o ângulo está inscrito no arco $\widehat{CD}$, então a medidado arco $\widehat{CD} = 60^o$.

2.4 Problema 4:

Em um quadrilátero ABCD se localiza o ponto L em $\overline{BD}$, tal que ABLE é um quadrilátero inscritível e $m\angle(B\hat{E}A) = m\angle(L\hat{E}D)$, $\overline{LD} = 2\overline{BL} = 8$ e $\overline{DE} = 2\overline{EL}$ e $\overline{AB} \cdot \overline{EL} = 40$. Calcule $\overline{AE}$.
Solução: Do enunciado da questão $\angle(B\hat{E}A) = \angle(L\hat{E}D)$. Como o quadrilátero ABLE é

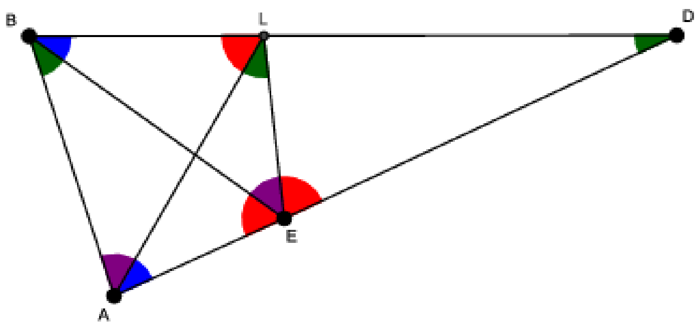


Figura 2.4: Quadrilátero inscrito na circunferência

inscritível, então pode-se afirmar que o ângulo $\angle(B\hat{L}A) \equiv \angle(B\hat{E}A)$ pois estão inscritos no mesmo arco.
Tem-se ainda que $\angle(E\hat{A}L) \equiv \angle(E\hat{B}L)$, pois estão inscritos no mesmo arco $\widehat{EL}$. Pelo

teorema do ângulo externo de um triângulo, vê-se que $\angle(A\hat{L}E) \equiv \angle(E\hat{D}L)$. Portanto, pelo segundo caso de semelhança (AA), os triângulos BDE e AEL são semelhantes, isto é, $\triangle(BDE) \sim \triangle(AEL)$. Desse modo:

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{EL}}{\overline{ED}}.$$

Como $\overline{DL} = 8$ e $\overline{BL} = 4$, então $\overline{BL} = 12$. Além disso, $\overline{ED} = 2\overline{EL}$. Logo,

$$\frac{\overline{AL}}{12} = \frac{\overline{EL}}{2\overline{EL}},$$

o que implica,

$$\overline{AL} = 6.$$

Observa-se ainda que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{EL}}{\overline{ED}}$$

Como $\overline{ED} = 2\overline{EL}$, obtém-se:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{EL}}{2\overline{EL}},$$

portanto,

$$\overline{BE} = 2\overline{AE}.$$

Como o quadrilátero ABLE é inscritível, pode ser aplicado o teorema de Ptolomeu, isto é,

$$\overline{AL}\cdot\overline{BE} = \overline{AB}\cdot\overline{EL} + \overline{BL}\cdot\overline{AE}.$$

Como do enunciado, tem-se que $\overline{AB}\cdot\overline{EL} = 40$, segue-se daí que:

$$6\cdot(2\overline{AE}) = 40 + 4\cdot\overline{AE},$$

desse modo,

$$12\overline{AE} = 40 + 4\overline{AE},$$

portanto,

$$\overline{AE} = 5.$$

2.5 Problema 5:

Segundo a figura $\overline{BP}\cdot\overline{CQ} = 10$; P e Q são pontos de tangência. Calcule $\overline{BC}\cdot\overline{PQ}$.

Solução: A figura 2.6, servirá de base para o entendimento da questão.

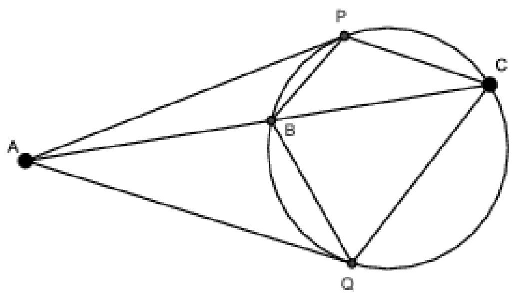


Figura 2.5: Quadrilátero inscrito na circunferência

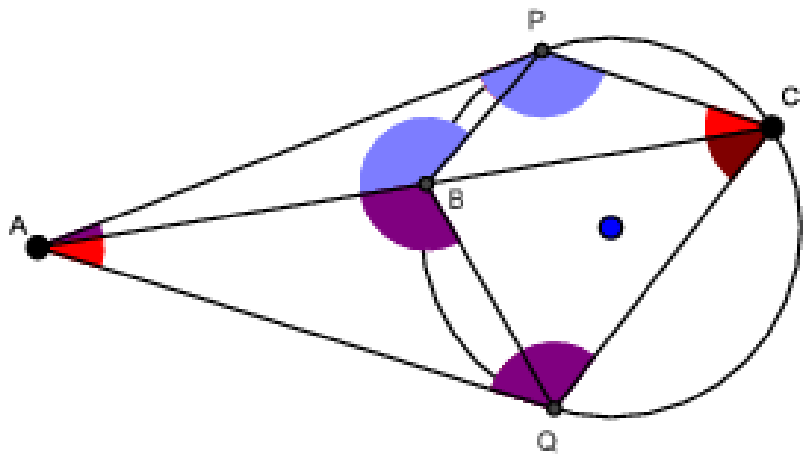


Figura 2.6: Quadrilátero inscrito na circunferência

Da figura tem-se que os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{AQ}$ são segmentos tangentes, pois os pontos P e Q são pontos de tangência. Como $\overline{AP}$ é um segmento tangente, então o ângulo $\angle(A\hat{P}B)$ é um ângulo de tangente.

Nota-se ainda que o ângulo $\angle(B\hat{C}P)$ é um ângulo inscrito no mesmo arco $\widehat{BP}$. Logo, $\angle(A\hat{P}B) \equiv \angle(B\hat{C}P)$. Além disso, o ângulo $\angle(B\hat{A}P)$ é um ângulo comum aos triângulos ABP e ACP, então pelo segundo caso de semelhança (AA) $\triangle ABP \sim \triangle ACP$. Segue-se daí que:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} \tag{2.23}$$

Do mesmo modo, o ângulo $\angle(A\hat{Q}B)$ é um ângulo de segmento e o ângulo $\angle(A\hat{C}Q)$ está inscrito no mesmo arco $\widehat{BQ}$ que o ângulo de segmento $\angle(A\hat{Q}B)$. Logo, $\angle(A\hat{Q}B) \equiv \angle(A\hat{C}Q)$. Como o ângulo $\angle(C\hat{A}Q)$ é um ângulo comum aos triângulos ABQ e ACQ, então pelo segundo caso de semelhança (AA), tem-se que $\triangle ABQ \sim \triangle ACQ$. Segue-se daí que:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} \tag{2.24}$$

Como os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{AQ}$ são segmentos tangentes de um mesmo ponto exterior à circunferência, então $\overline{AP} \equiv \overline{AQ}$. Comparando as equações (2.15) e (2.16), obtém-se:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}},$$

ou seja,

$$\overline{CP} \cdot \overline{BQ} = \overline{BP} \cdot \overline{CQ}$$

Pelo teorema de Ptolomeu, resulta que:

$$\overline{PQ} \cdot \overline{BC} = \overline{BP} \cdot \overline{CQ} + \overline{BQ} \cdot \overline{PC}$$

Como $\overline{CP} \cdot \overline{BQ} = \overline{BP} \cdot \overline{CQ}$ e $\overline{BP} \cdot \overline{CQ} = 10$, segue-se que:

$$\overline{PQ} \cdot \overline{BC} = 10 + 10,$$

portanto,

$$\overline{PQ} \cdot \overline{BC} = 20$$

Capítulo 3

Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo fazer uma revisão bibliográfica, de modo que possibilitasse fazer um estudo detalhado do teorema de Ptolomeu bem como conhecer suas aplicações voltada para o ensino de Matemática com o intuito de facilitar a aprendizagem no desenvolvimento de conteúdos envolvendo o ensino de Trigonometria.

O ensino de Matemática tem sofrido ao longo de sua história grandes mudanças e, com isso, tem feito com que professores dessa disciplina buscassem inovações e dá sentido ao ensino de mesma. Neste contexto, este trabalho apresenta uma proposta de aplicação do teorema de Ptolomeu para as demonstrações do seno da soma e cosseno da soma com o objetivo de mostrar a professores e alunos o sentido de utilização das fórmulas.

Com isso apresentou-se uma proposta de trabalho aplicando o teorema de Ptolomeu para o ensino de Trigonometria no ensino médio, visando uma melhor compreensão do ensino dessa disciplina para professores e alunos.

Portando, espera-se que este, contribua para um melhor entendimento do objeto de estudo apresentado, tornando a aprendizagem significativa e oferecendo ao leitor mais uma opção de abordar tais assuntos, levando-o a perceber o quanto se faz necessário o estudo desta disciplina para a compreensão do educando.

Referências Bibliográficas

[1] **Boyer**, Carl B.; MERZBACH, Uta C..*História da Matemática.* 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p.

[2] **Campos**, Prof.: Onofre. *O TEOREMA DE CASEY Uma generalização do teorema de Ptolomeu para quadriláteros inscritíveis*. Disponível em: www.obm.org.br/export/sites/defaut/semana_olimpica/docs/.../casey_onofre.doc. Acesso em: 10 abr. 2016.

[3] **Editores**, Asociación Fondo di Investigadores y. *Geometria: Una versión de la planimetria* Lima_peru: Lunbreras, 2014. 954 p.

[4] **Editores**, Asociación Fondo di Investigadores y. *Trigonometría: Plana y esférica e introducción al cálculo* Lima_peru: Lunbreras, 2014. 841 p.

[5] **Lages**, Elon Lages et al, *A Matemática do Ensino Médio, Volume 3*,Coleção Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2006, p.247

[6] **Muniz Neto**, Antonio Caminha, *Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2012, 417 p.

[7] **Muniz Neto**, Antonio Caminha, *Geometria*, Coleção do Profmat, SBM, Rio de Janeiro, 2013, 502 p.

[8] **Pedoe**, Dan, *Circles A mathematical View*,The Mathematical Association of America,Washington, 1994, p.138

[9] **Ostermann**, Alexander; WANNER, Gerhard. *Geometry by Its History* Switzerland: Springer, 2012. 437 p.

[10] http://space.about.com/cs/astronomerbios/a/ptolemybio.htm