MARIANA COSTA PEREIRA

LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
MAIO DE 2016

MARIANA COSTA PEREIRA

LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
MAIO DE 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **136/2016**

Pereira, Mariana Costa

Logarítmos : uma abordagem interdisciplinar / Mariana Costa Pereira. – Campos dos Goytacazes, 2016.

93 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2016.

Orientador: Rigoberto Gregorio Sanabria Castro.

Área de concentração: Matemática.

Bibliografia: f. 73-74.

1. LOGARÍTMOS 2. CONTEXTUALIZAÇÃO 3. APRENDIZAGEM 4. MATEMÁTICA – ESTUDO E ENSINO I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 512.922

MARIANA COSTA PEREIRA

LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM INTERDISCIPLINAR

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 25 de Maio de 2016.

Prof^{a}. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto
D.Sc. - IFFluminense *campus* Campos Centro

Prof^{a}. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. - IFFluminense *campus* Campos Centro

Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. - UENF

Prof. Rigoberto Gregorio Sanabria Castro
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico este trabalho à minha diretora e eterna mestra Vânia Lúcia Pierucetti de Souza e a todos os professores e funcionários do Colégio Estadual Chequer Jorge, pelo incentivo e por sempre acreditarem em meu potencial. Obrigada! Sem vocês, eu não chegaria tão longe!

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelos dons concedidos e pelas tantas bençãos derramadas.

Agradeço à minha família pela educação, exemplo e por todo amor sempre dedicado a mim.

Agradeço a todos os meus amigos, em especial, aos amigos da turma do Profmat UENF 2014 pelo companheirismo e incentivo doados durante todo curso.

Agradeço aos amigos, Edilaine da Silva Freitas, Marcos Paulo de Oliveira e Jorge Matos da Silva Junior que me ajudaram e estiveram ao meu lado nos momentos em que mais precisei.

Ser matemático ou físico não é olhar para baixo, para um papel,
escrever com um lápis números, apagá-los, recontá-los...
Ser matemático ou físico é olhar para dentro do problema
e crer incansavelmente que existe uma solução inspirada
não pela Ciência pura em si mesma. Mas inspirada pelo Dono
da Ciência que é o Deus da Sabedoria.

(Albert Einstein)

Resumo

Este trabalho dissertativo sob a temática: “Logaritmos: uma abordagem interdisciplinar” traz uma proposta de trabalho contextualizada e interdisciplinar para ser usada pelos professores de Matemática durante as suas aulas para significar o ensino. Assim, o aluno enxergará a aplicabilidade dos logaritmos, experimentando um aprendizado verdadeiro, sem mecanização. A propositura também pode ser utilizada por toda a comunidade escolar como instrumento de aprendizagem. Para tanto, aborda-se a história dos logaritmos bem como a das aplicações, conceitos e propriedades dos logaritmos e como estes eram usados para resolver problemas. Além disso, trata dos aspectos pedagógicos da proposta sugerida, já que algumas das aplicações são interdisciplinares com a Química, Física e Geologia. As outras estão no contexto das Finanças. Questões sobre meia vida, índice de pH, nível de intensidade sonora, matemática financeira e escala Richter formam a proposta de trabalho sugerida aos professores de matemática que estão atuando nos dias atuais. Como constituem-se de modelos matemáticos que precisam do recurso dos logaritmos para serem resolvidos, apresentam aplicações que podem despertar a curiosidade do aluno e desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo através da resolução de problemas. A proposta foi aplicada a um grupo de professores que atuam no Ensino Médio. Eles consideraram que a abordagem dos logaritmos por meio de suas aplicações pode melhorar o ensino desse conteúdo, tornando-o mais significativo e aplicável para os discentes.

Palavras-chaves: Logaritmos; Contextualização; Aprendizagem; Educação Matemática.

Abstract

This dissertational work under the theme: "logarithms: an interdisciplinary approach" brings a contextualized and interdisciplinary work proposal to be used by mathematics teachers during their classes in order to mean teaching. Thus, the student will be able to see the logarithms applicability, experiencing a real learning without mechanization. The filing may also be used by the whole school community as a learning tool. Therefore, it deals with the history of logarithms as well as the applications, concepts and properties and how these were used to solve problems. In addition, it deals with the pedagogical aspects of the suggested proposal, since some applications are interdisciplinary with the Chemistry, Physics and Geology. The others are in the Finance context. Questions about a half-life, pH index, level of loudness, financial mathematics and Richter scale form the proposed work suggested to math teachers who are working today. As they are constitute by mathematical models that require the use of logarithms to be solved, it has applications that can arouse the curiosity of the student and develop logical-deductive reasoning by solving problems. The proposal was applied to a group of teachers who work in high school. They considered that the approach of logarithms through their applications can improve the teaching of that content, making it more meaningful and relevant to the students.

Key-words: Logarithms; Contextualization; Learning; Mathematics education

Lista de ilustrações

Figura 1 – Tábua de Logaritmos 27
Figura 2 – Tábua de Logaritmos 28
Figura 3 – A primeira radiografia da história 37
Figura 4 – Curva de decaimento 38
Figura 5 – Decaimento Radioativo 42
Figura 6 – Escala de acidez. 51
Figura 7 – Escala de pH. 52
Figura 8 – Intensidade de uma onda sonora 59
Figura 9 – Decaimento Radioativo 77
Figura 10 – Escala de pH. 80
Figura 11 – Intensidade de uma onda sonora 84

Lista de tabelas

Tabela 1 – Potências de 2 20
Tabela 2 – Valores em Decibéis no cotidiano 55
Tabela 3 – Terremotos e seus efeitos 61
Tabela 4 – Análise das respostas objetivas 68

Lista de quadros

Quadro 1 – Tempo de meia vida de um radioisótopo 37

Lista de abreviaturas e siglas

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UERJ	Universidade Estadual do Rio de Janeiro
FCC	Fundação Carlos Chagas
UEL	Universidade Estadual de Londrina - Paraná
IME	Instituto Militar de Engenharia - Rio de Janeiro
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica - São Paulo
Unicamp	Universidade Estadual de Campinas - São Paulo
UFES	Universidade Federal do Espírito Santo
FEI	Centro Universitário da Fundação Educacional Inaciana
PUC-MG	Pontifícia Universidade Católica - Minas Gerais
PUC-RJ	Pontifícia Universidade Católica - Rio de Janeiro
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular da Universidade de São Paulo
UEPA	Universidade Estadual do Pará
UFC	Universidade Federal do Ceará
Unesp	Universidade Estadual Paulista
Cesgranrio	Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFAL	Universidade Federal de Alagoas
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais

Sumário

Introdução 15

1 HISTÓRIA DOS LOGARITMOS 18

2 LOGARITMOS: CONCEITO, PROPRIEDADES E ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES 22

2.1 Definição 22

2.2 Propriedades dos Logaritmos 23

2.3 Logaritmos Naturais 24

2.4 Um exemplo histórico 25

3 TÓPICOS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 29

3.1 Interdisciplinaridade e Contextualização no ensino de logaritmos 29

3.2 Trabalhos relacionados 31

3.2.1 Logaritmos conceitos e aplicação 31

3.2.2 Logaritmos e aplicações 32

3.2.3 Ensino de exponenciais e logaritmos no Ensino Médio via aplicações . . 33

3.2.4 Logaritmos: história, teoria e aplicações 33

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES 35

4.1 Meia vida 36

4.2 Matemática Financeira 44

4.3 Índice de PH 49

4.4 Acústica 54

4.5 Escala Richter 61

5 APLICAÇÃO DA PROPOSTA 66

5.1 Metodologia 66

5.2 Análise das respostas objetivas e discursivas 67

6 CONCLUSÕES 72

REFERÊNCIAS 74

APÊNDICE A ATIVIDADES SOBRE MEIA VIDA 76

APÊNDICE B ATIVIDADES SOBRE MATEMÁTICA FINANCEIRA 78

APÊNDICE C ATIVIDADES SOBRE ÍNDICE DE PH 80

APÊNDICE D ATIVIDADES SOBRE ACÚSTICA 82

APÊNDICE E ATIVIDADES SOBRE ESCALA RICHTER . . 85

APÊNDICE F QUESTIONÁRIO 87

APÊNDICE G QUESTÕES APLICADAS AOS PROFESSORES PARTICIPANTES DO MINICURSO 90

Introdução

Segundo o PCN (BRASIL, 1998), a tecnologia está presente na vida de toda a sociedade e isso se torna cada vez mais evidente ao logo de cada avanço e descoberta. Computadores, *tablets*, calculadoras, diversos instrumentos, que facilitam o trabalho em áreas como Ciências Contábeis, Engenharia e Astronomia foram desenvolvidos e testados inúmeras vezes para chegar a esse resultado tão útil. Essas descobertas não aconteceram rapidamente. Por muito tempo, cientistas precisaram efetuar cálculos imensos sem a ajuda de nenhum desses instrumentos, apenas com o poder da mente e de propriedades matemáticas.

Na época das grandes navegações – Idade Média – não era diferente. Segundo Maor (2008), nessa época de grandes descobertas e desbravamentos, os logaritmos surgiram. Astrônomos e demais cientistas tiveram seus trabalhos facilitados graças a essa invenção. As propriedades dos logaritmos facilitaram cálculos por séculos e com isso colaboraram no desenvolvimento das Ciências.

De acordo com o PCN (BRASIL, 1998), no contexto escolar atual, os alunos estão sintonizados o tempo todo com a tecnologia, especialmente, redes sociais e jogos de todos os tipos. Não se sentem interessados e motivados a aprender logaritmos, principalmente, porque a maioria dos alunos não se sente atraída a aprender matemática, achando seu aprendizado difícil, enfadonho e muito tedioso.

Analisando o contexto atual, poder-se-ia afirmar que os logaritmos não são mais importantes, portanto, tornar-se-ia desnecessário o seu ensino nas escolas. De acordo com Lima (2013), realmente, sua utilidade como facilitador de cálculos já não se faz mais necessária, pois para essa execução já foram criados diversos meios tecnológicos. Contudo, sua importância é grande, devido à aplicação de suas propriedades em situações diversas. O crescimento exponencial é verificado na natureza, nas Ciências, Finanças entre outras tantas situações. Logo, a aplicabilidade da função logarítmica não tem fim, já que é a inversa da função exponencial.

Logaritmo é um conteúdo muito importante, mas que, muitas das vezes, é considerado de difícil compreensão e utilidade por parte dos alunos. Com base nessa situação, o desenvolvimento deste trabalho visa responder a seguinte questão: “Como significar o processo de ensino e aprendizagem dos alunos da escola básica de forma que os mesmos tenham uma aprendizagem mais interessante e aplicável dos logaritmos?”

Segundo o PCN (BRASIL, 1998), despertar o interesse pelo estudo é um desafio. Então, buscar aulas mais atrativas é uma constante por parte dos professores. Significar o ensino, torná-lo mais atraente, despertar a curiosidade são metas que os docentes da atualidade buscam alcançar.

Segundo Rosa (2007, p. 28)

> As aprendizagens vão acontecer em função das necessidades do indivíduo; estas tendem a gerar um desequilíbrio, fazendo com que imediatamente surjam motivos; [...] assim podemos dizer que, para que ocorram as aprendizagens é necessário um estado de alerta (moderado), impulso, vontade e desejo de aprender, ou seja, motivação.

Logo, para motivar o aluno ao aprendizado, necessita-se de ferramentas. Especificamente, de acordo com o PCN (BRASIL, 1998), a didática da Matemática na atualidade sugere utilizar-se, para significar a aprendizagem, da contextualização e da interdisciplinaridade, no intuito de despertar o interesse e a vontade de aprender matemática.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo sugerir uma proposta de atividades diferenciadas com o intuito de melhorar o processo de ensino e aprendizagem de logaritmos. Para tanto, tal proposta apresenta atividades envolvendo aplicações em contextos do cotidiano das Finanças e de outras disciplinas, as quais precisam dos logaritmos para serem resolvidas. Esta proposta pode ser usada nas aulas de Matemática pelo professor da atualidade e toda comunidade escolar também pode utilizar-se dela como instrumento de aprendizagem. Por meio da mesma, o ensino de logaritmos poderá ter mais significado para o aluno e poderá despertar seu interesse pelo aprendizado, já que mostrará aplicações em situações concretas e motivadoras.

Nas etapas do processo de construção da proposta apresentada há os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar a história dos logaritmos e das aplicações abordadas.
- Apresentar a definição e propriedades dos logaritmos demonstradas.
- Sugerir questões interdisciplinares e contextualizadas que envolvem a definição de logaritmos e suas propriedades.
- Aplicar a proposta sugerida aos professores do Ensino Médio, analisando as suas opiniões e observações sobre o ensino de logaritmos e esta forma de abordá-los.

A dissertação está estruturada em seis capítulos, a qual se encontra brevemente descrita a seguir:

O primeiro capítulo trata da resenha histórica dos logaritmos.

O segundo capítulo apresenta a definição de logaritmos, suas propriedades, algumas demonstrações e um exemplo histórico de como os logaritmos foram utilizados por séculos para facilitar os cálculos.

O terceiro capítulo trata da estrutura pedagógica deste trabalho, evidenciando a importância da Didática para o aprendizado de matemática ser efetivo. Além de abordar trabalhos relacionados ao tema desta dissertação.

O quarto capítulo apresenta uma proposta de trabalho com aplicações dos logaritmos em cinco contextos.

O quinto capítulo descreve a aplicação da proposta desta pesquisa para professores de Matemática do Ensino Médio em um minicurso.

O sexto capítulo traz as conclusões pertinentes ao desenvolvimento e aplicação da proposta desta dissertação.

Nos apêndices, estão disponibilizadas as questões sugeridas sem solução, no intuito de facilitar seu uso pelo professor. Além do questionário e questões aplicadas aos professores participantes do minicurso.

Capítulo 1

História dos logaritmos

A história do desenvolvimento dos logaritmos relatada neste tópico foi retirada da obra de Maor (2008). No intuito de ser usada pelos professores durante as aulas, a história dos logaritmos poderá significar de uma forma interdisciplinar as questões que serão abordadas no capítulo 4 deste trabalho. Podemos encontrar mais sobre a história dos logaritmos em Rocha (2013).

Afirma Maor (2008) que as tantas descobertas dos séculos XVI e XVII, especialmente as ligadas a Astronomia, exigiam muitos cálculos devido à quantidade de dados numéricos. Os cientistas da época precisavam que este problema fosse resolvido.

Encontramos no livro de Maor (2008, p. 15) a seguinte afirmação feita por John Napier, que mostra as dificuldades de cálculo da época:

> Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo dos números muito grandes... comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades.

De acordo com Maor (2008), esta dificuldade foi removida quando os logaritmos surgiram. As suas propriedades pelo fato de transformarem multiplicações em soma, divisões em subtrações e potências em multiplicações, reduziram os laboriosos cálculos que dificultavam a vida dos cientistas desta época marcada por tantas descobertas importantes para a humanidade.

Segundo Maor (2008), raramente uma invenção matemática abstrata foi tão bem aceita quanto a dos logaritmos. John Napier, a mente responsável por esta invenção tão útil e que tanto contribuiu para o desenvolvimento científico, nasceu em 1550, filho de Archibald Napier e Janet Bothwell, no Castelo Merchiston na Escócia.

Afirma Maor (2008) que sendo Napier letrado em trigonometria, conhecia muito bem as fórmulas de prostaférese:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B &= \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right] \\
\operatorname{sen} A \cdot \cos B &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\right] \\
\cos A \cdot \operatorname{sen} B &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)\right] \\
\cos A \cdot \cos B &= \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]
\end{aligned}
$$

Fórmulas essas, como se pode observar, transformam multiplicações em somas e subtrações. A ideia por trás destas fórmulas foi o que, provavelmente, colocou Napier no caminho para esta grande inovação que são os logaritmos. Segundo Maor (2008), outra ideia que contribuiu corresponde aos termos de uma progressão geométrica. Por exemplo, a sequência numérica $(\ 1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 16\ ,\ 32\ , ...)$ é uma progressão geométrica de razão 2, pois a cada termo multiplica-se 2 para descobrir o próximo, portanto, essa sequência pode ser reescrita como 2^0 , 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 e assim sucessivamente. Então, uma progressão geométrica de razão q pode ser escrita como $1\ ,\ q\ ,\ q^2\ ,\ q^3\ ,\ q^4\ ,\ ...\ ,\ q^{n-1}$, sendo q^{n-1} o termo n da progressão. Nota-se que os termos de uma progressão geométrica são associados aos termos de uma progressão aritmética formada pelos expoentes ($0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ ...\ ,\ n$).

Segundo Maor (2008), Michel Stifel (1487-1567), matemático alemão, mostrou que multiplicando termos quaisquer de uma progressão geométrica, o resultado será o mesmo se somarmos os expoentes correspondentes repetindo a mesma base. Então, $q^2 \cdot q^5 = (q \cdot q) \cdot (q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q)$ = $q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = q^7$, ou seja, somando os expoentes $2+5$ chegamos ao resultado correspondente. Analogamente, fazendo $\dfrac{q^6}{q^3} = \dfrac{(q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q)}{(q \cdot q \cdot q)}$ = $q \cdot q \cdot q = q^3$ o que corresponde a subtrair os expoentes quando dividimos os termos dessa progressão.

Desta forma, Maor (2008, p. 19) explica a ideia de Napier:

> Sua linha de pensamento era a seguinte, se pudermos escrever qualquer número positivo como uma potência de algum dado número fixo (o qual depois seria chamado de base), então, a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes. Além disso, elevar um número a enésima potência (isto é, multiplicá-lo por si mesmo n vezes) seria equivalente a somar n vezes a ele próprio, isto é, multiplicá-lo por n – e encontrar a enésima raiz de um número seria equivalente a n subtrações repetidas – ou seja, a divisão por n. Resumindo, cada operação aritmética seria reduzida à que está abaixo dela na hierarquia das operações, o que reduziria muito a dificuldade das computações numéricas.

Exemplificando, tomemos a tabela 1 que apresenta potências de 2:

Tabela 1 – Potências de 2

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Fonte: Maor (2008, p. 20)

Supondo que multiplicaremos 16 por 256, procurando na tabela vemos que os expoentes correspondem a 4 e 8, somando-os obtemos 12, e logo sabe-se que a resposta é 4096.

De acordo com Maor (2008), para trabalhar com os números não inteiros, Napier escolheu um número bem próximo de um, $1-10^{-7} = 0,9999999$, devido à prática da trigonometria de dividir o raio de um círculo unitário em 10^7 partes. Então, se $N = 10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^L$, ele chamava L de logaritmo (que significa número proporcional) do número N. Dividindo-se N e L por 10^7, virtualmente se encontrará um sistema de logaritmos na base $1/\mathrm{e}$, pois

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Napier não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos. Na verdade, o número de Euler foi usado como base depois. Segundo Maor (2008), em uma segunda edição da tradução de Edward Wright para a *Descriptio* de Napier (Londres 1618), num apêndice escrito por Oughtred provavelmente, aparece o equivalente da declaração de que $\log_{\mathrm{e}} 10 = 2,302585$. Parece ser este o primeiro reconhecimento do número e na Matemática.

De acordo com Maor (2008), Napier dedicou 20 anos de trabalho nessa teoria e em 1614 publicou seu trabalho *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da maravilhosa lei dos logaritmos), que contém sua abordagem para a invenção dos logaritmos. Esse trabalho logo despertou interesse amplo em cientistas de toda Europa e até mesmo da China.

Segundo Maor (2008), no ano seguinte a sua publicação, Henry Briggs $(1561-1631)$, professor de Geometria do Colégio Gresham em Londres, impressionado com a invenção de Napier, vai visitá-lo e, nessa visita, surgem os logaritmos de base 10. Ambos concordam que as tábuas seriam mais úteis se o logaritmo de 1 fosse 0 e logaritmo de 10 fosse uma conveniente potência de 10. Nascem assim os logaritmos comuns, os utilizados na atualidade.

Maor (2008) afirma que Briggs construiu uma nova tábua de logaritmos com base na nova ideia e publicou sua *Arithmetica Logarithmica*, em 1624. Essa tábua continha logaritmos comuns com quatorze casas decimais de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. A lacuna foi preenchida com a ajuda de Adriaen Vlacq $(1600 - 1660)$, editor holandês. Essa nova tábua, com pequenas revisões, manteve-se até o século XX. Só em 1924, na Inglaterra, foi feita uma nova tábua devido ao tricentenário da invenção dos logaritmos, tabelas com precisão de 20 casas decimais terminadas em 1949.

Segundo Maor (2008), no início de 1970, surgem as primeiras calculadoras eletrônicas manuais e as tábuas de logaritmos perdem sua utilidade primeira. Sendo assim, seu papel primordial tornou-se obsoleto, mas sua utilidade permanece tão viva e necessária como nunca. São inúmeras as suas aplicações na Química, Física, Geografia, Finanças, Artes, dentre tantas outras, nas quais suas propriedades são utilizadas na resolução de situações-problema diversas.

Capítulo 2

Logaritmos: conceito, propriedades e algumas demonstrações

Serão apresentadas neste capítulo a definição, as propriedades e algumas demonstrações sobre logaritmos. Além disso, um exemplo histórico de como as propriedades dos logaritmos eram usadas para se fazer cálculos antes do surgimento das calculadoras.

2.1 Definição

As definições e propriedades apresentadas neste e no próximo tópico foram retiradas de Dante (2000).

Definição 2.1 *Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b na base a, ou seja,*

$$\log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b.$$

Exemplo 2.1 *Os exemplos a seguir servem para ilustrar a definição 2.1:*

i. $\log_3 81 = 4 \Longleftrightarrow 3^4 = 81.$

ii. $\log_{1/2} 32 = -5 \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

A seguir apresentamos algumas consequências decorrentes da definição de logaritmo:

a) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, qualquer que seja $a > 0$ e $a \neq 1$.

b) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$, para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.

c) $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$ para todo $a > 0$, $a \neq 1$ e para todo n.

d) $a^{\log_a N} = N$, com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa

$\log_a N = x \iff a^x = N$.

Substituindo x, na última igualdade acima, encontramos $a^{\log_a N} = N$.

e) $\log_a x = \log_a y \iff x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Justificativa

Se $\log_a x = r$ e $\log_a y = s$, isto é, $a^r = x$ e $a^s = y$, temos:

- $x = y \Longrightarrow a^r = a^s \Longrightarrow r = s \Longrightarrow \log_a x = \log_a y$.
- $\log_a x = \log_a y \Longrightarrow r = s \Longrightarrow a^r = a^s \Longrightarrow x = y$.

Portanto, $\log_a x = \log_a y \iff x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

2.2 Propriedades dos Logaritmos

1. **Logaritmo de um produto**

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N, \text{ para } M > 0, N > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração:

Considere $\log_a(M \cdot N) = p$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$.

Dessas igualdades, tiramos $a^p = M \cdot N$; $a^m = M$ e $a^n = N$. Então, $a^p = M \cdot N = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Se $a^p = a^{m+n}$, então $p = m + n$, ou seja, $\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$.

2. **Logaritmo de um quociente**

$$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N, \text{ para } M > 0, N > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração:

Considere $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = q$; $\log_a M = m$ e $\log_a N = n$.

Daí tiramos $a^q = \frac{M}{N}$; $a^m = M$ e $a^n = N$. Então, $a^q = \frac{M}{N} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Se $a^q = a^{m-n}$, então $q = m - n$, ou seja, $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$.

3. **Logaritmo de uma potência**

$$\log_a\left(M^N\right) = N \cdot \log_a M, \text{ para } M > 0, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração:

Considere $\log_a\left(M^N\right) = r$ e $\log_a M = m$.

Daí tiramos $a^r = M^N$ e $a^m = M$. Então, $a^r = M^N = (a^m)^N = a^{Nm}$.

Se $a^r = a^{Nm}$, então $r = Nm$, ou seja, $\log_a\left(M^N\right) = N \cdot \log_a M$.

4. **Mudança de base**

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}, \text{ para } N > 0, b > 0, a > 0, b \neq 1 \text{ e } a \neq 1$$

Demonstração:

Considere $\log_b N = p$; $\log_a N = q$ e $\log_a b = r$.

Isso nos leva a $b^p = N$; $a^q = N$ e $a^r = b$.

Fazendo substituições: $N = a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp}$.

Se $a^q = a^{rp}$, então $q = rp$, e daí, $p = \dfrac{q}{r}$ ou $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

2.3 Logaritmos Naturais

Segundo Trotta (1988, p. 108), além dos logaritmos decimais, há certos ramos da Matemática, da Física e da Biologia, nos quais são utilizados os chamados logaritmos naturais, que têm por base o número irracional e, chamado de “número de Euler”. Estes são indicados por

$$\log_{\mathrm{e}} a \text{ ou } \ln a.$$

Esses logaritmos recebem esse nome, pois se observa que certos processos da natureza, como a reprodução de bactérias ou a desintegração de um átomo, são regidos por leis exponenciais que envolvem o número e. Na Matemática Financeira, o número e é empregado quando se calculam juros compostos.

A rigor, definimos:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Uma aproximação de e com 24 casas decimais é:

$$\mathrm{e} = 2,718281828459045235360287...$$

2.4 Um exemplo histórico

Segue abaixo um exemplo adaptado da obra de Maor (2008) em que logaritmos e suas propriedades operatórias foram usados para calcular por mais de três séculos até o surgimento das calculadoras no final da década de 1970.

Para calcular a expressão: $x = \sqrt[3]{\dfrac{493,8 \times 23,67^2}{5,104}}$, antes do advento das calculadoras, utilizava-se das propriedades operatórias dos logaritmos e de uma tábua com os valores de logaritmos comuns. Antes de resolver esta expressão, precisamos entender como se usa essas tábuas.

Se $N = 10^L$, então L é o logaritmo (base 10) de N, ou seja, $L = \log N$. E como $1 = 10^0$ e $10 = 10^1$, temos $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 1$. Portanto, logaritmos de qualquer número entre 1 (inclusive) e 10 (exclusive) são da forma $0, abc...$; do mesmo modo, o logaritmo de qualquer número entre 10 (inclusive) e 100 (exclusive) é da forma $1, abc...$ e assim por diante. Assim, se um logaritmo for escrito como $\log N = p, abc...$, o inteiro p nos diz em que escala de potências de 10 se encontra o número N; por exemplo, se nos disserem que $\log N = 3,456$ podemos concluir que N fica entre 1.000 e 10.000. O valor exato de N é determinado pela parte fracionária, $abc...$ do logaritmo. A parte inteira p de $\log N$ é chamada de característica e a fracionária, $abc...$ é a mantissa. Uma tábua de logaritmos geralmente possui apenas os valores da mantissa, cabendo à pessoa determinar a característica.

Agora, vamos resolver a expressão acima. Inicialmente, vamos escrevê-la como uma potência com expoente fracionário.

$$x = \left(\frac{493,8 \times 23,67^2}{5,104}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Aplicando o operador logaritmo em ambos os lados da igualdade obtemos:

$$\log x = \frac{1}{3} \times (\log 493,8 + 2 \cdot \log 23,67 - \log 5,104)$$

Agora, encontramos o valor de cada logaritmo utilizando a tabela de logaritmos da figura 1. Para encontrar $\log 493,8$, localizamos a fileira que começa com 49 e vamos até a coluna encabeçada pelo 3 (onde encontramos 6928) e, depois, olhamos sob a coluna 8 na Parte Proporcional para encontrar 7. A Parte Proporcional da tabela é usada no cálculo do logaritmo de um número com quatro ou mais casas decimais. Depois, somamos este valor a 6928 e obtemos 6935. Como $493,8$ encontra-se entre 100 e 1000, a característica é 2. Assim, temos $\log 493,8 = 2,6935$. Encontrando o valor de $\log 23,67$ localizamos a fileira 23 encabeçada pelo 6 (onde encontramos 3729), e depois olhamos a coluna 7 na Parte Proporcional para encontrar 13. Somamos este valor e obtemos 3742. Como $23,67$

encontra-se entre 10 e 100, a característica é 1. Assim, temos $\log 23,67 = 1,3742$. Por fim, para encontrarmos $\log 5,104$ localizamos a fileira que começa com 51 e vamos até a coluna encabeçada pelo 0 (onde encontramos 7076), e depois olhamos a coluna 4 na Parte Proporcional para encontrar 3. Somamos este valor e obtemos 7079. Como $5,104$ encontra-se entre 0 e 10, sua característica é 0. Logo, temos $\log 5,104 = 0,7079$. Substituindo na expressão:

$$\log x = \frac{1}{3}(2,6935 + 2 \cdot 1,3742 - 0,7079) \Longleftrightarrow \log x = 1,5780 \Longleftrightarrow x = 37,84$$

Para o último passo, utilizamos uma tabela de antilogaritmos – logaritmos ao contrário, como ilustrado na figura 2. Procuramos o número $0,5780$ (a mantissa), localizando a linha 57, e a coluna encabeçada do 8, e encontramos 3784; e já que a característica de $1,5780$ é 1, sabemos que o número deve se encontrar entre 10 e 100. Assim, $x = 37,84$, arredondando para duas casas.

Figura 1 – Tábua de Logaritmos

										Partes Proporcionais								
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Logaritmos com quatro casas decimais

Fonte: Maor (2008, p. 37)

Figura 2 – Tábua de Logaritmos

											Partes Proporcionais								
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	.5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Logaritmos com quatro casas decimais

Fonte: Maor (2008, p. 38)

Capítulo 3

Tópicos de Educação Matemática

Neste capítulo, veremos como as propostas de atividades que serão abordadas no capítulo 4 podem melhorar a aprendizagem de logaritmos, pois são modelos contextualizados e interdisciplinares da realidade e com isso esses exercícios poderão proporcionar uma aprendizagem mais significativa desse conteúdo.

3.1 Interdisciplinaridade e Contextualização no ensino de logaritmos

De acordo com Juvin e Lipovetsky (2012, p. 1), a globalização:

> Trata-se de uma formidável dinâmica, que coincide com a conjunção de fenômenos econômicos (abertura de mercado, num contexto de capitalismo em escala planetária), inovações tecnológicas (as novas tecnologias da informação e da comunicação em geral) e reviravoltas geopolíticas (implosão do império soviético). Embora essa tendência à unificação do mundo não corresponda a um fenômeno de natureza recente (vivemos numa "segunda etapa da globalização") nem mesmo a uma realidade acabada, é inegável que representa uma transformação de ordem geral e profunda, tanto no que diz respeito à organização quanto no que diz respeito à percepção do Universo.

Podemos ver dessa forma que, segundo Juvin e Lipovetsky (2012), com a globalização as informações tornaram-se mais acessíveis e os meios de comunicação facilitaram esse processo de aquisição do saber. Sabe-se muito sem precisar sair de casa, a comunicação acontece de forma rápida e, mesmo estando distantes, tudo se encontra interligado. Na escola, não deve ser diferente, já que precisa acompanhar a evolução da humanidade.

De acordo com Tomaz e David (2008), as demandas do mundo contemporâneo fazem com que a sociedade tenha que assimilar novos conhecimentos e espera-se que a educação apresente possibilidades para que a população tenha acesso a esses conhecimentos que a cada dia tornam-se mais necessários para se lidar com situações do cotidiano.

Neste cenário, a Matemática torna-se uma ferramenta imprescindível, pois ajuda a descrever e compreender fenômenos nas diversas áreas do conhecimento e, claro, é constantemente usada na resolução de problemas, no contexto de diversas disciplinas e profissões.

O aluno precisa enxergar a relação de interdependência entre as disciplinas. Ele necessita entender que os conceitos matemáticos são aplicados na Biologia, Física, Química, Artes, entre outras. Os recursos matemáticos são usados constantemente nas diversas disciplinas e, muitas das vezes, ele não faz essa ponte e não entende que, na atualidade, as disciplinas dialogam entre si e que tudo o que é aprendido tem utilidade e será usado em algum momento na sua vida escolar e cotidiana. Neste contexto, Tomaz e David (2008) ressaltam que o conhecimento disciplinar fragmentado não favorece a compreensão de forma global e completa as situações vivenciadas pelo aluno, de forma que se elege dois princípios básicos para o Ensino de Matemática: o da contextualização e o da interdisciplinaridade.

A interdisciplinaridade segundo Tomaz e David (2008) pode ser entendida como qualquer forma de combinação entre duas ou mais disciplinas visando compreender um objeto a partir de visões diferentes. Dessa forma, a interação entre as diversas disciplinas ajudaria a construir novos significados de um conteúdo.

Ainda de acordo com Tomaz e David (2008), uma forma de contextualização pode ocorrer via inter-relações com outras áreas do conhecimento. O contexto de outras disciplinas e profissões em que a Matemática se faz necessária pode ser usado para dar mais significado ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, que acontece de forma mecanizada, apenas decorando-se conceitos, fórmulas e procedimentos. Dessa forma, afirma Dante (2000, p. 17)

> Que o conteúdo trabalhado com o aluno seja significativo, que ele sinta que é importante saber aquilo para sua vida em sociedade ou que lhe será útil para entender o mundo em que vive (...). Para que o aluno veja a matemática como um assunto útil e prático e possa apreciar o seu poder, precisa perceber que ela está presente em praticamente tudo e é aplicada para resolver problemas do mundo real e entender uma grande variedade de fenômenos.

Com isso, vemos que para significar o conteúdo e motivar os alunos no aprendizado de logaritmos pode-se utilizar a aplicabilidade dele em várias situações e em outras disciplinas, pois de acordo com Lima (2013), os logaritmos merecem destaque no ensino de Matemática, devido à posição central que ocupam nessa Ciência e em suas aplicações. Assim, buscou-se mostrar que, na Química e na Física, existem situações em que se deve usar os conceitos e propriedades dos logaritmos para que sejam resolvidas. A interdisciplinaridade entre a Matemática e essas Ciências é explícita. No conceito de meia vida, pH e acústica são variadas as situações envolvendo esse conhecimento. Os problemas envolvendo essas aplicações podem ser utilizados pelos professores para mostrar aos alunos a importância de aprender os logaritmos.

O contexto das Finanças que, segundo Maor (2008), tem se encontrado no centro das preocupações humanas, pode despertar o aluno para o ensino de logaritmos, pois está presente na vida de todos na atualidade. Um exemplo claro são os cálculos de aplicações financeiras e empréstimos tão comuns nos bancos e empresas similares. Os profissionais dessa área estudaram os logaritmos para que seu conceito e propriedades fossem aplicados em situações diversas com o intuito de saber o tempo de aplicação ou o tempo de prazo do empréstimo. Nesse processo de aprendizagem, o estudante saberá onde poderá usar esse conteúdo.

Outra situação apresentada é o da Escala Richter, que de acordo com Santos, Gentil e Greco (2001), é utilizada para o cálculo da intensidade de abalos sísmicos e, mesmo que o local onde a aula está sendo oferecida nunca tenha sofrido um tremor, os discentes estão conectados no que ocorre no mundo e sabem que há terremotos em diversas partes. Partindo desse ponto, a curiosidade pode surgir e tornar o ensino bem mais interessante, instigando-o a saber o porquê dos abalos e o que é feito para calcular a intensidade deles. A Escala Richter é uma escala logarítmica e, portanto, utiliza-se do conceito e das propriedades dos logaritmos em situações-problema diversas inseridas no cotidiano dos profissionais de Geologia.

3.2 Trabalhos relacionados

Neste tópico, descrevem-se quatro trabalhos dissertativos sobre o tema logaritmos e suas aplicações.

3.2.1 Logaritmos conceitos e aplicação

Esse trabalho dissertativo foi desenvolvido por Couto (2013), na Universidade Federal de Lavras – MG, como exigência para obtenção do título de mestre. O autor traz uma proposta para o ensino de logaritmos utilizando as aplicações deste conteúdo em fenômenos naturais e na matemática financeira. O objetivo geral dessa pesquisa dissertativa é buscar, por meio de um estudo histórico dos logaritmos, dar atenção especial à construção formalizada de seus conceitos e sugerir uma aplicação no Ensino Médio com a utilização de um software matemático.

Couto (2013) inicia o trabalho falando da história dos logaritmos. Em seguida, apresenta os logaritmos e suas propriedades fundamentado na obra de Lima (2004). O autor sugere uma forma de abordagem de logaritmos no Ensino Médio utilizando a história deles e descrevendo suas propriedades e definições mais convenientes para se utilizar no Ensino Médio. Define e trabalha com a função exponencial, inclusive, com sugestão de exercícios. Aborda a definição e o gráfico das funções exponenciais e logarítmicas, comparando e mostrando que são funções inversas.

Desenvolve uma sequência de atividades que exploram o uso do GeoGebra para o ensino de logaritmos. Couto (2013) justifica tal proposta mostrando que o GeoGebra é um software gratuito e compatível com os sistemas operacionais Windows e Linux e é uma ferramenta de ensino interativa. Para tanto, primeiramente, apresenta o GeoGebra e suas funções. Depois, descreve as atividades, sendo que a primeira tem o objetivo de desenvolver no aluno a habilidade de interpretação do gráfico de uma função logarítmica aplicando as suas propriedades. A segunda tem o intuito de auxiliar na visualização e na interpretação de duas funções inversas entre si.

Apresenta uma pesquisa feita com vinte alunos do Ensino Médio após ter aplicado as duas atividades descritas e conclui que o método empregado teve desempenho satisfatório. Por fim, apresenta aplicações dos logaritmos, a saber: desintegração radioativa, o método carbono-14, resfriamento de um corpo e matemática financeira, com atividades.

Esse trabalho é semelhante a esta pesquisa dissertativa, pois foca o uso da aplicações no ensino de logaritmos. Trabalha, contudo, com o uso do GeoGebra e utiliza aplicações diferentes, como o resfriamento de um corpo.

3.2.2 Logaritmos e aplicações

Essa dissertação foi escrita por Pecorari (2013) na Universidade Estadual Paulista – "Júlio de Mesquita Filho". A autora tem como objetivo geral apresentar aos professores uma forma diferente e mais acessível de ensinar logaritmos.

Faz uma resenha histórica sobre os logaritmos, apresenta o conceito de logaritmos e potências como é estudado no Ensino Médio, define a função logarítmica e suas propriedades com vários exemplos aplicados.

Apresenta a relação entre a área de uma faixa da hipérbole e os logaritmos baseado na obra de Lima (2013), com exemplos diversos utilizando também as tábuas de logaritmos. Estuda o número e como base dos logaritmos naturais e outras bases também são objetos de estudo, incluindo a base dez, muito utilizada atualmente. Apresenta também a definição da função logarítmica via integral de Riemann, sendo destinada apenas para aprofundamento dos professores.

Por fim, descreve aplicações dos logaritmos, configurando uma proposta para uso dos professores como elemento motivador. Potencial hidrogeniônico, desintegração radioativa, carbono-14 e resfriamento de um corpo são as aplicações definidas e exemplificadas com exercícios resolvidos.

Utilizar as aplicações dos logaritmos no aprendizado é o intuito desse trabalho, bem como desta dissertação. Porém se diferenciam pelas aplicações utilizadas, pelo fato de não ter aplicado e por abordar o conteúdo utilizando-se conhecimentos de Cálculo Diferencial.

3.2.3 Ensino de exponenciais e logaritmos no Ensino Médio via aplicações

Dissertação desenvolvida por Thiengo (2013), na Universidade Federal Fluminense. O autor salienta que o ensino de exponenciais e logaritmos somente através de conceituações, teoremas e propriedades operatórias fica empobrecido. Então, apresenta uma proposta de Ensino desses conteúdos com foco nas aplicações deles em diversas áreas do conhecimento.

Tem como objetivo geral discutir o processo de ensino de exponenciais e logaritmos por meio de conceituações iniciais bem trabalhadas e aplicações do conteúdo ensinado nas diferentes áreas de conhecimento – Ciências Humanas (aspectos geográficos) e Ciências Naturais (Física, Química, Biologia e Astronomia).

Dedica um capítulo aos aspectos históricos. Em sequência, trabalha com os conceitos, propriedades e gráficos das funções exponenciais e logarítmicas, além de equações e inequações exponenciais e logarítmicas com exemplificações contextualizadas.

O autor trabalha com a solução de problemas, contextualizações que precisam das funções exponenciais e logarítmicas para serem resolvidas. Problemas estes que são aplicações destes conteúdos em situações diversas. Problemas de capitalizações, investimentos e Mercado Financeiro, Ciências da natureza, Ciências biológicas, Astronomia e vida e sociedade formam as aplicações abordadas nesse trabalho com exercícios contextualizados e alguns são resolvidos modelando-os matematicamente.

Assemelha-se à proposta deste trabalho por focar o ensino de logaritmos via aplicações, porém trabalha também com funções exponenciais e não aplica a proposta abordada.

3.2.4 Logaritmos: história, teoria e aplicações

Nessa dissertação de Mestrado desenvolvida por Angelin (2015), na Universidade Estadual de Santa Cruz – BA o objetivo geral é fortalecer as práticas pedagógicas no ensino dos logaritmos, apresentando os seus conceitos de uma forma diferente.

Angelin (2015) resgata um pouco da história dos logaritmos, define logaritmos e suas propriedades, utilizando também a área limitada por uma faixa de hipérbole de acordo com a obra de Lima (2013). Estuda a mudança de base, logaritmos decimais e função exponencial.

Apresenta aplicações dos logaritmos no intuito de tornar o seu ensino mais interessante e motivador. Lei de resfriamento de Newton, Potencial Hidrogeniônico, terremotos, desintegração radioativa, caborno-14, juros contínuos, perdas contínuas, pressão atmosférica e população de bactérias formam as aplicações sugeridas, as quais são definidas e exemplificadas.

O autor conclui o trabalho sugerindo uma Feira de Matemática no Ensino Médio utilizando as aplicações apresentadas, envolvendo os professores das outras disciplinas onde os logaritmos e suas propriedades são insubstituíveis na resolução de diversas situações.

Como nesta pesquisa, busca uma proposta dos logaritmos por meio de aplicações, porém não aplica tal proposta. Além disso, trabalha com aplicações diferentes, como a pressão atmosférica.

Capítulo 4

Propostas de atividades

Neste capítulo, são apresentadas aplicações dos logaritmos, que formam uma proposta de atividades que podem ser utilizadas pelo professor para significar e motivar o aprendizado deste conteúdo.

A proposta de atividades aqui descrita é diferenciada em relação à aplicação de exercícios comuns onde se aborda logaritmos voltados apenas para uma mecanização dos conceitos e propriedades. O público alvo desta proposta é o Ensino médio, já que no currículo do estado do Rio de Janeiro se trabalha logaritmos no segundo ano do Ensino Médio, embora a rede particular trabalhe com eles no primeiro ano do Ensino Médio, ou seja, depende do currículo que segue cada rede ou estado.

Para promover o aprendizado de logaritmos, os pré-requisitos fundamentais necessários são: potenciação, radiciação e equação exponencial. Logo, para resolver as atividades propostas, há a necessidade dos alunos terem esses pré-requisitos bem definidos, por isso, uma revisão desses conteúdos pode se fazer necessária, especialmente, para a resolução dos exercícios sobre meia vida e juros compostos, uma vez que se constituem de modelos exponenciais.

Esta proposta pode ser utilizada em momentos distintos. Primeiramente, as atividades podem ser utilizadas para problematizar o conceito e as propriedades dos logaritmos. Por exemplo, o professor, ao explicar a propriedade dos logaritmos que transforma potência em produto, pode utilizar uma das atividades com o intuito de mostrar a aplicabilidade dessa propriedade na resolução de um problema real. Além disso, a história e conceito de cada aplicação pode contextualizar e despertar a curiosidade e dessa forma aumentar a vontade de aprender. Os alunos se perguntam e questionam constantemente aos seus professores de Matemática para que servem logaritmos, qual a necessidade de estudá-los e se aprender logaritmos irá beneficiá-los no futuro. Logo, diante disso, utilizar-se destas atividades no contexto escolar, poderá ajudar a responder estes questionamentos e dessa forma, poderá motivar ao aprendizado deste conteúdo tão importante.

Outra forma de aplicar esse conteúdo seria selecionar alguns exercícios variados, depois que os alunos estiverem mais familiarizados com o conteúdo de logaritmos, e distribuí-los em grupos previamente organizados. Duplas, trios ou quartetos dependendo do que o professor considerar melhor diante do perfil da turma e da proposta desejada. Depois disso, permitir e incentivar a discussão das questões, sua interpretação e recursos que possam levar a solução das mesmas. Nesse momento, o professor seria apenas um mediador, permitindo a troca de ideias e colaboração entre os alunos. Logo em seguida, pode promover uma discussão dos métodos e soluções encontradas, pedindo que cada equipe expresse suas conclusões aos demais colegas de classe.

Os alunos podem ter dificuldades em questões operacionais, mas a maior parte das dificuldades geralmente se encontra na interpretação dos problemas e na construção de modelos para resolvê-los. O professor para sanar tais dificuldades deve intervir debatendo com os alunos, promovendo a discussão de ideias, promovendo constantes trocas e instigando o espírito investigativo.

Alguns exercícios propostos já contêm os valores de logaritmos necessários para serem resolvidos, mas o professor pode retirar esses valores e com isso promover o uso da calculadora nas resoluções das atividades, mostrando aos discentes como utilizarem a calculadora na resolução de problemas que envolvem logaritmos.

Enfim, existe mais de uma forma do professor e dos alunos se beneficiarem com a utilização da proposta contida neste trabalho, que pode contribuir para uma aprendizagem que tenha mais significado e seja mais útil na vida do aluno.

4.1 Meia vida

As descobertas sobre radioatividade datam do final do século XIX. Segundo Feltre (2004, p. 365), no desenvolvimento histórico das aplicações sobre a estrutura atômica, é importante destacar que, em 1875, o químico e físico inglês William Crookes $(1832 - 1919)$ fez experiências com descargas elétricas em gases, a pressões baixíssimas, e descobriu os chamados raios catódicos, que levaram à descoberta dos elétrons. Em 1895, o físico alemão Wihelm Konrad Roentgen $(1845 - 1923)$ introduziu modificações na ampola de Crookes e conseguiu produzir os raios X (assim chamados porque eram de natureza desconhecida). Roentgen foi o responsável pela primeira radiografia quando sua esposa colocou a mão entre o dispositivo e a chapa fotográfica, como podemos observar na figura 3.

De acordo com Feltre (2004), os cientistas puderam comprovar depois que os raios X não eram a única forma de radiação. Em 1896, o químico francês Henri Antonie Becquerel $(1852 - 1908)$ trabalhava nesta questão e descobriu que outras substâncias eram capazes de uma emissão desconhecida que ficavam impressas em placas fotográficas. A este fenômeno chamou-se radioatividade.

Figura 3 – A primeira radiografia da história

Fonte: Feltre (2004, p. 365)

Segundo Feltre (2004), Marie Curie $(1867 - 1934)$ e Pierre Curie $(1859 - 1906)$, no ano de 1898, fizeram novas descobertas. Polônio, elemento descoberto por eles mais radioativo que o urânio, recebeu esse nome em homenagem a terra natal de Marie, Polônia. Também o elemento rádio, ainda mais radioativo que o urânio e o polônio foi descoberto por eles. A pesquisa nesse campo foi intensificada e outros cientistas também contribuíram muito, como Ernest Rutherford $(1871 - 1937)$.

Nesse contexto, surge a necessidade de saber o tempo de desintegração de um elemento radioativo. E, para medir esse tempo, utiliza-se do conceito de meia vida, que de acordo com Feltre (2004) se define como o tempo necessário para que a atividade de um elemento que emite radiação seja reduzido à metade da inicial.

No quadro 1, a seguir, mostra-se o tempo de meia vida de alguns elementos radioativos. Como pode-se ver, são muito diversificados os tempos de semidesintegração. O modelo matemático para o cálculo de meia vida é o exponencial.

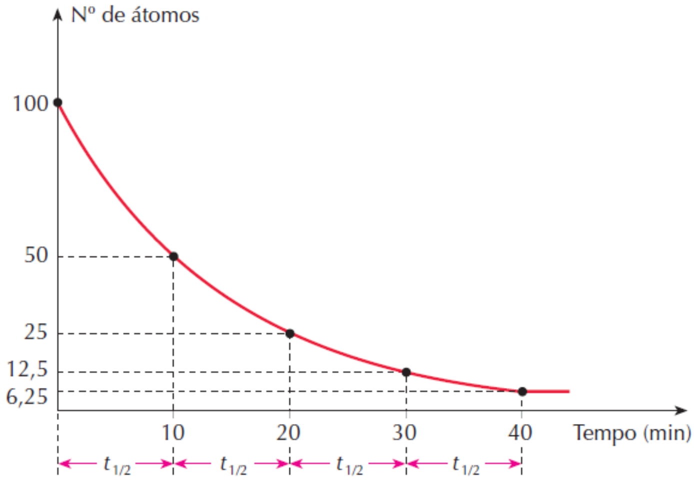
Quadro 1 – Tempo de meia vida de um radioisótopo

Radioisótopo	Tempo de meia-vida
$^{220}_{86}Rn$	55,6 segundos
$^{218}_{84}Po$	3,08 minutos
$^{95}_{43}Tc$	20,0 horas
$^{234}_{90}Th$	24,1 dias
$^{90}_{38}Sr$	29,1 anos
$^{14}_{6}C$	5.715 anos
$^{10}_{4}Be$	1,52 milhão de anos
$^{238}_{92}U$	4,46 bilhões de anos

Fonte: Feltre (2004, p. 375)

Vamos considerar, por exemplo, que determinada amostra radioativa forneça os dados abaixo, dando origem ao gráfico da figura 4:

Figura 4 – Curva de decaimento



Fonte: Feltre (2004, p. 374)

Nesse exemplo, nota-se que o tempo de meia vida foi de dez minutos.

Generalizando, após transcorrido um intervalo de tempo t, uma amostra de um dado elemento, contendo inicialmente N_0 núcleos radioativos terá N núcleos daquele elemento original, assim $N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ onde λ é a constante de decaimento do elemento.

As situações-problema a seguir, são aplicações do conceito e propriedades dos logaritmos que estão especificadas no Capítulo 2. Situações essas que são interdisciplinares com a Química, pois como o modelo nessa Ciência para a desintegração de elementos radioativos é o exponencial, os logaritmos são utilizados para resolver problemas diversos envolvendo a meia vida dos elementos radioativos, já que a função logarítmica é a inversa da função exponencial.

1. **[ENEM-2013]** Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza a metade. A meia vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão: $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k uma constante negativa. Considere 0,3 como aproximação para $\log 2$. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

   (A) 27

(B) 36

(C) 50

(D) 54

(E) 100

Solução:

De acordo com o enunciado do exercício, sabemos que a meia-vida do césio-137 é de 30 anos. Aplicando esse valor à expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, podemos substituir o tempo t por 30 e a massa A, quando $t = 30$, por $\frac{A}{2}$:

$$\begin{aligned} M(t) &= A \cdot (2,7)^{kt} \\ \frac{A}{2} &= A \cdot (2,7)^{k.30} \\ (2,7)^{30k} &= \frac{1}{2} \\ (2,7)^{30k} &= 2^{-1} \end{aligned}$$

Agora basta aplicar logaritmo de base 10 em ambos os lados da equação:

$$\begin{aligned} \log(2,7)^{30k} &= \log 2^{-1} \\ 30k \cdot \log(2,7) &= -1 \cdot \log 2 \end{aligned}$$

Como $\log_{10} 2 = 0,3$:

$$\begin{aligned} 30k \cdot \log(2,7) &= -1 \cdot 0,3 \\ 30k \cdot \log 2,7 &= -0,3 \\ \log 2,7 &= \frac{-0,3}{30k} \end{aligned}$$

$$k = \frac{-0,01}{\log 2,7}. \tag{4.1}$$

Fazendo:

$$\begin{aligned} 0,1A &= A \cdot (2,7)^{kt} \\ (2,7)^{kt} &= 0,1 \end{aligned}$$

Aplicando logaritmos em ambos os lados da igualdade, teremos:

$$\begin{aligned} \log(2,7)^{kt} &= \log 0,1 \\ kt \cdot \log 2,7 &= -1 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de k, obtido na equação 4.1, temos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{-0,01}{\log 2,7}\right)\cdot t\cdot\log 2,7 &= -1\\ -0,01t &= -1\\ t &= 100\end{aligned}$$

Portanto, em 100 anos, a massa do césio-37 será reduzida para 10% da quantidade inicial. A alternativa correta é a letra e.

2. **[UEPB]** Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural de se desintegrarem, diminuindo, portanto, sua quantidade original com o passar do tempo. Suponha que certa quantidade de um elemento radioativo, com massa inicial m_0 (gramas), com $m_0 \neq 0$, decomponha-se conforme o modelo matemático

$$m(t) = m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}},$$

em que $m(t)$ é a quantidade de massa radioativa restante no tempo t (anos). Usando a aproximação $\log 2 = 0,3$, a quantidade de anos para que esse elemento se decomponha até atingir $1/8$ da massa inicial será:

(A) 60

(B) 62

(C) 64

(D) 63

(E) 70

Solução:

De acordo com o enunciado da questão, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}m_0 &= m_0\cdot 10^{-\frac{t}{70}}\\ \frac{1}{8} &= \cdot\, 10^{-\frac{t}{70}}\\ \left(2^3\right)^{-1} &= 10^{-\frac{t}{70}}\\ \log 2^{-3} &= \log 10^{-\frac{t}{70}}\\ -3\cdot\log 2 &= -\frac{t}{70}\cdot\log 10\\ -0,9 = &-\frac{t}{70}\\ -t &= -0,9\times 70\\ t &= 63\end{aligned}$$

Portanto, levará 63 anos até que a decomposição atinja $1/8$ da massa inicial.

3. **[(DANTE, 2011, p. 273), Exemplo 5]** Em quantos anos 500 g de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 3% ao ano, se reduzirão a 100 g? Use $Q = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

   Solução:

   De acordo com o enunciado da questão, temos:

$$
\begin{aligned}
Q &= Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-rt} \\
100 &= 500 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}03t} \\
\frac{1}{5} &= \mathrm{e}^{-0{,}03t} \\
\ln\left(\frac{1}{5}\right) &= \ln \mathrm{e}^{-0{,}03t} \\
\ln 1 - \ln 5 &= -0,03t \cdot \ln \mathrm{e} \\
0 - \ln 5 &= -0,03t \\
t &= \frac{\ln 5}{0,03} \\
t &\cong \frac{1,6094}{0,03} \\
t &\cong 53,6
\end{aligned}
$$

   Portanto, será necessário aproximadamente $53,6$ anos.

4. **[UEL]** O iodo-131 é um elemento radioativo utilizado em medicina nuclear para exames de tireoide e possui meia vida de 8 dias. Para descarte de material contaminado com 1 g de iodo-131, sem prejuízo para o meio ambiente, o laboratório aguarda que o mesmo fique reduzido a 10^{-6} g de material radioativo. Nessas condições, o prazo mínimo para descarte do material é de: (Dado: $\log 2 = 0,3$)

   (A) 20 dias

   (B) 90 dias

   (C) 140 dias

   (D) 160 dias

   (E) 200 dias

   Solução:

   De acordo com as informações do problema, temos que a massa radioativa do elemento químico, após um período t de meia-vida, será dada pela expressão

$$M = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8},$$

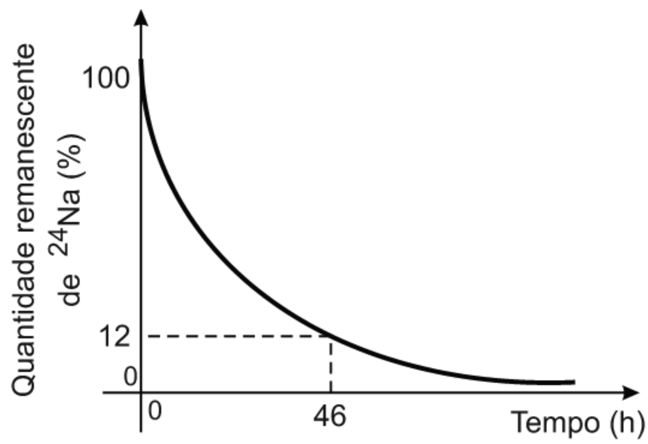
onde t representa o tempo em dias. Usando $M = 10^{-6}$ g, $M_0 = 1$ g, temos:

$$\begin{aligned} 10^{-6} &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/8} \\ 10^{-6} &= 2^{-t/8} \\ \log 10^{-6} &= \log 2^{-t/8} \\ -6 = & -\frac{t}{8} \cdot \log 2 \\ -\frac{t}{8} &= \frac{-6}{\log 2} \\ t &\cong \frac{48}{0,3} \\ t &\cong 160 \end{aligned}$$

Portanto, será necessário aproximadamente 160 dias.

5. **[IME-2013]** Considere o decaimento radioativo do Na-24 como um processo cinético de 1^a ordem, conforme mostrado no gráfico abaixo.

Figura 5 – Decaimento Radioativo



Para este radioisótopo, determine:

a) a constante de decaimento, k; e

b) o tempo de meia vida, em horas.

Solução:

a) Como a curva de desintegração radioativa é exponencial, podemos usar a cinética de desintegração de primeira ordem:

$$N = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}\,.$$

Onde:

N é a quantidade de átomos não desintegrados = 12%

N_0 é a quantidade inicial de átomos radioativos = 100%

Usando as informações do gráfico, temos:

$$\begin{aligned}
12 &= 100 \cdot \mathrm{e}^{-k(46)} \\
\mathrm{e}^{-46k} &= \frac{12}{100} \\
\mathrm{e}^{-46k} &= \frac{3}{25} \\
\mathrm{e}^{-46k} &= \frac{3}{5^2} \\
\ln \mathrm{e}^{-46k} &= \ln\left(\frac{3}{5^2}\right) \\
-46k \ln \mathrm{e} &= \ln 3 - \ln 5^2 \\
-46k \cdot 1 &= \ln 3 - 2 \cdot \ln 5 \\
-46k &= 1,099 - 2 \cdot 1,609 \\
-46k &= -\,2,119 \\
k &= 0,046 \ \ \mathrm{h}^{-1} \\
k &= 4,6 \cdot 10^{-2} \ \ \mathrm{h}^{-1}
\end{aligned}$$

b) No tempo de meia-vida a quantidade de átomos cai pela metade, ou seja, $N = \dfrac{N_0}{2}$. Substituindo a informação anterior na relação $N = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$, encontramos então $\dfrac{N_0}{2} = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-kt}$, ou seja, $\dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{-kt}$.
Aplicando o operador logaritmos em ambos os membros da igualdade, temos:

$$\begin{aligned}
\ln \frac{1}{2} &= \ln \mathrm{e}^{-kt_{1/2}} \\
\ln 2^{-1} &= -\,kt_{1/2} \\
-\ln 2 &= -\,kt_{1/2} \\
-0,693 &= -\,kt_{1/2} \\
t_{1/2} &= \frac{0,693}{k} \\
t_{1/2} &\cong \frac{0,693}{0,046} \\
t_{1/2} &\cong 15 \ \ \mathrm{h}
\end{aligned}$$

Portanto, o tempo de meia vida do elemento é de 15 horas.

4.2 Matemática Financeira

Desde os primórdios da humanidade, a matemática financeira está presente. Segundo Eves (2004, p. 60):

> Mesmo as tábuas mais antigas mostram um alto grau de habilidade computacional e deixa claro que o sistema sexagesimal posicional já estava de longa data estabelecido. Há muitos textos desses primeiros tempos que tratam da distribuição de produtos agrícolas e de cálculos aritméticos baseados nessas transações. As tábuas mostram que os sumérios antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de vendas e endossos. Há tábuas que são documentos de empresas comerciais e outras que lidam com sistemas de pesos e medidas.

De acordo com Eves (2004), nesse tempo não existia dinheiro, o que se fazia eram trocas de mercadorias, alimentos e qualquer tipo de bem. Mas, as pequenas cidades eram praticamente isoladas e, portanto, essa prática era possível e viável. Contudo, com o passar do tempo, essa forma de comercializar não mais supriu as necessidades, pois a comunicação entre outros vilarejos começou a acontecer e a necessidade de uma forma de “troca” mais rápida e simples se fez necessária. Na Grécia antiga, a primeira unidade de escambo foi o boi, nas ilhas do Pacífico as mercadorias eram estimadas em colares de pérolas, enfim, métodos muito difíceis de serem aplicados.

Depois disso, de acordo com Eves (2004), o metal passou a se sobressair nas trocas de mercadorias. E esse método simplificou e melhorou o sistema de comércio dessa época, pois assim ficava mais fácil estimar um valor justo para cada mercadoria. Ouro, prata e bronze passaram a fazer parte desse cenário. Com o passar do tempo, a Matemática progrediu muito e o homem começou a utilizar métodos mais abstratos, padronizados e rigorosos para medição e contagem. Isso também colaborou para o desenvolvimento das finanças e comércio.

Segundo Eves (2004), no século XVII os bancos se firmaram com a criação do papel moeda. A partir de então, o mercado financeiro foi se desenvolvendo e chegou ao que é atualmente. Nesse contexto, a utilização da Matemática Financeira tornou-se imprescindível. As ferramentas matemáticas para cálculos e análises de juros simples e compostos, renda, demanda entre outros se faz fundamental na vida em sociedade.

Especificamente, os juros compostos utilizam-se, em seu cálculo e análise de conhecimentos matemáticos como função exponencial e logarítmica. Vale ressaltar que juros compostos são aqueles em que taxa de juros incide sobre o capital inicial acrescidos de juros acumulados até o período anterior.

Sendo M, o montante (capital + juros), i a taxa de juro, C_0 o capital aplicado e n o tempo decorrido, a expressão matemática que define juros compostos é: $M = C_0 \cdot (1+i)^n$.

As questões deste tópico abordam aplicações do conceito e propriedades dos logaritmos na Matemática Financeira. Para calcular o tempo nos juros compostos, essas propriedades são insubstituíveis. A funcionalidade dos logaritmos no contexto das Finanças é frequente e pode ser usada pelo professor para mostrar que para resolver tais problemas devemos lançar mão dos logaritmos, desenvolvendo o raciocínio lógico-dedutivo e tornando o aprendizado mais atual e estimulante para os alunos.

1. **[Concurso-TJ-PR-2014]** Um investimento rende juros compostos a uma taxa de juros de 6% ao ano. Depois de quantos anos, um valor inicial de R\$ $1.000,00$ chegará ao valor de R\$ $10.000,00$ com esse investimento? (Use $\log_{10} 1,06 = 0,0254$)

   (A) 20 anos

   (B) 30 anos

   (C) 40 anos

   (D) 50 anos

   Solução:

   Utilizando os dados do problema na conhecida fórmula de juros compostos, $M = C_0(1+i)^t$, obtemos $10000 = 1000(1+0,06)^t$.

   Desenvolvendo a equação acima:

$$\begin{aligned} 10 &= 1,06^t \\ \log 1,06^t &= \log 10 \\ t \cdot \log 1,06 &= \log 10 \\ t &= \frac{\log 10}{\log 1,06} \\ t &\cong 40 \end{aligned}$$

   Portanto, o montante alcançará o valor de R\$ $10.000,00$ após 40 anos.

2. **[PUC-SP]** Um capital C, aplicado a juros compostos a uma taxa i por período, produz, ao final de n períodos, o montante M, dado por $M = C.(1+i)^n$. Nessas condições, utilizando-se $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, o capital de 2000 reais, aplicado a juro composto à taxa de 20% ao ano, produzirá o montante de 5000 reais, ao final de um período de:

   (A) 2 anos

   (B) 3,5 anos

   (C) 4 anos

   (D) 8,5 anos

(E) 5 anos

Solução:

Utilizando os dados do problema, obtemos $5000 = 2000(1 + 0,2)^t$.

Desenvolvendo a equação acima:

$$
\begin{aligned}
5 &= 2 \cdot 1,2^t \\
\frac{5}{2} &= 1,2^t \\
\log\left(\frac{5}{2}\right) &= \log 1,2^t \\
\log 5 - \log 2 &= t \cdot \log 1,2 \\
t &= \frac{\log 5 - \log 2}{\log 1,2} \\
t &= \frac{\log \frac{10}{2} - \log 2}{\log \frac{12}{10}} \\
t &= \frac{\log \frac{10}{2} - \log 2}{\log \frac{2^2 \cdot 3}{10}} \\
t &= \frac{(\log 10 - \log 2) - \log 2}{(2 \cdot \log 2 + \log 3) - \log 10} \\
t &\cong \frac{(1 - 0,3) - 0,3}{(2(0,3) + 0,48) - 1} \\
t &\cong \frac{0,4}{0,08} \\
t &\cong 5
\end{aligned}
$$

Portanto, o montante de R\$ $5.000,00$ será alcançado após 5 anos.

3. **[Unicamp-SP]** Um capital de 12.000 reais é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, encontre:

   a) O capital acumulado após 2 anos.

   b) O número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial. (Se necessário, use $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$.)

Solução:

a) O capital acumulado após 2 anos será igual a $12000 \cdot (1 + 0,08)^2 = 13996,80$ reais.

b) A condição dada é que $M > 12000 \cdot 2$. Isso nos leva a $12000 \cdot (1 + 0,08)^n > 12000 \cdot 2$. Resolvendo a inequação:

$$\begin{aligned}
(1,08)^n &> 2 \\
\log(1,08)^n &> \log 2 \\
n \cdot \log\left(\frac{108}{100}\right) &> \log 2 \\
n\left(\log 108 - \log 100\right) &> \log 2 \\
n\left(\log(2^2 \cdot 3^3) - \log 10^2\right) &> \log 2 \\
n\left(2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 - 2 \cdot \log 10\right) &> \log 2 \\
n\left(2 \cdot (0,301) + 3 \cdot (0,477) - 2 \cdot 1\right) &> 0,301 \\
n\,(0,033) &> 0,301 \\
n &> 9,12
\end{aligned}$$

Portanto, o número mínimo de anos é igual a 10.

4. **[Fundação Carlos Chagas - Escriturário BB - 2011]** Saulo aplicou 45000,00 reais em um fundo de investimento que rende 20% ao ano. Seu objetivo é usar o montante dessa aplicação para comprar uma casa que, na data da aplicação, custava 135000,00 reais e se valoriza à taxa anual de 8% . Nessas condições, a partir da data da aplicação, quantos anos serão decorridos até que Saulo consiga comprar tal casa?

(A) 15

(B) 12

(C) 10

(D) 9

(E) 6

Solução:

$$\begin{aligned}
45000 \cdot (1,2)^n &= 135000 \cdot (1,08)^n \\
(1,2/1,08)^n &= \frac{135000}{45000} \\
(10/9)^n &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log(10/9)^n &= \log 3 \\
n \cdot (\log 10 - \log 9) &= \log 3 \\
n \cdot (\log 10 - 2 \cdot \log 3) &= \log 3 \\
n \cdot (1 - 2(0,48)) &\cong 0,48 \\
n \cdot (0,04) &\cong 0,48 \\
n &\cong 12
\end{aligned}$$

Serão decorridos 12 anos.

5. **[UERJ-2003]** Jorge quer vender seu carro por 40000,00 reais. Pedro, para comprá-lo, dispõe de 5000,00 reais, e aplica esse valor em um investimento que rende juros compostos a uma taxa de 28% a cada 2 anos. Considere que a desvalorização do carro de Jorge seja de 19% a cada 2 anos, calculada sobre o valor do carro no período de dois anos imediatamente anterior. Calcule o tempo mínimo em que Pedro terá dinheiro suficiente para comprar o carro de Jorge. Utilize, em seus cálculos, $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$.

   Solução:

   Dinheiro aplicado: $M_d = 5000 \cdot (1,28)^{t/2}$.

   Desvalorização do carro: $M_d = 40000 \cdot (0,81)^{t/2}$.

   Como queremos encontrar o tempo em que os montantes serão iguais, devemos igualar os montantes. Com isso, teremos:

$$
\begin{aligned}
5000 \cdot (1,28)^{t/2} &= 40000 \cdot (0,81)^{t/2} \\
\left(\frac{1,28}{0,81}\right)^{t/2} &= \frac{40000}{5000} \\
\left(\frac{128}{81}\right)^{t/2} &= 8 \\
\log\left(\frac{128}{81}\right)^{t/2} &= \log 8 \\
\log\left(\frac{2^7}{3^4}\right)^{t/2} &= \log 2^3 \\
\frac{t}{2} \cdot \left(\log 2^7 - \log 3^4\right) &= \log 2^3 \\
\frac{t}{2} \cdot (7 \cdot \log 2 - 4 \cdot \log 3) &= 3 \cdot \log 2 \\
\frac{t}{2} \cdot (7(0,30) - 4(0,48)) &\cong 3(0,30) \\
\frac{t}{2} \cdot (2,10 - 1,92) &\cong 3(0,30) \\
\frac{t}{2} \cdot (0,18) &\cong 0,90 \\
\frac{t}{2} &\cong \frac{0,90}{0,18} \\
t &\cong 2 \cdot \frac{0,90}{0,18} \\
t &\cong 10
\end{aligned}
$$

   O tempo mínimo em que Pedro terá dinheiro suficiente para comprar o carro é igual a 10 anos.

4.3 Índice de PH

Em meados do século XIX, muitos conceitos físico-químicos foram descobertos. O conceito de íon foi um deles, introduzido por Michael Faraday (1791-1867) em 1833. Depois disso, foram estabelecidas outras descobertas nessa área, inclusive, Svante Arrhenius (1859-1927) de acordo com Gama e Afonso (2007, p. 1):

> Supôs que algumas das moléculas de um eletrólito eram dissociadas em seus íons que, por serem partículas carregadas, eram passíveis de movimento independente sob ação de um campo elétrico. [...] Além disso também determinou a constante de dissociação dos ácidos e das bases, relacionando a magnitude dessa dissociação com a força do ácido ou da base. Segundo Arrhenius, ácidos são substâncias que produzem, em solução aquosa, íons hidrogênio; analogamente bases produzem íons hidroxila em solução.

De acordo com Gama e Afonso (2007), Soren P.T. Sorensen (1868-1939), bioquímico dinamarquês, expressou a acidez utilizando o logaritmo negativo de H^+, que é a concentração de íons de hidrogênio, logo pH = $-$ log $[H^+]$. E, para expressar a alcalinidade (base), utilizou o logaritmo negativo de OH^-, que é a concentração de íons hidroxila, logo pOH = $-$ log $[OH^-]$. Depois disso, muitos químicos propuseram escalas alternativas de pH e pOH e esses índices foram aplicados em situações diversas, especialmente na indústria.

Profissionais de diversas áreas, como a Biologia, conforme declarou Gama e Afonso (2007), começaram a utilizar o conceito de pH amplamente. Já os químicos mais críticos demoraram a aceitar e desenvolver esse novo conceito.

Para determinação do pH e pOH, de acordo com Gama e Afonso (2007), foram estudados métodos calorimétricos e eletrométricos, sendo aquele o mais utilizado inicialmente. Atualmente, os eletrométricos são utilizados quase sempre devido à praticidade e aos avanços na área elétrica. O primeiro indicador de pH e pOH comercializado foi o tornassol. Outros métodos foram surgindo, inclusive, papéis indicadores de pH e pOH, com soluções indicadoras, que modificam de cor na presença de um ácido ou de uma base (cores diferentes para cada tipo).

Consoante Gama e Afonso (2007), Arnold O. Bekman (1900-2004) desenvolveu o primeiro aparelho medidor de acidez em 1934. Atualmente, o peagâmetro – aparelho medidor de índice de pH – é bem sofisticado e desenvolvido.

Como explicita Gama e Afonso (2007), os ácidos produzem por ionização H^+ e são associados ao sabor azedo (limão, vinagre, etc). E as bases já produzem OH^-, que é a concentração de íons de hidroxila, e a elas se associa o sabor adstringente (banana verde).

Medir o índice de pH e pOH são de extrema importância, segundo Gama e Afonso (2007), esse fato foi reconhecido desde muito tempo, inclusive pelos químicos que inicialmente não deram tanta importância a eles. Na agricultura, por exemplo, é necessário medir a acidez do solo, assim como em piscinas e aquários, pois a vida de muitas espécies depende da acidez da água estar no nível correto.

Como definido anteriormente de acordo com Gama e Afonso (2007), pH = $-$ log [H^+], já pOH = $-$ log [OH^-]. Dessa forma, pH se define como potência hidrogeniônica e pOH potência hidroxiliônica.

Segundo Feltre (2004), sendo Kw o produto iônico da água é definido como Kw = [H^+].[OH^-] = 10^{-14}. Então, aplicando logaritmo temos:

$$\begin{aligned}
[H^+].[OH^-] &= 10^{-14} \\
\log[H^+].[OH^-] &= \log 10^{-14} \\
\log[H^+] + \log[OH^-] &= -14 \\
-\log[H^+] - \log[OH^-] &= 14 \\
pH + pOH &= 14
\end{aligned}$$

Portanto, de acordo com Feltre (2004), vê-se que quando pH = pOH, temos que pH = pOH = 7 e essas soluções são neutras, ou seja, nem ácidas nem básicas, como a água pura. Com isso, pode-se encontrar o valor de pH sabendo pOH e vice-versa. Observando que o pH de uma substância é 2, logo sabe-se que o pOH da mesma substância é 12, pois pH + pOH = 14 como visto acima. De acordo com o tipo de solução, os valores de pH e pOH são os seguintes:

- Em água pura (substância neutra): pH = pOH = 7;
- Em soluções ácidas: pH < 7 e pOH > 7;
- Em soluções básicas: pH > 7 e pOH < 7.

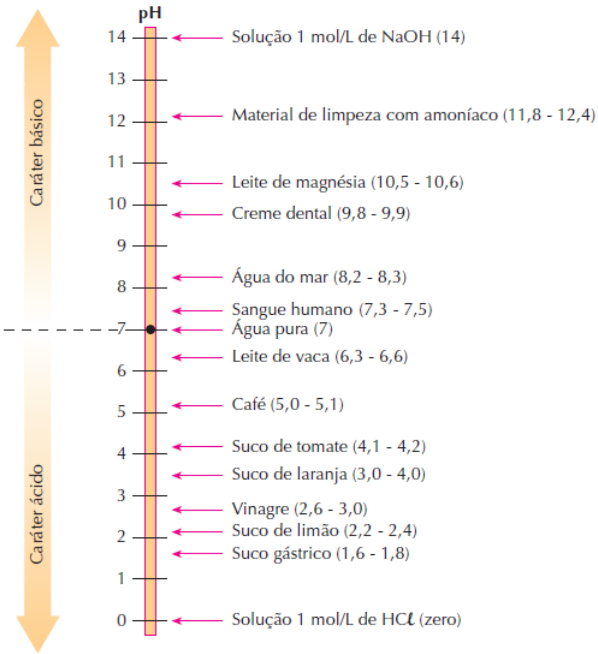
Para compreender esses valores, como afirma Feltre (2004), observamos o produto iônico da água, Kw = [H^+].[OH^-] = 10^{-14} e vemos que em água pura (substância neutra) a ionização resulta em [H^+] = [OH^-] = 10^{-7}. Como pH é o oposto do logaritmo de H^+ e pOH é o oposto do logaritmo de OH^-, então, daí vemos a conclusão de que em soluções neutras pH = pOH = 7.

Segundo Feltre (2004), em soluções aquosas ácidas, ou seja, juntando água a um ácido, os H^+ do ácido, que são muito numerosos, vão se confundir com os poucos H^+ da água aumentando a concentração de H^+ e diminuindo a de OH^-. Então, teremos que como [H^+] aumenta, logo [H^+] > 10^{-7}, o que implica pH < 7 pela definição de pH ser o oposto do logaritmo de H^+. E como [OH^-] diminui, [OH^-] < 10^{-7}, o que implica pOH > 7 pela definição de pOH ser o oposto do logaritmo de OH^-.

De acordo com Feltre (2004), em soluções aquosas básicas, ou seja, juntando água a uma base, vemos analogamente que a concentração de H^+ diminui e a de OH^- aumenta, pois serão mais numerosos. Logo, $[OH^-] > 10^{-7}$ e $[H^+] < 10^{-7}$ e por causa das definições de pH e pOH serem os opostos dos logaritmos correspondentes às concentrações de H^+ e OH^-, temos como consequência pH > 7 e pOH < 7.

Na figura 6 é mostrado o pH de alguns produtos de uso diário, entre outras soluções incluídas como referência.

Figura 6 – Escala de acidez.



Fonte: Feltre (2004, p. 230)

Os exercícios de aplicação do conceito de pH a seguir, também utilizam o conceito e propriedades dos logaritmos, já que pH é uma escala logarítmica. Esses exercícios são aplicações interdisciplinares da Matemática com a Química e podem ser utilizados nas aulas, pois mostrarão ao aluno em quais contextos os logaritmos estão inseridos e que são um modelo para uma situação real da Química.

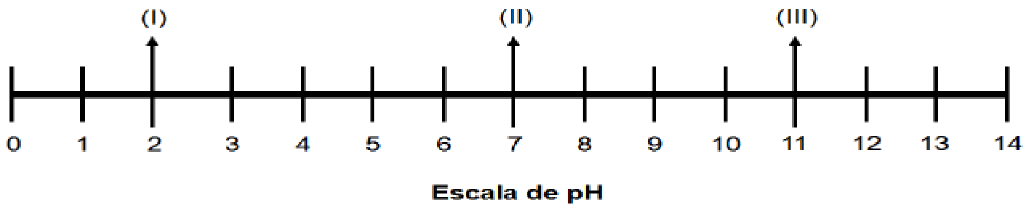
1. **[UFES-2016, adaptada]** O termo pH (potencial hidrogeniônico) foi criado em 1909 pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen e tem como objetivo simplificar a indicação da acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa. A indicação desse caráter pode ser ainda mais bem visualizada a partir de uma escala de pH, como destacado a seguir:

   Considerando as soluções (I), (II) e (III), indicadas na escala de pH acima, determine

   A) a concentração de íons hidrogênio presentes na solução (I).

   B) a concentração de íons hidroxila presentes na solução (III).

Figura 7 – Escala de pH.



Solução:

A) $pH = -\log[H^+] \iff 2 = -\log[H^+] \iff H^+ = 10^{-2}$.

B) $pH + pOH = 14 \Leftrightarrow pOH = 3 \Leftrightarrow pOH = -\log[OH^-] \Leftrightarrow 3 = -\log[OH^-] \Leftrightarrow OH^- = 10^{-3}$.

2. **[FEI-SP]** Qual o pH de uma solução cuja concentração hidrogeniônica é 10^{-8}? A solução é ácida, neutra ou básica?

Solução:

Por definição, pH = $-\log\ [H^+]$. Foi dado que: $[H^+]$ = 10^{-8}. Então: pH = $-\log\ 10^{-8}$ $\Leftrightarrow$ pH = 8. Sendo pH > 7, podemos afirmar que a solução é básica.

3. **[PUC-MG]** A análise de uma determinada amostra de refrigerante detectou pH = 3. A concentração de íons H^+ nesse refrigerante é, em mol/L:

(A) 10^{-3}

(B) 10^{-6}

(C) 10^{-7}

(D) 10^{-8}

(E) 10^{-11}

Solução:

Por definição: pH = $-\log\ [H^+]$. Foi dado que pH = 3. Isso nos leva a $-\log\ [H^+] = 3$ $\Leftrightarrow \log\ [H^+] = -3 \Leftrightarrow [H^+] = 10^{-3}$.

4. **[PUC-RIO 2008]** O estômago produz suco gástrico constituído de ácido clorídrico, muco, enzimas e sais. O valor de pH no interior do estômago deriva, principalmente, do ácido clorídrico presente. Sendo o ácido clorídrico um ácido forte, a sua ionização é total em meio aquoso,e a concentração de H^+ em quantidade de matéria nesse meio será a mesma do ácido de origem. Assim, uma solução aquosa de ácido clorídrico em concentração 0,01 mol/L^{-1} terá pH igual a:

(A) 2

(B) 4

(C) 5

(D) 7

(E) 9

Solução:

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log\,[H^+] \\ \text{pH} &= -\log\;0,01 \\ \text{pH} &= -\log 10^{-2} \\ \text{pH} &= 2 \end{aligned}$$

5. **[UDESC 2009]** "Chuva ácida" é um termo que se refere à precipitação, a partir da atmosfera, de chuva com quantidades de ácidos nítricos e sulfúrico maiores que o normal. Os precursores da chuva ácida vem tanto de fontes naturais, tais como vulcões e vegetação em decomposição, quanto de processos industriais, principalmente emissões de dióxido de enxofre e óxidos de nitrogênio resultantes da queima de combustíveis fósseis. O pH da água da chuva considerado normal é de 5,5 (devido à presença de ácido carbônico proveniente da solubilização de dióxido de carbono). Um químico monitorando uma região altamente industrializada observou que o pH da água da chuva era igual a 4,5. Considerando que a acidez está relacionada com a concentração de H_3O^+, é correto afirmar que a água com pH 4,5 era:

(A) duas vezes mais básica que o normal.

(B) duas vezes mais ácida que o normal.

(C) dez vezes mais básica que o normal.

(D) dez vezes mais ácida que o normal.

(E) cem vezes mais ácida que o normal.

Solução:

Para a água considerada normal, temos:

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log\,[H^+] = 5,5 \\ \log\,[H^+] &= -5,5 \\ [H^+] &= 10^{-5,5} \end{aligned}$$

Para a água da região industrializada, temos:

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log\,[H^+] = 4,5 \\ \log\,[H^+] &= -4,5 \\ [H^+] &= 10^{-4,5} \end{aligned}$$

Comparando estas duas amostras, temos a relação $\frac{10^{-4,5}}{10^{-5,5}} = 10$.

Portanto, é correto afirmar que a água com pH 4,5 é dez vezes mais ácida que o normal.

6. **[(FELTRE, 2004, p. 233), exercício 29]** Qual é a concentração hidrogeniônica de uma solução de pH igual a 12,4? (Dado: $\log 3,98 = 0,6$)

   Solução:

   Devemos observar que $\log 3,98 = 0,6 \Leftrightarrow 10^{0,6} = 3,98$.

$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log\,[H^+] = 12,4 \\ \log\,[H^+] &= -12,4 \\ [H^+] &= 10^{-12,4} = 10^{0,6} \cdot 10^{-13} \\ [H^+] &= 3,98 \cdot 10^{-13} \end{aligned}$$

   Logo, $[H^+] = 3,98 \cdot 10^{-13}$ mol/L.

4.4 Acústica

Segundo Valiante (2004), Alexander Graham Bell (1847-1922) foi o inventor do telefone. Charles Bourseul (1829-1912) e Philip Reis (1834-1874) contribuíram com descobertas no intuito de transmissão de voz, mas foi Bell quem primeiro conseguiu transmitir uma mensagem telefônica. Bell tentou inicialmente vender sua patente sem sucesso, porém, depois disso, mesmo com ofertas tentadoras, criou sua própria empresa, a BELL TELEPHONE CO. A unidade para medir o nível sonoro foi designado de *bel* pelos engenheiros desta empresa, em homenagem a Alexander G. Bell.

De acordo com Valiante (2004), o som, que é uma onda mecânica (precisa de meio material para se propagar), tem como características a altura, a intensidade e o timbre, sendo a primeira definida pela frequência de onda (som agudo – alta frequência; som grave – baixa frequência); a segunda, pela amplitude da onda (som forte – amplitude grande; som fraco – amplitude pequena) e a terceira, pela fonte sonora emissora.

Segundo D'Alama (2010), para medir a intensidade do som, os engenheiros da empresa de Bell depararam-se com números complexos de trabalhar e compreender. Para simplificar e tornar mais compreensível, esses cientistas utilizaram os logaritmos, pois pelas suas propriedades, uma escala construída usando logaritmos, simplifica a escrita e facilita os cálculos.

De acordo com Valiante (2004), a intensidade mínima percebida pelo ouvido humano, chamada de o limiar da audibilidade I_0 = 10^{-12} W/m^2 em decibel (submúltiplo do bel, corresponde a 1/10 do bel) é igual a zero. E a intensidade máxima, que é chamada limiar da dor é 1 W[1]/m^2, em decibel é igual a 120.

O nível sonoro N é definido então como:

$$N = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Valiante (2004, p. 7) justifica o uso do limiar da audibilidade como referência:

> A solução é adotar e padronizar uma referência comum para todos. Se adotamos como referencia o volume produzido naturalmente por um violão, veremos que no show de música pop o som estará alto, enquanto no show de heavy metal o som estará... estará ensurdecedor, de fato. Uma dessas referencias adotadas na prática, é o valor menos intenso que o ouvido humano é capaz de distinguir, o chamado limiar de audibilidade. Se medirmos o quanto o som está "batendo", ou melhor, quanto de pressão sonora chega aos nossos ouvidos, uma relação matemática (logarítmica) entre esses valores nos fornecem a intensidade do som em dB SPL, que é a abreviação de “Soundn Pressure Level” – nível de pressão sonora.

O bel, portanto, mede o nível sonoro, mas não é uma unidade de medida. Somente relaciona valores de uma mesma grandeza.

Na tabela 2, encontra-se valores em dB (decibéis) de algumas situações cotidianas.

Tabela 2 – Valores em Decibéis no cotidiano

Som	***Decibéis (dB)***
voz	50 - 60
escritórios	60 - 65
ruas	70 - 80
aspiradores de pó	90
discoteca	100
conjunto de rock	110
motocicleta	120
decolagem de avião	150

Fonte: D’Alama (2010, p. 1)

Os problemas desta seção são interdisciplinares com a Física. Constituem-se de um modelo matemático para medir o nível sonoro em situações diversas. O nível sonoro é uma escala logarítmica e, logo, para solucionar esses problemas será necessário utilizar os logaritmos e suas propriedades. Usar essas situações-problema nas aulas de Matemática mostrará ao aluno que os logaritmos são aplicados num contexto real de outra Ciência.

[1] W = watts, é a unidade física para potencia.

1. **[FUVEST 2016]** O nível de intensidade sonora β, em decibéis (dB), é definido pela expressão $\beta = 10 \cdot \log_{10}(I/I_0)$, na qual I é igual a intensidade do som em W/m^2 e $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ é um valor de referência. Os valores de nível de intensidade sonora $\beta = 0$ e $\beta = 120$ dB correspondem, respectivamente, aos limiares de audição e de dor para o ser humano. Como exposições prolongadas a níveis de intensidade sonora elevados podem acarretar danos auditivos, há uma norma regulamentadora (NR-15) do Ministério do Trabalho e Emprego do Brasil, que estabelece o tempo máximo de 8 horas para a exposição ininterrupta a sons de 85 dB e especifica que, a cada acréscimo de 5 dB no nível de intensidade sonora, deve-se dividir por dois o tempo máximo de exposição. A partir dessas informações, determine:

   a) a intensidade sonora I_D correspondente ao limiar da dor para o ser humano;

   b) o valor máximo do nível de intensidade sonora β, em dB, a que um trabalhador pode permanecer exposto por 4 horas seguidas;

   Solução:

a) Segundo o enunciado, ao limiar de dor corresponde o valor de nível de intensidade sonora $\beta = 120$ dB. Utilizando a expressão e os valores dados para β e I_0, obtém-se:

$$\begin{aligned} 120 &= 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_D}{10^{-12}}\right) \\ 12 &= \log_{10}\left(\frac{I_D}{10^{-12}}\right) \\ I_D &= 10^{12} \cdot 10^{-12} \\ I_D &= 1\ W/m^2 \end{aligned}$$

b) O tempo de 4 horas corresponde à metade do tempo máximo para exposição ininterrupta de sons de 85 dB. Assim, segundo o enunciado, o nível da intensidade sonora associado ao tempo de 4 horas é de 5 dB maior do que o índice de 85 dB. Logo, $\beta = 90$ dB.

2. **[UEPA 2007]** Os carnavais fora de época conseguem reunir uma grande quantidade de pessoas que se divertem ao som dos famosos Trios Elétricos. Os frequentadores desses eventos ficam submetidos a uma excessiva exposição sonora, que podem causar dores e lesões auditivas. A expressão utilizada para medir o Nível de Intensidade Sonora (NIS), em decibel, é dada por:

$$NIS = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

   onde I é intensidade de energia qualquer e I_0 é a intensidade de energia do limiar de audição. A nocividade auditiva começa a partir de 80 dB. Se num desses eventos descritos acima a intensidade de energia for quadruplicada, o Nível de Intensidade Sonora será: (Dado $\log_{10} 4 = 0,6$)

(A) oito vezes maior

(B) dezesseis vezes maior

(C) aumentado em 8 dB

(D) aumentado em 6 dB

(E) aumentado em 16 dB

Solução:

$$\begin{aligned} NIS_1 &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 10 \left(\log\ I_1 - \log\ I_0\right) \\ NIS_2 &= 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_2}{I_0}\right) = 10 \left(\log\ I_2 - \log\ I_0\right) \end{aligned}$$

Como $I_2 = 4 \cdot I_1$, temos:

$$\begin{aligned} NIS_2 &= 10 \cdot (\log 4\, I_1 - \log\ I_0) \\ NIS_2 &= 10 \cdot (\log 4 + \log\ I_1 - \log\ I_0) \\ NIS_2 &= 10 \cdot \log\ 4 + 10 \cdot (\log\ I_1 - \log\ I_0) \\ NIS_2 &= 10(0,6) + NIS_1 \\ NIS_2 &= 6 + NIS_1 \end{aligned}$$

3. **[UFC-CE]** Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I, em watts por metro quadrado. Sejam I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão I_1/I_2 é igual a:

(A) 1/10

(B) 1

(C) 10

(D) 100

(E) 1000

Solução: Substituindo $I_1 = 80$ na equação logarítmica dadas, temos:

$$\begin{aligned} 80 &= 120 + 10 \log_{10} I_1 \\ -40 &= 10 \log_{10} I_1 \\ -4 &= \log_{10} I_1 \\ I_1 &= 10^{-4} \end{aligned}$$

E para $I_2 = 60$, teremos:

$$\begin{aligned} 60 &= 120 + 10\log_{10} I_2 \\ -60 &= 10\log_{10} I_2 \\ -6 &= \log_{10} I_2 \\ I_2 &= 10^{-6} \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{I_1}{I_2} == \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^2 = 100.$

4. **[UERJ]** Seja NS o nível sonoro de um som, medido em decibéis. Esse nível sonoro está relacionado com a intensidade do som, I, pela fórmula abaixo, na qual a intensidade padrão, I_0, é igual a 10^{-12} W/m^2.

$$NS = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Observe o quadro a seguir. Nele, os valores de I foram aferidos a distâncias idênticas das respectivas fontes de som.

Fonte de Som	***I(W/m^2)***
Turbina	$1,0 \times 10^2$
Amplificador de som	$1,0$
Triturador de lixo	$1,0 \times 10^{-4}$
TV	$1,0 \times 10^{-5}$

Sabendo que há riscos de danos ao ouvido médio a partir de 90 dB, quais as fontes da tabela cuja intensidade de emissão de sons está na faixa de risco?

Solução:

No caso da Turbina, temos:

$$\begin{aligned} NS &= 10 \cdot \log\left(\frac{10^2}{10^{-12}}\right) \\ NS &= 10 \cdot \log 10^{14} \\ NS &= 10 \cdot 14 \\ NS &= 140 \text{ dB} \end{aligned}$$

No caso do Amplificador de som:

$$\begin{aligned} NS &= 10 \cdot \log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) \\ NS &= 10 \cdot \log 10^{12} \\ NS &= 10 \cdot 12 \\ NS &= 120 \text{ dB} \end{aligned}$$

No caso do Triturador de lixo, temos:

$$\begin{aligned} NS &= 10 \cdot \log\left(\frac{10^{-4}}{10^{-12}}\right) \\ NS &= 10 \cdot \log 10^{8} \\ NS &= 10 \cdot 8 \\ NS &= 80 \text{ dB} \end{aligned}$$

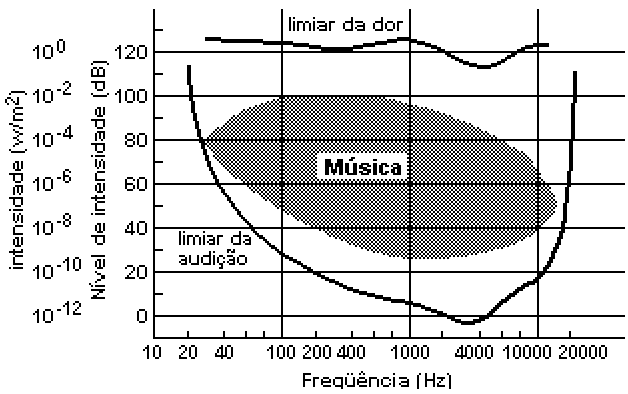
No caso da TV, temos:

$$\begin{aligned} NS &= 10 \cdot \log\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) \\ NS &= 10 \cdot \log 10^{7} \\ NS &= 10 \cdot 7 \\ NS &= 70 \text{ dB} \end{aligned}$$

Portanto, estão na faixa de risco a turbina e o amplificador de som.

5. **[Unesp-2001, adaptada]** O gráfico da figura 8 indica, no eixo das ordenadas, a intensidade de uma fonte sonora, I, em watts por metro quadrado (W/m^2), ao lado do correspondente nível de intensidade sonora, β em decibéis (dB), percebido, em média, pelo ser humano. No eixo das abscissas, em escala logarítmica, estão representadas as frequências do som emitido. A linha superior indica o limite da dor – acima dessa linha, o som causa dor e pode provocar danos ao sistema auditivo das pessoas. A linha inferior mostra o limiar da audição – abaixo dessa linha, a maioria das pessoas não consegue ouvir o som emitido.

Figura 8 – Intensidade de uma onda sonora



A relação entre a intensidade sonora I, em W/m^2, e o nível de intensidade β, em dB, é $\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$. Qual a intensidade de um som, em W/m^2, num lugar onde o seu nível de intensidade é 50 dB? Consultando o gráfico você confirma o resultado que obteve?

Solução:

A partir da expressão fornecida, tem-se para $\beta = 50$:

$$\begin{aligned} 50 &= 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \\ 5 &= \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \\ 10^5 &= \frac{I}{10^{-12}} \\ I &= 10^5 \cdot 10^{-12} \\ I &= 10^{-7} \ \ W/m^2 \end{aligned}$$

Consultando o gráfico vemos que o valor corresponde ao encontrado.

6. **[Cesgranrio-RJ]** O nível de intensidade sonora (N) é expresso em decibéis (dB) por: $N = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$
onde: I = intensidade sonora fornecida pela caixa de som; I_0 = intensidade padrão, correspondente ao limiar da audição (para o qual $N = 0$). Para o nível de intensidade $N = 120$ dB, a intensidade sonora, fornecida pela caixa de som, deverá ser de:

   (A) $10^{13} \cdot I_0$

   (B) $10^{12} \cdot I_0$

   (C) $1200 \cdot I_0$

   (D) $120 \cdot I_0$

   (E) $12 \cdot I_0$

   Solução:

$$\begin{aligned} 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) &= 120 \\ \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) &= 12 \\ \frac{I}{I_0} &= 10^{12} \\ I &= 10^{12} \cdot I_0 \end{aligned}$$

Logo, a alternativa correta é a letra B.

4.5 Escala Richter

Os terremotos causam grande destruição nos locais em que ocorrem. Hoje, sabe-se que são provocados pelo movimento das placas tectônicas, que constituem a camada externa de nossa crosta terrestre. Surgiu a necessidade de avaliar estragos feitos por esses abalos sísmicos e diante disso, segundo Dante (2000), Charles Francis Richter, americano e Beno Gutenberg, alemão, desenvolveram a tão conhecida Escala Richter que, em 1935, foi utilizada pela primeira vez.

Essa escala foi construída a partir de logaritmos de base dez e suas variações se dão por potências de base dez. Por exemplo, um terremoto de magnitude 4 é 100 vezes maior que um de magnitude 2. Segundo Dante (2000), através da fórmula $I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$, na qual E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kwh, cacula-se a intensidade I de um terremoto.

De acordo com Santos, Gentil e Greco (2001), Richter utilizou também a seguinte fórmula para medir a força de um sismo:

$$M = \log A + 3 \cdot \log(8\Delta t) - 2,92$$

Onde M representa a magnitude do terremoto, A representa a magnitude do terremoto medida em um sismógrafo (aparelho que mostra uma representação gráfica dos movimentos do solo) e Δt é o intervalo de tempo em segundos.

A tabela 3 contém os valores de magnitudes de sismos e seus respectivos efeitos.

Tabela 3 – Terremotos e seus efeitos

Magnitude Richter	***Efeitos***
Menos que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
Entre 3,5 e 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
Entre 5,5 e 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
Entre 6,1 e 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
Entre 7,0 e 7,9	Grande terremoto, pode causar sérios danos numa grande faixa de área.
8,0 ou mais	Enorme terremoto, pode causar grandes danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Fonte: Santos, Gentil e Greco (2001, p. 109)

Como vimos no capítulo 3, contextualizar é vital na atualidade. Por isso, resolver os problemas seguintes é importante no aprendizado dos logaritmos, já que mostra um modelo real do cotidiano de muitos lugares onde tremores acontecem e que a mídia divulga com frequência.

1. **[PUC-MG]** As indicações R_1 e R_2 de dois terremotos, na escala Richter, estão relacionadas pela fórmula
$$R_1 - R_2 = \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$
em que E_1 e E_2 medem as respectivas energias, liberadas pelos terremotos em forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Nessas condições, se $R_1 = 8,5$ e $R_2 = 7,0$, é correto afirmar que a razão entre E_1 e E_2, nessa ordem, é igual a:

   (A) $0,5$

   (B) $1,5$

   (C) $10^{0,5}$

   (D) $10^{1,5}$

   Solução:
$$\begin{aligned} 8,5 - 7,0 &= \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \\ 1,5 &= \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \\ 10^{1,5} &= \frac{E_1}{E_2} \end{aligned}$$

2. **[Fuvest-SP]** A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que possui variação entre $I = 0$ até $I = 8,9$ para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula: $I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E_1}{E_0}\right)$ na qual E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kwh.

   (A) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

   (B) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

   Solução:

a) Substituindo $I = 8$ na expressão dada, temos:
$$\begin{aligned} 8 &= \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \\ \frac{24}{2} &= \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \\ 12 &= \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^{12} &= \frac{E_1}{7 \cdot 10^{-3}} \\ 10^{12} \cdot 7 \cdot 10^{-3} &= E_1 \\ E_1 &= 7 \cdot 10^9 \text{ kwh} \end{aligned}$$

b) Substituindo $I = 9$ na expressão dada, temos:

$$\begin{aligned} 9 &= \frac{2}{3} \log_{10}\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \\ \frac{27}{2} &= \log_{10}\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \\ 10^{27/2} &= \frac{E_2}{7 \cdot 10^{-3}} \\ 10^{27/2} \cdot 7 \cdot 10^{-3} &= E_2 \\ E_2 &= 7 \cdot 10^{21/2} \text{ kwh} \end{aligned}$$

Comparando as expressões, notamos que $\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{7 \cdot 10^{21/2}}{7 \cdot 10^9} = 10^{3/2} = 10\sqrt{10}$, ou seja $E_2 = E_1 \cdot 10\sqrt{10}$.

3. **[UFRN-2012]** No ano de 1986, o município de João Câmara – RN foi atingido por uma sequência de tremores sísmicos, todos com magnitude maior ou igual a $4,0$ na escala Richter. Tal escala segue a fórmula empírica, $M = \dfrac{2}{3} \log_{10}\left(\dfrac{E_1}{E_0}\right)$ em que M é a magnitude, E é a energia liberada em kwh e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$. Recentemente, em março de 2011, o Japão foi atingido por uma inundação provocada por um terremoto. A magnitude desse terremoto foi de $8,9$ na escala Richter. Considerando um terremoto de João Câmara com magnitude $4,0$, pode-se dizer que a energia liberada no terremoto do Japão foi:

(A) $10^{7,35}$ vezes maior do que a do terremoto de João Câmara.

(B) cerca de duas vezes maior do que a do terremoto e João Câmara.

(C) cerca de três vezes maior do que a do terremoto de João Câmara.

(D) $10^{13,35}$ vezes maior do que a do terremoto de João Câmara.

Solução:

A energia liberada pelo terremoto de João Câmara será obtida através da resolução da equação $4 = \dfrac{2}{3} \log_{10}\left(\dfrac{E_1}{E_0}\right)$:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{3}{2} &= \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \\ \frac{12}{2} &= \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 &= \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \\ 10^6 &= \frac{E_1}{E_0} \\ E_1 &= 10^6 \cdot E_0 \end{aligned}$$

E a energia liberada pelo terremoto do Japão será dada pela solução da equação $8,9 = \dfrac{2}{3}\log_{10}\left(\dfrac{E_2}{E_0}\right)$:

$$\begin{aligned} 8,9 \cdot \frac{3}{2} &= \log_{10}\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \\ 13,35 &= \log_{10}\left(\frac{E_2}{E_0}\right) \\ 10^{13,35} &= \frac{E_2}{E_0} \\ E_2 &= 10^{13,35} \cdot E_0 = 10^{7,35} \cdot \underbrace{10^6 \cdot E_0}_{E_1} \end{aligned}$$

Portanto, a energia liberada no terremoto do Japão é $10^{7,35}$ vezes maior do que a do terremoto de João Câmara.

4. **[UFAL-2011]** A fórmula para medir a intensidade de um dado terremoto na escala Richter é $R = \log_{10}\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, com I_0 sendo a intensidade de um abalo quase imperceptível e I a intensidade de um terremoto dada em termos de um múltiplo de 10. Se um sismógrafo detecta um terremoto com intensidade $I = 32000 \cdot I_0$, qual a intensidade do terremoto na escala Richter? Indique o valor mais próximo. Dado: use a aproximação $\log 2 \cong 0,30$.

   (A) 3,0

   (B) 3,5

   (C) 4,0

   (D) 4,5

   (D) 5,0

   Solução:

   A intensidade do terremoto na escala Richter será $R = \log\left(\dfrac{32000 \cdot I_0}{I_0}\right) = \log\ 32000 = \log\ 2^5 + \log\ 10^3 \cong 5 \cdot \log\ 2 + 3 \cdot \log\ 10 \cong 5(0,3) + 3(1) \cong 4,5$.

5. **[Fuvest-2010]** A magnitude de um terremoto na escala Richter é proporcional ao logaritmo, na base 10, da energia liberada pelo abalo sísmico. Analogamente, o pH de uma solução aquosa é dado pelo logaritmo, na base 10, do inverso da concentração de íons H^+. Considere a seguintes afirmações:

I. O uso do logaritmo nas escalas mencionadas justifica-se pelas variações exponenciais das grandezas envolvidas.

II. A concentração de íons H^+ de uma solução ácida com pH 4 é 10 mil vezes maior que a de uma solução alcalina com pH 8.

III. Um abalo sísmico de magnitude 6 na escala Richter libera duas vezes mais energia que outro, de magnitude 3.

Está correto o que se afirma em:

(A) I

(B) II

(C) III

(D) I e II

(D) I e III

Solução:

I. Correto.

Quando existe uma grande variação exponencial da grandeza estudada, é interessante trabalhar com escala logarítmica:

$$10 \longrightarrow 1 \;\; ; \;\; 100 \longrightarrow 2 \;\; ; \;\; 1000 \longrightarrow 3 \;\; ; \;\; 10000 \longrightarrow 4.$$

II. Correto.

Sabemos que pH $= -\log[H^+]$. Portanto, uma solução ácida de pH = 4 apresenta concentração de íons $H^+ = 10^{-4}$ mol/L.

Já uma solução alcalina de pH = 8 apresenta concentração de íons $H^+ = 10^{-8}$ mol/L. Comparando estes valores:
$\dfrac{[H^+]_{pH=4}}{[H^+]_{pH=8}} = \dfrac{10^{-4}}{10^{-8}} = 10^4$, ou seja, $[H^+]_{pH=4} = 10000 \cdot [H^+]_{pH=8}$.

III. Falso.

Sabemos que Magnitude $= k \cdot \log\ E$

Magnitude $= 6 \Longleftrightarrow E_i = 10^{6/k}$ Magnitude $= 3 \Longleftrightarrow E_{ii} = 10^{3/k}$

Os resultado anteriores, nos levam à relação $E_i = (E_{ii})^2$.

Portanto, um abalo sísmico de magnitude 6 libera o quadrado da energia que um abalo de magnitude 3.

Capítulo 5

Aplicação da proposta

Neste capítulo, descreve-se a aplicação da proposta deste trabalho dissertativo para professores por meio de um minicurso, bem como a análise dos dados obtidos através da aplicação de um questionário sugerido aos participantes.

5.1 Metodologia

A proposta foi aplicada à professores de Matemática do Ensino Médio do Colégio Estadual Chequer Jorge, localizado no município de Itaperuna, Rio de Janeiro, no ano de 2016, com duração aproximada de quatro horas.

Os professores foram convidados a participar de um minicurso, no qual o assunto logaritmos, que é proposta deste trabalho de conclusão de curso, seria abordado. O critério adotado foi o de se selecionar docentes que ministrassem aulas de Matemática no Ensino Médio, pois o conteúdo logaritmos é trabalhado nessa etapa. O grupo foi formado por oito docentes.

Inicialmente, discutiram-se as dificuldades apresentadas no ensino de logaritmos, a resistência muitas vezes apresentada pelo aluno em seu aprendizado e a importância de seu ensino nas escolas.

Em seguida, foi apresentada a proposta deste trabalho, constituída da parte histórica dos logaritmos e cinco de suas aplicações. Dez questões previamente selecionadas do trabalho foram resolvidas pelos participantes. As mesmas foram escolhidas mediante a forma de abordagem das aplicações do conceito de logaritmo e suas propriedades, levando em consideração a forma como são solucionadas. A saber: questões 1 e 4 da seção de Meia vida; 1 e 4 da seção de Matemática Financeira; 2 e 3 da seção sobre Índice de pH; 1 e 3 da seção de Acústica e, por fim, 1 e 4 da seção sobre Escala Richter. Todos consideraram as questões interessantes e comentaram a importância da interdisciplinaridade no ensino de Matemática.

Três professores expuseram que não aplicariam algumas dessas questões em suas aulas devido à dificuldade que os alunos poderiam apresentar. Dois outros disseram que os conceitos que envolviam conhecimentos em outras disciplinas deveriam ser desenvolvidos em sintonia com o professor da matéria na qual o logaritmo é aplicado. Por exemplo, aplicar conceitos como o do pH, sem ter sido ensinado na aula de Química, previamente ou durante o processo, seria complicado.

Por fim, os professores participantes responderam ao questionário, que está anexado (apêndice F) ao fim deste trabalho, colocando sua experiência e opinião sobre esta forma de abordagem interdisciplinar dos logaritmos.

5.2 Análise das respostas objetivas e discursivas

Para a análise a seguir foram utilizados os códigos A, B, C, D, E, F, G e H para os oito professores participantes do minicurso.

Quanto à primeira pergunta do questionário: “Você identifica dificuldades de aprendizagem do conteúdo?”, todos responderam sim, e pontuaram:

A: "Dificuldades nos conteúdos considerados básicos: potenciação, radiciação e equação exponencial, levando em consideração a falta de interesse por parte de alguns alunos."

B: "Falta de pré-requisitos e falta de interesse."

C: “Os alunos apresentam carência de pré-requisitos e dificuldades na interpretação e formalização de problemas (situações) para a linguagem matemática.”

D: “A dificuldade do aluno não é na definição de logaritmo e sim na resolução de potências e nas propriedades dele.”

E: “Identifico como dificuldade a aplicação das propriedades na contextualização dos problemas.”

F: “Dificuldades nos cálculos algébricos e propriedades. Dificuldades em entender a utilidade prática do conteúdo.”

G: “Pré-requisitos.”

H: “Por apresentarem dificuldades (déficit) nos componentes essenciais dados anteriormente.”

Pode-se ver por meio dessas respostas que os professores de Matemática identificam dificuldades no ensino de logaritmos, especialmente, em pré-requisitos, portanto, formas diferenciadas de aplicar o estudo de logaritmos são necessárias.

Quanto à pergunta 2: "Quais das aplicações sobre logaritmos abordadas nessa proposta você utilizaria em sua turma?" e 3: "Quais das questões propostas você aplicaria?", apresenta-se a análise das repostas através da tabela 4 a seguir:

Tabela 4 – Análise das respostas objetivas

Aplicações						Total	
Questões / Professores	Meia Vida	Matemática Financeira	Índice de pH	Acústica	Escala Richter	Aplicações	Questões
A	X	X	X	X	X	5	10
B	X	X	X	X	X	5	10
C	X	X	X	X	X	5	10
D	X	X	X	X	X	5	10
E		X			X	2	4
F	X	X	X	X	X	5	10
G		X			X	2	4
H		X	X		X	3	6
Total	5	8	6	5	8		

Fonte: autoria própria

Os participantes escolheram as questões de acordo com as aplicações, ou seja, quem optou por aplicar meia vida, por exemplo, indicou que as duas questões desse assunto poderiam ser aplicadas em sala de aula.

Observa-se que dos oito professores, cinco utilizariam todas as aplicações e questões em suas aulas. Dessa forma, vemos que a proposta de abordar os logaritmos utilizando suas aplicações contextualizadas foi considerada por estes profissionais da educação uma ferramenta pedagógica para melhorar o ensino. Agora, vejamos os comentários dos participantes quanto às aplicações abordadas.

A: "Todas as questões são de extrema importância para a aprendizagem e fixação do conteúdo."

B: "Utilizaria todas, pois é válido mostrar para os alunos o máximo de aplicações possíveis do conteúdo, a fim de despertar neles maior interesse."

C: "Todas as aplicações são importantes, pois proporcionam ao educando a reflexão e o questionamento da realidade, fazendo com que ele seja capaz de relacionar os conteúdos matemáticos com a realidade em que está inserido."

D: "Aplicaria todas as atividades se nossos alunos tivessem noção da interdisciplinaridade aplicada ao logaritmo."

E: “Por serem assuntos mais comuns no dia a dia do aluno e outras profissões, acho válido aplicá-las.”

F: “Eu aplicaria todos os temas, pois os mesmos tornam o aprendizado de logaritmos muito mais contextualizado, mas, para isso, o estudante deverá ter um conhecimento prévio, pelo menos mínimo, do tema das aplicações.”

G: “Aparece no cotidiano dos alunos, por isso ele se identifica e se interessa.”

H: “Por ser mais fácil a aplicabilidade, eu utilizaria a maior parte delas.”

Pelos comentários, é possível perceber que a maioria considerou a aplicação das questões importantes para mostrar ao aluno a aplicabilidade dos logaritmos e a interdisciplinaridade.

Os participantes D e F aplicariam todos os temas, mas consideraram que, para a aplicação ser eficiente, o discente precisaria ter um conhecimento prévio do assunto. Os professores E e G só aplicariam as questões relacionadas à Matemática Financeira e à Escala Richter. Como pode-se observar, consideraram assuntos mais comuns, conhecidos pelos alunos. Já o participante H acrescentaria a essas, o índice de pH justificando serem mais fáceis.

Na questão 4 do questionário: “Você considera essas questões contextualizadas?”, todos os professores participantes responderam sim e comentaram:

A: “Estimula aos educandos à análise crítica do conhecimento matemático.”

B: “As questões são contextualizadas e de fácil compreensão.”

C: “As questões são contextualizadas e problematizadas, e estimulam os educandos à análise crítica do conhecimento matemático.”

D: “Excelentes.”

E: “Pois as questões apresentam situações-problema de outras disciplinas.”

F: “Elas abordam diferentes temas do nosso cotidiano e meio científico.”

G: Não comentou.

H: “Apresentam situações do cotidiano de outras disciplinas."

Na questão 5: “Expresse os pontos positivos e negativos que você considerou nessa proposta de atividades.” Nenhum participante apontou pontos negativos e comentaram:

A: “Encontramos pontos positivos, pois cada questão foi elaborada para que os alunos desenvolvessem a aprendizagem já adquirida com as propriedades dos logaritmos."

B: “Questões contextualizadas. Questões de fácil interpretação/compreensão. Aplicações interessantes do conteúdo."

C: “A proposta é motivadora, traz significado ao estudo de logaritmos, ou seja, são questões contextualizadas; as atividades são interdisciplinares."

D: “Não vejo pontos negativos no tocante às propostas de atividades, somente pontos positivos. O desenvolvimento de cada questão faz com que o aluno fixe mais a sua aprendizagem no que concerne às propriedades dos logaritmos."

E: “Os alunos entenderiam onde aplicar o conteúdo de forma mais prática.”

F: “O fato de contextualizar o conteúdo de logaritmo a situações e temas científicos de grande relevância."

G: “Interação com outras disciplinas.”

H: “Aprendizagem significativa – os alunos aprendendo onde aplicar os conceitos de logaritmo."

Por fim, na questão 6 os participantes expressaram suas opiniões sobre essa forma de abordagem dos logaritmos.

A: “Muito boa, fazendo com que o aluno trabalhe o raciocínio aplicando as propriedades dos logaritmos em questões contextualizadas.”

B: “É uma abordagem interessante. Sempre que possível é importante apresentar para os alunos aplicações do conteúdo. Isso desperta o interesse, que é fundamental para uma aprendizagem significativa.”

C: “A abordagem é atual, contextualizada, interdisciplinar e apresenta conhecimentos que despertam o interesse, a curiosidade e incentiva a pesquisa por parte do aluno e professor.”

D: “Foi uma abordagem muito boa, trabalha o raciocínio do aluno nas propriedades dos logaritmos em exercícios contextualizados.”

E: “Considero essa abordagem prática e contextualizada e poderá fazer os alunos observarem onde aplicar os conceitos e entender outros conceitos e disciplinas.”

F: “É uma forma ótima de mostrar aos estudantes a utilidade e aplicabilidade do tema logaritmo.”

G: “Gostei, foram bem preparadas.”

H: “Abordagem contextualizada e significativa.”

Com a opinião e análise dos professores participantes do minicurso pode-se ver que os mesmos consideraram útil a proposta dessa pesquisa dissertativa e que utilizando sua aplicação o aprendizado de logaritmos poderá tornar-se mais significativo e, acima de tudo, mostra a importância da contextualização tão exigida atualmente na educação.

Esta dissertação, bem como os trabalhos relacionados citados, buscam mostrar que o uso das aplicações interdisciplinares dos logaritmos pode motivar os alunos e tornar seu aprendizado mais aplicável e significativo.

Capítulo 6

Conclusões

Observou-se neste trabalho dissertativo a importância dos logaritmos em cinco aplicações. Sendo assim, aprender esse conteúdo é de grande utilidade para o aluno, e estas aplicações podem ser utilizadas pelos professores para mostrar ao aluno essa importância e também a funcionalidade dos logaritmos, dando mais significado ao seu aprendizado.

Existem outras aplicações de logaritmos, portanto, este trabalho pode ser o início de novas pesquisas que poderão dar continuidade a essa proposta sugerida. Na Geografia, por exemplo, precisa-se dos logaritmos para resolver situações-problema envolvendo crescimento populacional. Na Biologia, os logaritmos são usados em situações envolvendo cultura de bactérias e outras. E na Medicina, os logaritmos são necessários em cálculos envolvendo dosagem de remédios e o tempo de eliminação dos mesmos no organismo. Logo, pode-se ver que outras abordagens podem dar segmento ao objetivo desta dissertação.

As situações-problema apresentadas aqui são uma proposta para ensinar o conteúdo dos logaritmos de uma forma interdisciplinar e contextualizada, propiciando, portanto, uma abordagem motivadora e interessante deste conteúdo essencial na atualidade.

Este estudo é uma ferramenta para auxiliar os professores de matemática e os alunos no processo de ensino e aprendizagem dos logaritmos, pois o ensino baseado apenas em treinamentos de fórmulas e conceitos não é o bastante, especialmente para os alunos da atualidade que dispõe de tantos recursos tecnológicos. Por isso, ensinar logaritmos apenas com exercícios repetitivos não desperta a vontade de aprender. Então, se faz necessário que os professores de Matemática atuantes busquem novos métodos afim de despertar a curiosidade, incentivar e com isso aumentar a vontade e o prazer por estudar logaritmos, conteúdo este tão importante e útil em tantas questões atuais.

Os professores, aos quais a proposta foi aplicada, consideraram-na útil para o ensino de logaritmos. Além disso, ressaltaram a importância e necessidade da interdisciplinaridade e contextualização no processo de ensino e aprendizagem, pois mostra ao discente a relação entre as disciplinas e a aplicabilidade do conteúdo.

Portanto, este trabalho traz uma grande contribuição para os professores que estão em sala de aula e que precisam de ferramentas para sempre melhorar e inovar o ensino, especificamente, o ensino de logaritmos que, muitas das vezes, os alunos acham entediante e difícil pela forma também como foram abordados.

Referências

ANGELIN, E. M. *Logaritmos: História, Teoria e Aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) — Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus - BA, Março 2015. Citado na página 33.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª séries)*. Brasília, DF, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

COUTO, S. D. *Logaritmos: conceitos e aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) — Universidade Federal de Lavras, Lavras - MG, Setembro 2013. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

D'ALAMA, N. *No limite dos decibéis*. 2010. Disponível em: <http://antiga.cotidiano.ufsc.br/index.php?option=com_content&view=article&id=122%3Ano-limite-dos-decibeis&Itemid=58>. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

DANTE, L. R. *Matemática Contextos e Aplicações: algoritmos e suas implicações educativas*. São Paulo: Ática, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 22, 30 e 61.

DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. São Paulo: Ática, 2011. vol. 1. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 77.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2004. 844 p. Citado na página 44.

FELTRE, R. *Química*. 6. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2004. v.2. 417 p. Citado 7 vezes nas páginas 36, 37, 38, 50, 51, 54 e 81.

GAMA, M.; AFONSO, J. De svante arrhenius ao peagâmetro digital: 100 anos de medida de acidez. *Química Nova*, v. 30, n. v.1, p. 232–239, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

JUVIN, H.; LIPOVETSKY, G. *A globalização cidental: controvérsias sobre a cultura planterária*. Barueri - SP: Editora Manole, 2012. Citado na página 29.

LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 11. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. v.1. 431 p. Citado na página 31.

LIMA, E. L. *Logaritmos*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013. 113 p. Citado 4 vezes nas páginas 15, 30, 32 e 33.

MAOR, E. *e: A História de um Número*. 5. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008. Citado 9 vezes nas páginas 15, 18, 19, 20, 21, 25, 27, 28 e 31.

PECORARI, M. *Logaritmos e Aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) — Universidade Estadual Paulista, Rio Claro - SP, Novembro 2013. Citado na página 32.

ROCHA, F. J. M. da. *Logaritmos e Aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) — UENF, Campos dos Goytacazes-RJ, Agosto 2013. Citado na página 18.

ROSA, J. L. *Psicologia e Educação: o significado do aprender*. Porto Alegre: Edipucrs, 2007. Citado na página 16.

SANTOS, C.; GENTIL, N.; GRECO, S. *Matemática*. 6. ed. São Paulo: Editora Ática, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 61.

THIENGO, V. *Ensino de Exponenciais e Logaritmos no Ensino Médio via Aplicações*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) — Universidade Federal Fluminense, Niterói - RJ, Março 2013. Citado na página 33.

TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

TROTTA, F. *Matemática por assunto*. São Paulo: Editora Scipione, 1988. v. 2. Citado na página 24.

VALIANTE, F. *Apostila Básica de Áudio*. 6. ed. Taboão da Serra, 2004. Disponível em: <http://www.ibam-concursos.org.br/documento/Audio.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.

APÊNDICE A

Atividades sobre Meia Vida

1. **[ENEM-2013]** Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza a metade. A meia vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão: $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k uma constante negativa. Considere 0,3 como aproximação para $\log 2$. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

   (A) 27

   (B) 36

   (C) 50

   (D) 54

   (E) 100

2. **[UEPB]** Os átomos de um elemento químico radioativo possuem uma tendência natural de se desintegrarem, diminuindo, portanto, sua quantidade original com o passar do tempo. Suponha que certa quantidade de um elemento radioativo, com massa inicial m_0 (gramas), com $m_0 \neq 0$, decomponha-se conforme o modelo matemático

$$m(t) = m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}},$$

   em que $m(t)$ é a quantidade de massa radioativa restante no tempo t (anos). Usando a aproximação $\log 2 = 0,3$, a quantidade de anos para que esse elemento se decomponha até atingir $1/8$ da massa inicial será:

   (A) 60

   (B) 62

(C) 64

(D) 63

(E) 70

3. **[(DANTE, 2011, p. 273), Exemplo 5]** Em quantos anos 500 g de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 3% ao ano, se reduzirão a 100 g? Use $Q = Q_0 \cdot \mathrm{e}^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

4. **[UEL]** O iodo-131 é um elemento radioativo utilizado em medicina nuclear para exames de tireoide e possui meia vida de 8 dias. Para descarte de material contaminado com 1 g de iodo-131, sem prejuízo para o meio ambiente, o laboratório aguarda que o mesmo fique reduzido a 10^{-6} g de material radioativo. Nessas condições, o prazo mínimo para descarte do material é de: (Dado: $\log 2 = 0,3$)

   (A) 20 dias

   (B) 90 dias

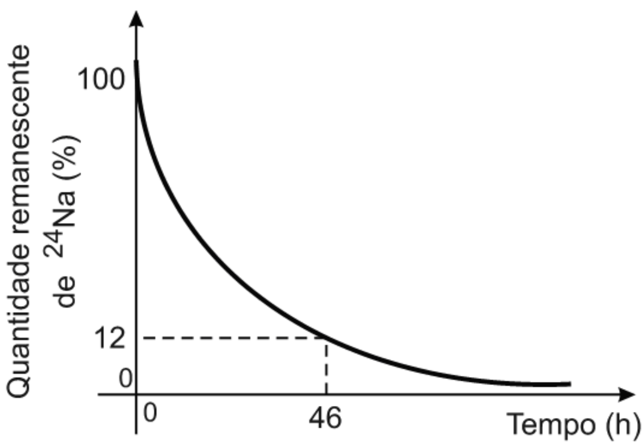
   (C) 140 dias

   (D) 160 dias

   (E) 200 dias

5. **[IME-2013]** Considere o decaimento radioativo do Na-24 como um processo cinético de 1^a ordem, conforme mostrado no gráfico abaixo.

Figura 9 – Decaimento Radioativo



Para este radioisótopo, determine:

a) a constante de decaimento, k; e

b) o tempo de meia vida, em horas.

APÊNDICE B

Atividades sobre Matemática Financeira

1. **[Concurso-TJ-PR-2014]** Um investimento rende juros compostos a uma taxa de juros de 6% ao ano. Depois de quantos anos, um valor inicial de R\$ $1.000,00$ chegará ao valor de R\$ $10.000,00$ com esse investimento? (Use $\log_{10} 1,06 = 0,0254$)

   (A) 20 anos

   (B) 30 anos

   (C) 40 anos

   (D) 50 anos

2. **[PUC-SP]** Um capital C, aplicado a juros compostos a uma taxa i por período, produz, ao final de n períodos, o montante M, dado por $M = C.(1+i)^n$. Nessas condições, utilizando-se $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, o capital de 2000 reais, aplicado a juro composto à taxa de 20% ao ano, produzirá o montante de 5000 reais, ao final de um período de:

   (A) 2 anos

   (B) 3,5 anos

   (C) 4 anos

   (D) 8,5 anos

   (E) 5 anos

3. **[Unicamp-SP]** Um capital de 12.000 reais é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, encontre:

   a) O capital acumulado após 2 anos.

   b) O número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial. (Se necessário, use $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$.)

4. **[Fundação Carlos Chagas - Escriturário BB - 2011]** Saulo aplicou 45000,00 reais em um fundo de investimento que rende 20% ao ano. Seu objetivo é usar o montante dessa aplicação para comprar uma casa que, na data da aplicação, custava 135000,00 reais e se valoriza à taxa anual de 8% . Nessas condições, a partir da data da aplicação, quantos anos serão decorridos até que Saulo consiga comprar tal casa?

   (A) 15

   (B) 12

   (C) 10

   (D) 9

   (E) 6

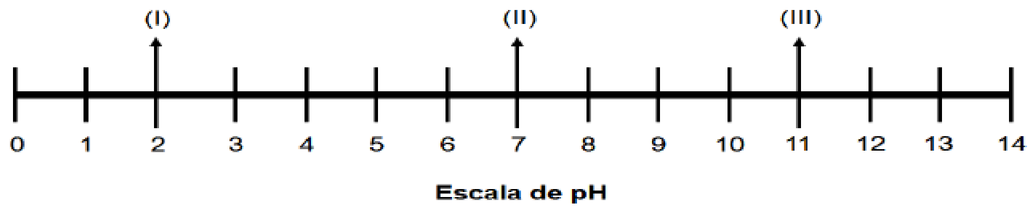
5. **[UERJ-2003]** Jorge quer vender seu carro por 40000,00 reais. Pedro, para comprá-lo, dispõe de 5000,00 reais, e aplica esse valor em um investimento que rende juros compostos a uma taxa de 28% a cada 2 anos. Considere que a desvalorização do carro de Jorge seja de 19% a cada 2 anos, calculada sobre o valor do carro no período de dois anos imediatamente anterior. Calcule o tempo mínimo em que Pedro terá dinheiro suficiente para comprar o carro de Jorge. Utilize, em seus cálculos, $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$.

APÊNDICE C

Atividades sobre Índice de PH

1. **[UFES-2016, adaptada]** O termo pH (potencial hidrogeniônico) foi criado em 1909 pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen e tem como objetivo simplificar a indicação da acidez, neutralidade ou alcalinidade de uma solução aquosa. A indicação desse caráter pode ser ainda mais bem visualizada a partir de uma escala de pH, como destacado a seguir:

   Figura 10 – Escala de pH.

   Considerando as soluções (I), (II) e (III), indicadas na escala de pH acima, determine

   A) a concentração de íons hidrogênio presentes na solução (I).
   B) a concentração de íons hidroxila presentes na solução (III).

2. **[FEI-SP]** Qual o pH de uma solução cuja concentração hidrogeniônica é 10^{-8}? A solução é ácida, neutra ou básica?

3. **[PUC-MG]** A análise de uma determinada amostra de refrigerante detectou pH = 3. A concentração de íons H^+ nesse refrigerante é, em mol/L:

   (A) 10^{-3}
   (B) 10^{-6}
   (C) 10^{-7}
   (D) 10^{-8}

(E) 10^{-11}

4. **[PUC-RIO 2008]** O estômago produz suco gástrico constituído de ácido clorídrico, muco, enzimas e sais. O valor de pH no interior do estômago deriva, principalmente, do ácido clorídrico presente. Sendo o ácido clorídrico um ácido forte, a sua ionização é total em meio aquoso,e a concentração de H^+ em quantidade de matéria nesse meio será a mesma do ácido de origem. Assim, uma solução aquosa de ácido clorídrico em concentração 0,01 mol/L^{-1} terá pH igual a:

   (A) 2

   (B) 4

   (C) 5

   (D) 7

   (E) 9

5. **[UDESC 2009]** "Chuva ácida" é um termo que se refere à precipitação, a partir da atmosfera, de chuva com quantidades de ácidos nítricos e sulfúrico maiores que o normal. Os precursores da chuva ácida vem tanto de fontes naturais, tais como vulcões e vegetação em decomposição, quanto de processos industriais, principalmente emissões de dióxido de enxofre e óxidos de nitrogênio resultantes da queima de combustíveis fósseis. O pH da água da chuva considerado normal é de 5,5 (devido à presença de ácido carbônico proveniente da solubilização de dióxido de carbono). Um químico monitorando uma região altamente industrializada observou que o pH da água da chuva era igual a 4,5. Considerando que a acidez está relacionada com a concentração de H_3O^+, é correto afirmar que a água com pH 4,5 era:

   (A) duas vezes mais básica que o normal.

   (B) duas vezes mais ácida que o normal.

   (C) dez vezes mais básica que o normal.

   (D) dez vezes mais ácida que o normal.

   (E) cem vezes mais ácida que o normal.

6. **[(FELTRE, 2004, p. 233), exercício 29]** Qual é a concentração hidrogeniônica de uma solução de pH igual a 12,4? (Dado: $\log 3,98 = 0,6$)

APÊNDICE D

Atividades sobre Acústica

1. **[FUVEST 2016]** O nível de intensidade sonora β, em decibéis (dB), é definido pela expressão $\beta = 10 \cdot \log_{10}(I/I_0)$, na qual I é igual a intensidade do som em W/m^2 e $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ é um valor de referência. Os valores de nível de intensidade sonora $\beta = 0$ e $\beta = 120$ dB correspondem, respectivamente, aos limiares de audição e de dor para o ser humano. Como exposições prolongadas a níveis de intensidade sonora elevados podem acarretar danos auditivos, há uma norma regulamentadora (NR-15) do Ministério do Trabalho e Emprego do Brasil, que estabelece o tempo máximo de 8 horas para a exposição ininterrupta a sons de 85 dB e especifica que, a cada acréscimo de 5 dB no nível de intensidade sonora, deve-se dividir por dois o tempo máximo de exposição. A partir dessas informações, determine:

   a) a intensidade sonora I_D correspondente ao limiar da dor para o ser humano;
   b) o valor máximo do nível de intensidade sonora β, em dB, a que um trabalhador pode permanecer exposto por 4 horas seguidas;

2. **[UEPA 2007]** Os carnavais fora de época conseguem reunir uma grande quantidade de pessoas que se divertem ao som dos famosos Trios Elétricos. Os frequentadores desses eventos ficam submetidos a uma excessiva exposição sonora, que podem causar dores e lesões auditivas. A expressão utilizada para medir o Nível de Intensidade Sonora (NIS), em decibel, é dada por:

$$NIS = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

   onde I é intensidade de energia qualquer e I_0 é a intensidade de energia do limiar de audição. A nocividade auditiva começa a partir de 80 dB. Se num desses eventos descritos acima a intensidade de energia for quadruplicada, o Nível de Intensidade Sonora será: (Dado $\log_{10} 4 = 0,6$)

   (A) oito vezes maior

(B) dezesseis vezes maior

(C) aumentado em 8 dB

(D) aumentado em 6 dB

(E) aumentado em 16 dB

3. **[UFC-CE]** Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10\log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I, em watts por metro quadrado. Sejam I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão I_1/I_2 é igual a:

   (A) 1/10

   (B) 1

   (C) 10

   (D) 100

   (E) 1000

4. **[UERJ]** Seja NS o nível sonoro de um som, medido em decibéis. Esse nível sonoro está relacionado com a intensidade do som, I, pela fórmula abaixo, na qual a intensidade padrão, I_0, é igual a 10^{-12} W/m^2.

$$NS = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

   Observe o quadro a seguir. Nele, os valores de I foram aferidos a distâncias idênticas das respectivas fontes de som.

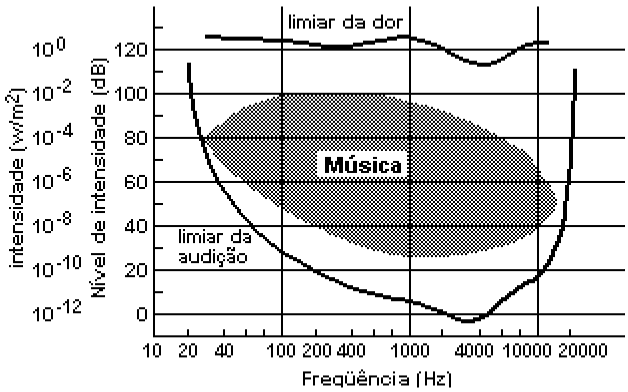
Fonte de Som	***I(W/m^2)***
Turbina	$1,0 \times 10^2$
Amplificador de som	$1,0$
Triturador de lixo	$1,0 \times 10^{-4}$
TV	$1,0 \times 10^{-5}$

   Sabendo que há riscos de danos ao ouvido médio a partir de 90 dB, quais as fontes da tabela cuja intensidade de emissão de sons está na faixa de risco?

5. **[Unesp-2001, adaptada]** O gráfico da figura 11 indica, no eixo das ordenadas, a intensidade de uma fonte sonora, I, em watts por metro quadrado (W/m^2), ao lado do correspondente nível de intensidade sonora, β em decibéis (dB), percebido, em média, pelo ser humano. No eixo das abscissas, em escala logarítmica, estão representadas as frequências do som emitido. A linha superior indica o limite da dor – acima dessa

linha, o som causa dor e pode provocar danos ao sistema auditivo das pessoas. A linha inferior mostra o limiar da audição – abaixo dessa linha, a maioria das pessoas não consegue ouvir o som emitido.

Figura 11 – Intensidade de uma onda sonora



A relação entre a intensidade sonora I, em W/m^2, e o nível de intensidade β, em dB, é $\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$. Qual a intensidade de um som, em W/m^2, num lugar onde o seu nível de intensidade é 50 dB? Consultando o gráfico você confirma o resultado que obteve?

6. **[Cesgranrio-RJ]** O nível de intensidade sonora (N) é expresso em decibéis (dB) por: $N = 10 \cdot \log_{10}\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ onde: I = intensidade sonora fornecida pela caixa de som; I_0 = intensidade padrão, correspondente ao limiar da audição (para o qual $N = 0$). Para o nível de intensidade $N = 120$ dB, a intensidade sonora, fornecida pela caixa de som, deverá ser de:

   (A) $10^{13} \cdot I_0$

   (B) $10^{12} \cdot I_0$

   (C) $1200 \cdot I_0$

   (D) $120 \cdot I_0$

   (E) $12 \cdot I_0$

APÊNDICE E

Atividades sobre Escala Richter

1. **[PUC-MG]** As indicações R_1 e R_2 de dois terremotos, na escala Richter, estão relacionadas pela fórmula
$$R_1 - R_2 = \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$
em que E_1 e E_2 medem as respectivas energias, liberadas pelos terremotos em forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Nessas condições, se $R_1 = 8,5$ e $R_2 = 7,0$, é correto afirmar que a razão entre E_1 e E_2, nessa ordem, é igual a:

    (A) $0,5$

    (B) $1,5$

    (C) $10^{0,5}$

    (D) $10^{1,5}$

2. **[Fuvest-SP]** A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que possui variação entre $I = 0$ até $I = 8,9$ para o maior terremoto conhecido. I é dado pela fórmula: $I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E_1}{E_0}\right)$ na qual E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kwh.

    (A) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

    (B) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

3. **[UFRN-2012]** No ano de 1986, o município de João Câmara – RN foi atingido por uma sequência de tremores sísmicos, todos com magnitude maior ou igual a $4,0$ na escala Richter. Tal escala segue a fórmula empírica, $M = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E_1}{E_0}\right)$ em que M é a magnitude, E é a energia liberada em kwh e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$. Recentemente, em março de 2011, o Japão foi atingido por uma inundação provocada por um terremoto. A magnitude desse terremoto foi de $8,9$ na escala Richter. Considerando

um terremoto de João Câmara com magnitude $4,0$, pode-se dizer que a energia liberada no terremoto do Japão foi:

(A) $10^{7,35}$ vezes maior do que a do terremoto de João Câmara.

(B) cerca de duas vezes maior do que a do terremoto e João Câmara.

(C) cerca de três vezes maior do que a do terremoto de João Câmara.

(D) $10^{13,35}$ vezes maior do que a do terremoto de João Câmara.

4. **[UFAL-2011]** A fórmula para medir a intensidade de um dado terremoto na escala Richter é $R = \log_{10}\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, com I_0 sendo a intensidade de um abalo quase imperceptível e I a intensidade de um terremoto dada em termos de um múltiplo de 10. Se um sismógrafo detecta um terremoto com intensidade $I = 32000 \cdot I_0$, qual a intensidade do terremoto na escala Richter? Indique o valor mais próximo. Dado: use a aproximação $\log 2 \cong 0,30$.

   (A) 3,0

   (B) 3,5

   (C) 4,0

   (D) 4,5

   (D) 5,0

5. **[Fuvest-2010]** A magnitude de um terremoto na escala Richter é proporcional ao logaritmo, na base 10, da energia liberada pelo abalo sísmico. Analogamente, o pH de uma solução aquosa é dado pelo logaritmo, na base 10, do inverso da concentração de íons H^+. Considere a seguintes afirmações:

   I. O uso do logaritmo nas escalas mencionadas justifica-se pelas variações exponenciais das grandezas envolvidas.

   II. A concentração de íons H^+ de uma solução ácida com pH 4 é 10 mil vezes maior que a de uma solução alcalina com pH 8.

   III. Um abalo sísmico de magnitude 6 na escala Richter libera duas vezes mais energia que outro, de magnitude 3.

   Está correto o que se afirma em:

   (A) I

   (B) II

   (C) III

   (D) I e II

   (D) I e III

APÊNDICE F

Questionário

PROFMAT

Mestrado Profissional em Matemática

em Rede Nacional

UENF
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Questionário

1) Você identifica dificuldades de aprendizagem do conteúdo?
( ) Sim ( ) Não
1.1 Em caso afirmativo, quais são?

2) Quais das aplicações sobre logaritmos abordadas nessa proposta você utilizaria em sua turma?
( ) Meia vida
( ) Matemática Financeira
( ) Índice de pH
( ) Acústica
( ) Escala Richter

Comente.

3) Quais das questões propostas você aplicaria?
( ) 1 ( ) 3 ( ) 5 ( ) 7 ( ) 9
( ) 2 ( ) 4 ( ) 6 ( ) 8 ( ) 10

Justifique.

4) Você considera essas questões contextualizadas?
( ) Sim ( ) Não

Comente.

5) Expresse os pontos positivos e negativos que você considerou nessa proposta de atividades.

Pontos positivos	Pontos negativos

6) Qual sua opinião sobre essa forma de abordagem dos logaritmos?

APÊNDICE G

Questões aplicadas aos professores participantes do minicurso

Meia vida

1) (ENEM-2013) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza a metade. A meia vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão o $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k uma constante negativa. Considere 0,3 como aproximação para log 2. Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

(A) 27
(B) 36
(C) 50
(D) 54
(E) 100

2) (UEL) O iodo-131 é um elemento radioativo utilizado em medicina nuclear para exames de tireoide e possui meia vida de 8 dias. Para descarte de material contaminado com 1 g de iodo-131, sem prejuízo para o meio ambiente, o laboratório aguarda que o mesmo fique reduzido a 10^{-6} g de material radioativo. Nessas condições, o prazo mínimo para descarte do material é de: (Dado: log 2 = 0,3)

(A) 20 dias
(B) 90 dias
(C) 140 dias
(D) 160 dias
(E) 200 dias

Matemática Financeira

3) (Concurso-TJ-PR-2014) Um investimento rende juros compostos a uma taxa de juros de 6% ao ano. Depois de quantos anos, um valor inicial de R$1.000,00 chegará ao valor de R$10.000,00 com esse investimento? (Use log 1,06 = 0,0254)

(A) 20 anos
(B) 30 anos
(C) 40 anos
(D) 50 anos

4) (Fundação Carlos Chagas - Escriturário BB – 2011) Saulo aplicou R$ 45.000,00 em um fundo de investimento que rende 20% ao ano. Seu objetivo é usar o montante dessa aplicação para comprar uma casa que, na data da aplicação, custava R$ 135.000,00 e se valoriza à taxa anual de 8%. Nessas condições, a partir da data da aplicação, quantos anos serão decorridos até que Saulo consiga comprar tal casa?

(A) 15

(B) 12
(C) 10
(D) 9
(E) 6

Índice de pH

5) (FEI-SP) Qual o pH de uma solução cuja concentração hidrogeniônica é 10^{-8}? A solução é ácida, neutra ou básica?

6) (PUC-MG) A análise de uma determinada amostra de refrigerante detectou pH = 3. A concentração de íons H^+ nesse refrigerante é, em mol/L:

(A) 10^{-3}
(B) 10^{-6}
(C) 10^{-7}
(D) 10^{-8}
(E) 10^{-11}

Acústica

7) (FUVEST 2016) O nível de intensidade sonora β, em decibéis (dB), é definido pela expressão $\beta = 10 \log (I/I_0)$, na qual I é igual a intensidade do som em w/m² e $I_0 = 10^{-12}$ w/m² é um valor de referência. Os valores de nível de intensidade sonora $\beta = 0$ e $\beta = 120$ dB correspondem, respectivamente, aos limiares de audição e de dor para o ser humano. Como exposições prolongadas a níveis de intensidade sonora elevados podem acarretar danos auditivos, há uma norma regulamentadora (NR-15) do Ministério do Trabalho e Emprego do Brasil, que estabelece o tempo máximo de 8 horas para a exposição ininterrupta a sons de 85 dB e especifica que, a cada acréscimo de 5 dB no nível de intensidade sonora, deve-se dividir por dois o tempo máximo de exposição. A partir dessas informações, determine a intensidade sonora I_D correspondente ao limiar da dor para o ser humano.

8) (UFC-CE) Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 \log I$, em que β é medido em decibéis e I, em watts por metro quadrado. Sejam I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão I_1/I_2 é igual a:

(A) 1/10
(B) 1
(C) 10
(D) 100
(E) 1000

Escala Richter

9) (PUC-MG) As indicações R_1 e R_2 de dois terremotos, na escala Richter, estão relacionadas pela fórmula $R_1 – R_2 = \log (E_1/E_2)$ em que E_1 e E_2 medem as respectivas energias, liberadas pelos terremotos em forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre. Nessas condições, se $R_1 = 8,5$ e $R_2 = 7,0$, é correto afirmar que a razão entre E_1 e E_2, nessa ordem, é igual a:

(A) 0,5
(B) 1,5
(C) $10^{0,5}$
(D) $10^{1,5}$

10) (UFAL-2011) A fórmula para medir a intensidade de um dado terremoto na escala Richter é $R = \log (I/I_0)$, com I_0 sendo a intensidade de um abalo quase imperceptível e I a intensidade de um terremoto dada em termos de um múltiplo de 10. Se um sismógrafo detecta um terremoto com intensidade $I = 32000\ I_0$, qual a intensidade do terremoto na escala Richter? Indique o valor mais próximo. Dado: use a aproximação $\log 2 = 0,30$.

(A) 3,0
(B) 3,5
(C) 4,0
(D) 4,5
(D) 5,0