



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

**Emerson Campos Pereira**

**Ferramentas de contagem e o estudo de partições de  
inteiros**

Itabaiana- SE

Julho de 2016

**Emerson Campos Pereira**

**Ferramentas de contagem e o estudo de partições de  
inteiros**

Dissertação apresentada ao  
Departamento de Matemática da  
Universidade Federal de Sergipe, como  
parte dos requisitos para a obtenção do  
título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Mateus Alegri

Itabaiana- SE

Julho de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA PROFESSOR ALBERTO CARVALHO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

P436f      Pereira, Emerson Campos  
            Ferramentas de contagem e o estudo de partições de inteiros /  
Emerson Campos Pereira ; orientador Mateus Alegri. – Itabaiana,  
2016.  
            66 f.

            Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática) –  
Universidade Federal de Sergipe, 2016.

            1. Conjuntos. 2. Análise combinatória. 3. Grafos. 4. Partições  
de inteiros. I. Alegri, Mateus. II. Título.

   CDU 511.178



PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



*Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

## **Ferramentas de contagem e o estudo de partições de inteiros** ***por***

Emerson Campos Pereira

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Mateus Alegri - UFS  
Orientador

Prof. Wagner Ferreira Santos - UFS  
Primeiro Examinador

Prof. Hassan Sherafat - UFS  
Segundo Examinador

Itabaiana, 23 de Julho de 2016.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze –  
Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887  
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelas graças recebidas, pelo dom da vida e pela força que me dá todos os dias para alcançar meus objetivos.

À minha família, em especial, aos meus pais, por sempre terem me proporcionado a oportunidade de realizar meus objetivos, apesar das dificuldades que os mesmos tiveram, sempre colocaram a educação como prioridade. Sempre serei grato pelo apoio, amor e confiança.

À minha esposa Adenise, pelo carinho, paciência e compreensão.

Aos professores da UFS, em especial ao professor orientador Dr. Mateus Alegri por toda atenção prestada, e por sempre estar à disposição para contribuir de todas as formas para que alcançasse o meu objetivo.

Agradeço aos amigos Anderson, Arionaldo, Djenal, Gildo, José Augusto, Paulo Victor, Marcelo, Mônica, Samilly, Simone e Silvanilton, da turma PROFMAT 2014, pela convivência harmoniosa ao longo de quase dois anos; tempo este em que fiz amizades que levarei por toda a minha vida.

Ao outro componente da turma, o amigo Jailson, um ser humano humilde e abençoado por Deus, agradeço de coração, pelo incentivo, pelos dias de estudo, pelas dicas pessoais, enfim, meu muito obrigado.

Agradeço ao amigo da turma PROFMAT 2013, o General John Willian, pois teve grande contribuição para que esse sonho se realizasse, foram muitas “batalhas” de estudos, antes e durante todo o período do mestrado. Meu muito Obrigado.

Ao amigo da turma PROFMAT 2015, Rokenedy, uma pessoa humilde, a qual tive a oportunidade de conviver durante os 4 anos de graduação e que hoje tenho como amigo pra toda vida.

Ao meu primo José Bispo “Bico Fino” (in memoriam), que infelizmente nos deixou exatamente no dia de minha defesa. Um ser humano incrível, o qual tive a oportunidade de conviver quase que diariamente; me ensinou muito sobre a vida, a dar valor as coisas pequenas e a valorizar a família e os amigos.

*Emerson Campos Pereira*

## RESUMO

Neste texto apresentaremos algumas ferramentas de contagem como grafos e funções geradoras. Antes discutiremos sobre os princípios básicos de contagem que são os princípios aditivo e multiplicativo. Ao final exibiremos um algoritmo que calcula o número de partições de inteiros que utiliza intrinsecamente a ideia de grafos.

**Palavras – chaves:** Conjuntos, relações, Análise Combinatória, Grafos, Partições de Inteiros.

## **ABSTRACT**

In this paper we present some counting tools like graphs and generating functions. Before we discuss about the basics of counting that are additive and multiplicative principles. At the end we show an algorithm that calculates the number of integer partitions that inherently uses the idea of graphs.

**Keywords:** sets, relations, Combinatorial Analysis, Graphs, Integer Partitions.

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>9</b>
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>10</b>
1.1 CONJUNTOS .....	10
1.2 PRODUTO CARTESIANO .....	12
1.3 FUNÇÕES .....	13
1.4 PRINCÍPIOS ADITIVOS E MULTIPLICATIVOS .....	14
1.5 PERMUTAÇÕES .....	19
1.6 COMBINAÇÕES .....	23
1.7 PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES GENERALIZADAS .....	27
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>34</b>
2.1 GRAFOS .....	34
2.2 GRAFOS CONEXOS .....	41
2.3 GRAFOS EULERIANOS .....	45
2.4 GRAFOS COLORÁVEIS .....	51
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>52</b>
3.1 PARTIÇÕES DE INTEIROS .....	52
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>67</b>



## INTRODUÇÃO

A Teoria de Grafos é um ramo da matemática que estuda as relações entre objetos de um determinado Conjunto. Muitos problemas, especialmente aqueles de natureza combinatória, podem ser traduzidos envolvendo grafos.

Nesse trabalho faremos um elo entre a teoria de grafos e partições de números inteiros, para isso apresentaremos um teorema relacionado ao estudo de partições que será demonstrado utilizando grafo.

No primeiro capítulo, apresentaremos os conteúdos de Conjuntos, Funções e Análise Combinatória e Função Geradora. Teremos um tratamento especial no estudo de combinatória, onde focaremos nos tipos de agrupamentos (permutações, arranjos e combinações) com e sem repetição e suas formas generalizadas.

No segundo capítulo, apresentaremos a Teoria de Grafos, abordando definições, lemas, proposições e teoremas e tipos de grafos especiais, tais como, Grafos Eulerianos, Grafos conexos e Grafos Coloráveis.

No terceiro capítulo um estudo das Partições de Números inteiros, apresentando uma breve introdução histórica desse conteúdo e posteriormente, abordaremos definições, proposições e alguns exemplos de partições. No final será demonstrado um Teorema utilizando como ferramenta a Teoria de Grafos.

## CAPÍTULO 1

Veremos nesse capítulo algumas notações e definições sobre Conjuntos, Produto Cartesiano, Relações, Funções, Função Geradora e Análise Combinatória, sendo que daremos uma maior ênfase a este último, apresentaremos também os dois princípios básicos (aditivo e multiplicativo), que serão essenciais em algumas demonstrações e no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

### 1.1 CONJUNTOS

**Definição 1.1.1** *Um conjunto é uma lista, coleção ou classe de objetos bem definidos, tipo: pessoas, plantas, animais, números e etc.. Os objetos do conjunto são chamados elementos ou membros do conjunto.*

Considerando  $A$  um conjunto e  $a$  um elemento de  $A$ , denotamos  $a \in A$ , o símbolo  $\in$  significa pertence.

**Exemplo 1** *Podemos citar o conjunto dos números naturais,  $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  e o conjunto dos números inteiros  $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$ .*

Caso um dado elemento  $b$ , não seja elemento de um conjunto  $A$  escrevemos  $b \notin A$ .

**Definição 1.1.2** *Dados os conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $B$  é um subconjunto de  $A$  se para todos  $b \in B$ ,  $b$  é um elemento  $A$ , escrevemos  $B \subset A$ .*

**Exemplo 2** *Sabemos que todo número natural é também um número inteiro, então escrevemos  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .*

Se  $B \subset A$  e  $A \subset B$ , ou seja, todo elemento de  $B$  é elemento de  $A$  e todo elemento de  $A$  é elemento de  $B$ , então  $A$  é igual a  $B$ , escrevemos  $A = B$ . Este é o *Princípio da Extencionalidade*.

Dois conjuntos importantes são: o conjunto Universal denotado por  $\Omega$  que é o conjunto de todos objetos em questão, e o conjunto Vazio denotado por  $\emptyset$  que não possui objeto.

**Definição 1.1.3** A união de dois conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto dos elementos que pertencem a  $A$  ou  $B$ , e é denotado por  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ .

**Exemplo 3** Se  $A$  é o conjunto dos números naturais pares,  $A = 2\mathbb{N}$  e  $B$  é o conjunto dos números naturais ímpares, então  $A \cup B = \mathbb{N}$ .

**Definição 1.1.4** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  definimos a interseção de  $A$  com  $B$  como sendo o conjunto contendo todos os elementos que são comuns a  $A$  e  $B$ , e representamos este por  $A \cap B$ . Em linguagem de conjuntos  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ .

Como exemplo podemos citar,  $\{0, 1, 6\} \cap \{3, 2, 1\} = \{1\}$ ;  $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ .

**Exemplo 4** A cidade de Itabaiana tem aproximadamente 100 mil habitantes, digamos que destes 70% possuem casa própria, 10% possuem caminhão e 8% possuem casa própria e caminhão. Qual o percentual dos que não possuem casa própria e nem caminhão?

Seja  $A$  o conjunto dos habitantes que possuem casa própria,  $B$  o conjunto dos habitantes que possuem caminhão e  $N$  o conjunto dos habitantes que não possuem casa e nem caminhão.

Então temos,

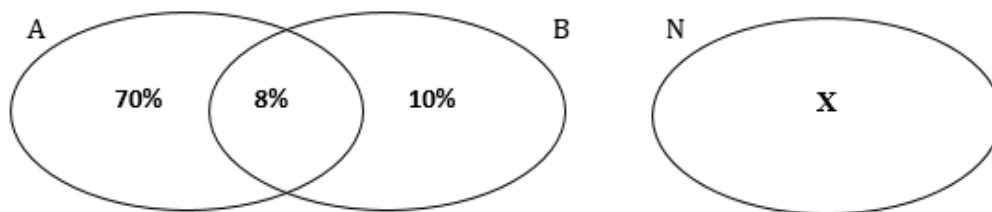


Figura 1.1

O percentual do conjunto  $A$  é de 70%, o  $B$  é de 10% e o  $A \cap B$  é de 8%, assim calculando  $A + B - A \cap B + N$  temos 100%, daí

$$70\% + 10\% - 8\% + X = 100\%$$

$$X = 100\% - 70\% - 10\% + 8\%$$

$$X = 28\%$$

Logo, o percentual dos habitantes que não possuem casa própria e nem caminhão é de aproximadamente 28%.

**Definição 1.1.5** *Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , definimos a diferença  $A - B$  como o conjunto de todos os elementos que são de  $A$ , mas não são elementos de  $B$ , denotamos este por  $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$ .*

Como exemplo,  $\mathbb{N} - 2\mathbb{N} = B$ , onde  $B$  é o conjunto dos números naturais ímpares.

## 1.2 PRODUTO CARTESIANO

**Definição 1.2.1** *O par  $(a, b)$  é definido como sendo o conjunto  $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ .\**

Veremos no teorema abaixo que de fato o par  $(a, b)$  é ordenado.

**Teorema 1.2.1**  *$(a, b) = (x, y)$ , se e somente se,  $a = x$  e  $b = y$ .*

### **Demonstração:**

Se  $a = x$  e  $b = y$ , obviamente  $(a, b) = (x, y)$ . Assumindo  $(a, b) = (x, y)$ , temos que  $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ , deste modo  $\{a\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ . Se  $\{a\} = \{x\}$ , obrigatoriamente, temos  $b = y$ . Mas se  $\{a\} = \{x, y\}$ , temos  $a = x = y = b$ , o que mostra a veracidade do teorema. ■

Assim dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , definimos o produto cartesiano de  $A$  e  $B$  como a coleção de pares ordenados  $(a, b)$ , onde  $a \in A$  e  $b \in B$ .

**Observação:** O par dado por  $(a, b) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{y\}\}$  é um par ordenado.

**Definição 1.2.2** *Dados dois conjuntos não vazios  $A$  e  $B$ , definimos o produto cartesiano  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ .*

**Exemplo 5** *O plano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$*

**Definição 1.2.3** *Dados dois conjuntos não vazios  $A$  e  $B$ , uma relação  $S$  é um subconjunto de  $A \times B$ .*

**Exemplo 6** *Se tomarmos uma reta no plano, está é uma relação em  $\mathbb{R}^2$ .*

Nosso objetivo agora é definir o conceito de funções, faremos isto utilizando o princípio de relações.

### 1.3 FUNÇÕES

Nesta seção estudaremos uma relação específica em  $A \times B$ , onde  $A$  e  $B$  são conjuntos não vazios.

**Definição 1.3.1** *Dados conjuntos  $A$  e  $B$  não vazios, uma função  $f$  é uma relação entre  $A$  e  $B$  tal que para todo  $a \in A$ , existe apenas um único  $b \in B$ , onde o par  $(a, b) \in f$ .*

Normalmente representa-se  $f$  como um mapa,  $f: A \rightarrow B$ , e se  $b \in B$ , tal que  $(a, b) \in f$ , denotamos  $b$  por  $f(a)$ , ou seja,  $b = f(a)$ . O conjunto  $A$  é chamado de domínio de  $f$  e  $B$  de contradomínio de  $f$ .

Definimos o conjunto imagem de  $f$  por  $\{b \mid f(a) = b, \text{ onde } a \in A\}$  e denotamos este conjunto por  $Imf$ .

**Observação 1.3.1** *Para que a relação  $f: A \rightarrow B$  seja uma função, basta verificarmos a seguinte propriedade:*

*Se para todo  $a \in A$ ,  $(a, b), (a, c) \in f \rightarrow b = c = f(a)$ . Quando isso ocorre dizemos que a função está bem definida.*

**Exemplo 7** *Seja  $A = \{-1, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{1, 16, 81\}$  e considere  $f = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 16), (3, 81)\}$ . O conjunto  $f$  é uma função que mapeia os elementos de  $A$  para  $B$ . Verifica-se que neste caso o contradomínio e a imagem de  $f$  são iguais, ou seja,  $Imf = B$ .*

Normalmente descrevemos uma função por meio algébrico, no exemplo acima podemos escrever a função  $f$  como  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $f$  é dada por  $f(x) = x^4$ .

Em seguida definiremos uma função *bijetora*, para isso veremos duas importantes propriedades.

**Definição 1.3.2** Uma função  $f: A \rightarrow B$  é dita ser *injetora* se para quaisquer dois elementos distinto de  $A$ , suas imagens são distintas. Formalmente, a função  $f$  é injetora se  $a \neq b$  então  $f(a) \neq f(b)$  para quaisquer  $a$  e  $b \in A$ .

**Definição 1.3.3** Uma função  $f: A \rightarrow B$  é dita ser *sobrejetora* se  $B = \text{Im}f$ .

**Definição 1.3.4** Quando uma função é injetora e sobrejetora, dizemos que essa é uma função *bijetora*.

**Exemplo 8** Vimos no exemplo anterior que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada pela lei  $f(x) = x^4$ , observe que  $f$  não é injetora, pois,  $f(-1) = 1 = f(1)$ . A função  $f$  também não é sobrejetora, pois,  $\text{Im}f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \neq \mathbb{R}$ , portanto  $f$  não é bijetora. No entanto se alterarmos o domínio e contradomínio de  $f$  para  $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ,  $f$  será injetora e sobrejetora, portanto será bijetora.

**Observação 1.3.2** Para verificar se uma função  $f: A \rightarrow B$  é injetora basta verificarmos utilizando a contra positiva, se  $f(a) = f(b)$  então  $a = b$ , para todos elementos  $a, b \in A$ . E uma função  $f: A \rightarrow B$  é sobrejetora se para todo  $b \in B$ , existe um elemento  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ , ou seja, para todo  $b \in B$ , existe pelo menos um par  $(a, b) \in f$ .

Nosso objetivo é estabelecer os princípios da contagem, que são o princípio aditivo e multiplicativo. Portanto utilizaremos a ideia de funções bijetoras.

## 1.4 PRINCÍPIOS ADITIVOS E MULTIPLICATIVOS

Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são chamados equivalentes, se e somente se, existe uma função bijetiva do conjunto  $A$  para o conjunto  $B$ , denotamos  $A \sim B$ .

**Definição 1.4.1** Um conjunto  $A$  é dito finito com  $n$  elementos, se e somente se, ele é equivalente ao conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  de números naturais.

**Exemplo 9** O conjunto vazio é considerado finito com zero elemento.

### Observação 1.4.1

Um conjunto  $A$  que não é finito é chamado infinito. Um conjunto é chamado infinitamente contável se e somente se ele é equivalente ao conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$  de números naturais. Denotamos por  $a_k$  o elemento de  $A$  que corresponde ao número natural  $k$ , para  $k = 1, 2, \dots$ , o conjunto  $A$  pode ser representado por  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  se é finito com  $n$ , ou por  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$  se ele é infinitamente contável. Um conjunto  $A$  é contável se ele é finito ou infinitamente contável, caso contrário  $A$  é incontável.

As configurações de contagem constituem uma parte importante da análise combinatória. O conjunto de configurações é finito em qualquer caso e por isso é um problema de contagem que envolve elementos de um conjunto.

O número de elementos de um conjunto finito  $A$  é denotado por  $N(A)$  ou  $|A|$  e é chamado *cardinalidade*. No caso de um conjunto finito universal  $\Omega$ , sua cardinalidade é dada por  $N(\Omega) = N$ .

**Lema 1.4.1** Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos e equivalentes, então  $N(A) = N(B)$ .

Assim, a cardinalidade de um conjunto finito  $A$  pode ser deduzida por determinação de um conjunto  $B$  finito, equivalente a  $A$ , e com cardinalidade conhecida.

Veremos algumas propriedades básicas de cardinalidade que serão provadas no próximo teorema.

### Teorema 1.4.1

- i) Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos e disjuntos, então

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

- ii) Se  $A$  é um subconjunto de um conjunto universal finito  $\Omega$  e  $A'$  seu complementar, então

$$N(A) = N(\Omega) - N(A').$$

- iii) Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos, então  $N(A - B) = N(A) - N(A \cap B)$  e em particular se  $B \subseteq A$ , temos

$$N(A - B) = N(A) - N(B).$$

**Demonstração:**

- i) Como  $A \cap B = \emptyset$ , cada elemento de  $A \cup B$  pertence unicamente a  $A$  ou a  $B$ , assim

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

- ii) Note que  $A$  e  $A'$  são disjuntos então de acordo com o item i) temos,

$$N(A \cup A') = N(A) + N(A');$$

além disso,  $A \cup A' = \Omega$ , logo

$$N(\Omega) = N(A \cup A') = N(A) + N(A') \quad \text{e} \quad N(A) = N(\Omega) - N(A')$$

- iii) Como  $(A \cap B') \cap (A \cap B) = (A \cap A) \cap (B' \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$  os conjuntos

$A \cap B' = A - B$  e  $A \cap B$  são disjuntos e, além disso,

$$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap \Omega = A$$

Consequentemente

$$N(A) = N((A \cap B') \cup (A \cap B)) = N(A \cap B') + N(A \cap B)$$

e

$$N(A - B) = N(A \cap B') = N(A) - N(A \cap B)$$

em particular, para  $B \subseteq A$ , donde  $A \cap B = B$ , segue que

$$N(A - B) = N(A) - N(B)$$

com isso conclui-se a demonstração do teorema. ■

**Corolário 1.4.1** *Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são conjuntos finitos e pares distintos, então*

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \dots + N(A_n)$$



**Teorema 1.4.2** Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos, então  $N(A \times B) = N(A) \cdot N(B)$

**Demonstração:**

Seja  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  e  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ . O conjunto  $A$  pode ser escrito da forma  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ , com  $A_i = \{a_i\}$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, k$  e o produto cartesiano  $A \times B$  de acordo com o Teorema 1.4.1 podemos escreve-lo

$$A \times B = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B) \cup \dots \cup (A_k \times B),$$

em que os conjuntos  $A_1 \times B, A_2 \times B, + \dots + A_k \times B$  são pares distintos. Daí

$$N(A \times B) = N(A_1 \times B) + N(A_2 \times B) + \dots + N(A_k \times B).$$

**Observação 1.4.2** Note que para qualquer  $i = 1, 2, \dots, k$ , o Produto Cartesiano  $A_i \times B$  é o conjunto dos pares ordenados  $(a_i, b_j)$  com o primeiro elemento sendo único elemento  $a_i$  do conjunto  $A_i = \{a_i\}$  e segundo elemento sendo qualquer elemento  $b_j$ , para  $j = 1, 2, \dots, r$  do conjunto  $B$ , daí temos que

$$N(A_i \times B) = N(B), i = 1, 2, \dots, k$$

assim

$$N(A \times B) = kN(B) = N(A) \cdot N(B)$$

com isso demonstra-se o teorema. ■

**Corolário 1.4.2** Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são conjuntos finitos, então

$$N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot \dots \cdot N(A_n) \quad (1.1)$$

**Demonstração:**

Note primeiro que, de acordo com o Teorema 1.4.2, a relação (1.1) vale para  $n = 2$ . Suponha que esta relação seja válida para  $n - 1$ , isto é,

$$N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) = N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot \dots \cdot N(A_{n-1})$$

Mostraremos agora que a relação (1.1) vale também para  $n$ . Para isso, tome  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}$  e  $B = A_n$ , assim temos

$$A \times B = (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n$$

Assim, de acordo com o Teorema 1.4.2,  $N(A \times B) = N(A) \cdot N(B)$ , e a hipótese que a relação (1.1) vale para  $n - 1$ , segue que

$$\begin{aligned} N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} \times A_n) &= N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}) \cdot N(A_n) \\ &= N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot \dots \cdot N(A_{n-1}) \cdot N(A_n) \end{aligned}$$

E de acordo com o princípio da indução matemática, a relação (1.1) é válida para todo  $n$  natural.

### **Exemplo 10** *Sistema Numérico Binário*

No sistema binário cada número de série é representado por uma sequência binária de 0's e 1's. Por exemplo, os números 5 e 11, são expressos em termos de potência de 2, assim,  $5 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$  e  $11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ , estão representados pelas sequências binárias (1, 0, 1) e (1, 0, 1, 1) respectivamente. Note que, com a exceção do número 0 (zero), o qual é representado pelo dígito "0", todas as outras sequências de dígitos binários começam com o dígito "1".

Vejamos agora como calcular o número de sequência binárias de quatro dígitos.

O primeiro dígito é necessariamente 1. Além disso, uma sequência binária de quatro dígitos (1,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ) corresponde unicamente a uma ordenada tripla ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ) com  $a_i \in A_i = \{0, 1\}$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Assim o conjunto  $B_4$  de quatro dígitos é equivalente ao conjunto  $A_1 \times A_2 \times A_3$ , e triplos ordenados com  $a_i \in A_i = \{0, 1\}$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Assim pelo corolário 1.4.2 temos

$$N(B_4) = N(A_1 \times A_2 \times A_3) = N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot N(A_3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3.$$

### **Exemplo 11** *Decomposição de um número inteiro positivo*

Avaliar o número de inteiros positivos que são fatores de 300 é expressar o 300 como produto de fatores primos, como,  $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ . Cada fator desse número é da forma  $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\theta$  com  $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\beta \in \{0, 1\}$  e  $\theta \in \{0, 1, 2\}$ . Portanto o número diferente de fatores de 300 é:

$$N(A_1 \times A_2 \times A_3) = N(A_1) \cdot N(A_2) \cdot N(A_3) = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$$

## **1.5 PERMUTAÇÕES**

**Definição 1.5.1** *Seja  $W_n = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ , um conjunto finito com  $n$  elementos. Uma ordenada  $k$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , com  $a_r \in W$ ,  $r \in \{1, 2, \dots, k\}$  e  $a_i \neq a_j$  para  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  é chamada  $k$ -permutação  $W_n$  ou simplesmente  $k$ -permutação de  $n$ .*

**Exemplo 12** *Aplicando esta definição para  $n = 4$  e  $k = 2$ , a 2-permutação do conjunto  $W_4 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  segue abaixo:*

$$(w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_1, w_4), (w_2, w_1), (w_2, w_3), (w_2, w_4), \\ (w_3, w_1), (w_3, w_2), (w_3, w_4), (w_4, w_1), (w_4, w_2), (w_4, w_3)$$

Observe que o primeiro elemento  $w_i$  com  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  pode ser selecionado de quatro maneiras do conjunto  $w_i$ , selecionado o primeiro elemento, podemos escolher o segundo elemento do conjunto  $W_4 - \{w_i\}$  de 3 formas, assim pelo princípio multiplicativo a 2-permutação possui  $4 \cdot 3 = 12$  elementos.

Caso haja repetição por exemplo,  $(a_1, a_1)$ , teremos 4 formas de escolher o primeiro e o segundo elemento do conjunto  $W_4$ , logo a permutação tem  $4 \cdot 4 = 16$  elementos.

**Teorema 1.5.1** *O número de  $k$ -permutações de  $n$ , representado por  $P(n, k)$  ou  $(n)_k$ , é dado por*

$$P(n, k) \equiv (n)_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

### Demonstração:

Seja  $P_k(W_n)$  o conjunto de  $k$  - permutação do conjunto  $W_n = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ . Em todas  $k$  - permutações  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  do conjunto  $W_n$  o primeiro elemento  $a_1$  pode ser selecionado do conjunto  $A_1 = W_n$  de  $n$  elementos, após a escolha do primeiro elemento, o segundo elemento  $a_2$  diferente de  $a_1$ , pode ser selecionado a partir do conjunto  $A_2 = W_n - \{a_1\}$  com  $n - 1$  elementos. Portanto, após a seleção dos elementos  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ , o último elemento  $a_k$  diferente dos  $k - 1$  elementos anteriores, pode ser escolhido a partir do conjunto  $A_k = W_n - \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$  com  $n - (k - 1)$  elementos. Assim, de acordo com o princípio multiplicativo

$$P(n, k) = N(P_k(W_n)) = N(A_1).N(A_2). \dots .N(A_k) = n(n - 1) . \dots .(n - k + 1).$$

Com essa relação concluímos a demonstração.

### Observação 1.5.1

$$P(n, k) = n(n - 1) \dots (n - k + 1) = \frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)(n - k)!}{(n - k)!} = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Logo

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Para o caso particular,  $k = n$ , das permutações de  $n$ , segue o corolário abaixo.

**Corolário 1.5.1** *O número de permutações de  $n$ , representado por  $P(n)$ , é dado por*

$$P(n) \equiv P(n, n) = n(n - 1). \dots .3. 2. 1$$

**Exemplo 13** *Considere um homem que tem cinco chaves diferentes, das quais apenas uma se encaixa no cadeado de um baú. Ele não reconhece a chave apropriada e tenta as chaves uma após a outra, até que se abra o cadeado. Vamos descobrir o número de maneiras que ele pode tentar abrir o cadeado de modo que ele tenha êxito (a) na terceira tentativa, (b) até a terceira tentativa e (c) na última tentativa.*

(a) Vamos numerar as cinco chaves diferentes de 0 - 4 atribuir o número 0 para a chave que se encaixa no cadeado. Note que, para uma sequência de três tentativas, em que na terceira tentativa o cadeado se abre, corresponde a um ordenado triplo  $(a_1, a_2, 0)$ , onde  $a_j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $a_1 \neq a_2$ . Assim, o número necessário de sequências de

três tentativas é igual ao número de 2 - permutações,  $(a_1, a_2)$ , do conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ , de quatro elementos, que é  $P(4, 2) = 4 \cdot 3 = 12$ . São elas,  $(1,2,0)$ ,  $(1,3,0)$ ,  $(1,4,0)$ ,  $(2,1,0)$ ,  $(2,3,0)$ ,  $(2,4,0)$ ,  $(3,1,0)$ ,  $(3,2,0)$ ,  $(3,4,0)$ ,  $(4,1,0)$ ,  $(4,2,0)$ ,  $(4,3,0)$ .

(b) O número de maneiras para que ele obtenha sucesso até a terceira tentativa, de acordo com o princípio aditivo, é igual à soma dos números de maneiras que ele consiga na primeira ou segunda ou terceira tentativa. Como o número de maneiras que ele pode tentar abrir o cadeado na  $k$  - ésimo é igual ao número  $P(4, k - 1) = (4)_{k-1}$  da  $(k - 1)$  - permutações do conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ , com quatro elementos, para  $k = 1, 2, 3, 4$ , assim o número requerido é dado pela seguinte soma

$$S_{4,3} = \sum_{k=1}^3 (4)_{k-1} = 1 + 4 + 12 = 17$$

(c) O número de maneiras que ele pode tentar abrir o cadeado para que ele consiga na quinta (última) tentativa, de acordo com a análise de (a), é igual ao número de permutações  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ , do conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ , de quatro elementos, que é dado por  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

**Teorema 1.5.2** O número  $P(n, k) = (n)_k$ , de  $k$  - permutações de  $n$ , satisfaz a seguinte relação de recorrência

$$P(n, k) = P(n - 1, k) + kP(n - 1, k - 1), \quad (1.1)$$

para  $k = 1, 2, \dots, n$ , com  $n = 1, 2, \dots$ , e

$$P(n, k) = nP(n - 1, k - 1) = (n - k + 1)P(n, k - 1), \quad (1.2)$$

para  $k = 1, 2, \dots, n$ , com  $n = 1, 2, \dots$ , com condição inicial:

$$P(n, 0) = 1, \text{ com } n = 0, 1, 2, \dots, P(n, k) = 0, k > n.$$

**Demonstração:**

Seja  $P_k(W_n)$  o conjunto de  $k$  - permutações do conjunto  $W_n = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ . Se  $Q$  é conjunto de  $k$  - permutações de  $W_n$  que não incluem o elemento  $w_n$  e  $S$  o conjunto de  $k$  - permutações de  $W_n$  que incluem o elemento  $w_n$ , assim  $Q \cap S = \emptyset$ , e  $P_k(W_n) = Q \cup S$ . Portanto, de acordo com o princípio aditivo temos  $N(P_k(W_n)) = N(Q) + N(S)$ .

Claramente,  $Q = P_k(W_{n-1})$  e  $N(Q) = N(P_k(W_{n-1})) = P(n-1, k)$ . Além disso, a partir de cada  $(k - 1)$  - permutações de  $W_{n-1}$ , unindo o elemento  $w_n$  em qualquer um das  $k$

posições possíveis (uma antes do primeiro elemento, entre  $k - 2$  e  $k - 1$ , ou uma posição após o último elemento),  $k$  diferentes  $k$  - permutações de  $W_n$  que incluam o elemento  $w_n$ , são construídas. Portanto

$$N(S) = kN(P_{k-1}(W_{n-1})) = kP(n-1, k-1)$$

e

$$P(n, k) = P(n-1, k) + kP(n-1, k-1), \quad k = 1, 2, \dots, n, \text{ com } n = 1, 2, \dots,$$

Para provar a relação (1.2) note que os primeiro  $r$  (ordenado) elementos,  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ , de uma  $k$  - permutação,  $(a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_k)$ , de  $W_n$ , podem ser escolhidos a partir do conjunto  $A_1 = W_n$  em  $P(n, r)$  maneiras. Após essa seleção, os próximos  $k - r$  (ordenados) elementos,  $(a_{r+1}, \dots, a_k)$ , podem ser escolhidos a partir do conjunto  $A_2 = W_n - \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$  de  $P(n-r, k-r)$  maneiras. Portanto, de acordo com o princípio multiplicativo,

$$P(n, k) = P(n, r)P(n-r, k-r), \quad r = 1, 2, \dots, k, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n.$$

Em particular, para  $r = 1$  e  $r = k - 1$ , assim  $P(n, 1) = n$  e  $P(n - k + 1, 1) = n - k + 1$ , a primeira e segunda relação de recorrência de (1.2) são deduzidas.

As condições iniciais, que muitas vezes não têm nenhum significado combinatório, são escolhidas de tal modo que a sua introdução na relação de recorrência dá os valores de correção para os termos subsequentes que têm um significado combinatório e valores conhecido. Assim, a partir de  $P(n, 1) = n$ , para  $n = 1, 2, \dots$  e a relação de recorrência (1.1), segue abaixo

$$P(n, 0) = P(n+1, 1) - P(n, 1) = n+1 - n = 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

A condição inicial  $P(n, k) = 0$  para  $k > n$  é óbvio. Estas são também as condições iniciais para a relação de recorrência (1.2).

**Corolário 1.5.2** *O número  $P(n) = n!$  de permutações de  $n$ , satisfaz a relação de recorrência  $P(n) = nP(n-1)$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , com condição inicial  $P(0) = 1$ .*

**Teorema 1.5.3** O número de  $k$  – permutações de  $n$  com (sem restrições) repetição, denotado por  $U(n, k)$ , é dado por

$$U(n, k) = n^k$$

**Demonstração:**

Note que, em qualquer  $k$  – permutação  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , do conjunto  $W_n = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  com repetição, o elemento  $a_i$  pode ser escolhido a partir do conjunto  $A_i = W_n$ , com  $n$  elementos,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Portanto,  $U_k(W_n) = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$  é o conjunto das  $k$  – permutações do conjunto  $W_n$  com repetição e de acordo com o princípio multiplicativo,

$$\begin{aligned} U(n, k) &= N(U_k(W_n)) = N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \\ &= N(A_1) \times N(A_2) \times \dots \times N(A_k) = n^k. \end{aligned}$$

Com isso a prova do teorema está completa. ■

**Exemplo 14** Suponha que dispomos de 8 bolas, 2 brancas, 3 azuis, 3 amarelas. De quantas maneiras podemos coloca – las em uma urna?

Neste caso as bolas de cores idênticas são indistinguíveis. Assim temos que eliminar repetições nesta contagem. Se estas bolas fossem distintas uma a uma, teríamos  $8!$  maneiras de colocar estas bolas na urna. Podemos escolher a bola azul de  $3!$  maneiras, a branca de  $2!$  maneiras, e a amarela de  $3!$  maneiras. Assim temos  $\frac{8!}{2! 3! 3!}$  maneiras distintas de colocar as bolas na urna.

## 1.6 COMBINAÇÕES

**Definição 1.6.1** Seja  $W_n = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ , um conjunto de  $n$  elementos. A um subconjunto (não ordenado) de  $k$  elementos  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , com  $a_r \in W_n$ ,  $r = 1, 2, \dots, k$  ( $k \leq n$ ), é chamado  $k$  - combinação do conjunto  $W_n$  ou simplesmente  $k$  - combinação de  $n$ .

**Exemplo 15** A 2 - combinação do conjunto  $W_4 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  com repetição segue abaixo.

$$\begin{aligned} &\{w_1, w_1\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_4\}, \{w_2, w_2\}, \\ &\{w_2, w_3\}, \{w_2, w_4\}, \{w_3, w_3\}, \{w_3, w_4\}, \{w_4, w_4\} \end{aligned}$$

Considere também a 2-combinação do conjunto  $W_4 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  sem repetição.

$$\begin{aligned} &\{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_4\}, \\ &\{w_2, w_3\}, \{w_2, w_4\}, \{w_3, w_4\} \end{aligned}$$

**Teorema 1.6.1** *O número de  $k$ -combinação de  $n$ , denotado por  $C(n, k)$  ou  $\binom{n}{k}$ , é dado por:*

$$C(n, k) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Demonstração:**

Considerando as  $k$ -permutações de  $n$  elementos temos  $P(n, k)$  deles. Dada uma combinação  $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , com  $a_r \in W_n$ ,  $r = 1, 2, \dots, k$  ( $k \leq n$ ) temos  $k!$  permutações distintas a partir deste conjunto. Logo  $k! C(n, k) = P(n, k)$  e assim:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Exemplo 16** *Quantos triângulos podem ser traçados utilizando 10 pontos (sem ter 3 alinhados) de um plano?*

Como não há três pontos alinhados, basta escolhermos 3 pontos dentre os 10 para traçarmos o triângulo. Assim temos  $C(10, 3) = \frac{10!}{3!(10-3)!}$ .

**Proposição 1.6.1**  $C(n, k) = C(n, n-k)$

**Demonstração:**

A cada combinação de  $k$  elementos temos o complementar associado a esta, que é uma  $n-k$  combinação de  $n$  elementos. Deste modo estabelecemos uma bijeção entre conjuntos. Assim temos  $C(n, k) = C(n, n-k)$ .

**Exemplo 17** *De quantas maneiras podemos alocar em fila 6 sinais (+) e 8 sinais (-)?*



Podemos considerar o problema como equivalente ao de se ter 14 lugares para serem preenchidos com 6 sinais (+) e 8 sinais (-). Neste caso, tanto faz escolhermos 6 lugares dentre os 14 para colocarmos os sinais (+) e nos que sobrares colocarmos os 8 sinais (-) ou escolhermos 8 lugares dentre os 14 para colocarmos os sinais (-) e nos que sobrares colocarmos os sinais (+), visto que  $C_{14}^6 = C_{14}^8 = \frac{14!}{6!8!} = 3003$ . Portanto, há 3003 maneiras de alocarmos em fila 6 sinais (+) e 8 sinais (-).

**Teorema 1.6.2 Triângulo de Pascal.**

O número  $C(n, k) = C(n - 1, k) + C(n - 1, k - 1)$ , com  $k = 1, 2, \dots, n$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , com a condição inicial  $(n, 0) = 1, n = 0, 1, \dots$  e  $(n, k) = 0$  se  $k > n$ .

**Demonstração:**

Seja  $C_k(W_n)$  o conjunto de  $k$  - combinação do conjunto  $W_n = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ . Se  $A$  é um conjunto das  $k$  - combinações de  $W_n$  que não incluem o elemento  $w_n$  e  $B$  o conjunto das  $k$  - combinações de  $W_n$  que incluem o elemento  $w_n$ , então  $A \cap B = \emptyset$  e  $C_k(W_n) = A \cup B$ . Consequentemente, de acordo com o princípio aditivo temos

$$N(C_k(W_n)) = N(A) + N(B).$$

Aparentemente,  $A = C_k(W_{n-1})$  e  $N(A) = N(C_k(W_{n-1}))$ . Além disso um dos  $k$  elementos da  $k$  - combinação  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k\}$  pertence ao conjunto  $B$ , é o elemento  $w_n$  e uma vez que a ordem dos elementos não importa, pode-se supor que  $a_k = w_n$  e  $a_r \in W_{n-1}, r = 1, 2, \dots, k-1$ . Assim cada  $k$  - combinação  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, w_n\}$  pertencente a  $B$  corresponde a uma e somente uma  $k$  - combinação  $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$  pertencente a  $C_{k-1}(W_{n-1})$  e inversamente. Portanto

$$N(B) = N(C_{k-1}(W_{n-1}))$$

e

$$N(C_k(W_n)) = N(C_k(W_{n-1})) + N(C_{k-1}(W_{n-1}))$$

Dai implica

$$C(n, k) = C(n - 1, k) + C(n - 1, k - 1).$$

## Coeficientes Binomiais e Multinomiais

### Teorema 1.6.3 Coeficiente Multinomial

Em um termo típico da expansão  $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ , a variável  $x_i$  com  $i = 1, 2, \dots, k$ , aparece  $n_i$  vezes (onde  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ ) e o coeficiente do termo típico é dado por  $C(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$

#### Demonstração:

A primeira parte da afirmação é óbvia desde que a expansão é o produto de  $n$  expressões onde cada expressão é a soma das  $k$  variáveis. Um típico termo aqui é nada mais que uma permutação generalizada de  $n$  objetos em uma coleção  $X$  consistindo de grupos  $k$ , e, portanto, o coeficiente do termo típico é a número de permutações de tais generalizadas.

**Exemplo 17** O coeficiente do termo  $a^2b^3c^4d^5$  na expansão de  $(a + b + c + d)^{15}$  é  $\frac{15!}{2!3!4!5!}$ .

### Exemplo 18 Coeficiente Binomial

O Teorema Multinomial para  $k = 2$  é conhecido como Teorema Binomial que pode ser indicado por  $(x + y)^n = \sum C(n, n - r) x^{n-r} y^r$  com  $r = 0, 1, \dots, n$ .

O lado direito dessa expressão é chamada de expansão binomial de  $(x + y)^n$ . Os coeficientes  $C(n, r)$  que aparecem na expansão são chamados de coeficientes binomiais.

Os coeficientes binomiais de  $(x + y)^n$  podem ser calculados, se sabermos o coeficiente binomial de  $(x + y)^{n-1}$ , utilizando a fórmula de Pascal:

$$C(n, r) = C(n - 1, r) + C(n - 1, r - 1).$$

Assim, os coeficientes binomiais podem ser arranjados sob a forma de um triângulo conhecido como triângulo de Pascal.

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	

### 1.7 PERMUTAÇÕES E COMBINAÇÕES GENERALIZADAS

Problema: Suponha que dispomos de 20 bolas de cores, branca, azul e preta. No caso há 10 bolas brancas, 6 azuis e 4 pretas. Partindo do princípio que as bolas são apenas distinguíveis por cores, de quantas maneiras podemos organizá-las?

Se as bolas forem uma a uma distinguíveis, teremos  $20!$  maneiras. Porém precisamos retirar os casos idênticos. Assim temos  $\frac{20!}{10!6!4!}$  maneiras de alocar estas bolas.

A ideia deste problema está ligada à permutação generalizada.

**Definição 1.7.1** *Seja  $w_n$  uma coleção com  $n$  elementos não necessariamente distintos. Se há grupos de elementos (cada grupo tendo  $n_i$  elementos ( $1 \leq i \leq k$ )), onde  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ , uma permutação generalizada de  $w_n$  é uma  $n$ -upla de elementos de  $w_n$ .*

**Exemplo 19** *Considere as bolas:*

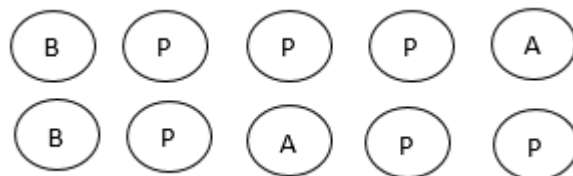


Figura 1.2

São exemplos de uma 5 - permutação generalizada em  $w_n$ : B, P, P, A, P.

O número de  $n$  permutações generalizada é  $P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ ,

onde  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

**Observação 1.7.1**  $P(n; 1, 1, \dots, 1) = P(n)$

**Exemplo 20** Qual o número de anagramas da palavra ARARAQUARA

$$P(10, 2, 3, 5) = \frac{10!}{2! 3! 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520.$$

**Definição 1.7.2** Seja  $w_n$  uma coleção de  $n$  objetos, em  $k$  grupos, cada grupo contendo  $n_i$  elementos iguais ( $1 \leq i \leq k$ ), uma  $n$ -combinação generalizada de  $w_n$  é uma subcoleção de  $w_n$  onde cada grupo fica agrupado.

**Exemplo 21**  $w_n = \{a, a, b, b, b, c, c\}$

$\{b, b, b, a, a, c\}$  é uma 6 – combinação generalizada de  $w_n$ .

O número de uma  $n$  – combinação generalizada é  $C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n, n_1) \cdot C(n - n_1, n_2) \cdot \dots \cdot C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k)$ .

**Exemplo 22**

$$C(15, 3, 5, 7) = C(15, 3) \cdot C(12, 5) \cdot C(7, 7) = \frac{15!}{3! 12!} \cdot \frac{12!}{5! 7!} \cdot 1 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = 36855$$

Na seguinte proposição vamos mostrar que o número de  $n$  – combinações generalizadas é igual ao número de  $n$  – permutações generalizadas.

**Proposição 1.7.1**  $P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = C(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} C(n; n_1, n_2, \dots, n_k) &= C(n, n_1) \cdot C(n - n_1, n_2) \cdot \dots \cdot C(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}, n_k) = \\ &= \frac{n!}{n_1! (n - n_1)!} \cdot \frac{(n - n_1)!}{n_2! (n - n_1 - n_2)!} \cdot \frac{(n - n_1 - n_2)!}{n_3! (n - n_1 - n_2 - n_3)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1})!}{n_k! (n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1} - n_k)!} \\ &= \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k! 0!} = P(n; n_1, n_2, \dots, n_k). \end{aligned}$$

### Exemplo 23

$$C(15, 3, 5, 7) = C(15, 3) \cdot C(12, 5) \cdot C(7, 7) = \frac{15!}{3! 12!} \cdot \frac{12!}{5! 7!} \cdot 1 = \frac{15!}{3! 5! 7!} = P(15, 3, 5, 7).$$

Vamos agora, de certo modo, generalizar o Teorema Binomial que trata da expansão  $(a + b)^n$ .

### Teorema 1.7.1

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n = n_1 + n_2 + \dots + n_k} C(n, n_1, n_2, \dots, n_k) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$$

### Demonstração:

Primeiramente note que a soma dos expoentes de um termo é  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$  na expansão  $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$  é  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ .

$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \cdot \dots \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_k)$  e buscamos o coeficiente de  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ , e sabendo que há  $n_i$  objetos do tipo  $(x_i)$  ( $1 \leq i \leq k$ ), o coeficiente de  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$  é  $C(n, n_1, n_2, \dots, n_k)$ .

**Exemplo 24** O coeficiente de  $a^2 b^3 c^4 d^6$  na expansão de  $(a + b + c + d)^{15}$  é  $\frac{15!}{2! 3! 4! 6!}$ .

O teorema Multinomial para  $k = 2$  é conhecido como Teorema Binomial já visto acima.

### Equações Lineares

**Teorema 1.7.2** O número de soluções em inteiros positivos da equação

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = m, \text{ para } m > 0 \tag{1.7}$$

é dada por  $C_{m-1}^{r-1}$ .

**Demonstração:**

Separaremos por (+) os  $m$  1's, temos assim

$1 + 1 + \dots + 1 (+) 1 + 1 + \dots + 1 (+) 1 + 1 + \dots + 1 (+) = m$ ,  
temos  $m$  1's e  $r - 1$  (+). Mudando a posição de (+) encontramos uma solução diferente.

Assim há  $r - 1$  lugares em  $m - 1$  posições. Logo há  $C_{m-1}^{r-1}$  soluções.

**Exemplo 25** Encontrar o número de soluções em inteiros positivos das seguintes equações:

a)  $x_1 + x_2 = 5$ ;

b)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$

Na primeira temos  $m = 5$  e  $r = 2$  e, portanto,

$$C_{m-1}^{r-1} = C_{5-1}^{2-1} = C_4^1 = 4.$$

Como em b)  $m = 9$  e  $r = 5$ , temos

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! 4!} = 70. \blacksquare$$

Se considerarmos soluções inteiras não - negativas, isto é, se permitirmos que as variáveis  $x_i$  possam assumir também o valor zero, teremos mais soluções. No caso da equação  $x_1 + x_2 = 5$ , teremos outras soluções:  $x_1 = 5, x_2 = 0$  e  $x_1 = 0, x_2 = 5$ , totalizando agora 6 soluções. Vamos obter uma fórmula para o número de soluções inteiras não negativas de duas maneiras diferentes.

Consideremos, novamente, a equação abaixo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$$

Agora, acrescentamos ao número  $C_{10}^3 = 120$  outras três soluções:

$$(1, 0, 8, 2), (3, 0, 0, 8), (0, 5, 4, 2).$$

Vamos escrever uma sequência de onze 1's e três letras  $b$ 's ( $b$  está, agora, representando o sinal (+) utilizada como separador anteriormente):

$$1bb111111111b1$$

Se contarmos o número de 1's antes do primeiro  $b$ , entre o primeiro e o segundo, entre segundo e o terceiro, e o número de 1's à direita do terceiro  $b$ , teremos uma solução em inteiros não-negativos. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que podemos ter dois ou mais  $b$ 's juntos. Observe que o número de elementos na sequência acima é 14, que é igual a 11 mais 3. O 3 é porque desejamos separar em 4 partes.

A solução (3, 0, 0, 8) vem da sequência 111bbb111111111 e (0, 5, 4, 2) de b11111b1111b11.

Como o número de sequências deste tipo é  $C_{14}^3 = 364$ , este é o número de soluções não-negativas de  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ .

Este número é bem maior do que  $C_{10}^3 = 120$ , que é o número de soluções inteiras positivas desta equação.

Uma outra forma de contarmos o número de soluções inteiras não-negativas da equação  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$  é por meio de uma observação de que existe uma correspondência entre soluções não-negativas desta equação e soluções em inteiros positivos de uma outra equação, que obtemos a partir desta fazendo uma mudança de variáveis, que descrevemos a seguir. Dada a equação  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ , com  $x_i \geq 0$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , fazendo a mudança de variáveis  $y_i = x_i + 1$ , teremos  $y_i \geq 1$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Portanto, se na equação anterior tomarmos  $x_i = y_i - 1$ , teremos

$$y_1 - 1 + y_2 - 1 + y_3 - 1 + y_4 - 1 = 11$$

ou

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15$$

Algumas das soluções inteiras não-negativas de  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$  e as correspondentes soluções em que as mesmas são transformadas após a mudança de variáveis, estão listadas abaixo:

Soluções de  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$

$$(0, 2, 2, 7)$$

$$(3, 0, 0, 8)$$

$$(5, 5, 0, 1)$$

Soluções de  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15$

$$(1, 3, 3, 8)$$

$$(4, 1, 1, 9)$$

$$(6, 6, 1, 2)$$

Esta mudança nos diz que, a cada solução em inteiros não-negativos da equação  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ , corresponde uma única solução em inteiros positivos para a equação  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15$ , e vice-versa. É claro que, subtraindo-se (resp., somando-se) uma unidade a cada componente de uma solução de  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15$  (resp., de  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ ), obtemos uma única solução para  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ , em inteiros não-negativos (resp., para  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15$ , em inteiros positivos). Desta forma, o número de soluções em inteiros não-negativos de  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ , é igual ao número de soluções em inteiros positivos de  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 15$ , que sabemos ser igual a  $C_{14}^3 = 364$ .

No caso geral em que temos  $n$  variáveis:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m, \text{ para } x_i \geq 0,$$

Somando um a cada  $x_i$ , obtemos

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + \dots + (x_n + 1) = m + n \quad (3.4)$$

Se chamarmos  $x_i + 1 = y_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , teremos

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = m + n, \text{ para } y_i \geq 1. \quad (3.5)$$

Como o número de soluções em inteiros não-negativos de (3.4) é igual ao número de soluções em inteiros positivos de (3.5), temos que este número é dado por

$$C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^m$$

## Funções Geradoras

Motivação: Desejamos encontrar o número de soluções inteiras positivas de  $x_1 + x_2 + x_3 = 12$  onde  $x_1$  e  $x_2 \in \{2, 3, 4\}$  e  $x_3 \in \{5, 6, 7\}$ . Podemos fazer isto da seguinte maneira:

Considere os polinômios

$$\begin{cases} P_1 = x^2 + x^3 + x^4 \\ P_2 = x^2 + x^3 + x^4 \\ P_3 = x^5 + x^6 + x^7 \end{cases}$$



Efetuando o produto  $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = (x^2 + x^3 + x^4)^2 (x^5 + x^6 + x^7) = x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + x^{15}$ . Note que o coeficiente de  $x^{12}$  na expansão acima é o número de soluções do problema.

Neste caso  $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$  é a função geradora do problema de encontrar o número de soluções inteiras positivas.

**Definição 1.7.2** Se  $a_n$  é o número de soluções de um problema de contagem, então  $g(x) = \sum a_n x^n$  é a função geradora da sequência  $a_n$ .

**Exemplo 26**  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C(n, k) x^n$  é a função geradora da sequência  $(C(n, k))$  utilizando a expansão binomial  $f(x) = (1 + x)^n$ .

**Teorema 1.7.4** Sendo  $f(x)$  e  $g(x)$  as funções geradoras das sequências  $(a_r)$  e  $(b_r)$  respectivamente, temos:

- (i)  $Af(x) + Bg(x)$  é a função geradora para a sequência  $(Aa_r + Bb_r)$ .  
 $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^n (a_k b_{n-k})) x^n$ .
- (ii) A função geradora para  $(a_0 + a_1 + \dots + a_r)$  é igual a  $(1 + x + x^2 + \dots) f(x)$ .
- (iii) A função geradora para  $(ra_r)$  é igual a  $xf'(x)$ , a derivada de  $f$  em relação a  $x$ .
- (iv)  $\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ .

No capítulo seguinte utilizaremos o conceito de funções geradoras para fins enumerativos.

## CAPITULO 2

Apresentaremos nesse capítulo a teoria de grafos, abordando algumas definições, exemplos, lemas, proposições, teoremas e tipos de grafos especiais, tais como, grafos conexos, grafos coloráveis e grafos Eulerianos, além do problema das Pontes de Königsberg.

### 2.1 GRAFOS

**Definição 2.1.1** Um Grafo finito  $G$  é um par  $(V, X)$  em que  $V = V(G)$  é um conjunto finito não vazio e  $X = X(G)$  o conjunto de pares não ordenado de pontos distintos. Os elementos de  $V$  são chamados de vértices ou pontos e os elementos de  $X$  são chamados de arestas ou linhas. Um grafo  $G = (V, X)$  é de ordem  $p$  se  $N(V) = p$ , denotamos por  $G_p$ .

#### Observações:

- Uma aresta  $x = \{a, b\}$  é dita ser a união de  $u$  e  $v$ , assim dizemos que  $u$  e  $v$  são adjacentes.
- As características dos elementos do conjunto  $X$  exclui automaticamente os loops (linhas que unem um ponto em si mesmo) e as linhas múltiplas (paralelas).
- Uma aresta  $x = \{a, b\}$  é dita ser a união de  $u$  e  $v$ , assim dizemos que  $u$  e  $v$  são adjacentes.
- Um grafo com  $p$  vértice e  $q$  arestas é chamado de  $(p, q)$  grafo, denotamos por  $G = (V, X)$ .

**Exemplo 27** Considere o grafo  $G$  escolhido aleatoriamente com  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e  $X = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_1, v_3\}\}$ . Isto é ilustrado pelo diagrama na figura 2.1.

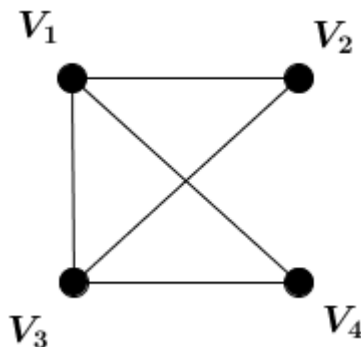


Figura 2.1

As cinco linhas de  $G$  são representadas pelos segmentos de reta que unem pares de pontos na figura. Os diagramas de todos os grafos de ordem 4, dispostos pelo número de linhas possíveis, são mostrados na figura 2.2.

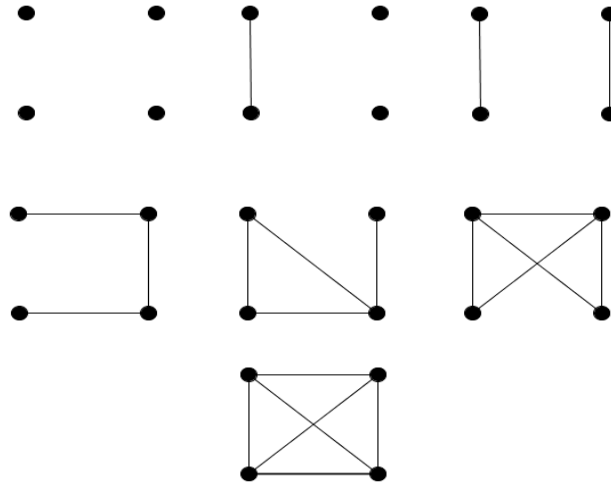


Figura 2.2

**Definição 2.1.2:** Um grafo  $G(V, X)$  é dito ser rotulado se cada vértices (ou aresta) estiver associado um rótulo

Por exemplo, o grafo aleatório (da figura 2.1) pode ser rotulados de seis maneiras diferentes, indicadas na figura 2.3.

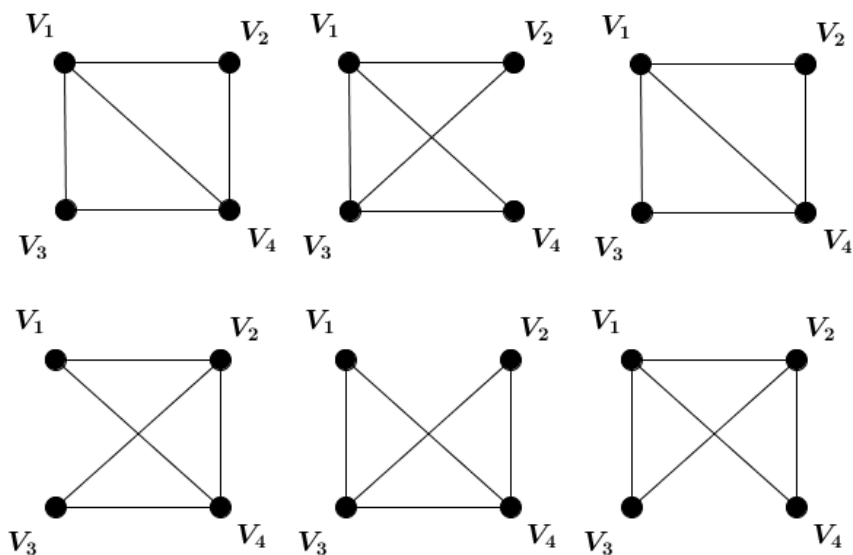


Figura 2.3

Quantos grafos rotulados de ordem  $p$  existem?

Seja  $G_p(x)$  um polinômio onde o coeficiente de  $x^k$  corresponde ao número de grafos rotulados de ordem  $p$  que têm exatamente  $k$  linhas. Tal polinômio é normalmente

chamado de função geradora ordinária para grafos rotulados com um determinado número de pontos e linhas.

**Proposição 2.1.1** *Se  $N(V(G)) = p$ , existem  $\binom{p}{2}$  arestas possíveis.*

**Demonstração**

Como  $X(G) = \{\{a, b\} / a, b \in V(G)\}$ , há 2 possibilidades em  $p$  para a escolha de  $a$  e  $p - 1$  para  $b$ , assim pelo princípio multiplicativo há  $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{p!}{(p-2)!2!} = \binom{p}{2}$ , desconsiderando a ordenação.

**Proposição 2.1.2** O número de grafos rotulados com precisamente  $k$  linhas é dado por  $\binom{\binom{p}{2}}{k}$ .

**Exemplo 28:** De acordo com a proposição acima o número de grafos com 4 vértices e 2 arestas é dado por:

$$\binom{\binom{4}{2}}{2} = \binom{6}{2} = 15$$

**Teorema 2.1.1** *A função geradora  $G_p(x)$  para grafos rotulados de ordem  $p$  é dada por*

$$G_p(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k = (1+x)^m$$

Com  $m = \binom{p}{2}$ .

**Demonstração:**

$G_p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ ; note que para  $k > \binom{p}{2}$ ,  $a_k = 0$  e pelo lema anterior  $a_k = \binom{m}{k}$ , assim

$$G_p(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k, \text{ pelo Binômio de Newton, } G_p(x) = (1+x)^m.$$

**Corolário 2.1.1** *O número de grafos rotulados  $G_p = G_p(1)$  é  $2^{\binom{p}{2}} = 2^{\frac{p(p-1)}{2}}$ .*

**Exemplo 29:** O número de grafos rotulados de ordem 4 é dado por  $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ .

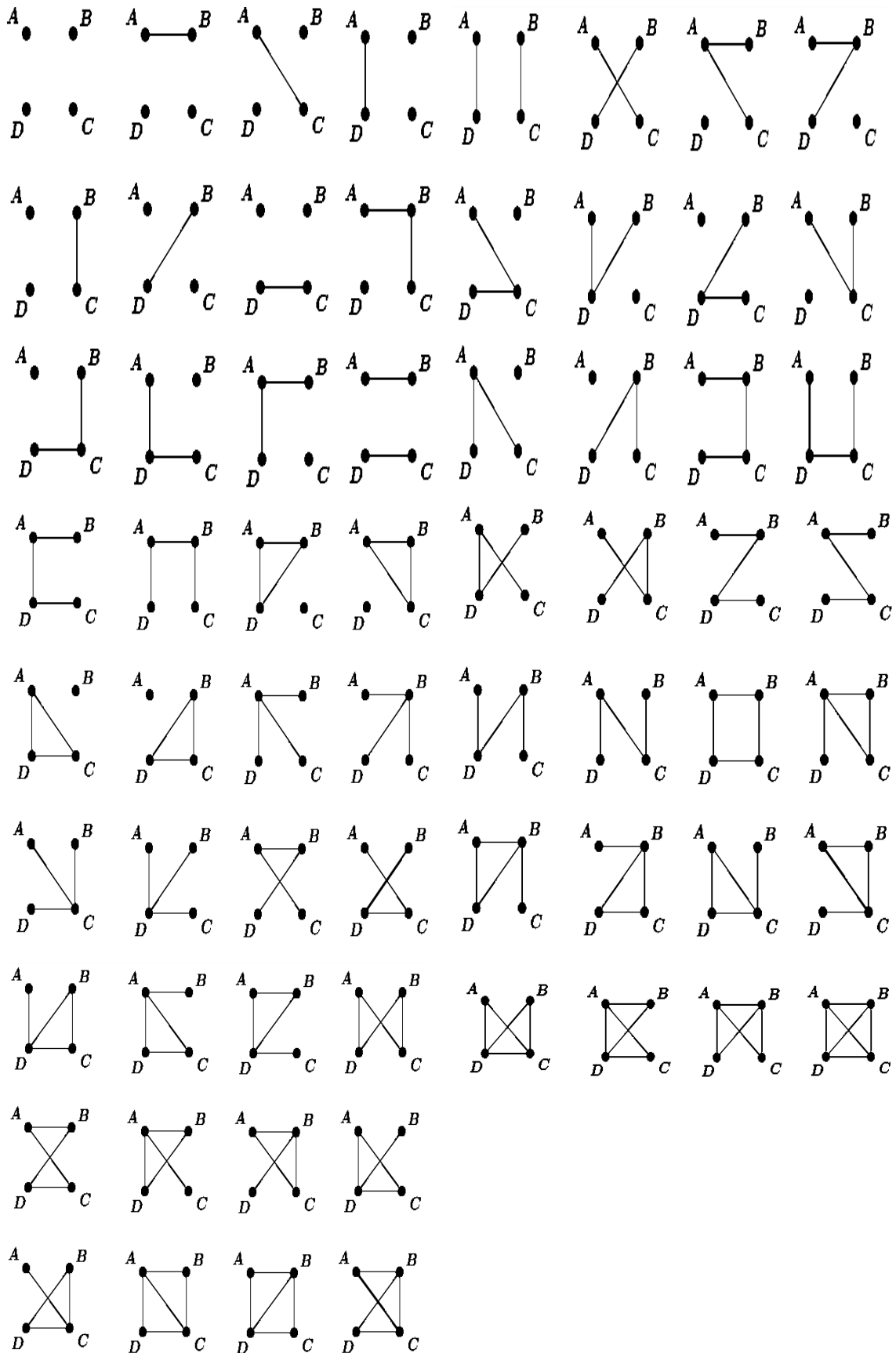


Figura 2.4

Será que os grafos mostrados no exemplo anterior são distintos? Quais são realmente diferentes? Como podemos contar todos esses grafos a menos de automorfismos?

**Definição 2.1.3:** *Sejam dois grafos  $G_1 = (V(G_1), X)$  e  $G_2 = (V(G_2), X)$ . Dizemos que  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos se existir uma bijeção  $\alpha : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  tal que  $x = \{a, b\} \in X(G_1) \Leftrightarrow \alpha(a)\alpha(b) \in X(G_2)$ .*

**Exemplo 30** Na figura a seguir temos exemplo de um isomorfismo de grafos.

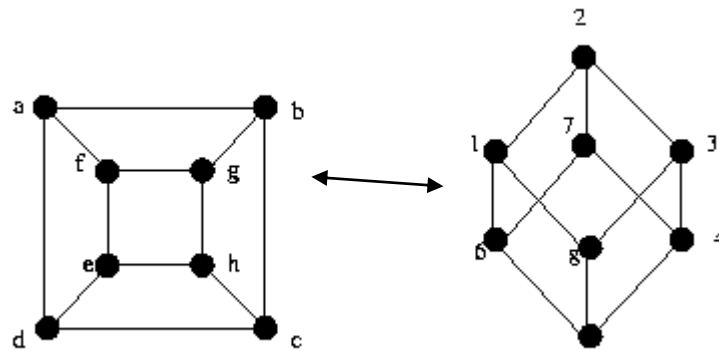


Figura 3.5

Para ver o isomorfismo dos grafos da figura 2.4, podemos utilizar a seguinte função:

$$\alpha(a) = 1, \alpha(b) = 2, \alpha(c) = 3, \alpha(d) = 8, \alpha(e) = 5, \alpha(f) = 6, \alpha(g) = 7, \alpha(h) = 4.$$

**Exemplo 31** *Quais são os grafos isomorfos do exemplo anterior com os grafos com 4 vértices e 2 arestas.*

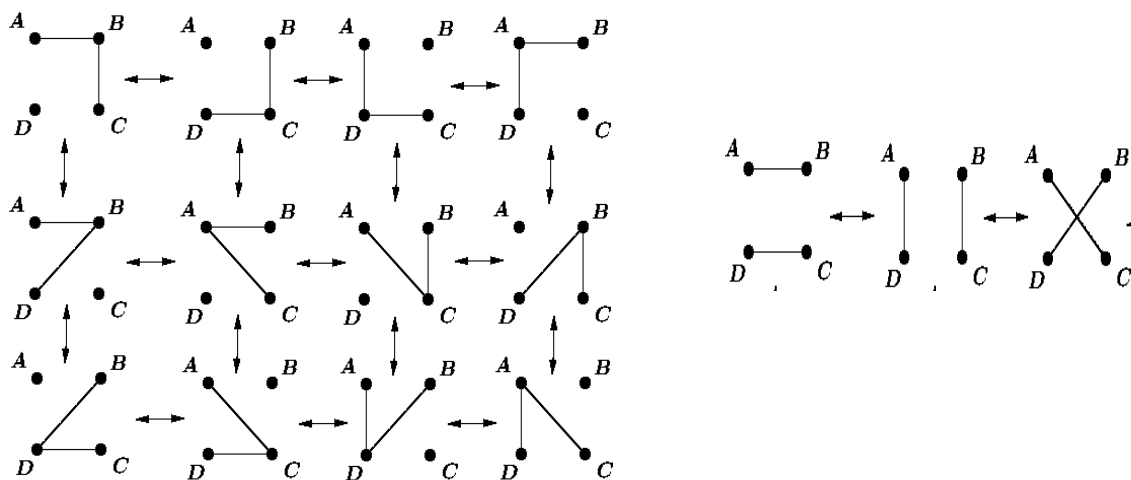


Figura 4.6

Se  $G_1 = G_2$ , então  $\alpha$  é um automorfismo de  $G$ . A coleção de todos automorfismo de  $G$ , denotado por  $\Gamma(G)$ , constitui um grupo chamamos de Grupo de  $G$ . Assim, os elementos de  $\Gamma(G)$  são permutações agindo em  $V$ . Por exemplo, o grafo aleatório  $G$  tem exatamente 4 automorfismo, de modo que  $\Gamma(G)$  contém as permutações na representação cíclica habitual

$$(v_1)(v_2)(v_3)(v_4), (v_1)(v_3)(v_2v_4), (v_1v_3)(v_2)(v_4) \text{ e } (v_1v_3)(v_2v_4).$$

Seja  $s(G) = |\Gamma(G)|$ , a ordem de um grupo  $G$ , denota o número de simetrias de  $G$ . Então a resposta para o problema de rotulagem citado acima é fornecida no seguinte teorema.

**Teorema 2.1.2** O número de maneiras de rotular um dado grafo  $G$  de ordem  $p$  é

$$L(G) = \frac{p!}{s(G)}$$

**Definição 2.1.4** Um grafo orientado ou digrafo  $D = (V(D), X)$  de ordem  $p$  consiste em um conjunto finito não vazio  $V$  de objetos distintos chamados com um conjunto específico  $X = \{(p, p') / p, p' \in V, p \neq p'\}$  de pares ordenados de pontos distintos de  $V$  com  $N(X) = q$  e  $N(V) = p$ . Um par  $x = (u, v)$  de pontos em  $X$  é chamado um Arco de  $D$ . O grau de saída de  $u \in V$  é o número de arcos partindo de  $u$ . E o grau de chegada de  $u$  é o número de arcos atingindo  $u$ .

**Exemplo 32 Grafo Orientado**

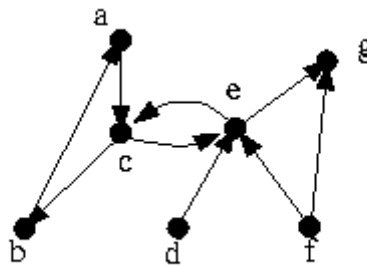


Figura 2.7

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$E = \{(a, c), (c, a), (b, a), (c, e), (e, c), (d, e), (e, g), (f, g), (f, e)\}$$

**Lema 2.1.1** O número de dígrafos de ordem  $p$  com exatamente  $k$  arcos é  $\binom{p(p-1)}{k}$ .

**Demonstração:** Desconsiderando a ordenação advinda dos arcos teremos  $\binom{p}{k}$  grafos rotulados possíveis. Como um vértice pode ter um arco chegando e (ou) saindo temos  $\binom{2\binom{p}{2}}{k} = \binom{p(p-1)}{k}$  dígrafos possíveis.

**Teorema 2.1.3** A função geradora  $D_p(x)$  para dígrafos rotulados de ordem  $p$  é dado por

$$D_p(x) = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} x^k = (1+x)^{2m}$$

Obviamente  $D_p(x) = G_p^2(x)$  de modo que  $D_p(1) = 2^{p(p-1)} = G_p^2(1)$ .

**Exemplo 33** Na Copa do mundo de 2006 o Brasil ficou no grupo F juntamente com a Austrália, Croácia e Japão. Construa um dígrafo a partir do resultado final desse grupo.

Inicialmente associaremos cada país a um vértice do grafo, por exemplo, Austrália (vértice A), Brasil (vértice B), Croácia (vértice C) e Japão (vértice J).

Na fase de grupo, todas as equipes do grupo se enfrentam exatamente uma vez, logo como são 4 times, teremos  $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$  jogos.

As arestas serão ligadas da seguinte maneira.

O Brasil venceu a Croácia, então:  $B \leftarrow C$ ;

O Brasil venceu a Austrália, então:  $B \leftarrow A$ ;

O Brasil venceu o Japão, então:  $B \leftarrow J$ ;

A Austrália venceu o Japão, então:  $A \leftarrow J$ ;

A Austrália empatou com a Croácia, então:  $A \leftrightarrow C$ ;

A Croácia empatou com o Japão, então:  $C \leftrightarrow J$ .

Assim o dígrafo que descreve o resultado do grupo F é:

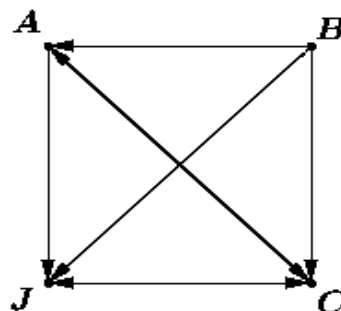


Figura 2.8



## 2.2 GRAFOS CONEXOS

**Definição 2.2.1** Um **caminho** num grafo,  $G = (V, E)$ , é uma sequência de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , com  $v_0, \dots, v_n$  pertencentes a  $V$  e quaisquer que seja  $i$  pertencente ao conjunto  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ,  $\{v_i, v_{i+1}\}$  pertencente a  $E$ , no caso de um grafo não dirigido;  $(v_i, v_{i+1})$  pertencente a  $E$ , no caso de um dígrafo e em que podemos nos referir a ele como um caminho de  $v_0$  para  $v_n$ .

**Definição 2.2.2** O **comprimento** de uma caminho é o número de arestas dele, isto é, o caminho contém os vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  e as arestas  $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)$ .

**Exemplo 34:** Considere o grafo abaixo:

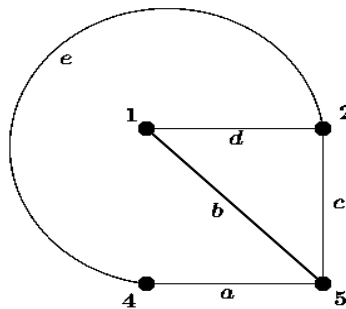


Figura 2.9

Um caminho do vértice 1 ao vértice 4 é a sequência  $(1, 5, 2, 4)$ ; o comprimento desse caminho é 3, pois, há 3 arestas nele:  $(b, c, e)$ .

**Definição 2.2.3** Um grafo  $G = (V, E)$ , onde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é dito **conexo** se dado quaisquer dois vértices de  $G$ , existe pelo menos um caminho entre eles. Caso contrário é **desconexo**.

**Exemplo 35**

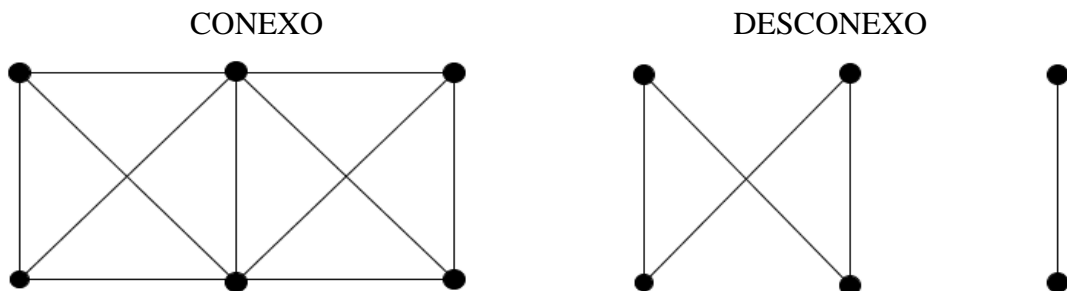


Figura 2.10

**Definição 2.2.4** Um grafo  $H(V, X)$  é dito ser um subgrafo de um grafo  $G(V, X)$  se  $V(H) \subset V(G)$  e  $X(H) \subset X(G)$ .

**Exemplo 36**  $H$  é subgrafo de  $G$ .

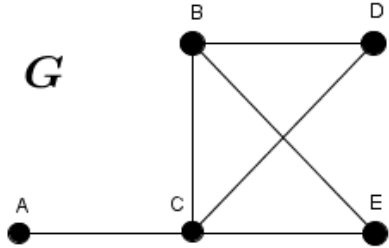


Figura 2.11

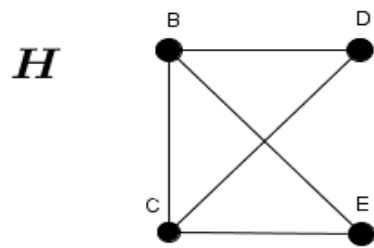


Figura 2.12

**Definição 2.2.5** O componente de um grafo  $G$  é um subgrafo  $C$  conexo e maximal (no sentido de número de vértices) de  $G$ .

**Exemplo 37** Considere o seguinte grafo  $G$  e seu respectivo componente  $S$ .

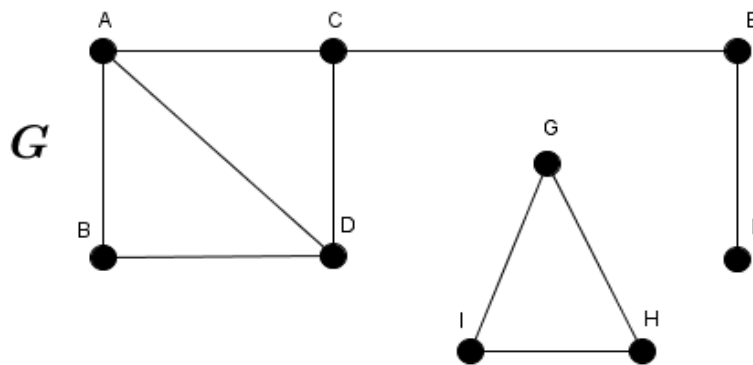


Figura 2.13

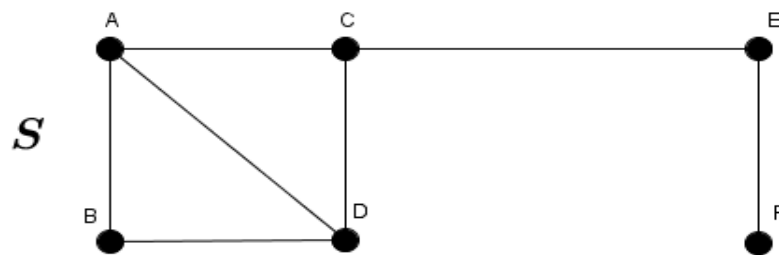


Figura 2.14

Utilizaremos a ideia aqui de grafos enraizados.

Escolhemos um vértice  $v_i \in V$  e dizemos que este é raiz de  $G$  e faremos uso disto para fins enumerativos.

**Definição 2.2.6** Um grafo enraizado tem um de seus pontos, chamado de raiz, distinguível dos outros.

**Exemplo 38**

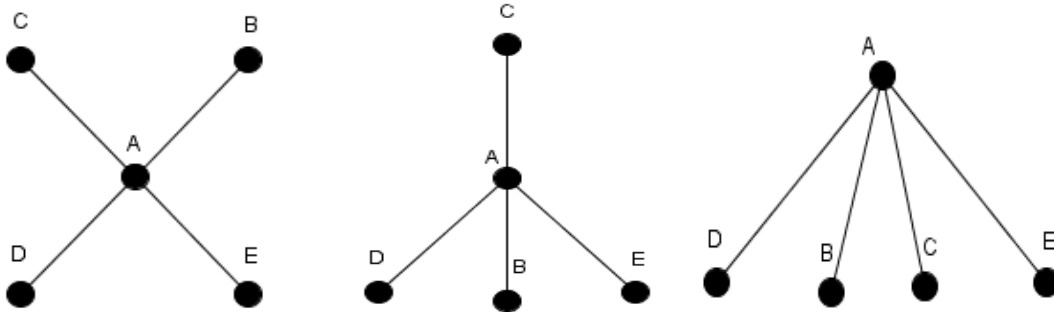


Figura 2.15

**Definição 2.2.7** Dois grafos enraizados são isomorfos se existir uma função injetora dos pontos de um conjunto de um Grafo para outro preservando não somente as adjacências, mas também as raízes.

**Exemplo 39**

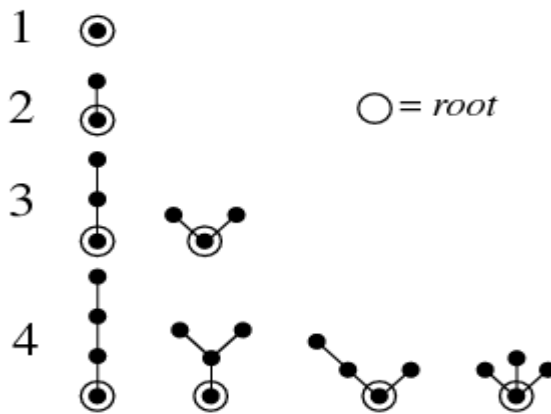


Figura 2.16

**Teorema 2.2.1** O número  $C_p$  de grafos rotulados conexo satisfaz:

$$C_p = 2^{\binom{p}{2}} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} k \binom{p}{k} 2^{\binom{p-k}{2}} C_k$$

**Demonstração:**

Cada grafo rotulado enraizado é obtido quando um grafo rotulado é enraizado, logo o número  $C_p = p \cdot G_p$ , onde  $G_p = 2^{\binom{p}{2}}$ .

O número de grafos enraizados em que a raiz esta em um componente que tem exatamente  $k$  pontos é  $k \cdot C_k \binom{p}{k} \cdot G_{p-k}$ , pois

$C_k$  é o número de grafos enraizados de ordem  $k$  possíveis;

$k$  é o número de locações de raízes possíveis.

$G_{p-k}$  é o número de grafos rotulados possíveis de ordem  $p-k$  e

$\binom{p}{k}$  é o número de ligações possíveis de arestas.

Assim variando  $k$  de 1 a  $p$ , temos

$$\sum_{k=1}^p k \binom{p}{k} C_k G_{p-k} = \sum_{k=1}^p k \binom{p}{k} 2^{\binom{p-k}{2}} C_k = C_p$$

$$C_p = p G_p = p 2^{\binom{p}{2}} \Rightarrow \frac{1}{p} C_p = 2^{\binom{p}{2}} \Rightarrow$$

$$\text{Se } k = p, \frac{1}{p} (p \cdot 1 \cdot 1 \cdot C_p)$$

$$C_p + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p k \binom{p}{k} 2^{\binom{p-k}{2}} C_k = 2^{\binom{p}{2}}$$

Com isso conclui-se a demonstração.

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C_p$	1	1	4	38	728	26704	1 866 256	251 548 592	66 296 291 072

Tabela 2.1

### Lema da contagem rotulada

Tome a sequência  $(a_k)$ , onde  $a_k$  é o número de maneiras de rotular todos os grafos de ordem  $k$ , com a propriedade  $p(a)$  e tome

$$a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$$

a função geradora exponencial para a sequência  $(a_k)$ . De maneira análoga tome

$$b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!}$$

O próximo lema fornece uma interpretação útil dos coeficientes do produto  $a(x)b(x)$  destas duas funções geradoras.

**Lema 2.2.1** *O coeficiente de  $\frac{x^k}{k!} a(x)b(x)$  é o número de par ordenados  $(G_1, G_2)$  de dois grafos disjuntos, onde  $G_1$  tem propriedade  $p(a)$ ,  $G_2$  tem propriedade  $p(b)$ ,  $k$  é um número de pontos em  $G_1 \cup G_2$  e os rótulos de 1 até  $k$  tem distribuição sobre  $G_1 \cup G_2$ .*

Seja  $C(x)$  a função geradora exponencial para grafos conexos rotulados, ilustrada abaixo.

$$C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{x^k}{k!}$$

**Teorema 2.2.2** *As funções geradoras exponenciais  $G(X)$  e  $C(X)$  para grafos rotulados conexos obedecem a seguinte relação.*

$$1 + G(x) = e^{C(x)}$$

## 2.3 GRAFOS EULERIANOS

A cidade de Königsberg é banhada pelo rio Pregel que, ao atravessar a cidade se ramifica formando uma ilha (Kneiphof) que está ligada à restante parte da cidade por sete pontes. Dizia-se que os habitantes da cidade, nos dias soalheiros de descanso, tentavam efetuar um percurso que os obrigasse a passar por todas as pontes, mas apenas uma vez em cada uma. Como as suas tentativas foram sempre falhadas, muitos deles acreditavam que não era possível encontrar tal percurso. Será que tinham razão?

A primeira publicação em teoria dos grafos é a de Leonhard Euler em 1736. Em seu artigo é apresentada uma solução para o que é conhecida como o problema das pontes de Königsberg. A cidade de Königsberg (hoje conhecida como Kaliningrado) na Rússia, situado junto ao rio Pregel, consiste na costa norte (N), sul costa (S), a ilha a oeste (W), e a ilha a leste (E). Ligando essas peças eram sete pontes: duas entre N e W, dois entre S e

W, e cada um de E para N, S, e W. O problema de Euler era saber se é possível começar a partir de qualquer local na cidade e voltar ao ponto de partida depois de atravessar cada ponte apenas uma vez. Se cada parte da cidade é considerada como um vértice e se cada ponte está considerada como uma aresta, temos um grafo com quatro vértices e sete arestas (ver Figura 2.15), um modelo gráfico do problema pode ser indicado da seguinte forma: Dado um grafo, é possível traçar todo o diagrama do grafo sem ultrapassar a mesma borda mais que uma vez? A resposta é não, no caso das pontes de Königsberg o problema foi facilmente estabelecida por Euler.

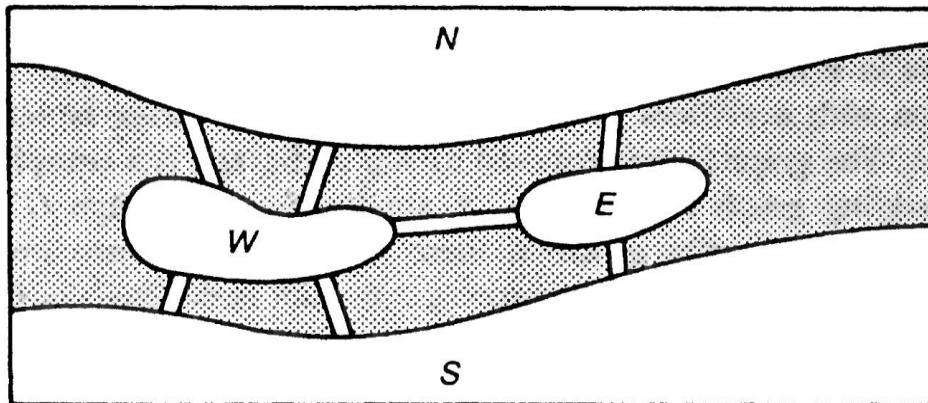


Figura 2.17

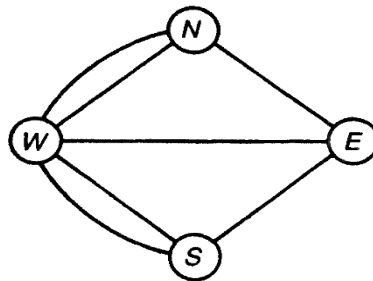


Figura 2.18

**Definição 2.3.1** Um caminho  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  em um grafo orientado, forma um **circuito** se  $v_0 = v_n$  e o caminho contém pelo menos uma aresta.

**Exemplo 40** O caminho  $(1, 2, 5, 4, 1)$  forma um ciclo.

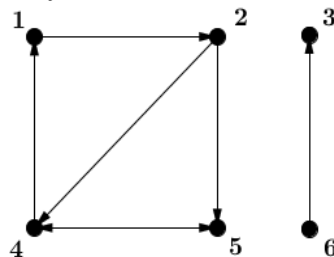


Figura 2.19

**Definição 2.3.2** Um caminho  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  em um grafo não orientado, forma um **ciclo** se  $v_0 = v_n$  e o caminho contém pelo menos três arestas.

**Exemplo 41** O caminho  $(2, 5, 1, 2)$  forma um ciclo.

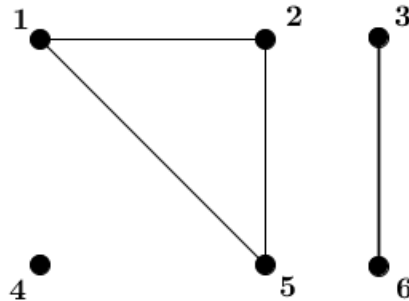


Figura 2.20

**Definição 2.3.3** Um grafo conexo sem ciclos é chamado de **árvore**.

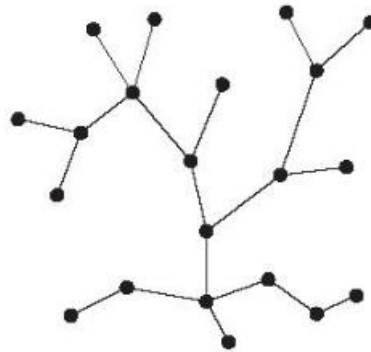


Figura 2.21: Exemplo de árvore

**Definição 2.3.4** Uma floresta é um grafos onde as componentes são árvores.

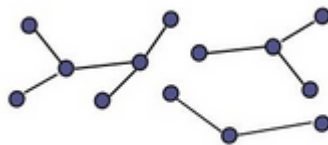


Figura 2.22: Exemplo de floresta

**Definição 2.3.5** Um caminho em um grafo é um caminho euleriano se cada aresta do grafo aparece num caminho exatamente uma vez.

**Definição 2.3.6** Um caminho Euleriano fechado é um circuito euleriano.

**Definição 2.3.7** Um grafo é dito ser um grafo Euleriano se dispõe de um circuito euleriano.

A ideia de circuitos eulerianos surgiu primeiro a partir do problema das Pontes de Königsberg.

**Definição 2.3.8** O grau de um vértice  $v$  em um grafo é o número de arestas que são incidentes em  $v$ , denotamos por  $\text{deg}(v)$ .

**Lema 2.3.1** Se  $G(V, X)$  é um grafo tal que  $\text{deg}(v) \geq 2$  para todo  $v \in V$ , então  $G$  contém um circuito.

**Teorema 2.3.1** Um grafo conexo  $G$  sem laços é Euleriano se e somente se o grau de cada vértice é par.

**Demonstração:**

$\Rightarrow$  Seja  $C$  um caminho euleriano fechado de  $G$ . Cada vez que um vértice  $v$  ocorre no caminho  $C$ , há uma contribuição de duas unidades para o grau de  $v$  (uma aresta para chegar a  $v$  e outra para sair). Isto vale não só para os vértices intermediários mas também para o vértice final, pois “saímos” e “entramos” no mesmo vértice no início e no final do caminho. Como cada aresta ocorre exatamente uma vez em  $C$ , cada vértice possui grau par.

$\Leftarrow$  A prova é por indução no número de arestas de  $G$ . Suponhamos que o grau de cada vértice de  $G$  é par. Como  $G$  é conexo,  $\text{deg}(v) = 2$  para todo  $v \in V$ . Segue então do lema anterior que  $G$  contém um circuito  $C$ . Se  $C$  contém todas as arestas de  $G$ , o teorema está provado. Se não, removemos de  $G$  as arestas de  $C$ , resultando num subgrafo  $H$ , possivelmente desconexo, com menos arestas do que  $G$ .

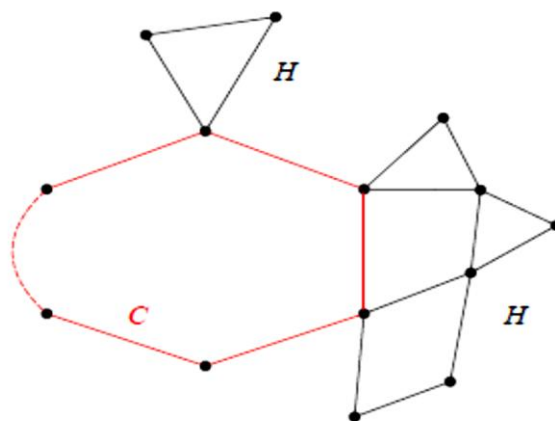


Figura 2.23



É fácil ver que todos os vértices de H possuem grau par. Logo, pela hipótese de indução, cada componente de H possui um caminho euleriano fechado. Além disso, pela conexidade de G, cada componente de H possui ao menos um vértice em comum com C.

Portanto, ligando os caminhos eulerianos fechados de cada componente de H com o circuito C obtemos um caminho euleriano fechado em G, ou seja, G é um grafo euleriano.

**Definição 2.3.9** Se todos pontos de G tem grau par, G é chamado par.

**Definição 2.3.10** Um grafo Euleriano é um grafo conexo par.

**Exemplo 42:** Considere o grafo G abaixo. Determine o grau de cada vértice e o grau total de G.

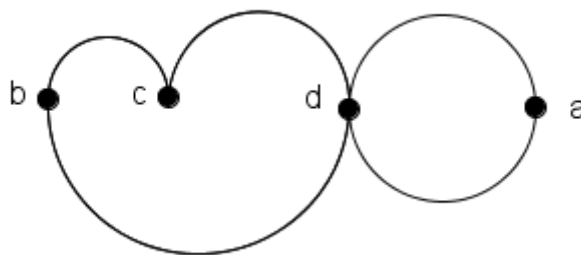


Figura 2.24

$$\text{deg}(a) = 2, \text{deg}(b) = 2, \text{deg}(c) = 2 \text{ e } \text{deg}(d) = 4$$

$$\text{Grau de } G = \text{deg}(a) + \text{deg}(b) + \text{deg}(c) + \text{deg}(d) = 2 + 2 + 2 + 4 = 10$$

Como todo vértice de G possui grau par, G é Euleriano.

Seja  $W_p$  o número de grafos rotulados par de ordem p.

**Teorema 2.3.2** O número de grafos rotulados de ordem p é igual ao número de grafos rotulados de ordem p - 1.

$$W_p = 2^{\binom{p-1}{2}}$$

**Corolário 2.3.1** A função geradora exponencial para grafos rotulados par, é dada por:

$$W(x) = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{\binom{p-1}{2}} \frac{x^p}{p!}$$

**Corolário 2.3.2** Seja  $U_p$  o número de grafos Eulerianos rotulados de ordem  $p$ , assim

$$U(x) = \sum_{p=1}^{\infty} U_p \frac{x^p}{p!}$$

é a função geradora exponencial correspondente.

**Teorema 2.3.3** A função geradora exponencial  $U(x)$  para grafos rotulados Eulerianos satisfaz.

$$U(x) = \text{Log}(W(x) + 1)$$

e

$$U_p = 2^{\binom{p-1}{2}} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{p}{k} 2^{\binom{p-k-1}{2}} U_k$$

Calculando os primeiros termos de  $U(x)$ , temos

$$U(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{38x^5}{5!} + \dots$$

**Exemplo 43**



Figura 2.25

Os quatro grafos Eulerianos de ordem 5, representados acima, junto com as ordens dos seus respectivos grupos, de acordo com (2.25) temos

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{38}{5!}$$

Temos o total de 38 maneiras de rotular grafos na figura 2.25.

**Teorema 2.3.4** O polinômio  $W_p(x)$  que tem como coeficiente de  $x^q$  o número de grafos rotulados de grau par com  $p$  pontos e  $q$  arestas é dado por

$$W_p(x) = \frac{1}{2^p} (1+x)^{\binom{p}{2}} \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n(p-n)}$$

## 2.4 GRAFOS COLORÁVEIS

**Definição 2.4.1** Um grafo  $G$  é dito colorável se a cada vértice é atribuída uma cor de tal modo que não há dois vértices adjacentes com a mesma cor.

### Exemplo 44

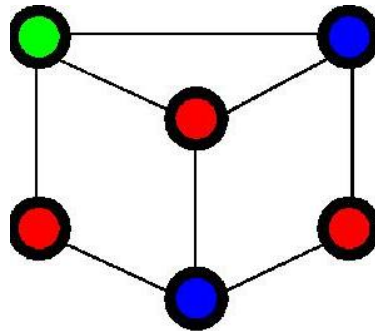


Figura 2.26

Se tal atribuição de cores é possível usando no máximo  $k$  cores, o grafo é dito  $k$ -colorável. O menor valor de  $k$  tal que um grafo  $G$  é  $k$ -colorável é o número cromático de  $G$ .

Outra definição para grafos colorados

Um grafo colorável consiste em um grafo  $G$  com um conjunto de pontos de  $V$ , juntamente com uma relação de equivalência em  $V$  tal que nenhum par de pontos equivalentes são adjacentes.

**Teorema 2.4.1** O número  $C_p(x)$  de grafos rotulados  $k$ -colorável de ordem  $p$  é dado por

$$C_p(x) = \frac{1}{k!} \sum_{p_1 + p_2 + \dots + p_k = p} \binom{p}{p_1, p_2, \dots, p_k} 2^{\frac{(p^2 - \sum p_i^2)}{2}}$$

## CAPÍTULO 3

### 3.1 PARTIÇÕES

A Matemática como um empreendimento humano tem evoluído ao longo de um período de dez mil anos. Gravuras rupestres sugerem que os conceitos de contagem, números pequenos e além eram conhecidos por homens pré-históricos. Mais tarde, os gregos inventaram coisas como números racionais, geometria e a ideia de provas matemáticas. Matemáticos árabes e chineses desenvolveram o sistema posicional útil para escrever números, bem como o fundamento da álgebra, contando objetos com incógnitas.

A partir do Renascimento em diante, a matemática tem evoluído em um acelerado ritmo, incluindo inovações imensamente úteis tais como geometria analítica, cálculo diferencial, lógica e teoria dos conjuntos. Neste capítulo veremos algumas demonstrações envolvendo partições, assunto que teria feito sentido já para os homens das cavernas. Pode-se imaginar uma pintura de caverna do seguinte tipo:

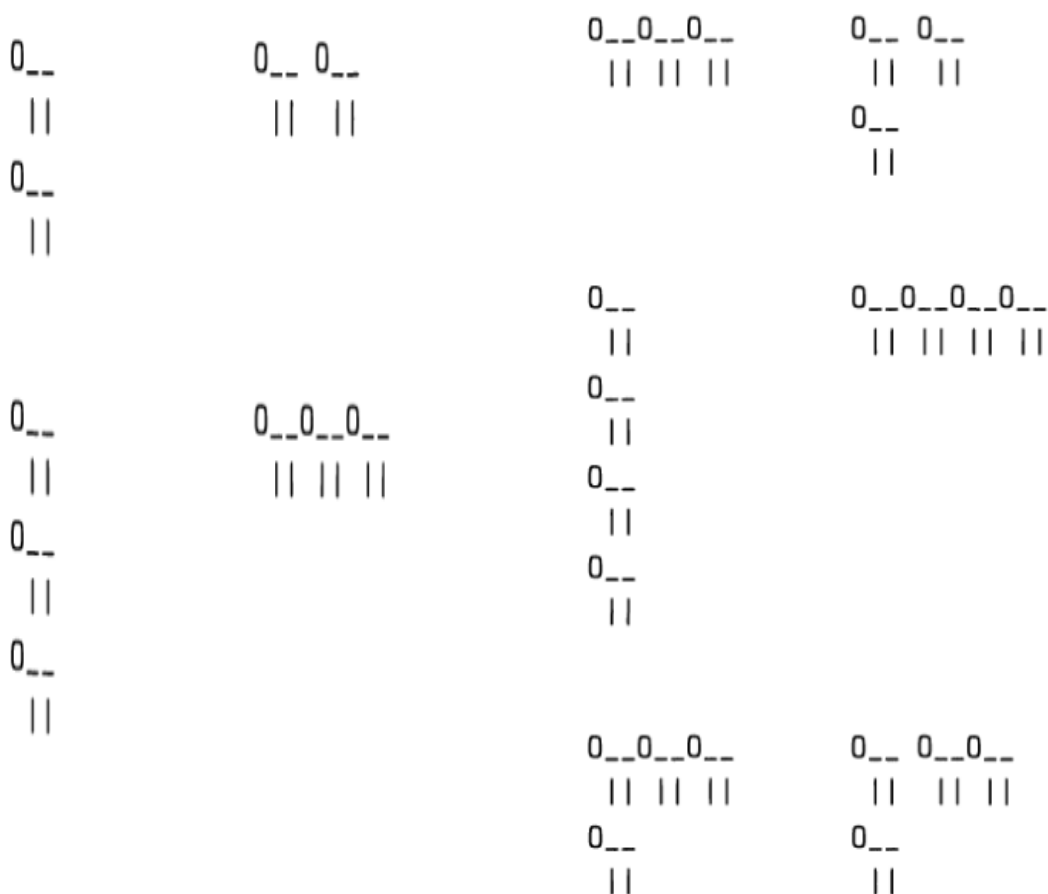


Figura 3.1

Os conceitos aqui envolvidos são números de contagem, igualdade de números, além de números, e a distinção entre números pares e ímpares. O que é mostrado na tabela é que, para, pelo menos, até quatro animais, eles podem ser alinhadas em fileiras de comprimentos ímpares em tantas maneiras quanto em linhas de comprimentos distintos. Escrito no quadro-negro de hoje, em vez de rupestre pré-histórica, a tabela teria um design mais eficiente:

1 + 1	2
1 + 1 + 1 3	3 2 + 1
1 + 1 + 1 + 1 3 + 1	4 3 + 1

Figura 3.2

O fato de que sempre haverá muitos itens tanto na coluna da esquerda, como na direita, isso foi provado pela primeira vez por Leonhard Euler em 1748. Mas é bem possível que alguém observou o fenômeno anteriormente para pequenos números. Hoje em dia, objetos como  $3 + 1$  ou  $5 + 5 + 3 + 2$  são chamados de partições inteiras.

Afirmando que de forma diferente, uma partição inteira é uma forma de dividir um número em partes inteiras. Por definição, a partição permanece a mesma, no entanto, ordena as partes, então podemos escolher por convenção listar as partes da maior até a menor. Resultado surpreendente de Euler pode agora ser dada uma formulação mais precisa: Cada número tem partições inteiras tanto em partes ímpares como em partes distintas. O tabela continua por cinco e seis:

1 + 1 + 1 + 1 + 1 3 + 1 + 1 5	5 4 + 1 3 + 2
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 3 + 1 + 1 + 1 3 + 3 5 + 1	6 5 + 1 4 + 2 3 + 2 + 1

Figura 3.3

**Definição 3.1** Uma partição de um número inteiro  $n$  é uma soma da forma  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = n$ , convencionamos  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$ , com  $\lambda_i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, s\}$ .

**Exemplo 45:** O número de partições do número 5.

Para resolver este problema, devemos encontrar uma função geradora para partições em partes de no máximo 5. Assim temos,  $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x^2 + x^4)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)$

O coeficiente de  $x^5$  na expansão desta série é a resposta do nosso exemplo.

Desenvolvendo,

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 7x^6 + 10x^7 + 11x^8 + 13x^9 + 12x^{10} + 12x^{11} + 13x^{12} + 11x^{13} + 10x^{14} + 7x^{15} + 7x^{16} + 5x^{17} + 3x^{18} + 2x^{19} + x^{20} + x^{21}.$$

Portanto, existem 7 partições de 5, descritas abaixo:

- 5
- 4 + 1
- 3 + 2
- 3 + 1 + 1
- 2 + 2 + 1
- 2 + 1 + 1 + 1
- 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Neste trabalho estamos interessados em obter todos os termos da sequência  $(p(n))$ , onde  $p(n)$  é o número de partições de  $n$ .

Para tal vamos obter a função geradora da sequência  $(p(n))$ .

Considere a variável complexa  $q$ , com  $|q| < 1$  para fins de convergência.

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1 - q^2} = 1 + q^2 + q^4 + \dots$$

...

$$\frac{1}{1 - q^k} = 1 + q^k + q^{2k} + \dots$$

Considerando o produto infinito  $\left(\frac{1}{1 - q}\right) \left(\frac{1}{1 - q^2}\right) \dots \left(\frac{1}{1 - q^k}\right) \dots =$

$= (1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^2 + q^4 + \dots)(1 + q^3 + q^6 + \dots) \dots (1 + q^k + q^{2k} + \dots) \dots$  e os expoentes do primeiro termo como sendo múltiplos de 1, do segundo termo temos múltiplos de 2, e assim sucessivamente.

Note que o coeficiente de  $q^n$  está associado a escolhas neste produto. Para  $n = 2$ , o coeficiente é 2, advindo de  $q^2$  no 1º termo e  $q^2$  no 2º termo. Interpretando  $q^2$  no primeiro termo como  $q^{1+1}$  e associamos o coeficiente de  $q^2$  como as partições de 2: 1 + 1 e 2. Para  $n = 3$ , o coeficiente  $q^3$  é 3, advindo da soma  $q^{1+1+1} + q^{1+2} + q^3$ ; em geral, o coeficiente de  $q^n$  é o número de partições de  $n$ ,  $p_n$ , logo

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)\left(\frac{1}{1-q^2}\right)\dots\left(\frac{1}{1-q^k}\right)\dots = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n$$

A função geradora para o número de partições irrestritas,  $p(n)$  é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \frac{1}{(q, q)_{\infty}}$$

Onde,  $|q| < 1$ , e

$$(a, q)_n = \begin{cases} (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\dots(1-aq^{n-1}) & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n = (a; q)_{\infty}$$

Mencionamos abaixo duas outras expressões equivalentes para a função geradora de partições irrestritas.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q, q)_n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q, q)_n^2}$$

A primeira é creditada a Euler, que aparece na obra “Introductio in Analysis Infinitorum”, no capítulo 16 intitulado: “De partitio Numerorum”

A segunda identidade pode ser provada usando “quadrados de Durfee”.

Vamos mostrar que 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q, q)_n} = \frac{1}{(q, q)_{\infty}} .$$

Esta igualdade é um do que chamamos de identidade de partição.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q, q)_n} &= 1 + q \left( \frac{1}{1-q} \right) + q^2 \left( \frac{1}{1-q} \right) \left( \frac{1}{1-q^2} \right) + q^3 \left( \frac{1}{1-q} \right) \left( \frac{1}{1-q^2} \right) \left( \frac{1}{1-q^3} \right) + \dots + \\ &+ q^k \left( \frac{1}{1-q} \right) \left( \frac{1}{1-q^2} \right) \dots \left( \frac{1}{1-q^k} \right) + \dots = 1 + q(1 + q + q^2 + \dots) + q^2(1 + q + q^2 + \dots) \\ &(1 + q^2 + q^4 + \dots) + q^3(1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^2 + q^4 + \dots)(1 + q^3 + q^6 + \dots) + \\ &q^k(1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^2 + q^4 + \dots)(1 + q^3 + q^6 + \dots) \dots (1 + q^k + q^{2k} + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Interpretemos aqui o expoente  $k$  de  $q^k$  como uma parte  $k$  e uma partição de  $n$ , enquanto os coeficientes de  $(1 + q^i + q^{2i} + \dots)$  como partes múltiplas de  $i$ .

Note que o coeficiente de  $q^n$  na expansão da soma  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q, q)_n}$  é igual ao número de

partições de  $n$ , logo  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \frac{1}{(q, q)_{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{(q, q)_n}$ .

Seja  $p_d(n)$  o número de partições de  $n$  partes distintas.

Considerando o produto  $(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3) \dots (1 + q^k) \dots$  uma escolha de  $q^n$  vem de tal forma que nenhum coeficiente é repetido (há um  $q$ , um  $q^2$ , um  $q^3$ , ...) interpretando o coeficiente  $k$  de  $q^k$  como uma parte em uma partição de  $n$ , as partes de  $n$  são todas distintas; logo o coeficiente de  $q^n$  no produto acima é igual ao número de partições de  $n$  em partes distintas, ou seja  $p_d(n)$ .

$$\text{Portanto } \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_d(n) q^n.$$

**Exemplo 46:** Encontre a função geradora de  $n$  em partes ímpares.

O produto  $(1 + q + q^2 + \dots)(1 + q^3 + q^6 + \dots)(1 + q^5 + q^{10} + \dots) \dots (1 + q^{2k+1} + \dots) \dots$  representa o número de partições de  $n$  em partes distintas. Seja  $p_i(n)$  o número de partições de  $n$  em partes ímpares. Assim, temos:

$$p_i(n) = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5) \dots (1-q^{2k+1}) \dots} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{2k+1})}$$



**Proposição:**  $p_i(n) = p_d(n)$ .

**Demonstração:**

Uma função geradora para  $p_i(n)$  é

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_i(n) q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots};$$

$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots} = \frac{(1-q^2)(1-q^4)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)\dots}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^n}; \text{ como } 1-q^{2n} = (1-q^n)(1+q^n), \text{ então } \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^n} = \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n).$$

**Exemplo 47:**

a) *Encontre a função geradora de  $n$  em partes pares.*

O produto  $(1+q+q^2+\dots)(1+q^2+q^4+\dots)(1+q^4+q^8+\dots)\dots(1+q^{2k}+\dots)\dots$  representa o número de partições de  $n$  em partes distintas. Seja  $p_d(n)$  o número de partições de  $n$  em partes pares. Assim, temos:

$$p_p(n) = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})\dots} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{2k})}$$

b) *Encontre a função geradora de  $n$  em partes cúbicas.*

O produto  $(1+q+q^2+\dots)(1+q^8+q^{16}+\dots)(1+q^{27}+q^{54}+\dots)\dots(1+q^{k^3}+\dots)\dots$  representa o número de partições de  $n$  em partes distintas. Seja  $p_c(n)$  o número de partições de  $n$  em partes ímpares. Assim, temos:

$$p_i(n) = \frac{1}{(1-q)(1-q^8)(1-q^{27})\dots(1-q^{k^3})\dots} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{k^3})}.$$

### 3.1.1 REPRESENTANDO PARTIÇÕES COMO MATRIZES

Para finalizar o trabalho vamos exibir uma nova fórmula para número de partições irrestritas de um inteiro positivo. Esta fórmula fora encontrada pelos professores Mateus Alegri (UFS-SE) e Raphael Gustavo D’Almeida Vilamiu (CEFFET-RJ) perfazendo o capítulo 5 de [1]. Desenvolveremos um algoritmo que exhibe a partição, a partir de sua representação matricial. Isto foi feito de modo a considerar uma estrutura de grafo de uma partição fazendo uso dos resultados da referência [13] a fim de estabelecer uma ligação 1-1 entre vértices destes grafos e uma partição. Exibiremos também algumas aplicações, uma em especial envolve a contagem de possíveis formas de Jordan de um operador linear.

Em [13], Santos et al, introduziram a ideia de relacionar partições com matrizes de duas linhas. Utilizaremos estes resultados para obtermos uma fórmula para o número de partições de inteiros. O teorema abaixo é uma releitura dos resultados obtidos em [13].

**Teorema 3.1** *O número de partições irrestritas de um dado inteiro positivo  $n$  é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma:*

$$A_p = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{s-1} & c_s \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}$$

Com  $c_s = 0$ , e  $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$ .

Observando as restrições é fácil encontrar  $c_t$  em função de  $d_t$ , de modo que a matriz  $A_p$  pode ser escrita como:

$$A_p = \begin{pmatrix} d_2 + d_3 + \dots + d_s & d_3 + d_4 + \dots + d_s & \dots & c_{s-1} & c_s \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}$$

Notemos que para uma partição com  $k$  partes,  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_k$ , temos obrigatoriamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ d_2 = \lambda_2 - \lambda_3 \\ \quad \quad \quad hh. \\ \quad \quad \quad \vdots \\ d_{k-1} = \lambda_{k-1} - \lambda_k \\ d_k = \lambda_k \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned}
& \sum_{l_1^{(1)}} \left( \left[ \frac{n - ik - l_1^{(1)}}{l_1^{(1)}} \right] + \epsilon \right) + \sum_{j_1^{(1)}} \sum_{l_1^{(2)} > l_2^{(2)}} \left( \left[ \frac{n - ik - l_1^{(2)} j_1^{(1)} - l_2^{(2)}}{l_2^{(2)}} \right] + \epsilon \right) + \\
& + \sum_{j_1^{(2)}, j_2^{(2)}} \sum_{l_1^{(3)} > l_2^{(3)} > l_3^{(3)}} \left( \left[ \frac{n - ik - l_1^{(3)} j_1^{(2)} - l_2^{(3)} j_2^{(2)} - l_3^{(3)}}{l_3^{(3)}} \right] + \epsilon \right) + \\
& \dots + \sum_{j_1^{(k-3)}, j_2^{(k-3)}, \dots, j_{k-3}^{(k-3)}} \sum_{l_1^{(k-2)} > \dots > l_{k-2}^{(k-2)}} \left( \left[ \frac{n - ik - l_1^{(k-2)} j_1^{(k-2)} - l_2^{(k-2)} j_2^{(k-2)} - \dots - l_{k-2}^{(k-2)}}{l_{k-2}^{(k-2)}} \right] + \epsilon \right)
\end{aligned}$$

Onde:  $l_u^{(r)} = u + 1, \dots, k - 1, e :$

$$j_h^t = 1, 2, \dots, \left[ \frac{n - ik - l_1^{t+1} - l_2^{t+1} - \dots - l_{t+1}^{t+1}}{l_h^{t+1}} \right] + \epsilon$$

$$m = \left[ \frac{n}{k} \right]$$

$\epsilon$  é a função que infere o valor 0, se em  $\{a\}$ ,  $a < 0$ , e 1 se  $a \geq 0$ .

Note que não há razão em se calcular  $\{a\} < 0$ , neste caso  $\epsilon = 0$ .

**Exemplo 48:** Tome  $n = 15$  e  $k = 7$ , neste caso  $m = 2$  e

$$\sum_{l_1} \left( \left[ \frac{n - d_k k - l_1}{l_1} \right] + \epsilon \right) = 4 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$$

$l_1$  varia de 2 a 6, para a segunda soma:  $3 \leq l_1 \leq 6$ ,  $2 \leq l_2 \leq 5$ , os pares satisfazendo essas desigualdades são: (3, 2); (4, 2); (4, 3); (5, 2); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5), os  $j$ 's satisfazendo as hipóteses são  $j_1 = 1, 2$  para (3, 2) e 1 para os outros casos.

Note que (5, 4); (6, 3); (6, 5) não poderá ser contado pela soma, pois  $\epsilon$  inferirá zero.

$$\text{Então: } \sum_{j_1} \sum_{l_1 > l_2} \left( \left[ \frac{n - d_k k - l_1 j_1 - l_2}{l_2} \right] + \epsilon \right) = 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$$

Logo,  $\rho_1 = 19$  e como  $\rho_2 = 2$

Portanto:  $p(15, 7) = 19 + 2 = 21$ .

**Demonstração:** A partir de (3), temos:

$$(d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_k) + (d_2 + d_3 + \dots + d_k) + (d_3 + d_4 + \dots + d_k) \dots + d_k = n$$

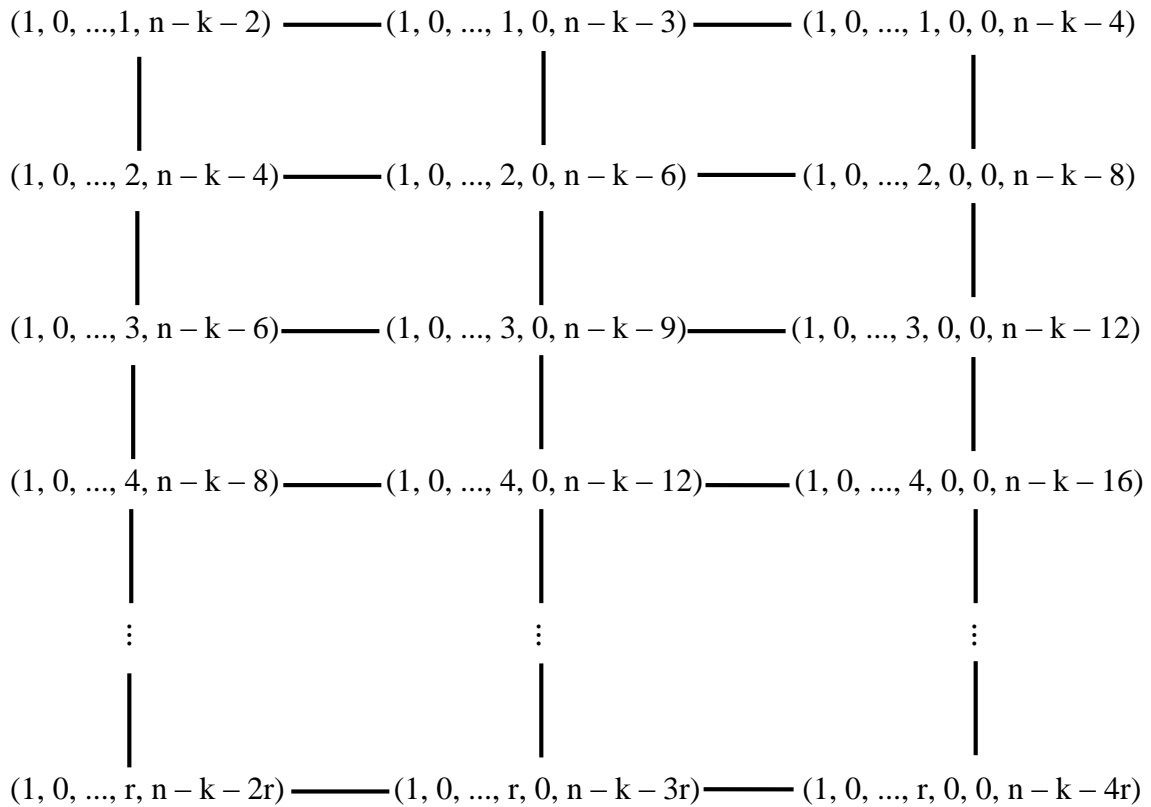
Note que, de modo geral, em uma partição ele terá partes que são “carregadas” de outras anteriores, por exemplo, olhe para o segundo e primeiros termos de (3).

Considere agora, os vetores da forma:

$$(d_k, d_{k-1}, \dots, d_2, d_1),$$

devemos encontrar vetores dessa forma satisfazendo (3).

Sem perda de generalidade para  $d_k = 1$ , temos:  $(1, 0, 0, \dots, x, \Delta)$ ,  $x$  pode variar e permutar em  $k - 2$  posições, então teremos a sequência:



Continuaremos com essa construção até que a condição (3) seja satisfeita. Olhando para a sequência formada pela última coordenada destes vetores, esta é uma sequência, formada pelos  $d_0$ s que satisfazem (3), associadas a vetores (que representam partições) com um único elemento não nulo:

$n - k - 2$	$n - k - 3$	$n - k - 4$
$n - k - 4$	$n - k - 6$	$n - k - 8$
$n - k - 6$	$n - k - 9$	$n - k - 12$
$n - k - 8$	$n - k - 12$	$n - k - 16$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n - k - 2r$	$n - k - 3r$	$n - k - 4r$

Assim cada um destes vetores pode ser associado a um vértice de um grafo conexo, onde as arestas são determinadas via uma lei que associa os vértices devido a variação dos  $d$ 's. No caso, encontramos uma estrutura de grafos como a seguir.

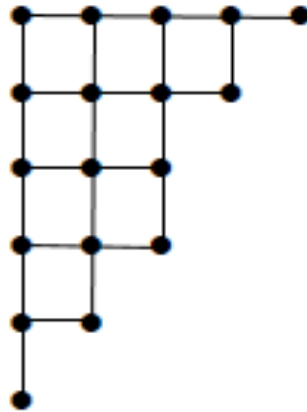


Figura 5.4

A ligação de vértices via arestas, horizontalmente dá se via a permutação de  $d$ 's e verticalmente via a variação de valores dos  $d$ 's. Para cada  $d_k$  há um grafo conexo como na figura acima. Para cada  $n$  e  $k$  temos uma estrutura de floresta contendo  $\left[ \frac{n}{k} \right]$  grafos conexos. O que faremos a seguir é apenas contar o número de vértices possíveis desta floresta.

Tomando  $l_1$  a variável que informa a posição de  $x$ , na soma geral. Na primeira soma o primeiro  $l_1$  será 2 para  $(1, 0, \dots, x, \Delta)$ , depois  $l_1 = 3$ , até  $l_1 = k - 1$  para  $(1, x, 0, \dots, 0, \Delta)$ .

Temos o primeiro termo:

$$\sum_{l_1} \left( \left[ \frac{n - ik - l_1}{l_1} \right] + \epsilon \right).$$

Para o segundo, devemos considerar o caso:

$$(1, 0, 0, \dots, x, y, \Delta).$$

Novamente temos:

$$\begin{array}{ccccc}
 (1, 0, \dots, 1, 1, n-k-5) & \text{---} & (1, 0, \dots, 2, 1, n-k-8) & \text{---} & (1, 0, \dots, 3, 1, n-k-11) \\
 | & & | & & | \\
 (1, 0, \dots, 1, 2, n-k-7) & \text{---} & (1, 0, \dots, 2, 2, n-k-10) & \text{---} & (1, 0, \dots, 3, 2, n-k-13) \\
 | & & | & & | \\
 (1, 0, \dots, 1, 3, n-k-9) & \text{---} & (1, 0, \dots, 2, 3, n-k-12) & \text{---} & (1, 0, \dots, 3, 3, n-k-15) \\
 | & & | & & | \\
 (1, 0, \dots, 1, 4, n-k-11) & \text{---} & (1, 0, \dots, 2, 4, n-k-14) & \text{---} & (1, 0, \dots, 3, 4, n-k-17) \\
 | & & | & & | \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 | & & | & & | \\
 (1, 0, \dots, 1, r, n-k-2r-3) & \text{---} & (1, 0, \dots, 2, r, n-k-2r-6) & \text{---} & (1, 0, \dots, 3, r, n-k-2r-9)
 \end{array}$$

De maneira semelhante podemos contar essas permutações colocando  $l_1$  para controlar as posições de  $x$ , e  $l_2$  para  $y$ , mas devemos considerar outra variável para controlar a variação de  $x$ , digamos  $j_1$ .

Notemos que sempre teremos  $l_1 > l_2$ , e  $j_1$  depende somente de  $n$ ,  $k$  e  $l_1$ . Então temos:

$$\sum_{j_1} \sum_{l_1 > l_2} \left( \left[ \frac{n - ik - l_1 j_1 - l_2}{l_2} \right] + \epsilon \right).$$

Análogo ao anterior, a terceira soma trabalha com permutações de  $x$ ,  $y$ , e  $z$  não nulos, tal que, que o vetor correspondente vem a ser:

$$(1, 0, 0, \dots, x, y, z, \Delta).$$

Novamente temos uma sequência, e um nova variável para controlar  $y$ . Para tal, devemos considerar  $j_2$ , somente dependendo de  $n$ ,  $k$ ,  $l_1$ , e  $l_2$ .

Feito isso, temos:

$$\sum_{j_1, j_2} \sum_{l_1 > l_2 > l_3} \left( \left[ \frac{n - ik - k^2 - l_1 j_1 - l_2 j_2 - l_3}{l_3} \right] + \epsilon \right).$$

E até a soma final, o raciocínio é análogo. Devemos fazê-lo para todos os  $d'_{ks}$ ,  $1 \leq i = d_k \leq m = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ .

Então no final temos.

$$P(n, k) = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_{m-1} + m$$

O  $m$  na soma refere-se a partições da forma:  $(i, 0, 0, \dots, 0, n - ik)$ , que são contadas separadamente.

Fazendo  $n = 10$  e  $k = 5$  há 7 partições, segundo as ideias do teorema, temos os vértices:

$$\begin{aligned} v_0 &= (1, 0, 0, 0, 5), & v_1 &= (1, 0, 0, 1, 3), & v_2 &= (1, 0, 1, 0, 2), & v_3 &= (1, 1, 0, 0, 1), \\ v_4 &= (1, 0, 0, 2, 1), & v_5 &= (1, 0, 1, 1, 0), & v_6 &= (2, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Assim temos as seguintes associações:

$$\begin{aligned} v_0 &= (1, 0, 0, 0, 5) & \leftrightarrow & 6 + 1 + 1 + 1 + 1; \\ v_1 &= (1, 0, 0, 1, 3) & \leftrightarrow & 5 + 2 + 1 + 1 + 1; \\ v_2 &= (1, 0, 1, 0, 2) & \leftrightarrow & 4 + 2 + 2 + 1 + 1; \\ v_3 &= (1, 1, 0, 0, 1) & \leftrightarrow & 3 + 2 + 2 + 2 + 1; \\ v_4 &= (1, 0, 0, 2, 1) & \leftrightarrow & 4 + 3 + 1 + 1 + 1; \\ v_5 &= (1, 0, 1, 1, 0) & \leftrightarrow & 3 + 3 + 2 + 1 + 1; \\ v_6 &= (2, 0, 0, 0, 0) & \leftrightarrow & 2 + 2 + 2 + 2 + 2. \end{aligned}$$

Na primeira linha do grafo rotulado abaixo associamos os vértices devido ao deslocamento de  $d_j = 1$ .

Na linha seguinte associamos  $v_1$  com  $v_4$ , sendo que  $v_4$  possui um  $d_j = 2$ .

Este primeiro grafo conexo foi gerado considerando apenas  $d_5 = 1$  e outro  $d_j = 1$  dentre  $d_2, d_3, d_4, d_5$ . Sendo essa primeira parte enumerada por

$$\sum_{l_1} \left( \left\lfloor \frac{n - ik - l_1}{l_1} \right\rfloor + \epsilon \right)$$

Assim obtemos o grafo

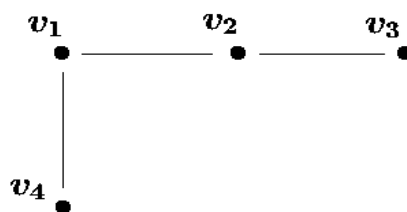


Figura 6.5



Para o segundo grafo (que é apenas 1 vértice) há duas variáveis dentre  $d_2, d_3, d_4$  não nulos.

Para  $d_5 = 2$ , obtemos também apenas um vértice, bem como o grafo zero,  $v_0 = (1, 0, 0, 0, 5)$ .

Assim o grafo final que é dado pela floresta representada por:

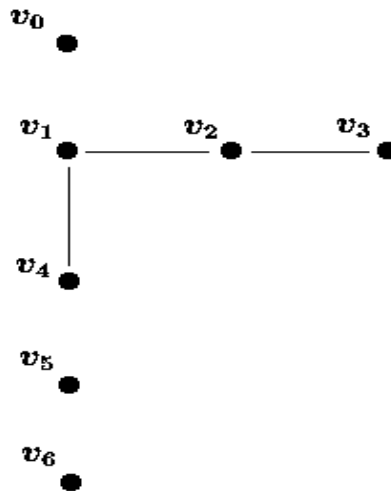


Figura 7.6

**Exemplo 49** Para  $n = 20$ , e  $k = 5$ , sabemos (usando o Maple), que  $p(20, 5) = 84$ , faremos isso usando a nossa nova fórmula.

Temos que  $m = 4$ , e a primeira parte da soma, com  $i = 1$ , têm-se:

$$\sum_{l_1} \left[ \frac{15 - l_1}{l_1} \right] + \epsilon = 15, \text{ com } 2 \leq l_1 \leq 4.$$

$$\sum_{l_1 > l_2} \sum_{j_1} \left[ \frac{15 - l_1 j_1 - l_2}{l_2} \right] + \epsilon = 29.$$

$$\sum_{l_1 > l_2 > l_3} \sum_{j_1, j_2} \left[ \frac{15 - l_1 j_1 - l_2 j_2 - l_3}{l_3} \right] + \epsilon = 9, \text{ neste caso } \epsilon \text{ administra 0 a duas partes;}$$

Deste modo  $\rho_1 = 53$ .

Agora faremos o caso  $i = 2$ , seguindo de forma análoga, temos:

$$\sum_{l_1} \left[ \frac{10 - l_1}{l_1} \right] + \epsilon = 10, \text{ com } 2 \leq l_1 \leq 4;$$

$$\sum_{l_1 > l_2} \sum_{j_1} \left[ \frac{10 - l_1 j_1 - l_2}{l_2} \right] + \epsilon = 11;$$

$$\sum_{l_1 > l_2 > l_3} \sum_{j_1, j_2} \left[ \frac{10 - l_1 j_1 - l_2 j_2 - l_3}{l_3} \right] + \epsilon = 1$$

Portanto  $\rho_2 = 22$ .

Na penúltima rodada de contas, temos:

$$i = 3, \sum_{l_1} \left[ \frac{5 - l_1}{l_1} \right] + \epsilon = 4, \text{ com } 2 \leq l_1 \leq 4;$$

$$\sum_{l_1 > l_2} \sum_{j_1} \left[ \frac{5 - l_1 j_1 - l_2}{l_2} \right] + \epsilon = 1;$$

$$\sum_{l_1 > l_2 > l_3} \sum_{j_1, j_2} \left[ \frac{5 - l_1 j_1 - l_2 j_2 - l_3}{l_3} \right] + \epsilon = 0, \text{ porém não é necessário que se faça muitas contas,}$$

basta notar que em  $(3, 1, 1, 1, \Delta)$ ,  $\Delta$  ultrapassa 20.

E sempre para  $\rho_4 = 0$ , mesmo sabendo que temos uma partição do tipo:  $(4, 0, 0, 0, 0)$ , que é equivalente a partição:  $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ , porém não é necessário irá ser contado a parte.

$$\text{Portanto: } p(20, 5) = 53 + 22 + 5 + 0 + 4 = 84.$$

Uma aplicação da fórmula acima é a contagem de formas de Jordan existentes de uma matriz não diagonalizável.

**Corolário 3.1** *Considere A uma matriz  $n \times n$  não – diagonalizável, cujo polinômio minimal tem grau  $r < n$ . O número de formas de Jordan possíveis de A é  $p(n, n - r)$ .*

De fato, seja B uma matriz de Jordan de A, sabemos que B é composta de uma submatriz principal de tamanho  $r \times r$  e o restante pode ser completado por matrizes  $1 \times 1$  até  $n - r \times n - r$ .

Logo o número destas matrizes é  $p(n, \text{partes} \leq n - r) = p(n, n - r)$ , que pode ser calculada com a fórmula exibida neste trabalho sem fazes adaptação alguma.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALEGRI, Mateus, “Interpretações para Identidades Envolvendo Sobrepartições e Partições Planas,” Ph.D. Thesis, IMECC-Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, 2010.
- [2] ALEGRI, Mateus. *Notas de aula de Estruturas Algébricas*. Itabaiana: 2014.
- [3] BALAKRISHNAN, V. K., *Introductory Discrete Mathematics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1991.
- [4] CARVALHO, M. A. G., *Teoria de Grafos, notas de aula*. UNICAMP – CESET. Limeira – SP, 2005.
- [5] CHARALAMBOS. A. Charalambides, *Enumerative Combinatorics*, Chapman Hall/CRC, 2002.
- [6] GEORGE E. A. ERIKSSON, K., *Integer Partitions*, Cambridge University Press. USA, 2004.
- [7] HARARY, F., PALMER, E. M., *Graphical Enumeration*, Michigan State University, New York and London 1973.
- [8] [https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o\\_de\\_parti%C3%A7%C3%A3o%28matem%C3%A1tica%29](https://pt.wikipedia.org/wiki/Fun%C3%A7%C3%A3o_de_parti%C3%A7%C3%A3o%28matem%C3%A1tica%29) Acesso em 10/06/2016.
- [9] [https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria\\_dos\\_grafos](https://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_grafos) Acesso em 10/06/2016.
- [10] LIU, C. L., *Introduction to Combinatorial Mathematics*. Department Electrical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1968.
- [11] OLIVEIRA, V. A, RANGEL, S, T, *Teoria dos Grafos, notas de aula*. Departamento de Matemática aplicada, Unesp, 2002.

[12] SANTOS, José Plínio O; MELLO, Margarida P; MURARI, Idani T. C. *Introdução à Análise Combinatória*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

[13] SANTOS, J.P.O., MONDEK, P., Ribeiro, A.C., New two line arrays representing partitions, *Annals of Combinatorics*, aceito.

[14] <http://slideplayer.com.br/slide/51252>. Acesso em 22/06/2016.