

TÓPICOS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES: UNIDADE

Sandro da Costa Loyola

Rio de Janeiro - RJ

Março de 2013

Trabalho de conclusão de curso do Profmat

TÓPICOS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES: UNIDADE

Discente: Sandro da Costa Loyola

Orientador: Marcelo Viana

Co-orientadora: Letícia Rangel

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte dos requisitos necessários para a conclusão do curso de Mestrado Profissional em Matemática.

Rio de Janeiro - RJ

Março de 2013

Conteúdo

Introdução	5
1 Fundamentação Teórica	11
2 O Ensino de Frações	19
2.1 A Multiplicidade de interpretações das frações	21
2.1.1 Medida	23
2.1.2 Relação parte/todo	23
2.1.3 Razão entre duas partes de um mesmo todo	24
2.1.4 Quociente entre dois números inteiros	24
2.1.5 Operador partitivo multiplicativo	24
2.2 Concepção de unidade	25
2.3 O Uso de regras e de algoritmos	26
3 Unidade	29
4 Sequências didáticas e Orientações para os professores	38
5 Considerações Finais	56
Anexos	60
Atividade 1	61

Atividade 2	64
Bibliografia	69

Introdução

O foco do presente estudo é o ensino de frações, tema fundamental dada a sua importância na concepção dos números racionais. É um assunto de extrema relevância na formação do cidadão, devido ao seu caráter elementar, constando nos currículos escolares desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, permeando toda a matemática da educação básica, em conteúdos como razão, proporção, probabilidade entre outros.

De fato, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, um dos objetivos do ensino da matemática para o segundo ciclo do Ensino Fundamental (atuais 4^o e 5^o anos) é:

construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social (MEC [1], 2001, p. 80).

Sendo assim, a aprendizagem do tema se torna imprescindível, não só para a matemática da escola básica, mas para o desenvolvimento intelectual do estudante, pois segundo BEHR et al. ([2], 1983, p. 91):

Os conceitos associados aos números racionais estão entre as idéias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização. A importância desses conceitos pode ser vista a partir de diferentes perspectivas: (a) do ponto de vista prático, a habilidade de lidar com esses conceitos aumenta enormemente a capacidade da criança de compreender e manejar uma série de situações dentro e fora da escola; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico para um contínuo desenvolvimento intelectual; (c) do ponto de vista da matemática, o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas.

Reconhecidamente, é um tema considerado difícil de ser ensinado por muitos docentes. Nessas dificuldades, podemos destacar dois aspectos: a complexidade do tema em si, que envolve a passagem da contagem para a medida e o fato de que, na formação acadêmica do professor, os números racionais são tratados de forma abstrata, totalmente diferente do contexto da Educação Básica. Segundo MOREIRA ([3], 2004, p. 94), em seu trabalho sobre a abordagem dos números racionais na Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG):

Do ponto de vista da preparação do futuro professor para o trabalho pedagógico de construção dos racionais positivos nas salas de aula da escola, a abordagem que se desenvolve na licenciatura pode ser, também, submetida a fortes questionamentos. Ao longo de todo o processo de formação na licenciatura, o conjunto dos números racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da

matemática escolar.

Ensinar frações envolve diversos desafios. Um deles certamente é o conceito de medida. No âmbito do ensino dos números naturais (conjunto a que os estudantes estão familiarizados), ou seja, em relação à contagem, a identificação da unidade não oferece um desafio maior, com forte referência intuitiva e concreta.

O problema da contagem consiste em controlar a quantidade de um conjunto finito de objetos. Uma primeira estratégia para tratar este problema é estabelecer uma correspondência um a um com um conjunto de referência. [...] Um número natural é um rótulo dado a todos os conjuntos de objetos que podem ser postos em correspondência um a um entre si. [...] Desta forma, o conceito matemático de número natural é uma abstração que emerge da contagem por meio de correspondências um a um. O problema da medida consiste em comparar o tamanho de uma grandeza com o de uma unidade, isto é, uma grandeza u de referência, de mesma espécie da grandeza a ser medida a . Neste sentido, medir é verificar quantos vezes a unidade “cabe” na grandeza a ser medida. [...] No caso particular de grandezas comensuráveis, o problema da medida pode ser resolvido por contagem [...]. O valor da medida pode [...] ser representado por uma comparação, ou razão de números naturais. Desta forma, o conceito matemático de número racional emerge do problema concreto da medida, no caso particular de grandezas comensuráveis.(GIRALDO et al. [4], 2012, p.13)

Outro desafio para o ensino e a aprendizagem de números racionais se apresenta na própria escrita das frações. Não é tão trivial a associação de uma quantidade a dois números (inteiros) “separados” por um pequeno traço e escritos na vertical.

a introdução de números fracionários nas séries iniciais pelo procedimento da dupla contagem das partes, em superfícies totalmente divididas em partes congruentes, conduz a criança a entender os fracionários, como se fossem dois números naturais: um que se coloca em cima e outro abaixo de um traço.(SILVA [5],2005, p.15)

Tentando facilitar o entendimento por parte dos alunos, muitos professores limitam o ensino dos racionais à memorização de regras, alcançando justamente o contrário do pretendido, comprometendo a compreensão do assunto. Ao tratar o tópico de comparação de frações, por exemplo, muitos professores e livros didáticos tratam o assunto apenas como uma sequência mecânica, reduzindo as frações envolvidas a um denominador comum, sem explicitar que, para tal procedimento, está sendo utilizado o conceito de frações equivalentes. Por exemplo, para se comparar $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, primeiro se reduz a um denominador comum:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$$

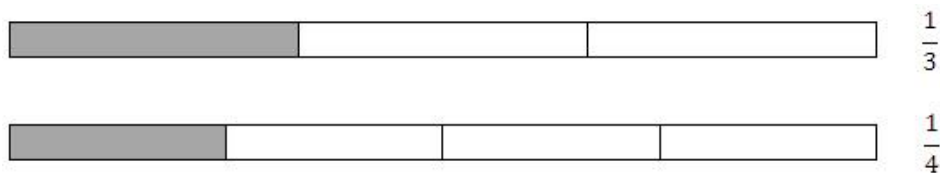
(multiplica-se numerador e denominador por quatro, pois este é o denominador da outra fração) e, de maneira análoga,

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}.$$

Como o 4 é maior que 3, conclui-se que $\frac{4}{12}$ é maior que $\frac{3}{12}$, ou seja, $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{4}$.

Neste caso mais simples, poderíamos comparar a quantidade de partes em que a unidade foi dividida. Comparando a terça parte com a quarta parte, é possível perceber que $\frac{1}{3}$ é

maior que $\frac{1}{4}$, pois quanto mais dividirmos a unidade, menor será o tamanho de cada parte, conforme pode ser visualizado na figura a seguir.



Ao optar pelo ensino por meio de regras, o professor faz o aluno pular várias etapas, como a experimentação, a manipulação de materiais concretos, a formulação e a verificação de conjecturas num ambiente em que o professor e aluno passam a discutir sobre o assunto abordado, que são importantes e conduzem à compreensão do conceito. Segundo MONTEIRO & COSTA ([6], 1996, p.62):

A utilização prematura das regras no estudo das frações e decimais, tem sido detectado como outro fator que atrasa a compreensão dos números racionais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na sala de aula de matemática.

O grupo composto pelos professores Michael Cristian Soares dos Santos, Sandro da Costa Loyola e Wagner Rohr Garcez, desenvolveu em parceria e colaboração a reflexão sobre os Números Racionais e o ensino do assunto no ensino fundamental. Assim, os trabalhos de conclusão de curso desses professores têm interseção não vazia. Nos três trabalhos, o Capítulo 1 trata dos números racionais e o Capítulo 2, do ensino de frações na escola básica, compondo juntos a parte comum. Como temas de atenção específica de cada autor foram eleitos os tópicos **Unidade**, **Equivalência** e **Divisão de Frações**, que mereceram investigação de cada membro para compor três trabalhos individuais. Os critérios

adotados para a escolha dos temas foram a relevância para a fundamentação do assunto e a dificuldade do ensino. Certamente, a Unidade e a Equivalência são elementares para a compreensão dos conceitos de fração e de número racional. E o conceito de divisão é um dos que mais oferece dificuldade para o ensino e a aprendizagem do tema no ensino básico.

Com objetivo de investigar o ensino das Frações, foram elaboradas seqüências didáticas contendo orientações ao professor que se interessar em sua aplicação. Estas atividades foram aplicadas em turmas do ensino fundamental com o objetivo de avaliar o seu desenvolvimento como recurso didático para o ensino do tema.

Certamente, não é objetivo deste trabalho propor um caminho conclusivo para o ensino dos tópicos em atenção, mas sim propor um debate sobre o tema, buscando contribuir para a reflexão sobre esse conteúdo e o seu ensino.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

No ensino básico, a ideia de número aparece, inicialmente, como era usada desde a pré-história, a partir da contagem. Mesmo antes da representação simbólica dos números, o pastor já contava suas ovelhas comparando com um punhado de pedras, para conferir se não havia perdido alguma. Dessa maneira, estabelecia a noção concreta da contagem que funda e sustenta o conceito de número natural.

O conceito de número natural é uma abstração da ideia e da ação concreta de contagem. O número é uma propriedade abstrata, uma ideia, não existe concretamente e sim, representa uma classe de elementos com uma mesma característica.

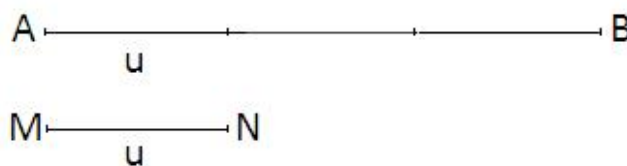
“O número 5, por exemplo, é uma propriedade (abstrata) que têm em comum cinco cadeiras, cinco pessoas, cinco quadrados, ou qualquer conjunto com cinco objetos; que independe das características particulares e da organização mútua desses objetos. Entretanto, o número 5 não é nem as cinco cadeiras, nem as

cinco pessoas nem os cinco quadrados. Não podemos ver, nem sentir, nem ouvir o número 5 no mundo concreto, apenas abstraí-lo como uma propriedade abstrata da qual certos conjuntos compartilham.” (GIRALDO, [7],p.2)

Com o passar do tempo, surgiu a necessidade de novos números, decorrente do aparecimento de problemas associados a medição. Para medir, comparamos uma grandeza a uma unidade de mesma espécie estabelecida como referência. Por exemplo, dado um segmento AB , para determinarmos a medida deste segmento, é preciso determinar quantas vezes um segmento u , de mesma espécie, que por definição é tomado como unidade, cabe dentro de AB .

Quando o segmento AB pode ser subdividido em uma quantidade inteira n de segmentos congruentes a u , a medida de AB em relação a u é igual ao número $n \in \mathbb{N}$.

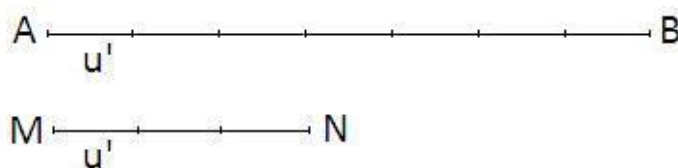
Considerando o segmento AB e $u = MN$, conforme a figura a seguir, temos que $AB = 3u$.



Quando o segmento AB não pode ser subdividido em partes congruentes a u então verificamos se existe u' , isto é, existe uma subdivisão de u , que cabe um número inteiro de vezes em AB tal que AB e u possam ser divididos em partes congruentes a u' . Desta

forma, $AB = n.u'$, como $u = k.u'$ então $AB = \frac{n}{k}u$. Neste caso, os números naturais não são suficientes para este registro.

Neste caso, temos $AB = 7u'$ e $MN = 3u'$, conforme a figura a seguir. Então, $AB = \frac{7}{3}MN$:



Nos dois exemplos anteriores, dizemos que AB e MN são comensuráveis, pois existe uma sub-unidade comum entre eles. No primeiro, a sub-unidade considerada foi u e no segundo, u' . Quando isto acontece, a medida do segmento AB fica determinada por um número racional.

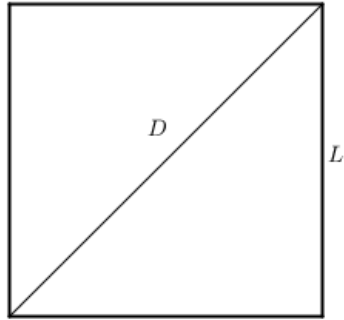
O conjunto dos números racionais pode ser formalizado da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \text{ e } b \text{ inteiros e } b \neq 0 \right\}.$$

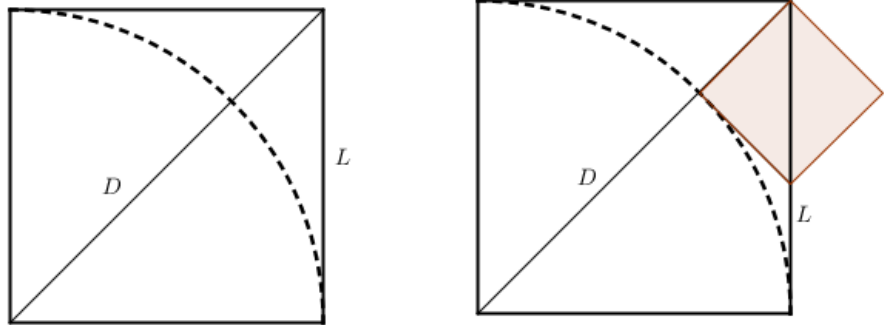
Nem sempre AB e u são comensuráveis, isto é, múltiplos inteiros de uma unidade comum u' . Neste caso, a medida de AB em relação a u não é representada por uma razão de números naturais.

Desde a Grécia antiga, já se sabia que a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis, isto é, que não podem ser simultaneamente expressos como múltiplos inteiros de nenhuma unidade comum. Surge assim um novo conceito de números: os números irracionais.

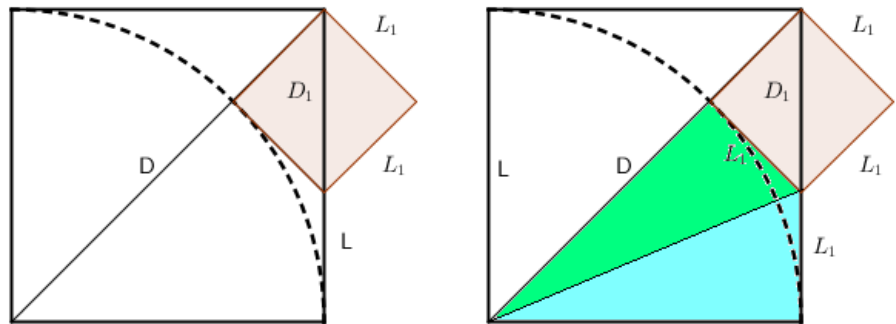
Dado um quadrado de lado L e a sua diagonal D , vamos demonstrar que os segmentos L e D são incomensuráveis. Supondo por absurdo, que os segmentos D e L são comensuráveis, isto é, que exista uma medida u tal que $D = nu$ e $L = mu$, para m e n inteiros positivos.



Com o auxílio de um compasso, vamos marcar na diagonal D , um segmento congruente a L , formando um novo quadrado de lado $D - L$.

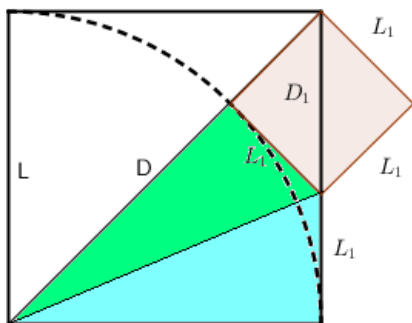


Considere $L_1 = D - L$. Como supomos D e L comensuráveis, dizemos que $L_1 = nu - mu$, então $L_1 = (n - m)u$, e, finalmente, chamando $n - m$ de m_1 , temos $L_1 = m_1 u$, onde m_1 é um número inteiro positivo.



A diagonal D_1 do novo quadrado é igual a $D_1 = L - L_1$, devido à congruência dos triângulos em destaque. Então $D_1 = mu - m_1u$, e $D_1 = n_1u$, onde $n_1 = m - m_1$ é um número inteiro positivo.

Repetindo este processo infinitamente, obtemos uma sequência infinita de quadrados, cujos lados $L_i, i = 1, 2, 3, \dots$, isto é, L_i fica tão pequenos quanto se queira.



Como todos os lados podem ser expressos na forma $L_i = m_iu$, com m_i , inteiro positivo, neste caso, para i suficientemente grande, m_i seria menor que u , contradizendo o fato de ser seu múltiplo inteiro, logo, concluímos que D e L são incomensuráveis.

Essa demonstração, fundamentalmente geométrica, certamente não é a mais adequada para a abordagem do assunto no ensino fundamental, uma vez que envolve a noção de limite. No entanto, a verificação de que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado não é um número racional é possível nesta etapa do ensino a partir de argumentos algébricos e aritméticos.

Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que a razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado é $\sqrt{2}$. De fato, considerando um quadrado de lado l e diagonal d , temos:

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

$$\frac{d}{l} = \sqrt{2}$$

Demonstraremos que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como o quociente de dois números inteiros. Para isso, suponhamos por absurdo que existem m e $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, tais que $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, em que m e n são primos entre si, isto é, $\text{mdc}(m, n) = 1$. Dessa forma, teríamos:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$m^2 = 2n^2$$

Como m^2 é par, m também é par, logo, podemos escrevê-lo como $m = 2p$, em que $p \in \mathbb{Z}^*$. Fazendo a substituição:

$$(2p)^2 = 2n^2$$

$$4p^2 = 2n^2$$

$$2p^2 = n^2$$

Como n^2 é par, n também é par, logo, podemos escrevê-lo como $n = 2q$, em que $q \in \mathbb{Z}^*$.

Dessa forma, concluímos que m e n são números pares, chegando a um absurdo, pois supomos que m e n são primos entre si. Não é possível escrever a razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado como um número racional. Temos que m e n são segmentos incomensuráveis.

Capítulo 2

O Ensino de Frações

É consenso entre os professores que a aprendizagem de frações representa uma grande dificuldade para o aluno. Na sala de aula, mesmo após o tema já ter sido apresentado de maneira exaustiva, ainda é possível observar as mais variadas dúvidas, inclusive em anos mais avançados da educação básica, etapa em que se supõe que o conceito já está compreendido. Tal fator também revela a dificuldade que os professores encontram ao abordar o tema. Segundo FAVERO & NEVES ([8], 2012, p. 36):

Os relatórios de avaliações oficiais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), confirmam o consenso apontado nos estudos brasileiros e internacionais entre as décadas de 1980 e 1990: as dificuldades de alunos e de professores em lidar com o conceito de número racional – tomado, no geral, como um procedimento simples de contagem dupla em situações estáticas de parte-todo [...]

De fato, este assunto tem levado um grande número de educadores a pesquisarem o tema sem que seja apontado um caminho conclusivo. No entanto, é consenso que realmente este não é um tema cujo aprendizado é simples nem trivial. Outro ponto de concordância é que existem alguns fatores que ressaltam tal dificuldade. Abaixo, fazemos referência a três artigos em que os autores destacam alguns destes obstáculos.

Segundo MONTEIRO e COSTA ([6],1996), alguns dos fatores relacionados à dificuldade dos alunos em trabalhar com os números racionais, e conseqüentemente às frações: A multiplicidade de significados dos números racionais, a concepção da unidade em vários problemas ou situações envolvendo números racionais e a utilização precoce de regras e algoritmos no estudo dos números racionais e frações.

Segundo LOPES ([9],2008), um grave problema é “a prescrição de regras e macetes para realizar operações” (p. 4). O mesmo autor também aponta para o fato de que “a palavra fração esta relacionada a muitas ideias e constructos” (p. 7). Quando o autor utiliza a palavra constructo, ele faz menção às diferentes intepretações da fração.

MONTEIRO et al.([10],2005) salientam que os significados das frações são dificuldades inerentes ao estudo deste tema e explicam:

“Analisemos, por exemplo, os diversos significados que uma fracção pode ter dependendo do contexto onde se insere. $\frac{3}{5}$ pode referir-se a uma parte de um todo, $\frac{3}{5}$ de um bolo, $\frac{3}{5}$ da superfície da terra, etc., ou pode representar o quociente entre dois números naturais. Se tivermos 3 pizzas a partilhar por 5

peças, $\frac{3}{5}$ representa o quociente que resulta de dividir 3 por 5 e que é a parte de pizza que cabe a cada um. Por outro lado, $\frac{3}{5}$ representa também, neste contexto, a razão entre o número de pizzas e o número de pessoas: 3 pizzas para 5 pessoas equivale a 6 pizzas para 10 pessoas. Uma fração pode ainda representar a razão entre duas partes de um mesmo todo: a relação entre o número de raparigas e o número de rapazes num conjunto de 8 jovens numa festa, por exemplo. No caso de querermos saber quanto é $\frac{3}{5}$ de meio milhão de euros, por exemplo, ou $\frac{3}{5}$ de meia pizza, a fração funciona como um operador aplicado a um conjunto discreto ou contínuo” (p. 47).

Assim, destacamos dentre as dificuldades para o ensino e a aprendizagem de frações os seguintes pontos:

- a) A multiplicidade de interpretações das frações;
- b) concepção de unidade (reconhecimento da unidade);
- c) a utilização de regras e de algoritmos;

Com certeza, esta lista não se encontra completa, mas acreditamos que os três pontos citados acima destacam de maneira objetiva as questões que nos afligem em relação ao ensino de frações, os quais serão percorridos.

2.1 A Multiplicidade de interpretações das frações

É comum os autores fazerem menção aos múltiplos significados das frações. Em nosso trabalho, optamos tratar como múltiplas interpretações, pois entendemos que uma fração

não possui diversos significados, mas interpretações distintas de acordo com o contexto a que estão atreladas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais ([11], 1998, p.66), o ensino de frações, *”deve requerer atenção especial no 3º ciclo (6º e 7º ano), partindo da exploração dos seus significados: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador”*. Os PCN sinalizam que as frações, dependendo do contexto em que se encontram, se apresentam como registro numérico de diversas situações, que precisam ser consideradas pelos professores no momento em que estes se propõem a ensinar.

MOREIRA & FERREIRA ([12] 2008, p.105), dizem que a literatura matemática sobre o ensino de racionais, entre os anos de 1975 e 1995, se destacou por apresentar *“um grande conjunto de trabalhos que partem de uma premissa comum: para que desenvolva uma compreensão efetiva desse sistema numérico, a criança deve ser exposta a uma diversidade de interpretações do que seja uma razão de inteiros (essas interpretações constituem os chamados subconstrutos da noção de número racional)”*.

Esta lista das diferentes interpretações das frações, chamados por BEHR et al. ([2], 1983), ROMANATTO ([13], 1997) e MOREIRA & FERREIRA ([12], 2008) de subconstrutos, foi constantemente alterada ao longo dos anos. Estes educadores matemáticos, baseados nos estudos realizados por KIEREN ([14], 1980), declaram a existência de cinco subconstrutos básicos: relação parte/todo, razão, quociente, medida e operador, os mesmos citados nos PCN, sendo estes suficientes para esclarecer o sentido de número racional.

Diante de tantas situações envolvendo um único conceito, é inevitável que haja dúvida sobre o que, de fato, é esse conceito. Afinal, o que são frações? Frações representam quantidades/números, e precisam ser compreendidas como tal.

2.1.1 Medida

Quando medimos, realizamos uma comparação de uma grandeza com uma unidade de mesma espécie. Por exemplo, quando medimos um comprimento, podemos utilizar como referência o passo, o palmo ou uma unidade pré estabelecida como o metro. Se tomarmos o metro como unidade de medida, podemos dizer que a distância entre determinados dois pontos é de 50 metros, isto é, a unidade metro cabe 50 vezes dentro da distância dada.

Generalizando, quando medimos um dado comprimento AB, precisamos tomar como unidade um segmento CD verificando quantas vezes este cabe no comprimento dado, podendo chegar a algo do tipo $AB = \frac{2}{3} CD$.

2.1.2 Relação parte/todo

Neste caso, a unidade deve ser dividido em partes congruentes em que, na representação fracionária, o denominador representa o total de partes em que a unidade foi dividida e o numerador representa o número de partes consideradas. Podemos utilizar como unidade uma barra de chocolate ou um saco de bolas de gudes, que serão divididos em partes iguais. Dessa forma, se um todo for dividido em três partes e uma destas partes for destacada, temos a representação da fração $\frac{1}{3}$.

2.1.3 Razão entre duas partes de um mesmo todo

Razão é uma relação de comparação entre duas quantidades ou medidas de mesmo tipo. Elas podem expressar comparações entre uma parte de um todo à outra parte do mesmo todo, como por exemplo, a razão entre o número de meninas e o número de meninos em uma sala de aula.

2.1.4 Quociente entre dois números inteiros

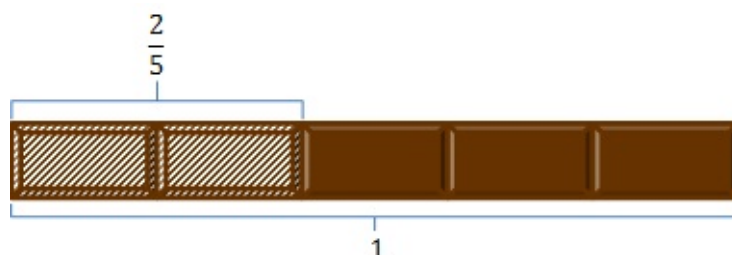
Nesta situação, um objeto, ou alguns destes, devem ser divididos de maneira igual a um grupo de receptores. Podemos tomar como exemplo três pizzas a serem distribuídas entre duas pessoas em que a quantidade de pizzas é representada no numerador e o número de pessoas no denominador. O quociente representa a relação entre a quantidade de pizzas e o número de crianças, assim como o resultado da divisão das pizzas para as crianças.

2.1.5 Operador partitivo multiplicativo

Neste caso, a fração torna-se um multiplicador de uma determinada quantidade, sendo vista como uma sucessão de operações. Por exemplo, se queremos encontrar $\frac{2}{3}$ de 30, devemos multiplicar $\frac{2}{3}$ por 30, obtendo 20 como resultado.

2.2 Concepção de unidade

No contexto do ensino de frações na escola básica, a compreensão do conceito de unidade é fundamental e é pré-requisito para o bom entendimento das frações. Para realizar a comparação que determina a medida, faz-se um dupla contagem a partir de uma unidade pertinente, que viabilize a comparação. A contagem a partir desta unidade determina os termos da fração, numerador e denominador. No entanto, observando a medida realizada, esta unidade não é, de maneira geral, associada ao número 1. Por exemplo, na divisão de uma barra de chocolate em 5 pedaços equivalentes dos quais 2 foram comidos, a fração $\frac{2}{5}$ identifica a quantidade de chocolate comida. Os números 2 e 5 são obtidos por contagem de “pedaços”. Portanto, o pedaço tem o papel de sub-unidade nessa contagem. No entanto, não correspondem, no contexto geral da medida realizada, ao número 1. Nesse caso, o número 1 corresponde à barra de chocolate inteira, ou seja, ao todo.



No caso anterior, a quinta parte da barra de chocolate é usada como unidade na comparação entre parte/todo, mas é a barra de chocolate que é associada ao número 1. Para o aluno, identificar a unidade correspondente ao número 1 não é intuitivo, cabendo ao professor orientá-lo explorando este conceito em diversas situações em sala de aula.

2.3 O Uso de regras e de algoritmos

Durante o ensino de alguns tópicos da Matemática, muitas vezes, nós professores, tomamos o caminho errado ao apresentarmos a aplicação de algoritmos aos nossos alunos sem que antes estes compreendam o sentido dos passos que estão prestes a tomar. A princípio, mecanizar o procedimento pode parecer o caminho mais prático e rápido, mas nem todo atalho é viável, podendo trazer prejuízo à aprendizagem do aluno.

Quando falamos de algoritmos, estamos nos referindo a passos ordenados que, seguidos sistematicamente, conduzem para a resolução de um problema. Na Matemática, não são poucas as situações em que somos apresentados a eles. Não que sejam errados, mas em muitos casos eles são apresentados prematuramente. Como exemplo, podemos citar o algoritmo para a soma ou a subtração de frações, que geralmente é apresentado aos alunos da seguinte maneira:

- a) Calcule o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores das frações a serem somadas e/ou subtraídas.
- b) Divida o MMC pelo denominador de cada fração.
- c) Tome o resultado de cada divisão e multiplique pelo numerador de sua respectiva fração.
- d) Coloque os resultados obtidos como numeradores de uma fração cujo denominador é o MMC
- e) Efetue as operações solicitadas.

Vamos aplicar esse procedimento para calcular, por exemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

a) MMC (2,3) = 6

b) $6 : 2 = 3$ e $6 : 3 = 2$

c) $3 \times 1 = 3$ e $2 \times 1 = 2$

d) $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$

e) $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

A despeito de sua funcionalidade, casos como a mecanização vista acima podem ser prejudiciais aos alunos. Segundo uma pesquisa realizada por DAMICO ([15] 2007), aproximadamente metade dos alunos avaliados, quando questionados sobre o porquê de se calcular o MMC para resolver uma determinada adição de frações, não souberam responder ou deram respostas erradas ou confusas. MONTEIRO & COSTA ([6] 1996), comentando outra pesquisa semelhante, afirmam que “uma possível explicação para este fato poderá ser que a memorização da regra impeça a interiorização do conceito” (p.62).

A memorização de regras, não obstante a limitação que determina no processo de aprendizagem, acaba ganhando a preferência de alunos e professores, que buscam evitar os desafios e as dificuldades inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem. De igual modo, muitos professores, esquivando-se da árdua tarefa de mostrar o porquê, incentivam a memorização e a aplicação dos algoritmos. Conforme destaca DAMICO ([15] 2007, p.90):

O objetivo destas observações é ressaltar a ideia de que no processo de ensino o algoritmo seja o resultado final, a síntese da evolução das estratégias pessoais

conquistadas a partir da resolução de problemas contextualizados e significativos para os alunos. Além disso, estes algoritmos não podem ficar só como sínteses de procedimentos vinculados a situações mais ou menos concretas, mas devem fazer parte de um repertório de estratégias conquistadas com o objetivo de serem reinvestidas em outras situações.

Mais uma vez destacamos que a valorização da memorização e da aplicação de regras em detrimento da compreensão do conceito matemático pode ser um forte obstáculo à aprendizagem.

Capítulo 3

Unidade

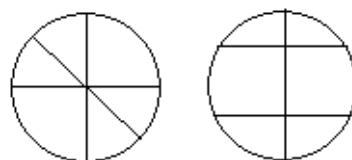
Em nosso dia a dia, usamos a matemática com mais frequência do que imaginamos. Medimos e contamos frequentemente, quando por exemplo olhamos para o relógio e estimamos o tempo que temos para nos arrumarmos para o trabalho ou quando partimos um pedaço de queijo que caiba na fatia de pão de forma. No trabalho, na escola ou em casa, estamos sempre relacionando conjuntos, por exemplo, quando arrumamos a mesa para o jantar a quantidade de pratos e talheres estão relacionados à quantidade de pessoas e quando preparamos um suco estimamos a quantidade de água à ser misturada a polpa da fruta. O conceito matemático de número está baseado nessas duas noções elementares: Contar e medir.

Quando pedimos para o aluno repartir, 10 balas entre 5 colegas, de modo que todos fiquem com o mesmo número de balas, a solução é simples pois ele aprendeu que, na divisão, 10 dividido por 5 é 2 para cada um; mesmo que a divisão não seja exata, por exemplo se forem 11 por 5, ele tem a noção de que dá 2 para cada um e sobra 1. Essa operação é

realizada com certa naturalidade pois, o aluno "sabe" repartir coisas, e o número está sendo usado no contexto discreto, de contagem. A divisão no contexto do contínuo, sem "restos", tem um caráter diferente e apresenta outras dificuldades.

Quando passamos da contagem para a medida, e não podemos expressar medidas através da contagem, somos levados a considerar uma outra classe de números, os números racionais. As frações são ensinadas a partir do modelo contínuo com a concepção parte/todo com a intenção de resolver alguns problemas de medidas que os números naturais não podiam resolver.

As noções intuitivas de estimativa e de aproximação raramente são trabalhadas em sala de aula. Por exemplo, se na metade da arquibancada do Maracanã cabem 35 mil pessoas, é possível calcular aproximadamente o público presente observando a fração da arquibancada que tem torcedor; outro exemplo: se um passo grande do juiz tem pouco menos de um metro ele, com 10 passos, pode colocar a barreira a aproximadamente $9,15m$ de distância da bola determinados pela regra. Quando desenvolvemos este tipo de estimativa com o aluno, a partir deste tipo de observação, o aluno cria uma relação entre o discreto e o contínuo, quantidade de torcedores e área ocupada, e isso o ajuda a compreender melhor essa passagem, desenvolvendo também sua visão espacial, que auxilia nas representações evitando erros, como por exemplo, quando tem dificuldades de dividir uma pizza em seis partes iguais e encontramos registros como:



A unidade pode ainda ser considerada simples ou composta. Segundo MONTEIRO E COSTA [6], 1996, uma dificuldade surge quando a unidade passa a ser um conjunto de várias unidades simples que deverão ser vistas como uma nova unidade composta. Uma dúzia de ovos é uma unidade composta pois resulta do agrupamento de um conjunto discreto de objetos. Um ovo é uma unidade simples. Para construir uma unidade composta como a centena por exemplo, o aluno tem que coordenar vários tipos de unidade ao mesmo tempo pois, a centena é composta por dez dezenas e esta é composta por dez unidades simples. Assim, um dos desafios que se apresenta em relação à unidade diz respeito a situações em que o número 1 corresponde a conjuntos não unitários, ou seja, que envolvem mais do que um exemplar de um determinado objeto.

RANGEL [16], 2012, em uma investigação que envolveu professores da escola básica em um estudo com atenção aos números racionais, destaca a preocupação desses professores em relação a essa questão:

A discussão que determinou a inclusão do item “compreender a ideia de unidade” (na lista que determinou o estudo) foi pautada no reconhecimento do grupo da dificuldade dos estudantes para resolver problemas em que a unidade corresponde a um conjunto com mais do que um elemento. Esses problemas são encontrados com alguma frequência nos livros didáticos da escola básica..

Esta dificuldade pode ser observada em um exemplo em que três pizzas devem ser divididas em pedaços iguais para quatro pessoas, conforme a ilustração a seguir. Neste caso, o aluno deve conceber o conjunto das três pizzas como a unidade.



Imagem retirada do site: <http://pequenosaprendizes2r.blogspot.com.br/2011/01/e-tudo-uma-questao-de-pensamento.html>

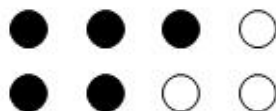
em 01/02/2013

Ainda neste exemplo, podemos explorar o conceito de unidade perguntando ao aluno que fração de uma pizza cabe a cada um e que fração das três pizzas cabe a cada um, trocando o referencial da unidade.

O ensino de frações, tradicionalmente, se estabelece a partir da dupla contagem, não enfatizando a comparação como necessário. Assim, o aluno entende a fração fundamentalmente como o número de partes tomada da unidade, repartida em partes iguais, o que é referente à concepção parte/todo. Por exemplo, como no problema anterior em que o aluno geralmente reparte cada pizza em 4 ou 8 pedaços e indica a quantidade que cabe a cada pessoa pelas frações $\frac{3}{12}$ ou $\frac{6}{24}$, respectivamente. Nesse caso, ainda que dificilmente o aluno identifique, a unidade são três pizzas. Dificilmente o aluno dá como resposta $\frac{3}{4}$, caso em que a unidade corresponde a uma pizza.

Segundo MONTEIRO E COSTA [6], 1996, um outro exemplo, baseado no estudo de Mochon (1993) encontra-se a seguir.

“Metade de um quilo de laranjas não é o mesmo que metade de uma dúzia de ovos, ou um terço de uma folha de papel A4 não é o mesmo que um terço de uma folha A5. Por exemplo se considerarmos a seguinte figura podemos considerar várias frações possíveis:



- A. $1\frac{1}{4}$; Cada grupo de 4 pintas é uma unidade.
- B. $\frac{5}{8}$; O conjunto das 8 pintas é a unidade.
- C. $\frac{5}{3}$; Razão entre o n° de pintas pretas e o n° de pintas brancas.
- D. 2,5; Cada 2 pintas é a unidade.”

Outro tipo de dúvida que gera conflitos quanto à definição do conceito de frações fica revelada em situações em que o aluno precisa perceber, por exemplo, que $\frac{1}{2}$ de um círculo é diferente de $\frac{1}{2}$ de um retângulo ainda que sejam representados pelo mesmo número. Claro que essa diferença também se manifesta no contexto dos naturais, 5 cadeiras são diferentes de 5 pessoas. No entanto a abstração do número no contexto da fração se apresenta mais complexa. Certamente a compreensão da unidade é um dos componentes que interfere nesse processo.

Outra questão que esbarra no conceito de unidade é intrínseca à noção de fração. De maneira geral, uma fração não nos diz nada sobre o tamanho da parte ou do todo e sim, define uma relação entre eles. Por exemplo, se numa urna há apenas bolinhas brancas e pretas e dizemos que as bolinhas brancas são $\frac{1}{3}$ do total de bolinhas, não é possível saber quantas bolinhas brancas ou pretas há na urna, nem o total de bolinhas. Sabe-se apenas a relação entre essas quantidades. Neste caso a unidade é o total de bolinhas da urna.

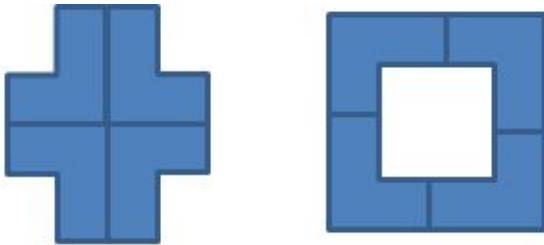
Finalizamos esta seção reforçando a importância deste conceito, que deve ser explorado em diversas situações nas salas de aula, através de discussões, como as geradas pelo exemplo a seguir: “Ana e Mário ganham mesadas de seus pais. Após receberem, Ana gastou metade de sua mesada enquanto Mário gastou um terço da sua. Quem gastou mais?”.

No questionamento acima, a princípio, se o aluno simplesmente comparar $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, poderá afirmar que foi Ana, mas o resultado irá variar de acordo com o valor de cada mesada. Caso estas sejam iguais, com certeza Ana terá gastado mais. Logo, as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ dependerão da unidade a que estiverem atreladas.

O objetivo deste trabalho é explorar situações-problema que abordem a unidade em diferentes aspectos, contextos e representações envolvendo frações. Com isso sensibilizar o aluno, de 6º e 7º anos especialmente, a partir de atividades diversas, para compreender e conceituar unidade. Por exemplo, dada a forma que representa $\frac{1}{4}$ de uma figura solicitar uma representação da figura inteira, ou seja, da unidade:



Um quarto de uma figura.

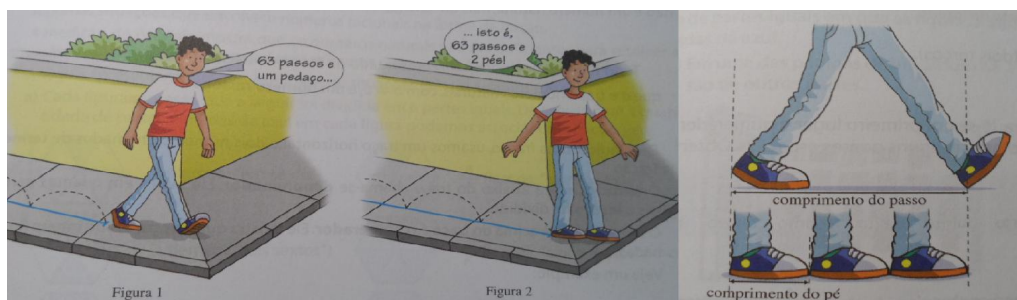


Duas possíveis representações do inteiro.

De acordo com os PCN (MEC [1], 2001), espera-se que o aluno reconheça os números naturais e racionais no contexto diários, compreenda e utilize as regras do sistema de numeração decimal, para leitura, escrita, comparação e ordenação de números naturais de qualquer ordem de grandeza; leia, escreva, compare e ordene as representações fracionárias de uso frequente; reconheça que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária; identifique e produza frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas; explore os diferentes significados das frações em situações-problema: parte todo, quociente e razão; observe que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária; relacione as representações

fracionárias com a decimal de um mesmo número racional; e reconheça o uso da porcentagem no contexto diário. Compreender e conceituar unidade é fundamental para que o aluno alcance os objetivos indicados pelos PCN. Como comparar frações sem reconhecer com a unidade e compará-las? Como entender um número racional a partir de frações equivalentes sem compreender a unidade? É claro que, concretamente, uma dúzia de ovos é diferente de um metro de comprimento, mas ambos são associados à unidade correspondente ao número 1. O mesmo vale para frações dessas quantidades que são números racionais.

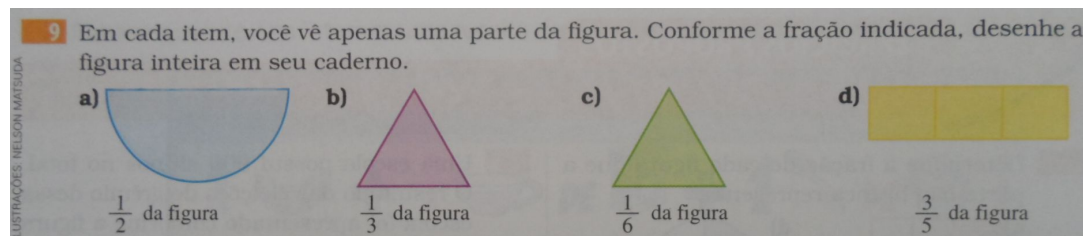
Apesar de ser fundamental para o aprendizado de números racionais, a questão da unidade não recebe destaque nos livros didáticos. Foram analisados, quanto ao ensino e apresentação da unidade, livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Por exemplo, o livro do BIANCHINI ([17], 2006), 6º ano, introduz o ensino de frações à partir da medida e da dupla contagem. Para isso, usa como recurso uma caminhada em que identifica o passo ao todo ou inteiro e “pés” a subdivisões do “passo”.



BIANCHINI [17], 2006 (p.151)

Nas páginas seguintes aborda exemplos em que a unidade muda de forma e pode ser

uma figura geométrica, a página de uma coleção de selos, uma receita ou duas pizzas. Aborda bons exercícios e traz atividades semelhantes a algumas sugeridas neste trabalho.



BIANCHINI [17], 2006 (p.156)

Ainda sobre o livro do Bianchini, são observadas atividades que tratam de comparação de frações, de frações equivalentes, das operações com frações, da forma decimal dos números racionais e da representação na reta numérica. No entanto, não são observadas novas atividades tratando especificamente da questão da unidade.

O livro do IEZZI ([18], 2005), também do 6º ano, logo no início do capítulo sobre frações, apresenta o segmento de reta de extremidades 0 e 1 como a representação da unidade, sem qualquer atividade que promova a construção desse conceito. Em seguida, passa à comparação de frações e à localização na reta numérica e trata das operações com frações. A falta de atenção à questão da unidade, observada no livro do Iezzi, também caracteriza outros livros destinados a mesma etapa escolar. Por exemplo, GIOVANNI ([19], 2010), CARVALHO ([20], 2009), IMENES ([21], 2012). A questão da unidade é tratada como se fosse um assunto trivial. Os exercícios que propomos buscam destacar a importância da unidade à partir da abordagem em diferentes situações e perspectivas.

Capítulo 4

Sequências didáticas e Orientações para os professores

As frações sempre foram um grande desafio para os alunos, que saem do ensino fundamental sem a compreensão de alguns dos seus conceitos mais importantes para prosseguir no ensino básico. Um destes desafios é quanto à compreensão do conceito de unidade.

A questão abaixo, aplicada no exame para ingresso de professores de matemática, pretendentes a vaga no curso de Especialização em Educação Matemática da UFRJ em 2013.

Questão 8. Considere a figura a seguir, formada pela justaposição de dois hexágonos regulares e congruentes



Faça um desenho tal que a figura anterior corresponda a:

- (a) $\frac{3}{4}$ do desenho
- (b) $\frac{6}{5}$ do desenho

Foi uma surpresa quando constatei que, dos 29 professores, apenas 7 acertaram a questão, pouco mais de 24%, o que denuncia a dificuldade que o docente também encontra neste tema e conseqüentemente deve transmitir para o seu aluno.

Como percebemos, tanto para alunos como professores, não fica claro conceitos que são de fundamental importância para compreensão e ensino de frações, preferem decorar regras, sem se preocupar com o que cada etapa realmente significa.

No âmbito do conceito de unidade algumas ideias importantes são:

1. Partes fracionárias são partilhas IGUAIS. São porções de tamanhos iguais da unidade ou de parte desta unidade.
2. Estas partes têm nomes especiais que definem a quantidade de partes iguais em que foi dividido o inteiro, como meios, terços, quartos, etc.
3. Em quanto mais partes for fracionada a unidade, menor será cada parte. Exemplo: Quartos são menores que terços, quando referentes a mesma unidade.

4. O denominador de uma fração indica em quantas partes iguais a unidade foi fracionada (terços, quartos,...) e o numerador a quantidade de partes consideradas.

Foram aplicadas duas atividades em turmas e escolas diferentes, sendo a segunda atividade reformulação da primeira a partir de observações feitas em sala de aula durante a primeira aplicação, o que significa que as atividades devem servir apenas como sugetões de questões e devem ser modificadas sempre que houver necessidade, o que dependerá da turma, do ano de escolaridade, da maturidade dos alunos, dúvidas apresentadas entre outros fatores.

A primeira atividade (Atividade1) foi aplicada para os alunos do Colégio de Aplicação da UFRJ, uma turma de 7^o ano, com 30 alunos que estavam sentados em duplas, e assim permaneceram dispostos, ficando livres para discutir com os colegas a sua solução. Apresentaram algumas dificuldades na interpretação de algumas questões por se tratar de uma abordagem diferente da que estão acostumados.

Com o objetivo de tratar a mudança de unidades de uma, duas ou três pizzas, reparti as pizzas em 8 fatias e isso encaminhou a atividade para um problema meramente numérico, o aluno passou a contar as fatias e fazer contas de divisão e multiplicação com o total de fatias e não como problema de medida de área que pretendia avaliar inicialmente.

Perdemos muito tempo nesta primeira parte da atividade pois ainda estava muito confuso para os alunos a ideia proposta, pela questão das fatias, sendo preciso orientação e direcionamento do professor para a atividade como foi planejada.

A partir da segunda questão as dificuldades foram diminuindo e os alunos através das figuras se sentiram mais à vontade para resolver as questões seguintes.

Após ajustes na atividade e com o início do ano letivo na Faetec, trabalhei a atividade modificada (Atividade 2) com meus alunos da Escola Estadual de Ensino Fundamental República da Faetec, em Quintino Bocaiúva. A primeira turma que apliquei a atividade foi a 83T que estava com 12 alunos e fizeram individualmente. Na turma seguinte, a 82T, a atividade foi feita em duplas pois queria observar a discussão dos alunos; foram formadas 9 duplas.

Nas páginas seguintes faço alguns comentários sobre cada questão das atividades aplicadas, comentando os objetivos pretendidos, erros e acertos cometidos.

ATIVIDADE 1 - Colégio de Aplicação da UFRJ

Questão 1

OBJETIVO: Observar como o aluno trata a mudança de unidade (com uma, duas ou três pizzas sendo a unidade), questão aplicada em um problema de divisão de pizzas, inicialmente divididas em 8 pedaços cada.

Instituição: CAp UFRJ
Turma: 17A. Professor: Felipe. Data: 28/01/2013

ATIVIDADES – UNIDADE

1) Para o lanche de sábado à tarde sempre compro pizzas. Elas geralmente vêm fatiadas em 8 pedaços iguais.

A) Usando o modelo ao lado, faça uma representação para:

a) $\frac{1}{4}$ de uma pizza;

b) $\frac{3}{4}$ de duas pizzas;



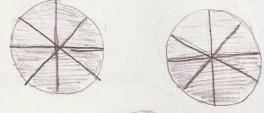
c) $\frac{5}{6}$ de três pizzas;

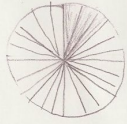
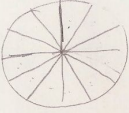
d) $\frac{1}{3}$ de uma fatia. Que fração da pizza esse pedaço corresponde?

e) $\frac{1}{3}$ de duas fatias. Que fração da pizza esse pedaço corresponde?

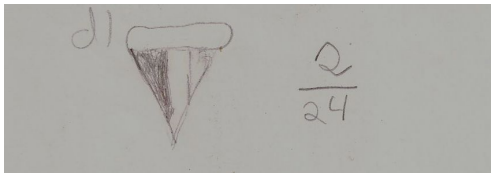
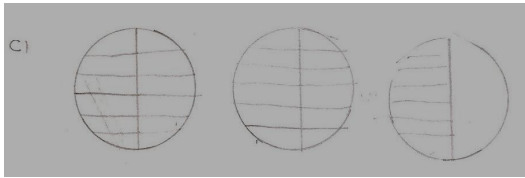
B) Quantas pizzas eu comprei se comemos $\frac{5}{8}$ do total das pizzas compradas e ainda sobraram 6 fatias?

2 pizzas.

1) A) a)  b)  c) 

d) $\frac{1}{24}$  e) $\frac{1}{12}$ 

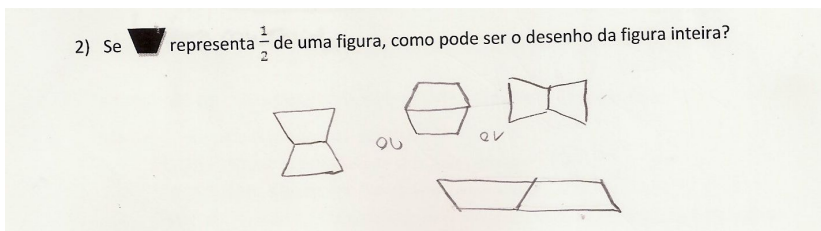
Este aluno parece ter entendido o conceito de frações e conseguiu fazer as subdivisões.



O que vemos acima é um erro comum recorrente que percebi durante a aplicação em sala de aula, quando o aluno não se preocupa em dividir a fatias em áreas congruentes.

Questão 2

OBJETIVO: O Aluno deve reconhecer a parte de uma fração e reconhecer o seu inteiro.




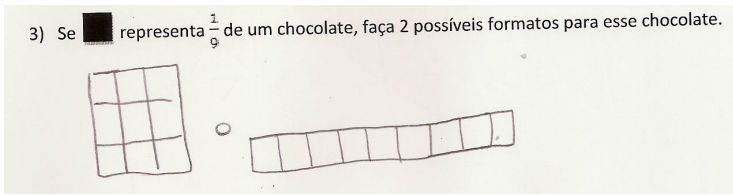
Esta atividade é bem direta e os alunos não tiveram dificuldades por se tratar da fração $\frac{1}{2}$ e estar bem familiarizado com o significado "meio".

Questão 3


OBJETIVO: O Aluno deve reconhecer a parte de uma fração e reconhecer o seu inteiro.

A maioria dos alunos não teve dificuldades. Uma curiosidade podemos ver abaixo quando alguns alunos acreditam que se rotacionar a figura temos uma nova solução para

3) Se  representa $\frac{1}{9}$ de um chocolate, faça 2 possíveis formatos para esse chocolate.



o problema; o mesmo aconteceu com a barra de nove pedaços seguidos.

3) Se  representa $\frac{1}{9}$ de um chocolate, faça 2 possíveis formatos para esse chocolate.



Questão 4

OBJETIVO: O Aluno deve reconhecer a parte de uma fração, no caso fração imprópria, e reconhecer o seu inteiro.

4) A figura abaixo representa $\frac{4}{3}$ de uma figura, como pode ser o desenho da figura inteira?






Os alunos tiveram dificuldades e tiveram uma conclusão errada mas com solução verdadeira. Concluíram que bastava pegar $\frac{3}{4}$ da original. Sabemos que sempre será verdade pois $\frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1$ e nos dá o inteiro. Esta questão, quando aplicada em sala de aula, merece um pouco mais de atenção e discussão com orientação do professor.


Questão 5

OBJETIVO: O Aluno deve reconhecer o hexágono, formado por 6 triângulos equiláteros, como parte de uma fração, e reconhecer o seu inteiro.

5) Um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros e congruentes.

a. Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por , que fração representa  ? $\frac{3}{2}$

b. Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por , como podemos representar a figura inteira?



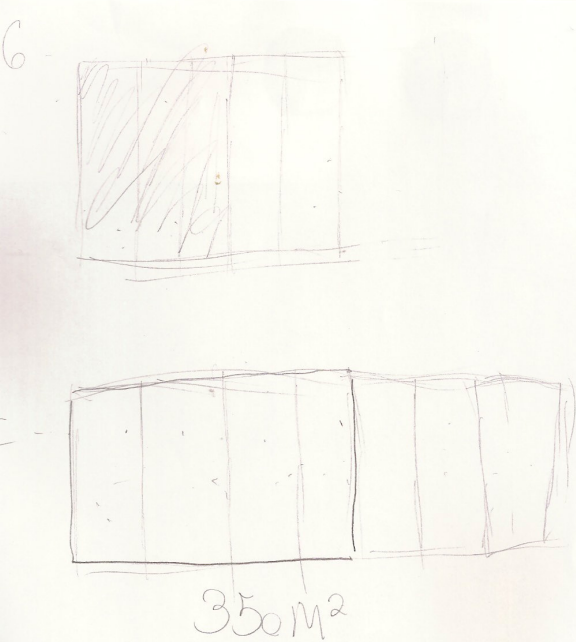
Os alunos tiveram muitas dificuldades e para a Atividade 2, foi introduzido a malha triangular para auxílio. Poucos alunos fizeram corretamente.

Questão 6

OBJETIVO: O Aluno deve ser capaz de resolver problemas envolvendo fração de área.

6) Um terreno tem $\frac{3}{5}$ de área construída e 80 m^2 de área livre. Faça um desenho representando essa situação e responda:

- Quantos metros quadrado tem o terreno inteiro? 200 m^2
- Quantos metros quadrado tem a área construída? 120 m^2
- O terreno ao lado foi comprado para aumentar a área de lazer e o terreno agora ficou com $\frac{7}{4}$ do tamanho original. Acrescente no seu desenho essa nova área e calcule essa área. 350 m^2



Os alunos não tiveram muitas dificuldades neste exercício pois com o desenho da fração sugerido em aula, ficou de fácil compreensão. Poucos alunos tiveram problema com este item.

**ATIVIDADE 2 - (Reformulada) Escola Estadual de Ensino Fundamental
República - Faetec**

Questão 1

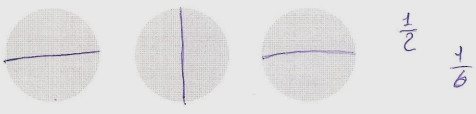
OBJETIVO: Observar como o aluno trata a mudança de unidade (com uma, duas ou três pizzas sendo a unidade), questão aplicada em um problema de divisão de pizzas.

Instituição: Faetec REPUBLICA - FUNDAMENTAL
 Turma 82. Professor: André. Data: 20/2/2013


ATIVIDADES – UNIDADE

1) Para o lanche de sábado à tarde sempre compramos pizzas de diferentes sabores, ou seja, não há duas pizzas do mesmo sabor e cada pizza tem apenas um sabor. Dividimos as pizzas em fatias do mesmo tamanho.

A) Como você dividiria três pizzas para seis pessoas com o menor número de cortes possível? Que fração de uma pizza caberia a cada um? Que fração das 3 pizzas caberia a cada um?



B) Se todas as seis pessoas quiserem comer das três pizzas, a mesma quantidade de cada sabor, que fração de cada pizza caberá a cada um?

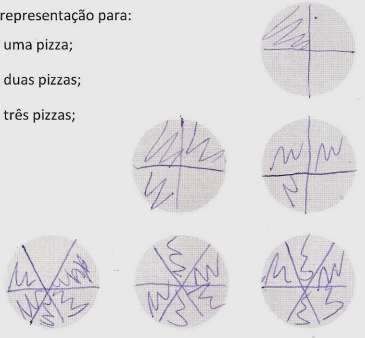


C) Faça uma representação para:

a) $\frac{1}{4}$ de uma pizza;

b) $\frac{3}{4}$ de duas pizzas;

c) $\frac{5}{6}$ de três pizzas;



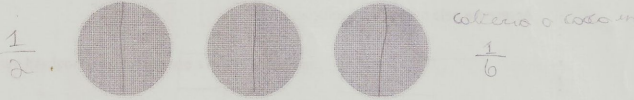
O segundo aluno fez quase tudo certo, sua dúvida foi quanto à divisão da pizza em 6 partes iguais no item B pois não fez a divisão em partes congruentes. Este Tipo de erro já foi tratado no capítulo sobre Unidade.

Instituição: Fundação Inicial República 700110
Turma 501. Professor: Sandra. Data: 20/10/13

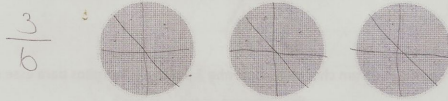
ATIVIDADES – UNIDADE

1) Para o lanche de sábado à tarde sempre compramos pizzas de diferentes sabores, ou seja, não há duas pizzas do mesmo sabor e cada pizza tem apenas um sabor. Dividimos as pizzas em fatias do mesmo tamanho.

A) Como você dividiria três pizzas para seis pessoas com o menor número de cortes possível? Que fração de uma pizza caberia a cada um? Que fração das 3 pizzas caberia a cada um?

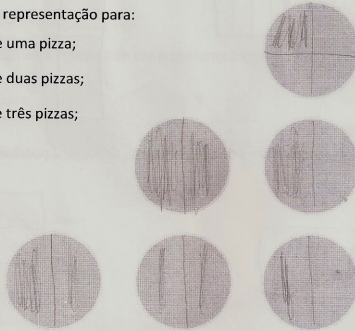


B) Se todas as seis pessoas quiserem comer das três pizzas, a mesma quantidade de cada sabor, que fração de cada pizza caberia a cada um?

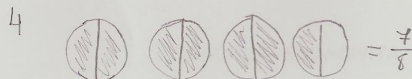


C) Faça uma representação para:

- a) $\frac{1}{4}$ de uma pizza;
- b) $\frac{3}{4}$ de duas pizzas;
- c) $\frac{5}{6}$ de três pizzas;



D) Quantas pizzas eu comprei se comemos $\frac{7}{8}$ do total das pizzas compradas e ainda sobrou $\frac{1}{2}$ de uma pizza?




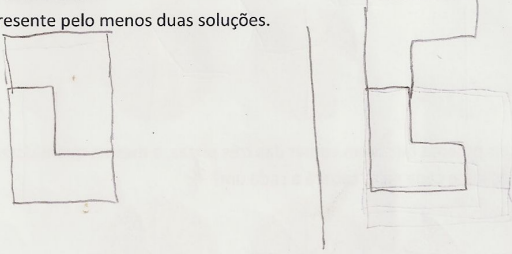
O item D muda a referência de unidade, de várias pizzas para uma sobra de meia pizza.


O desenho do item A ajudou bastante.


Questões 2 e 3


OBJETIVO: Dado a parte de uma fração o aluno deve reconhecer sua representação inteira.

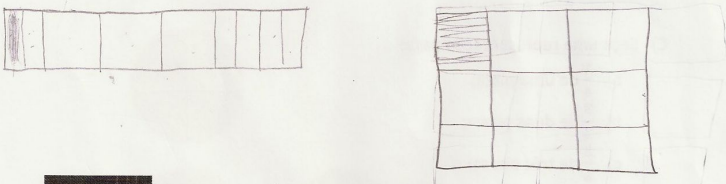
2) Se  representa $\frac{1}{2}$ de uma figura, como pode ser o desenho da figura inteira?
 Apresente pelo menos duas soluções.



3) Se  representa $\frac{1}{9}$ de um chocolate, desenhe 2 possíveis formatos para esse chocolate.




3) Se  representa $\frac{1}{9}$ de um chocolate, desenhe 2 possíveis formatos para esse chocolate.

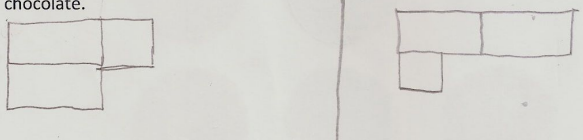


Novamente a barra é dividida em áreas não congruentes.

Questão 4

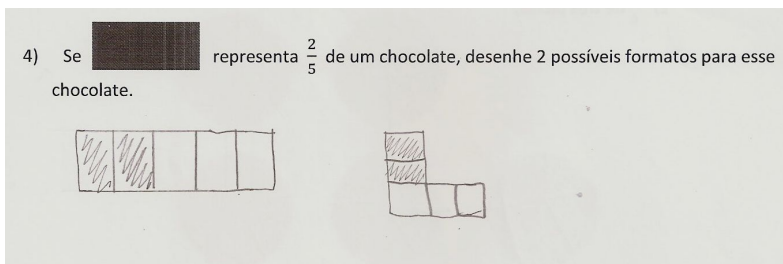
OBJETIVO: O Aluno deve reconhecer a representação de parte de uma fração, e determinar o seu inteiro.

4) Se  representa $\frac{2}{5}$ de um chocolate, desenhe 2 possíveis formatos para esse chocolate.

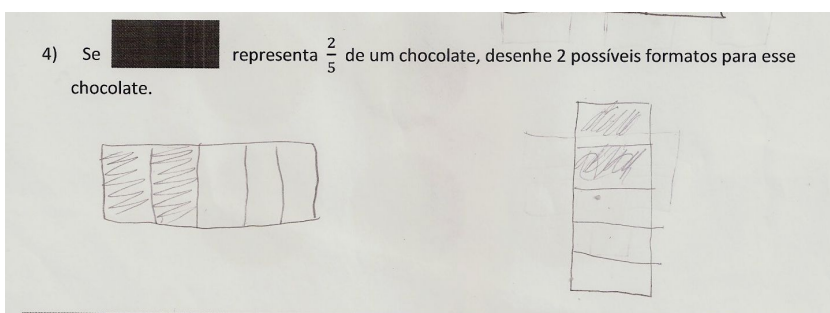


Os alunos, por incrível que pareça, não tiveram dificuldades, Este fez a figura sem a

necessidade de dividir em duas partes mas a maioria a dividiu.

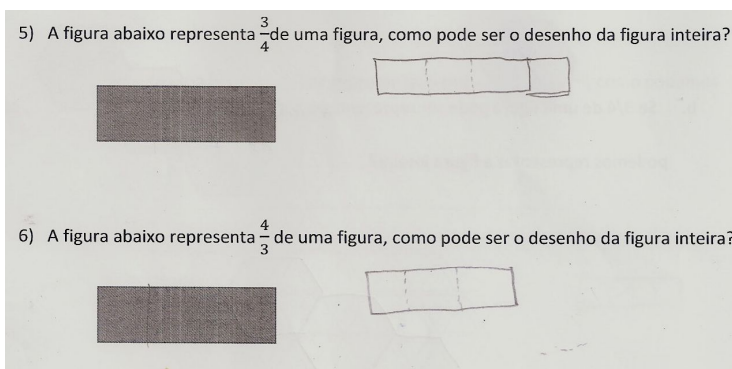


E, mais uma vez, a questão de considerar figuras diferentes se esta estiver rotacionada.



Questões 5 e 6

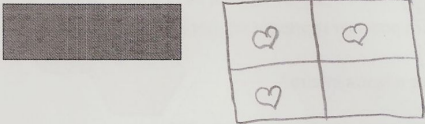
OBJETIVO: Dado a parte de uma fração, questão 5 própria e questão 6 imprópria, o aluno deve reconhecer sua representação inteira.



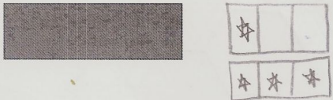
Aqui o aluno parece ter compreendido a questão mas não fica claro pela falta de clareza

da solução.

5) A figura abaixo representa $\frac{3}{4}$ de uma figura, como pode ser o desenho da figura inteira?



6) A figura abaixo representa $\frac{4}{3}$ de uma figura, como pode ser o desenho da figura inteira?

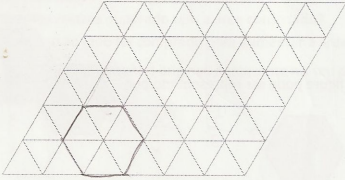




Respostas que mais apareceram onde o aluno se preocupa apenas em fazer as representações das frações e não entendem a solução.

Questão 7

OBJETIVO: A partir da identificação que o hexágono é composto por triângulos equiláteros, dado a parte de uma fração, e determinar o seu inteiro.

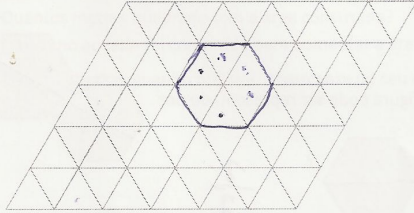
7) Faça um hexágono regular usando a malha triangular.



a. Se $\frac{1}{3}$ de uma figura pode ser representado por , que fração da figura representa  ? $\frac{2}{3}$

Esse exercício ficou de fácil solução quando os alunos perceberam que bastava multiplicar por dois.

7) Faça um hexágono regular usando a malha triangular.

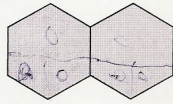


a. Se $\frac{1}{3}$ de uma figura pode ser representado por



, que fração da figura

representa

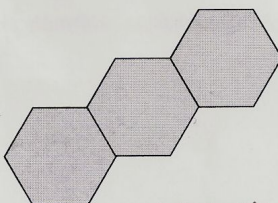


?

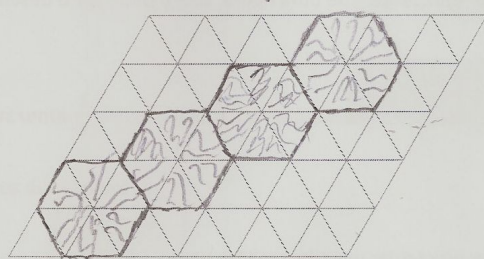
$$\frac{2}{6}$$

Mais uma vez, a tentativa de decorar regras confunde o aluno nesta multiplicação.

No ítem (b) e maioria das soluções foi direta pois eram três hexágonos representando $\frac{3}{4}$ e bastava desenhar mais um hexágono, já no ítem (c) era necessário subdividir o hexágono em triângulos e nem todos conseguiram fazer.

b. Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por , como podemos representar a figura inteira?

colocando mais 1 hexágono inteiro.



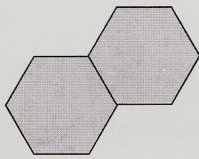
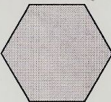
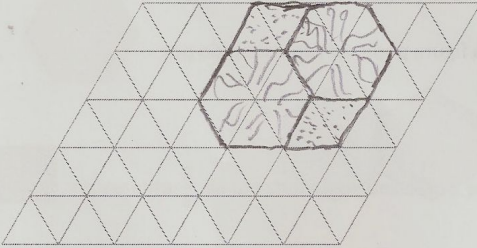
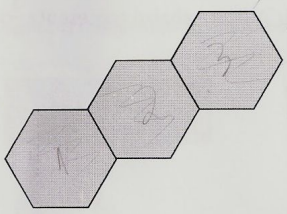
c. Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por , que fração representa  ? $\frac{3}{8}$

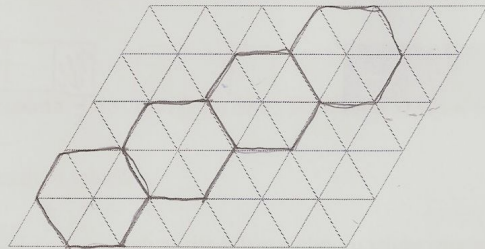
FIGURA INTEIRA

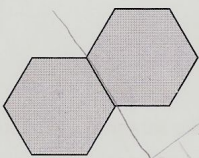
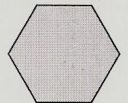


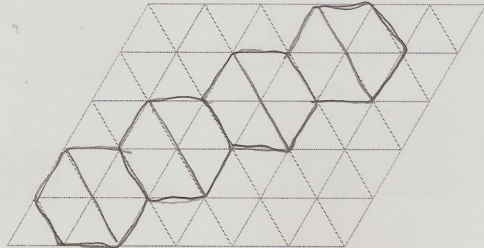
$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

A seguir vemos uma solução interessante em que o aluno usa frações equivalentes para resolver o ítem (c). Sabendo que $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ele percebeu que cada hexágono representa $\frac{3}{8}$ do inteiro.

b. Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por  , como podemos representar a figura inteira? $\frac{4}{4}$



c. Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por  , que fração representa  ? $\frac{3}{8}$



Durante a aplicação da atividade reformulada pude fazer algumas observações que valem como sugestões para o professor em futuras aplicações. São elas:

1. No primeiro exercício, observe como o aluno trata a mudança de referência, conside-

rando uma, duas ou três pizzas como unidade. Estimule-o a fazer a menor quantidade de cortes para repartir o inteiro (uma, duas ou três pizzas);

2. Nos exercícios seguintes, as dificuldades vão aumentando gradativamente. Estimule o aluno a encontrar todas as soluções possíveis, a discussão com os colegas é importante;
3. Trabalhe com muitos exemplos, em que parte-se de uma fração do inteiro e busca-se determinar a unidade, levando o aluno a perceber a relação entre as partes e o todo por outra perspectiva;
4. No último exercício, a malha triangular foi muito importante para a resolução, se possível a ofereça em folha separada. Recortes e dobraduras podem auxiliar na resolução e entendimento da questão.

Capítulo 5

Considerações Finais

Historicamente a construção dos números racionais, especificamente, sua representação fracionária, passando da contagem para a medida, não foi um processo simples. Para os nossos alunos essa passagem também não se dá de forma simples, seja pela dificuldade na formação de conceitos, seja por questões relativas à formação docente ou estratégias inadequadas adotadas, principalmente, nos anos iniciais. Os conceitos associados aos números racionais são tão complexos quanto importantes para os alunos do ensino básico.

Não é nossa pretensão esgotar a discussão sobre o tema ou trazer para o professor soluções milagrosas sobre o ensino de frações. Pretendemos estimular o leitor a buscar novos caminhos no ensino de frações.

Elaboramos as sequências didáticas e aplicamos em turmas do ensino fundamental sobre o conceito de unidade em diferentes contextos. Durante a aplicação cada atividade foi

discutida em sala de aula e observações foram feitas, comentadas e analisadas.

Cabe ao professor observar sua turma especificamente e as dificuldades dos seus alunos sobre esse tema tão delicado e importante para o aprendizado de matemática e que o aluno utilizará em toda sua vida acadêmica mas que só é ensinado e discutido no ensino fundamental.

Os resultados apresentados sugerem que este conhecimento não está presente nos alunos, nem mesmo as ideias mais triviais sobre frações.

A análise da resolução das atividades apresentadas pelos alunos revelou algumas dificuldades que merecem destaque. O aluno tem dificuldade no reconhecimento da unidade quando esta é diferente de 1, como no caso das 3 pizzas, e, apesar de dar conta da dupla contagem, o aluno revela dificuldade para associar a parte à unidade, como no caso em que conhece a figura correspondente a $\frac{3}{4}$ e não resgata a figura que corresponde ao inteiro. Ainda que não tenha sido foco específico deste trabalho, dificuldade com o uso de regras e algoritmos também são reveladas. Por exemplo, quando ele confunde multiplicação e divisão de frações.

No âmbito do conceito de unidade algumas ideias importantes são:

1. Partes fracionárias são partilhas IGUAIS. São porções de tamanhos iguais da unidade ou de parte desta unidade.
2. Estas partes têm nomes especiais que definem a quantidade de partes iguais que foi

dividido como meios, terços, quartos, etc.

3. Quanto mais partes forem fracionadas menor será a parte. Exemplo: Quartos é menor que terços quando tratados da mesma unidade.
4. O denominador de uma fração indica essa parte (terços, quartos,...) e o denominador a quantidade de partes consideradas.

A ideia de que as frações só têm sentido enquanto objetos matemáticos capazes de representar quantidades, de comparar quantidades ou de operar com essas quantidades, passa necessariamente pela idéia fundamental de que essas quantidades devem ser expressas segundo um mesmo referencial.

A ideia de unidade está fortemente associada ao conceito de número racional mas não tem sido incorporada ao conceito por muitos estudantes quando apresentados a situações simples que envolvem fração. As práticas pedagógicas e as situações vivenciadas em ambiente escolar não dão conta de orientar o aluno para que essas ideias sejam apropriadas em sala de aula e essa dificuldade continua durante os anos finais do fundamental e no ensino médio.

O que observamos é que tratamos de um tema muito complexo, tanto para os alunos como para os professores.

Muitos professores, por não reconhecerem suas próprias dificuldades e limitações, como pudemos observar no exame para ingresso de professores de matemática no curso de Especialização em Educação Matemática da UFRJ abordado no capítulo 4, tratam o tema

como se fosse simples e depositam no aluno a responsabilidade por não compreender o assunto, frações.

É importante que o professor saiba que este é um tema de grande importância para o aluno e que este o carrega por toda a sua vida acadêmica e nada trivial de ser compreendido ou ensinado. Saiba estabelecer e definir os significados das frações e suas partes e não deixe de trabalhar com o aluno no contexto contínuo.

É preciso trabalhar o ensino de frações com diferentes figuras geométricas, sempre mudando o referencial de unidade e incentivar o registro da fração na reta numérica.

O ensino de frações deve contemplar o significado de medida que elas têm. Tendo como característica principal manter o referencial associado à fração de maneira mais efetiva.

O trabalho pretende apresentar a importância da compreensão da idéia de unidade como um dos elementos fundamentais na construção do conceito de fração.

O estudo sobre o tema nos trouxe muito aprendizado e revelações e sua solução está longe de um fim.

Anexos

Atividade 1

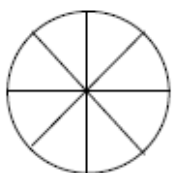
Instituição: _____

Turma: _____ Professor: _____ Data: _____

ATIVIDADES UNIDADE


1) Para o lanche de sábado à tarde sempre compro pizzas. Elas geralmente vêm fatiadas em 8 peda iguais.


A) Usando o modelo abaixo, faça uma representação para:



- a) $\frac{1}{4}$ de uma pizza;
- b) $\frac{3}{4}$ de duas pizzas;
- c) $\frac{5}{6}$ de três pizzas;
- d) $\frac{1}{3}$ de uma fatia. Que fração da pizza esse pedaço corresponde?
- e) $\frac{1}{3}$ de duas fatias. Que fração da pizza esse pedaço corresponde?

B) Quantas pizzas eu comprei se comemos $\frac{5}{8}$ do total das pizzas compradas e ainda sobraram 6 fatias?

2) Se  representa $\frac{1}{2}$ de uma figura, como pode ser o desenho da figura inteira?

3) Se  representa $\frac{1}{9}$ de um chocolate, fa possíveis formatos para esse chocolate.

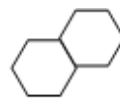
4) A figura abaixo representa $\frac{4}{3}$ de uma figura, como pode ser o desenho da figura inteira?



5) Um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros e congruentes.




a. Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por



, que fração representa



?

b. Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por , como podemos representar a figura inteira?

6) Um terreno tem $\frac{3}{5}$ de área construída e $80m^2$ de área livre. Faça um desenho representando essa situação e responda:

- a. Quantos metros quadrado tem o terreno inteiro?
- b. Quantos metros quadrado tem a área construída?
- c. O terreno ao lado foi comprado para aumentar a área de lazer e o terreno agora ficou com $\frac{7}{4}$ do tamanho original. Acrescente no seu desenho essa nova área e calcule essa área.

Atividade 2

Instituição: _____

Turma: _____ Professor: _____ Data: _____

ATIVIDADES UNIDADE

- 1) Para o lanche de sábado à tarde sempre compramos pizzas de diferentes sabores, ou seja, não há duas pizzas do mesmo sabor e cada pizza tem apenas um sabor. Dividimos as pizzas em fatias do mesmo tamanho.

- A) Como você dividiria três pizzas para seis pessoas com o menor número de cortes possível? Que fração de uma pizza caberia a cada um? Que fração das 3 pizzas caberia a cada um?



- B) Se todas as seis pessoas quiserem comer das três pizzas, a mesma quantidade de cada sabor, que fração de cada pizza caberá a cada um?



- C) Faça uma representação para:


- a) $\frac{1}{4}$ de uma pizza;

b) $\frac{3}{4}$ de duas pizzas;


c) $\frac{5}{6}$ de três pizzas;




D) Quantas pizzas eu comprei se comemos $\frac{7}{8}$ do total das pizzas compradas e ainda sobrou $\frac{1}{2}$ de uma pizza?

2) Se  representa $\frac{1}{2}$ de uma figura, como pode ser o desenho da figura inteira?

Apresente pelo menos duas soluções.

3) Se  representa $\frac{1}{9}$ de um chocolate, desenhe 2 possíveis formatos para esse chocolate.

4) Se  representa $\frac{2}{5}$ de um chocolate, desenhe 2 possíveis formatos para esse chocolate.

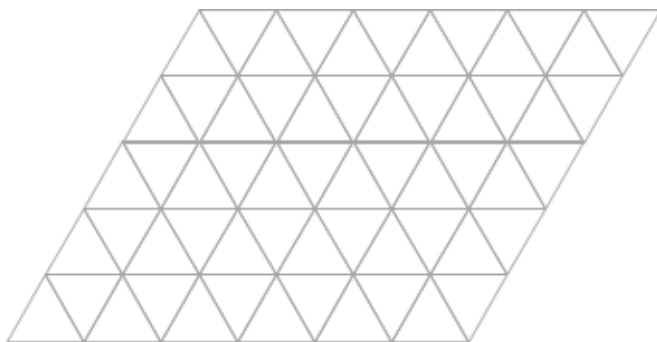
5) A figura abaixo representa $\frac{3}{4}$ de uma figura, como pode ser o desenho da figura inteira?



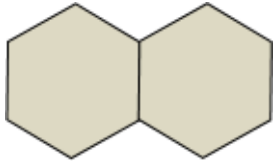
6) A figura abaixo representa $\frac{4}{3}$ de uma figura, como pode ser o desenho da figura inteira?

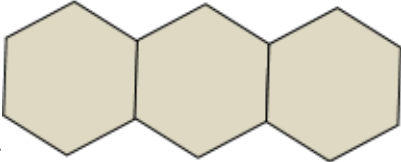


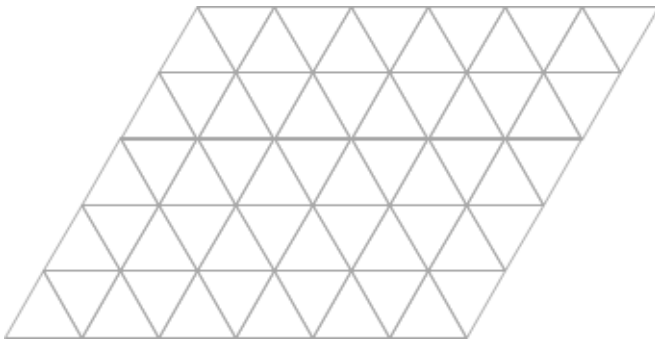
7) Faça um hexágono regular usando a malha triangular.



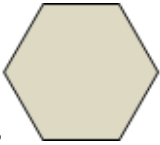
a) Se $\frac{1}{3}$ de uma figura pode ser representado por , que fração da figura estpresentada a seguir?

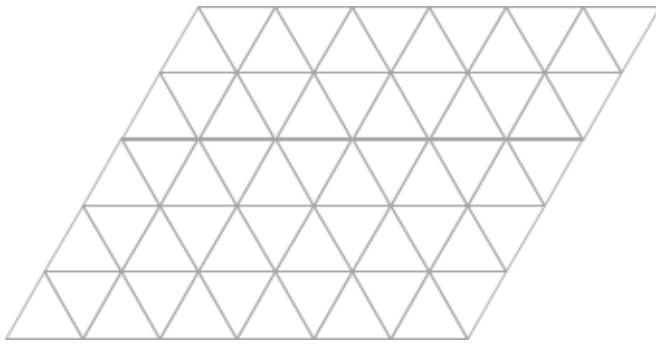


b) Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por , como podemos representar a figura inteira?

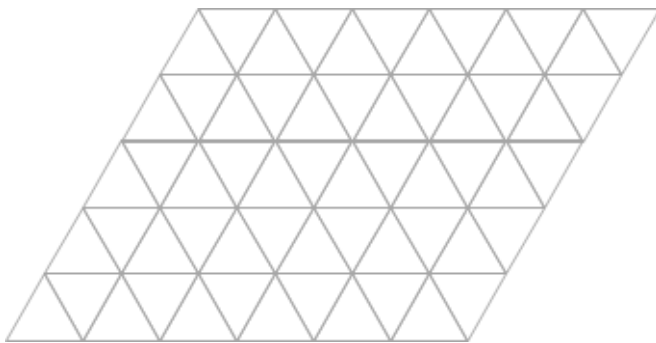


c) Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por , que fração

representa  ?



d) Se $\frac{3}{4}$ de uma figura pode ser representado por  , como podemos representar a figura inteira?



8) Um terreno tem $\frac{3}{5}$ de área construída e $80m^2$ de área livre. Faça um desenho representando essa situação e responda: Quantos metros quadrado tem o terreno inteiro? Quantos metros quadrado tem a área construída? O terreno ao lado foi comprado para aumentar a área de lazer e o terreno agora ficou com $\frac{7}{4}$ do tamanho original. Acrescente no seu desenho essa nova área e calcule essa área.

Bibliografia

- [1] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** - 3. ed. - Brasília: Secretaria da Educação Fundamental, 2001.
- [2] BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R. & SILVER, Edward A. Rational-Number Concepts. In LESH, R.; LANDAU, M. (eds) *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes.* p.91-126. New York: Academic Press, 1983. **Disponível em:** <https://gismodb.fi.ncsu.edu/gismodb/files/articles/e69810947cbdb9a788e72b100bd87b46.pdf>.
Acesso em: 23 de janeiro de 2013.
- [3] Moreira, Plínio Cavalcanti. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática Docente na escola básica** (Tese de Doutorado).
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2004. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/EABA-6ABMUH/2000000078.pdf;jsessionid=618DB190C0897D69E8ABE64FD755B3EE?sequence=1>. Acesso em: 22 de janeiro de 2013.
- [4] GIRALDO, Victor; RIPOLL, Cydara; PITOMBEIRA, João Bosco; RANGEL, Letícia. **Livro companheiro do professor de matemática** Volume 1 - Números

Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

- [5] SILVA, Maria José Ferreira da. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série** (Tese de Doutorado).
PUC-SP, 2005. Disponível em: http://www4.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/maria_jose_ferreira_silva.pdf. Acesso em 23 de janeiro de 2013.
- [6] MONTEIRO, Cecília & COSTA, Cristolinda **Dificuldades na aprendizagem dos números racionais**.
IN: Revista Educação e Matemática, nº40, p.60-63. APM: Portugal, 4º trimestre de 1996.
- [7] GIRALDO, Victor. **O Desenvolvimento do Conceito de Número na Escola Básica** 24ª Semana de Matemática da UFRN.
- [8] FAVERO, Maria Helena; NEVES, Regina da Silva Pina. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. In Revista Zetetiké. v.20, n. 37, p.35-71. São Paulo: FE/Unicamp, jan/jun 2012.
- [9] LOPES, Antônio José. **O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações**
IN: Revista Bolema, Ano 21, nº31, p.01-22. UNESP: Rio Claro, 2008.
- [10] MONTEIRO, Cecília & COSTA, Cristolinda & FIGUEIREDO, Nisa. **As frações e o desenvolvimento do sentido de número racional**.
IN: Revista Educação e Matemática, nº84, p. 47-51. APM: Portugal, Setembro e Outubro de 2005. Disponível em: http://arquivo.esi.ips.pt/ese/projectos/sentidonumero/Fraccoes_EM.pdf. Acesso em 20 de março de 2013.

- [11] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5^a a 8^a série)**. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.
- [12] MOREIRA, Plínio Cavalcanti & FERREIRA, Maria Cristina Costa. **A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas**
IN: Revista Bolema, Ano 21, nº31, p.103-127. UNESP: Rio Claro, 2008.
- [13] ROMANATTO, Mauro Carlos. **Número Racional: Relações Necessárias à sua Compreensão** (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 1997.
- [14] KIEREN, T. E. **The rational number construct – its elements and mechanisms** In: KIEREN, T. (ed.) Recent Research on Number Learning. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.
- [15] DAMICO, Alécio. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental** (Tese de Doutorado). PUC/SP, 2007
- [16] RANGEL, Letícia Guimarães. **Teoria de Sistemas - Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo - Estabelecendo Relações**.
Exame de Qualificação - COPPE - Universidade Federal do Rio de Janeiro - Maio de 2012.
- [17] BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática - 6^o ano**.
São Paulo, Moderna, 2006
- [18] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática e Realidade- 6^o ano**.
São Paulo, Atual, 2005

- [19] GIOVANNI Jr, José Rui; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática - 6º ano.**
São Paulo, FTD, 2010
- [20] CARVALHO, Alexandre Luís Trovon de; REIS, Lourisnei Fortes. **Aplicando a matemática - 6º ano.**
São Paulo, Casa Publicadora Brasileira, 2009
- [21] IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática - 6º ano.**
São Paulo, Moderna, 2012