

José Gleydson Camata

**Análise das Raízes Complexas de uma Equação
Quadrática e Estudo de Números Complexos no
Ensino Médio**

Vitória

Maio de 2015

José Gleydson Camata

Análise das Raízes Complexas de uma Equação Quadrática e Estudo de Números Complexos no Ensino Médio

Trabalho de conclusão de curso de Mestrado Profissional submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Programa de Pós-Graduação em Matemática
em Rede Nacional

Orientador: Rosa Elvira Quispe Ccoyllo

Vitória

Maio de 2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

C173a Camata, José Gleydson, 1984-
Análise das raízes complexas de uma equação quadrática e estudo de números complexos no ensino médio / José Gleydson Camata. – 2015.
61 f.

Orientador: Rosa Elvira Quispe Ccoyllo.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Números complexos. 2. Equações quadráticas. 3. Raízes numéricas. I. Ccoyllo, Rosa Elvira Quispe. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

“Análise das Raízes Complexas de Uma Equação Quadrática e Estudo de Números Complexos no Ensino Médio”

José Gleydson Camata

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 26/05/2015 por:

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Rosa Elvira Quispe Ccoyllo', written over a horizontal line.

Rosa Elvira Quispe Ccoyllo
Orientadora - UFES

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Valmecir Antonio dos Santos Bayer', written over a horizontal line.

Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Examinador Interno - UFES

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Juan Elmer Villanueva Zevallos', written over a horizontal line.

Juan Elmer Villanueva Zevallos
Examinador Externo - UFMT

*Dedico este trabalho aos meus pais: Eudo e Iná;
Ao meu filho Bernardo e a minha paciente esposa Manuela*

Agradecimentos

A Deus, por sua presença constante em todos os momentos dessa jornada.

Aos meus pais por toda confiança e força; pelas orações e a preocupação que sempre tiveram. Por todas as lutas e que enfrentaram de forma digna e honrosa para tornar melhor a vida de seus filhos. Os valores morais recebidos são a nossa herança.

A minha magnânima esposa Manuela pela doçura, zelo, carinho e compreensão. Por suportar a impaciência, saber ouvir as lamentações e incentivar nos momentos difíceis. Por seu amor e toda a felicidade que me proporciona.

Ao meu filho Bernardo, pelos momentos inusitados e a alegria constante.

Aos amigos Saul e Artur pela companhia em inúmeros sábados. Uma boa conversa além de inibir o sono deixa a viagem agradável.

À amiga Sílvia, pela parceria e força. Pelas dicas e por motivar o desenvolvimento do tema deste trabalho.

Ao aluno Ramon Felipe, pelos questionamentos sempre pertinentes e oportunos.

Aos meus familiares e amigos por compreenderem minha ausência física em diversos momentos.

Aos professores: Etereldes Gonçalves Júnior, Fábio Júlio da Silva Valentim, Moacir Rosado Filho e Valmecir dos Santos Bayer, pelo excelente trabalho desenvolvido nas disciplinas do PROFMAT.

À professora Rosa Elvira Quispe Ccoyllo pela paciência e conhecimentos proporcionados.

À Universidade Federal do Espírito Santo, por tudo o que a instituição representa em minha vida profissional, em especial ao departamento de Matemática.

À CAPES pelo auxílio financeiro que proporcionou os estudos.

“Existe uma verdadeira alegria em fazer matemática, em aprender maneiras de pensar que explicam, organizam e simplificam. Pode-se sentir essa alegria descobrindo novos resultados em matemática, redescobrimdo resultados antigos, aprendendo um modo de pensar com alguém ou em um texto, ou encontrando uma nova maneira de explicar ou de olhar para uma estrutura matemática conhecida.”

(William P. Thurston)

Resumo

Neste trabalho, propomos uma atividade de investigação sobre o lugar geométrico das raízes complexas não reais de uma equação quadrática quando variamos um de seus coeficientes utilizando como ferramenta de apoio o *software* GeoGebra. Apresentamos ainda uma aplicação destes números ao estudo de movimento oscilatório.

Discorremos uma breve análise de como o assunto *Números Complexos* é abordado nos livros didáticos distribuídos pelo Programa Nacional do Livro Didático e elencamos alguns aspectos históricos importantes no surgimento e estruturação do conjunto dos Números Complexos.

Palavras-chaves: Números Complexos, Equações Quadráticas, Oscilações Amortecidas.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Solução dos exemplos 1), 2) e 3) respectivamente.	28
Figura 2 – Solução da equação $az^2 + 4z + 8 = 0; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$	31
Figura 3 – Representação dos Conjuntos B e C , respectivamente.	32
Figura 4 – Gráfico da função $x = -\frac{2}{a}$	33
Figura 5 – Gráficos de $y = \frac{2\sqrt{2a-1}}{a}$ e $y = -\frac{2\sqrt{2a-1}}{a}$	34
Figura 6 – Representação do conjunto D	39
Figura 7 – Representação do conjunto E	39
Figura 8 – Representação do conjunto F	39
Figura 9 – Representação do conjunto G	39
Figura 10 – Função $x = -b/2$	40
Figura 11 – função $y = \frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}$	40
Figura 12 – Representação do conjunto H	43
Figura 13 – Movimento Harmônico Simples.	46
Figura 14 – Movimento Oscilatório Amortecido.	46
Figura 15 – Representação de um oscilador harmônico simples.	47
Figura 16 – Representação de um oscilador harmônico amortecido.	48
Figura 17 – Gráfico para amortecimento supercrítico.	49
Figura 18 – Gráfico para amortecimento crítico.	50
Figura 19 – Gráfico para amortecimento subcrítico e as envoltórias de $x(t)$	51
Figura 20 – Modelo de molas e amortecedores de automóveis.	52
Figura 21 – Amortecedor.	52
Figura 22 – Função $x(t) = (0.12 \cos(10t) + (0.24) \sin(10t)) e^{-20t}$	54
Figura 23 – Gráfico para o amortecimento descrito na questão 2 considerando $x_0 =$ 0,2	55
Figura 24 – Amortecimento subcrítico para diferentes valores de b	57

Sumário

	Introdução	10
1	UM POUCO DA HISTÓRIA	13
1.1	A origem dos números complexos	14
1.2	A estruturação dos números complexos	16
1.3	Aplicações de números complexos	18
2	O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NOS LIVROS DIDÁTICOS	20
2.1	Análise dos livros didáticos	21
2.2	Síntese	27
3	ESTUDO DAS RAÍZES COMPLEXAS NÃO REAIS DA EQUAÇÃO $az^2 + bz + c = 0$	28
3.1	Estudo das raízes complexas da equação $az^2 + b_0z + c_0 = 0$ 29	
3.1.1	Generalização	35
3.1.2	Casos particulares de b_0 e c_0	37
3.2	Estudo das raízes complexas da equação $a_0z^2 + bz + c_0 = 0$ 38	
3.3	Estudo das raízes complexas da equação $a_0z^2 + b_0z + c = 0$ 42	
3.4	O GeoGebra	43
3.4.1	Apresentação	43
3.4.2	Construção	43
4	APLICAÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ESTUDO DE OSCILAÇÕES AMORTECIDAS	45
4.1	Oscilações	45
4.1.1	Oscilador Harmônico Simples	46
4.1.2	Oscilador Amortecido	47
4.1.3	Amortecimento supercrítico ($\gamma/2 > \omega_0$)	49
4.1.4	Amortecimento crítico ($\gamma/2 = \omega_0$)	50
4.1.5	Amortecimento subcrítico ($\gamma/2 < \omega_0$)	50
4.2	Sistema de suspensão de automóveis	51
	Referências	60

Introdução

Os conteúdos ministrados na disciplina de Matemática no Ensino Médio, apresentam uma construção mais elaborada que os temas abordados no Ensino Fundamental e associar os conteúdos estudados às aplicações destes em atividades da vida contemporânea nem sempre é fácil, apesar de conhecimentos matemáticos serem necessários em praticamente todas as áreas do conhecimento.

O estudo do Conjunto dos Números Complexos é proposto pelos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN)[3] e abordados nos livros didáticos distribuídos pelo *Programa Nacional do Livro Didático* (PNLD)[11] na terceira série do Ensino Médio, sendo apresentado, de modo oportuno, posteriormente ao estudo de Geometria Analítica, embora alguns autores, mencionem superficialmente este conjunto na primeira série deste nível de ensino.

As *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais* - PCN+ [4], expõem que, como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas. Por consequência, o estudo do conjunto dos números complexos, tem sido excluído dos programas de ensino de algumas redes (no estado do Espírito Santo, por exemplo, o aprofundamento no estudo destes números não é proposto no Currículo Básico Comum das escolas da rede estadual desde 2008). Além de não ser conteúdo obrigatório, muitos professores manifestam certa resistência em abordar este tema, talvez pelo fato das aplicações dos números complexos, serem restritas a algumas áreas do conhecimento e por dependerem, na maioria das vezes, de saberes que vão além do programa de nível médio.

Em mão contrária a essa concepção, tendo em vista a importância do estudante conhecer e compreender como os conhecimentos matemáticos são importantes, não apenas nas atividades cotidianas mas também nas atividades tecnológicas, o estudo dos números complexos pode favorecer a compreensão da relação entre conhecimentos científico-tecnológicos e a vida social e produtiva, cabendo ao professor, despertar o interesse e a curiosidade dos alunos no estudo de um conteúdo que parece a princípio, fugir do seu contexto.

Refletindo uma alternativa para aproximar o estudante do universo dos complexos, acreditamos ser imprescindível, um levantamento histórico dos problemas que deram origem a estes números e instigaram inúmeros matemáticos a buscar um modelo que estruturasse este conjunto. Pensando nisso, apresentamos uma breve análise dos livros didáticos distribuídos pelo PNLD, relatando como é abordado este conteúdo, a definição

dada, e finalmente, as aplicações destes números nos dias de hoje, citadas em cada obra .

Compreendendo que, aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados, apresentamos neste trabalho, uma proposta de atividade que tem por objetivo estimular o aluno a perceber regularidades na resolução de algumas questões e à partir da observação, ser capaz de generalizar, conjecturar e finalmente, demonstrar algumas proposições.

Considerando a importância de um conhecimento matemático significativo, com técnicas e estratégias aplicadas a outras áreas do conhecimento, elencamos no texto algumas aplicações para os números complexos, destacando o emprego destes no estudo de oscilações amortecidas.

É válido salientar que a escolha do tema *Números Complexos*, foi motivada pelo questionamento de um aluno no decorrer do estudo destes números. Ao resolver no quadro, uma questão referente à representação das raízes complexas de determinada equação quadrática, este perguntou: E se alterarmos o coeficiente a , como irão variar as raízes da equação? A pertinente questão, acarretou uma investigação do lugar geométrico das raízes complexas de uma equação quadrática, quando variamos um de seus coeficientes (um dos pontos abordados neste texto).

Em suma, o presente trabalho tem por finalidade, enriquecer o estudo do conjunto dos números complexos, apresentando uma proposta que busca:

- i) Resgatar aspectos históricos importantes quanto ao surgimento dos números complexos, bem como elencar algumas aplicações para estes números;
- ii) Promover o raciocínio matemático dos alunos, usando o software *GeoGebra* como ferramenta importante numa investigação do lugar geométrico das raízes complexas não reais das equações quadráticas, quando variamos apenas um de seus coeficientes;
- iii) Perceber relações entre as raízes complexas de uma equação quadrática e a solução de problemas associados ao movimento amortecido, em especial, no sistema de suspensão dos automóveis.

Destacamos que o público alvo deste trabalho são os professores de Matemática do Ensino Médio, e esperamos que as atividades aqui propostas sejam utilizadas de forma complementar no estudo do conjunto em questão.

A escolha do software *GeoGebra* no desenvolvimento das atividades se deve ao fato de este ser um aplicativo de fácil utilização capaz de representar de modo satisfatório em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto, o que possibilita melhor compreensão por parte dos alunos e conseqüentemente propicia um aprendizado mais efetivo.

Organização do trabalho

No Capítulo 1, apresentamos um breve resumo da história dos números complexos, destacando os matemáticos que mais contribuíram no desenvolvimento deste conjunto e, além disso, fazemos referência à aplicação desta teoria em outras áreas do conhecimento.

No Capítulo 2, relatamos brevemente como os livros didáticos distribuídos pelo PNLD abordam o conteúdo, relatando a definição dada, as informações históricas e as aplicações da teoria nas diversas áreas do conhecimento.

No Capítulo 3, propomos uma atividade de investigação do lugar geométrico das raízes complexas de uma equação quadrática quando variamos um de seus coeficientes reais.

No Capítulo 4, realizamos um breve estudo sobre oscilações amortecidas, descrevendo sutilmente o funcionamento do sistema de suspensão dos automóveis e apresentando algumas atividades referentes a este estudo.

1 Um pouco da história

Para que estudar isso? Essa é uma pergunta que nós professores de matemática geralmente escutamos com frequência maior do que gostaríamos. Entretanto, responder a esse questionamento não é tão difícil. A história nos revela que o surgimento dos conceitos, definições e teorias matemáticas estão quase sempre associadas à solução de algum problema. Conhecer o contexto que motivou o desenvolvimento de um objeto matemático é importante para despertar o interesse e proporcionar ao aluno um conhecimento expressivo, permitindo a este maior familiaridade ao universo matemático, desmitificando essa ciência.

Quanto ao estudo dos números complexos, é importante que o aluno perceba que o surgimento destes números não está associado a encontrar soluções para uma equação, sem que o resultado obtido seja significativo.

Quando nos deparamos com conceitos matemáticos tão bem estruturados, muitas vezes não paramos para pensar quanto tempo demorou e nem na quantidade de pessoas com mentes brilhantes que se envolveram com o tema. Foi grande a resistência para se admitir a existência dos números complexos até mesmo por matemáticos que utilizavam esses números. O modo como este conteúdo é abordado pode levar o estudante a acreditar que estes objetos foram criados de maneira aleatória, apenas com o objetivo de proporcionar soluções para equações quadráticas que não possuem solução no conjunto dos números reais.

Outro aspecto importante a destacarmos é que, no século XVI quando o estudo dos números complexos começa a aparecer de forma sistemática, ainda não estavam claros, conceitos de números negativos e irracionais. Até mesmo no século XIX, quando praticamente todo o desenvolvimento dos complexos era publicada, alguns matemáticos ainda questionavam a existência dos números negativos. Quando abordamos os conjuntos numéricos, tanto no Ensino Fundamental quanto no Médio, muitas vezes damos a entender que o surgimento destes conjuntos se deu de forma linear.

Neste capítulo, apresentamos um breve relato do desenvolvimento histórico dos números complexos destacando os problemas de resolução das equações cúbicas através de radicais, perpassando por alguns matemáticos cujos trabalhos foram importantes para a estruturação destes números como conhecemos hoje, e ainda considerando a descoberta de que os números complexos representam a melhor linguagem conhecida para descrever fenômenos do mundo real, apresentamos ainda algumas aplicações destes nas mais diversas áreas do conhecimento.

Optamos por dividir o capítulo em 3 seções. A primeira trata do problema que

deu origem ao estudo destes números: a resolução de equações cúbicas. Na segunda seção destacamos alguns matemáticos cujas contribuições foram importantes para o desenvolvimento do conjunto em questão e por fim elencamos algumas aplicações de números complexos nos dias de hoje.

1.1 A origem dos números complexos

Nesta seção, abordamos em especial os trabalhos de Tartaglia (1500-1557), Cardano (1501-1576) e Bombelli (1526-1572), buscando perceber como os métodos de resolução para equações cúbicas foram cruciais no surgimento de novos números.

Problemas envolvendo equações quadráticas, eram resolvidos pelos gregos por meio de construções geométricas. Se a solução da equação não fosse encontrada por estes métodos, esta era então considerada inexistente.

Quando os árabes desenvolveram um método algébrico para a resolução de equações quadráticas por meio de radicais, soluções negativas ou que apresentavam raízes quadradas de números negativos continuaram não sendo aceitas, pois estas não podiam ser justificadas geometricamente.

Apesar de serem encontradas registros sobre raízes quadradas de números negativos por autores dos séculos I e III, apenas no século XVI a aceitação destes números como legítimos tornou-se irreversível, graças aos métodos de resoluções para equações cúbicas por meio de radicais. Vale destacar que por anos, resoluções para equações deste tipo já eram verificadas por alguns matemáticos, entretanto, os problemas envolvidos eram puramente geométricos.

No período do Renascimento os problemas cúbicos começaram a aparecer de modo mais abrangente, fugindo do contexto geométrico, tornando ainda mais importante encontrar um método de resolução para estes problemas. Coube aos matemáticos italianos do século XVI, o grande feito de desenvolver a fórmula para resolução de equações cúbicas por meio de radicais.

Scipione Del Ferro (1465-1526) professor de Matemática em Bolonha, encontrou um método para resolver equações cúbicas do tipo $x^3 + bx = c$ mas não publicou. Apenas revelou este feito ao estudante Antonio Maria Fior.

Fior desafiou publicamente Tartaglia a resolver algumas equações cúbicas. Na disputa, Fior confiante de seu método, propôs a Tartaglia 30 problemas envolvendo o caso particular da cúbica. Entretanto, Tartaglia vence a disputa pois além de ter conseguido resolver todos os problemas propostos por Fior, este seu oponente não conseguiu resolver os problemas por ele propostos. Para isso, Fior precisaria saber resolver equações do tipo $x^3 + px^2 = q$.

Tartaglia (1500-1557)¹

Girolamo Cardano, soube do triunfo de Tartaglia e o convidou à sua casa, insinuando estar interessado em ajudá-lo a encontrar um patrono já que este não tinha muitos recursos. O fato é que Cardano, conseguiu de Tartaglia a fórmula para a resolução das cúbicas utilizadas por ele, comprometendo-se de não publicá-la. Entretanto, Cardano quebra seu juramento e publica em sua grande obra *Ars Magna* (1544), não só a fórmula resolutiva das cúbicas, mas também das quárticas.

Girolamo Cardano (1501-1576)²

Vale ressaltar que Cardano afirma na obra, ter recebido de Tartaglia a sugestão para resolver as equações de terceiro grau. De acordo com Boyer [2], não devemos dar a Tartaglia uma indevida simpatia, já que este também fizera publicações sem as devidas atribuições autorais.

A solução da cúbica do tipo $x^3 + px = q$ publicada por Cardano, consiste na linguagem atual em substituir x por $u - v$ e $uv = p/3$. Assim, se obtém:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2} + q/2} - \sqrt[3]{\sqrt{(p/3)^3 + (q/2)^2} - q/2}$$

Nas equações do tipo $x^3 = px + q$, a única diferença é que devemos fazer $x = u + v$ ao invés de $x = u - v$. Na resolução da equação $x^3 = 15x + 4$, o resultado obtido é :

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

¹ Disponível em <http://mathematica.sns.it/autori/1323/>

² Disponível em <http://micro.magnet.fsu.edu/optics/timeline/people/cardano.html>

Boyer [2] destaca que, Cardano sabia que não existia raiz quadrada de número negativo, mas não conseguia explicar como a fórmula faria sentido em situações como a da equação acima já que $x = 4$ satisfaz a igualdade.

Cardano também apresentou na *Ars Magna* um método para transformar uma equação cúbica em outra sem o termo de segundo grau. Para tal, a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ deve ser escrita em uma nova variável, pela substituição $x = y - a/3$ obtendo-se uma equação do tipo $y^3 + py = q$.

Rafael Bombelli teve o que chamou de "ideia louca". Considerando que na fórmula descrita por Cardano, os radicandos das raízes cúbicas se diferem apenas pelo sinal ele passa a "aceitar" a existência desses números em seus cálculos.

Na solução da equação $x^3 = 15x + 4$, utiliza:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$$

e

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$$

deduzindo que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$.

Bombelli apresentou regras operatórias com raízes de números negativos, demonstrando surpreendente capacidade de abstração algébrica. O engenhoso raciocínio deste matemático indica a importância que os números complexos conjugados iriam desempenhar no futuro.



Bombelli (1526-1573)³

1.2 A estruturação dos números complexos

A aceitação dos números complexos como legítimos, começa a ganhar espaço após as obras de Cardano e Bombelli. Destacamos nesta seção alguns matemáticos cujos tra-

³ Disponível em <http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Bombelli>

balhos desenvolvidos colaboraram com a construção deste conjunto numérico, tomando como referência Boyer [2], Manfredo [5] e Júnior [8].

Girard (1595-1632), Descartes (1596-1650) e D’Alembert (1717-1783), contribuíram significativamente com o estudo destes números ao conjecturarem o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), que foi provado por Gauss (1777-1855) utilizando-se das propriedades topológicas da reta e do plano. O TFA diz que toda equação da forma $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0 = 0$ com coeficientes a_k, \dots, a_0 complexos admitem exatamente K raízes complexas.

Girard introduziu o uso do símbolo $\sqrt{-1}$ para representar a raiz quadrada de -1 e já justificava a necessidade de se aceitar as raízes complexas por três motivos: pela validade das regras, pela utilidade e por não haverem outras soluções.

A influência de Descartes sobre seus contemporâneos foi bastante significativa. Ele afirma que uma equação tem tantas raízes quanto seu grau se forem admitidas as raízes imaginárias. Deve-se a Descartes o uso do termo “imaginários”.



Descartes (1596-1650)⁴

D’Alembert foi o primeiro matemático a apresentar uma demonstração convincente do TFA e teve por meio da publicação de sua obra, papel importante na divulgação dos números complexos.

Girard (1595-1632), Wallis (1616-1703), Argand (1768-1822) e Wessel (1745-1818), procuraram representar geometricamente os números complexos como pontos num plano cartesiano. Wallis em sua tentativa, não foi bem sucedido e os trabalhos de Wessel ficaram conhecidos somente em 1897.

Argand publicou seu livro sobre representações de números complexos em 1806. Seu trabalho pode ser considerado como o mais esclarecedor sobre a representação dos números complexos e por sua obra, ainda hoje, falamos de representação no *plano de Argand*. Vale destacar entretanto, que somente Gauss conseguiu tornar conhecida e aceita

⁴ Disponível em <http://www.biography.com/people/ren-descartes-37613>

em 1831 a representação geométrica dos números complexos. Gauss definiu tais números na forma $a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$.

Hamilton (1805-1865) definiu os números complexos como o conjunto dos pares ordenados (a, b) , onde a e b são números reais. A representação geométrica permitiu que os complexos fossem visualizados e consequentemente aceitos como números.

Ao que se refere à forma trigonométrica dos números complexos, destacamos os trabalhos de Cotes (1682-1716), que em 1714 obteve um importante resultado, relacionado à obtenção das raízes destes números. DeMoivre (1667-1754), apesar de não ser o responsável pela demonstração da fórmula que leva seu nome, a utilizou em alguns casos particulares. Euler (1707-1783) é considerado o homem que dominou os números complexos, em seu trabalho verifica que todo número complexo possui n raízes. Assim, quase 200 anos depois de *Ars magna*, o mistério da fórmula de Cardano nos casos em que se obtinha raízes quadradas de números negativos é desvendado.



Euler (1707-1783)⁵

1.3 Aplicações de números complexos

Com a representação geométrica dos complexos no século XIX, estes números passam a ser aplicados em várias áreas do conhecimento humano, dentro e fora da Matemática. Em 1883, em um estudo sobre distribuição de temperatura, Hadamard resolveu equações diferenciais (funções de Bessel) o qual já apontava a significância destes números em aplicações reais.

Joukowski (1906), utilizando transformações geométricas, construiu uma curva fechada no plano complexo que representa o perfil de uma asa de avião (aerofólio de Joukowski) e, usando o princípio de Bernoulli (1738) e a teoria das funções complexas, deduziu a fórmula $F = x + yi$, que permite calcular a força de levantamento responsável pela sustentação do corpo. Os números complexos permitiram assim, uma explicação

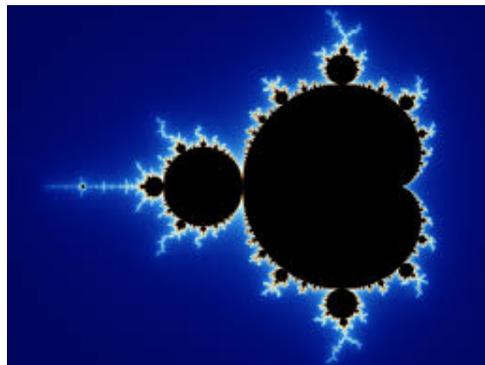
⁵ Disponível em <http://www.popsci.com/science/article/2013-04/happy-birthday-brilliant-mathematician-leonhard-euler>

matemática que possibilitou definir as características do perfil aerodinâmico da asa do avião, colaborando com o progresso aeronáutico.

Na eletricidade, grandezas elétricas de circuitos de corrente alternada, (como as instalações elétricas residenciais) são analisadas com auxílio de números complexos. A impedância (em ohms) e a potência aparente (em volt-ampère) são exemplos de quantidades complexas.

Von Koch (1904) e Julia (1910), foram os pioneiros no nascimento da *Geometria dos Fractais*. A curva de Koch aparece pela primeira vez num artigo de sua autoria em 1906 e, é construída a partir de um segmento de reta submetido a alterações recorrentes (iterações).

Os procedimentos recursivos (iterativos ou recorrentes) no plano complexo deram origem a representações extraordinárias. O conjunto de Mandelbrot é um fractal definido como o conjunto de pontos c no plano complexo para o qual a sequência definida recursivamente por: $z_0 = 0$ e $z_{n+1} = z_n^2 + c$, não tende ao infinito. Estas formas geométricas de dimensão fracionária servem como ferramenta para: descrever as formas irregulares da superfície da terra e modelar fenômenos, aparentemente imprevisíveis.



Representação do Conjunto de Mandelbrot ⁶

Finalizamos esta seção com a reflexão de que, a exemplo dos números complexos, descobertas matemáticas que parecem, à princípio, não estar associada a nenhum correspondente na natureza podem se revelar de suma importância na compreensão e resolução de problemas reais.

⁶ Disponível em <http://apobyotecnologia.wikidot.com/matematicas-curiosidades>

2 O Conjunto dos Números Complexos nos livros didáticos

No Brasil, alunos da rede pública de ensino recebem gratuitamente livros didáticos por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[11]. Um edital especifica todos os critérios para inscrição das obras. Os títulos inscritos pelas editoras são avaliados pelo MEC, que elabora o Guia do Livro Didático, composto das resenhas de cada obra aprovada que é disponibilizado nas escolas.

Considerando que o livro didático tem por finalidade subsidiar o trabalho do docente e é ferramenta importante no processo de ensino e aprendizagem, analisar como os conteúdos são estruturados em cada obra disponibilizada pelo programa, é fundamental para a escolha adequada do material, em conformidade com a proposta pedagógica da escola.

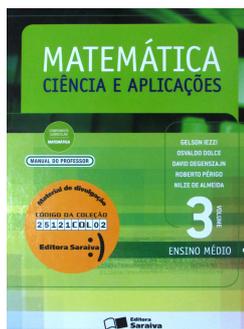
As orientações curriculares para o Ensino Médio apontam o estudo mais aprofundado dos números complexos como um tema complementar, sugerindo a exploração dos aspectos históricos do conjunto e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra, podendo-se também explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano.

Ainda de acordo com as orientações curriculares, a articulação da Matemática ensinada no Ensino Médio com temas atuais da ciência e da tecnologia é possível e necessária.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [3] para o Ensino Médio, destacam que os instrumentos matemáticos são especialmente importantes num nível de ensino onde é essencial uma construção abstrata mais elaborada, salientando ainda que possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver.

De acordo com o exposto acima, apresenta-se nesse capítulo, uma breve análise de como o estudo do conjunto dos números complexos é abordado em cada uma das coleções citadas no Guia de Livros Didáticos 2012. O objetivo aqui é simplesmente apreciar e descrever como o assunto é exposto, a definição dada para o conjunto e as aplicações destes números apontadas em cada obra. Por ser um conteúdo proposto para a terceira série do Ensino Médio, o estudo destes números aparece no volume 3 das coleções em questão.

2.1 Análise dos livros didáticos



Livro 1 - Matemática: ciência e aplicações.

Autores: Gelson Iezzi *et al.*

Referências: [7].

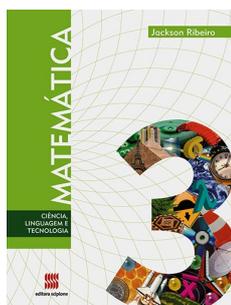
Os autores apresentam na introdução do capítulo um pouco da história dos números complexos. Fazem referência ao problema de Girolamo Cardano (1501-1576) em dividir um segmento de medida 10 em duas partes cujo produto seja 40 e mencionam a resolução da equação $x^3 - 4x - 4 = 0$ por Rafael Bombelli (1526 - 1572) utilizando a fórmula de Cardano (o texto não menciona Tartaglia e nem descreve a fórmula resolvente). Destacam o trabalho de Gauss (1777-1855) na legitimação da teoria que é estudada nos dias de hoje e ainda a teoria aritmética de Hamilton (1805 - 1866) em considerar os números complexos como pares ordenados definindo a soma e o produto para estes. Com base nesta, o conjunto dos números complexos é definido na obra, como o conjunto de todos os pares ordenados de números reais para os quais valem as definições:

Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$

Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

Multiplicação: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Definido o conjunto, é feita a representação geométrica dos números complexos, apresentando na sequência, a forma algébrica e as definições de conjugado, módulo e argumento. Por fim expõe-se a forma trigonométrica e as operações com números complexos nesta representação. A obra não cita exemplos e tampouco menciona alguma aplicação dos números complexos em outras áreas de conhecimento.



Livro 2 - Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia.

Autor: Jackson Ribeiro.

Referências: [12].

A introdução do capítulo, destaca a importância da fórmula resolvente de equações cúbicas na construção dos números complexos, fazendo referência à sua publicação no livro

Ars Magna de Girolamo Cardano, ressaltando que tal fórmula é creditada por alguns autores ao italiano Tartaglia.

Após descrever a fórmula, apresenta-se a resolução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ por Rafael Bombelli, matemático que passa a considerar em seus cálculos e desenvolver regras de operações para os números que hoje conhecemos como complexos. Destaca-se também a importância dos trabalhos de Gauss na estruturação do conjunto.

A definição de igualdade e as operações de adição e multiplicação com pares ordenados de números reais aparecem em primeiro plano na seção onde se define o conjunto dos números complexos. Aqui, este também é definido como o conjunto de todos os pares ordenados de números reais para os quais valem a igualdade, a soma e a multiplicação.

As demais seções da obra tratam da representação algébrica de números complexos; igualdade e operações na forma algébrica; módulo; forma trigonométrica e aplicações de números complexos na geometria onde são apresentados problemas de rotação de figuras no plano.

Ao final do capítulo um infográfico sobre a geração de energia elétrica insinua a aplicação dos números complexos no cálculo de tensão elétrica, mas o procedimento não é evidente. O manual do professor recomenda um trabalho conjunto com o professor de física a fim de esclarecer o processo de transformação de energia cinética em energia elétrica.



Livro 3 - Novo olhar matemática.

Autor: Joamir Roberto de Souza.

Referências: [15].

A Unidade 4, sobre números complexos, é introduzida com um pequeno texto sobre as forças aerodinâmicas que atuam sobre um avião, mencionando o matemático russo Nikolai Joukowski que desenvolveu um método conhecido como Transformações de Joukowski onde se utiliza conceitos relacionados ao conjunto dos números complexos. As transformações de Joukowski, possibilitaram aos engenheiros aeronáuticos, realizar estudos sobre aerofólios e suas influências na força de sustentação dos aviões.

O único capítulo da unidade, apresenta na primeira seção um pouco da história dos números complexos, mencionando a importância da fórmula resolutive de equações cúbicas desenvolvida por Tartaglia e publicada por Cardano nas discussões e trabalhos que culminaram no desenvolvimento dos números complexos. De acordo com o autor, a

equação $x^3 - 15x = 4$ foi resolvida por Bombelli que percebeu que $x = 4$ era solução do problema e utilizando o método de Tartaglia obteve $x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$. O texto credita aos matemáticos Gaspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a associação dos números complexos a pontos do plano real, destacando que Wessel foi o primeiro a publicar um artigo sobre o assunto. A representação de um número complexo na forma de par ordenado feita posteriormente por Willian Rowan Hamilton (1805-1865), também é mencionada.

Após definir o conjunto dos números complexos como o conjunto de pares ordenados de números reais em que estão definidas certas operações (sem mencionar quais são elas) a forma algébrica destes números é descrita como segue: todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser representado na forma $z = x + yi$ com x e y reais e $i^2 = -1$, onde i é a unidade imaginária. Vale destacar que é a primeira referência no texto à unidade imaginária e não há nenhuma articulação entre a representação algébrica e a forma de par ordenado.

Os tópicos sobre Representação Geométrica, operações com números complexos na forma algébrica, módulo e representação trigonométrica são apresentados em seguida. Ao tratar da multiplicação e divisão na forma trigonométrica o texto apresenta uma aplicação ao estudo de correntes alternadas descrevendo as expressões matemáticas que fornecem os valores instantâneos da tensão (v) e da corrente (i) dadas por $v(t) = V \cdot \text{sen}(wt + \alpha_0)$ e $i(t) = I \cdot \text{sen}(wt + \beta_0)$ acrescentando que estas, não permitem métodos práticos para a análise de circuitos, sendo conveniente utilizar um vetor radial girante denominado fasor, destacando que por serem vetores de módulo constante, os fasores podem ser representados por números complexos na forma trigonométrica. Uma atividade relacionada à aplicação descrita é proposta ao final do texto.

O último tópico do capítulo aborda a rotação de figuras em torno da origem do sistema de coordenadas e ao final do capítulo, apresenta-se um pouco mais da história dos números complexos.



Livro 4 - Conexões com a matemática.

Autores: Juliana Matsubara Barroso, *et al.*

Referências: [1].

O capítulo que trata dos números complexos apresenta um breve histórico do estudo destes números, destacando que seu surgimento costuma ser relacionado, erro-

neamente, às resoluções de equações do segundo grau, nas quais se encontram raízes quadradas de números negativos. O texto cita a importância do estudo deste conjunto devido às aplicações no campo da Engenharia, Aerodinâmica, Geometria Fractal e em Sistemas Dinâmicos.

Uma linha do tempo associa aos matemáticos Tartaglia, Cardano, Bombelli, Euler e Gauss, suas contribuições na construção destes números e credita a Gauss a expressão *número complexo*. Destaca-se ainda, a dificuldade encontrada por Cardano ao aplicar a fórmula resolvente de equações do tipo $x^3 + px = q$ na resolução da equação $x^3 - 15x = 4$ por aparecer na solução a raiz quadrada de um número negativo. Mesmo sabendo que $x = 4$ era solução do problema, de acordo com o texto, Cardano não conseguiu compreender como aplicar a fórmula nesse caso.

A obra não apresenta uma definição para o conjunto dos números complexos, descreve-se apenas a forma algébrica destes dizendo que todo número complexo pode ser escrito na forma $z = a + bi$, em que a e b são números reais e i é a unidade imaginária. As demais seções do capítulo tratam das operações com números complexos na forma algébrica, representação geométrica, forma trigonométrica e operações na forma trigonométrica.



Livro 5 - Matemática: ensino médio.

Autores: Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz.

Referências: [14].

As autoras iniciam o Capítulo 10 (que trata dos números complexos), mencionando que a Física e áreas da Engenharia utilizam esse conhecimento em modelos para explicar fenômenos relacionados à eletricidade de movimentos em fluidos como o ar e a água. Apresentam em seguida uma equação quadrática cuja solução não pertence ao conjunto dos números reais e descrevem a fórmula resolvente publicada por Cardano no livro *Ars Magna* e a resolução da equação $x^3 = 15x + 4$ por Bombelli, que utilizando a fórmula de Cardano chegou a um impasse já que na solução aparecia a raiz quadrada de um número negativo. Sabendo que $x = 4$ era solução, segundo o texto, Bombelli tentou encontrar regras para trabalhar com raízes quadradas de números negativos. Considerando $\sqrt{-1}$ como um número qualquer e , usando as mesmas regras da Álgebra Elementar conseguiu mostrar que o número obtido pela fórmula de Cardano, era a raiz da equação que estava tentando resolver. Destaca-se que à partir desse momento, outros matemáticos passam a estudar e trabalhar com raízes quadradas de números negativos e cita Albert Girard,

Descartes, Euler e Gauss destacando que é nos estudos deste último, que os números complexos ganham status de campo numérico.

O número complexo é definido como todo par ordenado (a, b) que é escrito na forma $a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária, ou seja, $i^2 = -1$. Não se menciona no texto, as operações com pares ordenados. Após apresentar o conjunto, as operações na forma algébrica são definidas, e as demais seções tratam das propriedades; módulo e forma trigonométrica.

Como aplicação menciona-se no texto a rotação de figuras no plano e ao final do capítulo, um texto aborda a importância dos números complexos na Aerodinâmica, destacando que o matemático Russo Nikolai Joukowsky (1847-1921) foi o primeiro cientista a explicar matematicamente a aerodinâmica para a sustentação gerada por um corpo em movimento através de um fluido ideal. Joukowsky deduziu uma fórmula $F = x + yi$ que permite calcular a força de arrasto responsável pela sustentação do corpo.



Livro 6 - Matemática: contexto e aplicações.

Autor: Luiz Roberto Dante.

Referências: [6].

O conjunto dos números complexos é abordado no capítulo 6, fazendo menção à geometria do fractal e o conjunto de Mandelbrot. O autor relata que os números complexos aparecem no século XVI motivados pelas resoluções de equações de terceiro e quarto graus. Cita ainda a publicação do livro *Ars Magna* de Cardano em 1545 descrevendo o problema cuja solução é obtida por meio da equação $x^3 - 15x = 4$. Aplicando a fórmula deduzida na obra citada a solução 4 era obtida da expressão $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$. De acordo com o texto, Cardano se perguntava como um número real poderia se originar de uma expressão que continha raízes de números negativos se estas não existiam. Outra curiosidade é que ao operar com estes números tidos como esquisitos, os resultados obtidos eram corretos. O autor faz referência ainda às contribuições de Bombelli, Euler e Gauss.

A proposta de três atividades chama a atenção ainda no início do capítulo. A primeira apresenta a fórmula publicada no livro *Ars Magna* de Cardano e cita que esta foi sugerida por Tartaglia. A segunda questão registra o problema apresentado por Cardano em dividir um segmento de medida 10 em duas partes de modo que produto seja 40. A última atividade, apresenta a equação $x_{n+1} = (x_n)^2 + z$ na qual $z = a + bi$ estudada por Mandelbrot, sugerindo que o aluno registre os resultados e observe a sequência encontrada.

O conjunto dos números complexos é definido na obra como o conjunto de todos os pares ordenados de números reais em que estão definidas:

$$\text{Igualdade: } (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

$$\text{Adição: } (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\text{Multiplicação: } (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

O autor menciona que esta definição foi proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837. Após definir o conjunto, as demais seções tratam da forma algébrica; representação geométrica; conjugado; divisão de números complexos; módulo; forma trigonométrica; equações binômias e trinômias e finalmente as aplicações.

Além de problemas associados à rotação de figuras no plano, o autor apresenta uma aplicação à Engenharia Elétrica em um problema de circuito com corrente alternada. Propõe ainda a resolução de dois exercícios associados a esta aplicação.

Um pouco mais da história finaliza o capítulo sobre os números complexos.



Livro 7 - Matemática - Paiva.

Autor: Manoel Paiva.

Referências: [10].

O conjunto dos números complexos é abordado no sétimo capítulo do volume. Na primeira seção do capítulo, um problema concreto cuja solução recai em uma equação cúbica motiva o estudo destes números. A resolução é feita utilizando o método de Cardano que consiste em substituir x por $u - v$ de modo que o produto uv seja igual a terça parte do coeficiente de x na equação $x^3 + px = q$ (na questão proposta $p = -6$ e $q = -4$). A raiz quadrada de um número negativo aparece na solução, sugerindo que a equação não admite raiz real. Entretanto, verifica-se que esta conclusão é equivocada já que por substituição percebe-se que o número real $x = 2$ é raiz da equação. O texto menciona ainda Cardano e Bombelli, dizendo que Cardano foi o primeiro a admitir a existência de números não reais.

O número complexo é definido na segunda seção como sendo todo número da forma $a + bi$ em que a e b são números reais e i é a unidade imaginária. Dada a definição, as seções posteriores tratam das operações na forma algébrica; potências de números complexos com expoentes inteiros; representação geométrica dos números complexos; módulo; coordenadas polares no plano complexo e por fim as operações com números complexos

na forma trigonométrica. Ao final do capítulo, apresenta-se um problema de movimentos de translação e rotação no plano.

2.2 Síntese

Ao que se refere à abordagem histórica do conjunto dos números complexos, é uma preocupação dos autores salientar que o surgimento destes números está associado à resolução de equações cúbicas. Algumas obras, entretanto, não descrevem a fórmula resolutive para estas equações. Dentre as que apresentam a resolução, podemos destacar o método utilizado no sétimo livro analisado por não se utilizar a fórmula pronta mas sim o processo de substituição de variáveis que permite chegar ao resultado procurado. Algumas divergências quanto à compreensão e realização de cálculos com raízes quadradas de números negativos aparecem nos textos. Alguns consideram que Cardano já trabalhava com estes números enquanto outros, mencionam que um primeiro tratamento destes ocorrera somente com Bombelli. Quanto a contribuição de outros matemáticos na construção deste conjunto, alguns autores são mais detalhistas, mas todos citam e creditam especialmente a Gauss.

Quanto à definição de números complexos, as operações com pares ordenados são apreciadas em apenas nos livros 1, 2 e 6. O conjunto definido à partir das definições para igualdade, adição e multiplicação de pares ordenados, permitem uma melhor compreensão da unidade imaginária e a associação dos números complexos a pontos do plano.

As aplicações dos números complexos em outras áreas do conhecimento, não é mencionada em todas as obras. Algumas fazem referência e sugerem que tais números são utilizados na Física e/ou em campos da engenharia. Os livros 3 e 6 são os que melhor exploram o uso dos números complexos e apresentam atividades relacionadas. Tais atividades, são importantes por permitirem ao aluno maior contato com o tema estudado. Para estes, o conteúdo passa a ter ainda mais significado do que quando apenas mencionamos que as aplicações existem mas sem explorá-las.

3 Estudo das raízes complexas não reais da equação $az^2 + bz + c = 0$

Neste capítulo apresentamos uma investigação do lugar geométrico das raízes complexas não reais das equações quadráticas, quando variamos um de seus coeficientes. Conforme já exposto na introdução deste trabalho, o desenvolvimento desta proposta de atividade foi motivada pelo questionamento de um aluno da terceira série do Ensino Médio no decorrer do estudo dos números complexos.

Nos livros didáticos, ainda no início do estudo destes números, encontramos diversas questões envolvendo a representação de conjuntos no plano complexo. Como exemplos de atividades facilmente encontradas em qualquer obra, podemos citar:

- 1) Represente os números complexos z tais que: $|z| = 6$;
- 2) Determine e represente as raízes da equação $x^2 + 3x + 10 = 0$
- 3) Represente no plano complexo o subconjunto de \mathbb{C} : $A = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| < 3\}$

A resolução destas questões dependem apenas de conhecimentos básicos como: definição, representação e módulo de um número complexo. O primeiro item tem claramente como solução, uma circunferência com centro na origem e raio 6. A equação descrita no item 2) tem como raízes $x = \frac{-3 \pm 7i}{2}$, que correspondem aos pares ordenados $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ e $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ no plano complexo. No último exemplo, fazendo $z = a + bi$ e usando a definição de módulo obtemos como solução o interior do círculo de centro $(1, 0)$ e raio 3. As soluções destes itens são apresentadas na Figura 1.

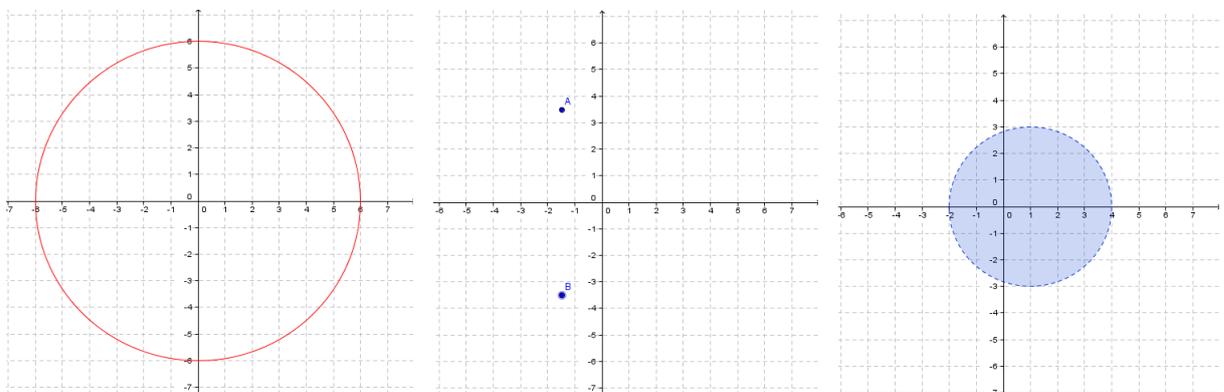


Figura 1 – Solução dos exemplos 1), 2) e 3) respectivamente.

Nossa proposta de atividade não se distancia muito das questões citadas. Quando pensamos em uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com coeficientes reais e $a \neq 0$, sabemos que a solução encontrada pode não pertencer a \mathbb{R} (conjunto dos números reais) e, nesse caso, a exemplo do que observamos no item 2) a equação terá como raízes, números complexos conjugados. O que diferencia a atividade sugerida neste trabalho do item mencionado, é que não estamos interessados nas raízes de uma equação com todos os coeficientes fixos. Queremos na verdade, perceber como variam no plano complexo as raízes de uma equação quadrática quando um de seus coeficientes é alterado.

Considere por exemplo a equação $z^2 + bz + 9 = 0$. Para $-6 < b < 6$, não é difícil perceber que para cada valor atribuído a b nesse intervalo, teremos uma solução distinta em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (conjunto dos números complexos). Diante disso, podemos nos perguntar:

- i) A variação destas soluções respeitam algum padrão?
- ii) Qual o lugar geométrico das soluções de todas as equações geradas pela variação de b ?
- iii) Visualizar estes resultados podem facilitar a compreensão de algum conceito ou aplicação?

Buscamos neste e no próximo capítulo, responder a estas questões, utilizando o software *GeoGebra* como ferramenta importante na construção e visualização de resultados.

Optamos por discorrer a análise das soluções de uma equação quadrática em \mathbb{C} em três seções. Na primeira, apresentamos uma investigação do lugar geométrico das raízes complexas da equação $az^2 + bz + c = 0$ quando variamos unicamente o coeficiente a . Nas demais seções, um desenvolvimento semelhante é descrito quando as variáveis são os coeficientes b e c , respectivamente. Vale destacar que neste trabalho estamos considerando apenas as equações com coeficientes reais.

3.1 Estudo das raízes complexas da equação $az^2 + b_0z + c_0 = 0$

Nesta seção, apresentamos um estudo do lugar geométrico das raízes complexas da equação $az^2 + b_0z + c_0 = 0$. Aqui, a é o único coeficiente variável.

Um dos objetivos do desenvolvimento desta atividade é desenvolver o raciocínio matemático do aluno, fazendo com que este, à partir da observação de regularidades, possa generalizar, conjecturar e validar esta conjectura por meio de demonstrações rigorosas.

Nessa perspectiva, sugerimos ao professor iniciar o trabalho de investigação à partir do estudo de conjuntos específicos cujas representações no plano complexo serão facilmente obtidas pelo aluno com o auxílio do software *GeoGebra*.

É importante destacar que uma abordagem cuidadosa, desperta a curiosidade e desafia o estudante a encontrar a solução do problema, cabendo ao docente é claro, fornecer as ferramentas necessárias para que o objetivo seja alcançado.

O desenvolvimento de alguns exercícios como os descritos no início deste capítulo, são fundamentais para que o aluno se familiarize com a representação de conjuntos no plano complexo. Damos especial atenção às atividades semelhantes ao exemplo 2) por propiciarem maior articulação com nossa proposta de investigação.

Para uma primeira análise do lugar geométrico das raízes complexas da equação $az^2 + bz + c = 0$ quando variamos o coeficiente a , podemos propor ao estudante, determinar e representar no plano complexo os conjuntos:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; az^2 + 4z + 8 = 0 \text{ com } a \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; az^2 + 2z + 8 = 0 \text{ com } a \in \mathbb{R}\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; az^2 - z + 5 = 0 \text{ com } a \in \mathbb{R}\}$$

Note que, como existem infinitos valores de a que tornam complexas as raízes das equações, cada conjunto apresentado, corresponde na verdade, às soluções de uma infinidade de equações. Como podemos então verificar se estas soluções obedecem a um padrão que possa ser facilmente descrito?

Vamos resolver as equações que caracterizam cada conjunto, escrevendo z em função de a . Utilizando a fórmula resolvente para equações quadráticas, $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ obtemos para a equação $az^2 + 4z + 8 = 0$ na qual $b = 4$ e $c = 8$:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.a.8}}{2a} \Leftrightarrow \\ z &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32a}}{2a} \Leftrightarrow \\ z &= \frac{-4 \pm \sqrt{16(1 - 2a)}}{2a} \Leftrightarrow \\ z &= \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 2a}}{2a} \Leftrightarrow \\ z &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 - 2a}}{a} \end{aligned}$$

Como estamos interessados nas soluções complexas não reais da equação, devemos claramente ter $(1 - 2a) < 0 \Leftrightarrow a > 1/2$. Nesse caso:

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{(2a - 1)(-1)}}{a} \Leftrightarrow \\ z &= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{2a - 1}}{a} \end{aligned}$$

Escrevendo o número complexo z na forma de par ordenado temos:

$$z = \left(-\frac{2}{a}, \pm \frac{2\sqrt{2a-1}}{a} \right)$$

$$\text{Consequentemente, } A = \left\{ z \in \mathbb{C}; z = \left(-\frac{2}{a}, \pm \frac{2\sqrt{2a-1}}{a} \right), a > 1/2 \right\}$$

Para o professor, talvez seja claro o conjunto solução do problema, entretanto, para o aluno de Ensino Médio, a visualização do lugar geométrico correspondente a estes pontos pode não ser tão evidente. O software *GeoGebra* é uma ferramenta que permite explicitar tal região do plano à partir de uma construção prática, apresentada no final do capítulo na seção 3.4.

A Figura 2 obtida por essa construção, apresenta o lugar geométrico equivalente ao conjunto A .

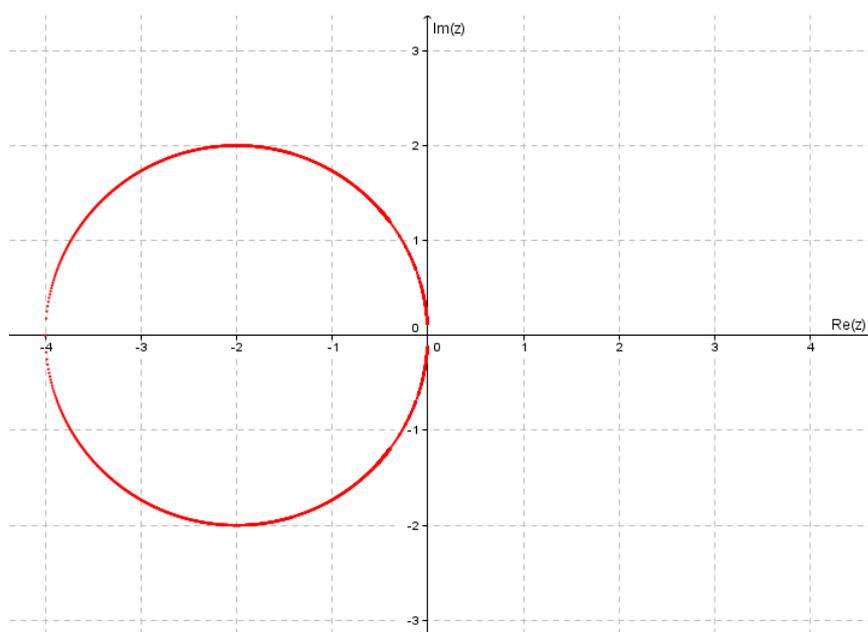


Figura 2 – Solução da equação $az^2 + 4z + 8 = 0; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Note que os números $z = \left(-\frac{2}{a}, \pm \frac{2\sqrt{2a-1}}{a} \right)$ correspondem a pontos da circunferência λ de centro $O = (-2, 0)$ e raio $r = 2$ cuja equação é dada por $\lambda : (x+2)^2 + y^2 = 4$.

Resolvendo de modo análogo as equações $az^2 + 2z + 8 = 0$ e $az^2 - z + 5 = 0$ cujas soluções em \mathbb{C} caracterizam os conjuntos B e C , obtemos:

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C}; z = \left(-\frac{1}{a}, \pm \frac{\sqrt{8a-1}}{a} \right); a > 1/8 \right\}$$

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C}; z = \left(\frac{1}{2a}, \pm \frac{\sqrt{20a-1}}{2a} \right); a > 1/20 \right\}$$

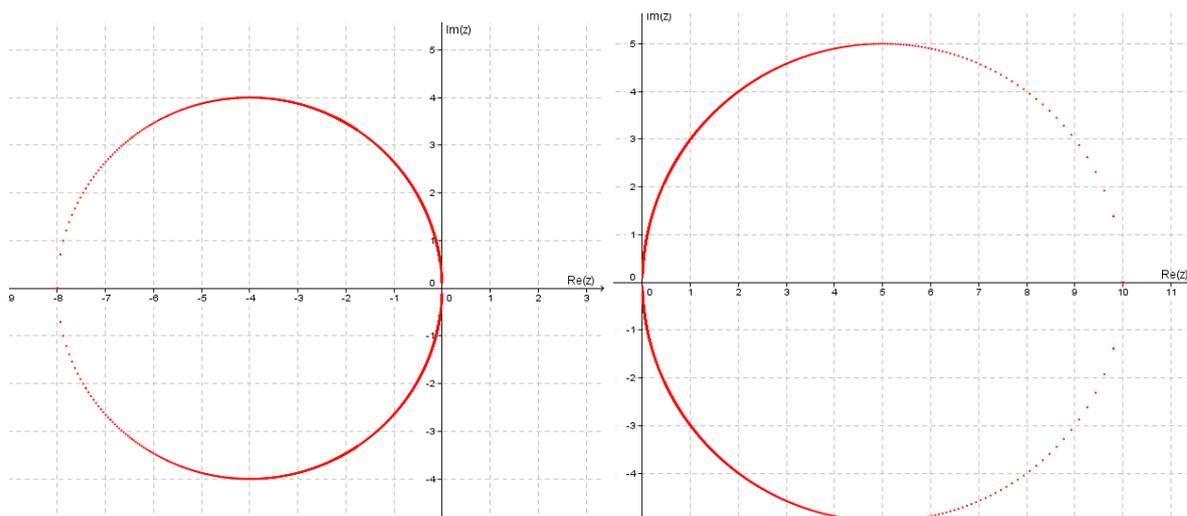


Figura 3 – Representação dos Conjuntos B e C , respectivamente.

Observando as figuras que representam A , B e C , notamos que os números complexos z que satisfazem a condição de cada conjunto, correspondem a pontos de uma circunferência. Podemos então questionar aos alunos, se seria possível ou não, caracterizar o centro e o raio desta curva, em função dos coeficientes fixos da equação por meio da qual ela é obtida?

Para facilitar a visualização dos resultados, na busca por regularidades nas soluções encontradas, a Tabela 1 apresenta os valores de b_0 e c_0 , o centro e o raio das circunferências obtidas na representação dos conjuntos A , B e C no plano complexo:

Conjunto	b_0	c_0	Centro da circunferência	Raio
A	4	8	$(-2,0)$	2
B	2	8	$(-4,0)$	4
C	-1	5	$(5,0)$	5

Tabela 1 – Elementos da equação e da representação geométrica dos conjuntos A , B e C .

Não é difícil perceber que a circunferência obtida no plano complexo, cujos pontos são soluções não reais de $az^2 + b_0z + c_0 = 0$ possui centro $O = \left(-\frac{c_0}{b_0}, 0\right)$ e raio $r = \left|\frac{c_0}{b_0}\right|$. Entretanto, será que todos os pontos desta curva, pertencem ao conjunto definido pelas raízes complexas da equação? E mais, será possível existir algum número z pertencente ao conjunto, que não esteja sobre esta circunferência?

Antes de pensarmos em uma generalização para responder a estas perguntas, vamos retornar ao conjunto A . Recordemos que os números complexos $z = (x, y)$ pertencentes a este conjunto, são (de acordo com a Figura 2) pontos da circunferência $\lambda : (x + 2)^2 + y^2 = 4$. Note entretanto, que o número $z = (-4, 0)$ não faz parte do

conjunto solução por ser um número real obtido quando $a = 1/2$. Agora, com relação aos demais pontos do conjunto, sendo $z = \left(-\frac{2}{a}, \pm \frac{2\sqrt{2a-1}}{a}\right)$ podemos escrever:

$$x = -\frac{2}{a} \text{ (parte real de } z) \text{ e}$$

$$y = \pm \frac{2\sqrt{2a-1}}{a} \text{ (parte imaginária de } z).$$

Observe que $x = -\frac{2}{a}$ é uma função contínua e crescente para $a > 1/2$ e mais:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (-2/a) = 0$$

e

$$\lim_{a \rightarrow 1/2} (-2/a) = -4$$

De acordo com o exposto, temos que a parte real de z pertence ao intervalo $(-4, 0)$.

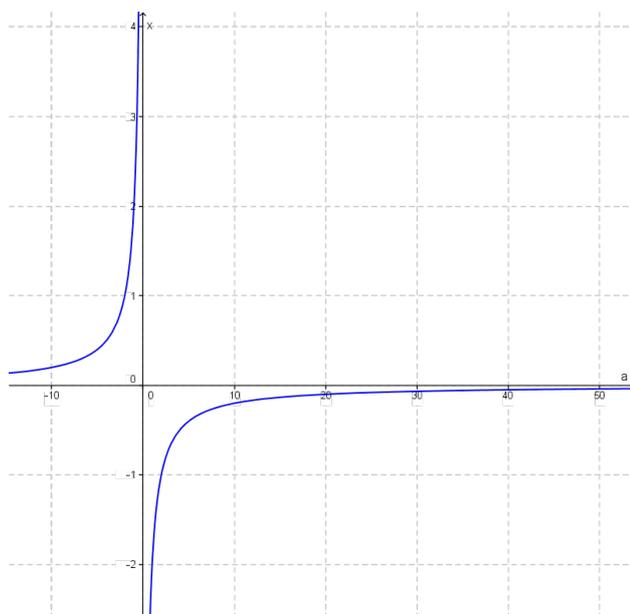


Figura 4 – Gráfico da função $x = -\frac{2}{a}$

Do mesmo modo, podemos verificar que $y = \frac{2\sqrt{2a-1}}{a}$ é uma função contínua em seu domínio e ainda:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\sqrt{2a-1}}{a}\right) = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow 1/2} \left(\frac{2\sqrt{2a-1}}{a}\right) = 0$$

Observe também que y assume valor máximo igual a 2 quando $a = 1$. (Figura 5)

Considerando $y = -\frac{2\sqrt{2a-1}}{a}$, verificamos novamente que:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2\sqrt{2a-1}}{a} \right) = 0$$

e

$$\lim_{a \rightarrow 1/2} \left(-\frac{2\sqrt{2a-1}}{a} \right) = 0$$

E ainda, y assume valor mínimo igual a (-2) quando $a = 1$. Temos portanto, a parte imaginária de z pertencente a $[-2, 2] \setminus \{0\}$.

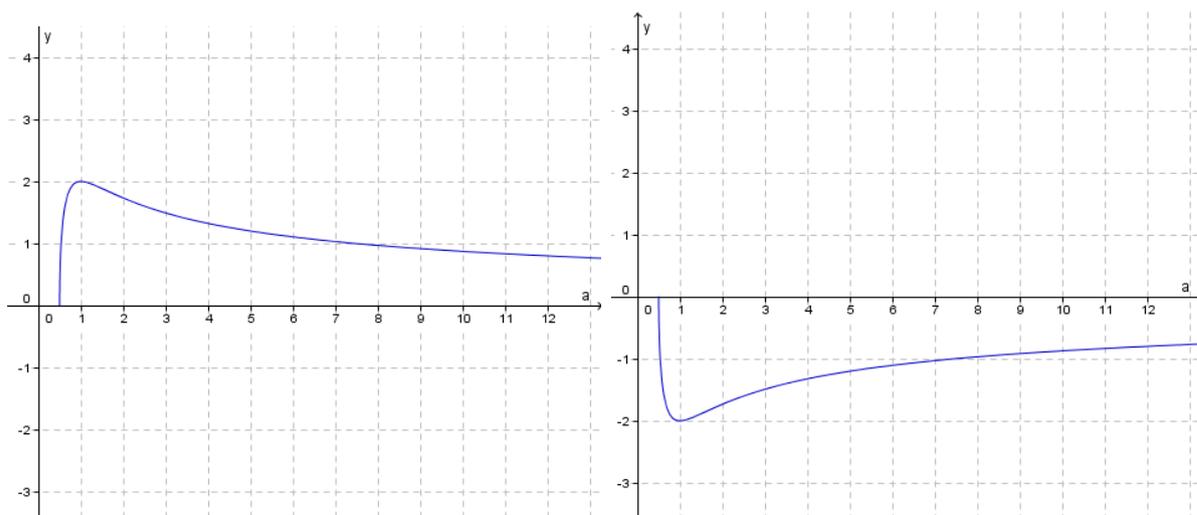


Figura 5 – Gráficos de $y = \frac{2\sqrt{2a-1}}{a}$ e $y = -\frac{2\sqrt{2a-1}}{a}$.

Observar os intervalos nos quais podemos obter os valores de x e y , permitem evidenciar o conjunto solução da questão. Por meio dessa análise percebemos por exemplo, que os pontos da circunferência para os quais $y = 0$ não pertencem ao conjunto A . Também destacamos o fato de os valores limitados tanto para a parte real, quanto para a imaginária de z , serem equivalentes aos valores limites de x e y na curva de equação $(x+2)^2 + y^2 = 4$.

Não provamos até aqui que, o conjunto A definido por $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; az^2 + 4z + 8 = 0; a \in \mathbb{R}\}$ pode ser reescrito como $\{(x, y) \in \mathbb{C}; (x+2)^2 + y^2 = 4; y \neq 0\}$ sendo $(x, y) = z$, mas temos fortes razões para crer nesse resultado. Verificar esta equivalência não é difícil, mas preferimos aqui, desenvolver a solução em sua forma mais ampla.

É válido destacar, que mesmo sendo um trabalho voltado para alunos do ensino médio, o professor pode apresentar os referidos limites de modo informal, permitindo que estes percebam o que acontece com os valores de x e y quando o valor de a tende ao infinito ou a $1/2$. A construção dos gráficos dessas funções com o GeoGebra, pode agilizar e facilitar a compreensão dos limites e da continuidade das funções.

3.1.1 Generalização

Observando a representação dos conjuntos A , B e C apresentados anteriormente, somos levados a acreditar que o conjunto $M = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; az^2 + b_0z + c_0 = 0 \text{ com } a \in \mathbb{R}^*\}$ possui no plano complexo, representação equivalente à circunferência de centro $\left(-\frac{c_0}{b_0}, 0\right)$ e o raio $r = |c_0/b_0|$, com exceção é claro, dos pontos nos quais a parte imaginária de z é nula, ou seja, $M = \left\{z = (x, y) \in \mathbb{C}; \left(x + \frac{c_0}{b_0}\right)^2 + y^2 = \left|\frac{c_0}{b_0}\right|^2; y \neq 0\right\}$. Destacamos que os coeficientes b_0 e c_0 são números reais diferentes de zero.

Façamos a demonstração deste resultado. Aplicando a fórmula resolutive para equações quadráticas temos:

$$z = \frac{-b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}}{2a}$$

Como estamos interessados nas raízes complexas não reais da equação, devemos ter $(b_0^2 - 4ac_0) < 0 \Leftrightarrow b_0^2 < 4ac_0$. Note que tal desigualdade somente é satisfeita nos casos em que a e c_0 possuem o mesmo sinal. Caso estes coeficientes sejam positivos devemos ter $\left(a > \frac{b_0^2}{4c_0}\right)$ e caso sejam negativos $\left(a < \frac{b_0^2}{4c_0}\right)$.

Para os valores de a descritos, sendo $(b_0^2 - 4ac_0) < 0$ podemos escrever:

$$z = \frac{-b_0 \pm i\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a}$$

Na forma de par ordenado temos:

$$z = \left(-\frac{b_0}{2a}, \pm \frac{\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a}\right)$$

Vamos então mostrar que $z = (x, y) = \left(-\frac{b_0}{2a}, \pm \frac{\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a}\right)$, corresponde a pontos da curva $\left(x - \left(-\frac{c_0}{b_0}\right)\right)^2 + y^2 = \left|\frac{c_0}{b_0}\right|^2; y \neq 0$.

De fato:

Sendo $z = (x, y) = \left(\frac{-b_0}{2a}, \pm \frac{\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a}\right)$ temos:

$$y = \frac{\pm \sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \frac{4ac_0 - b_0^2}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \frac{c_0}{a} - \frac{b_0^2}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 + \left(\frac{2b_0}{2b_0}\right)\frac{c_0}{a} - \frac{b_0^2}{4a^2} - \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - 2\left(\frac{-b_0}{2a}\right)\frac{c_0}{b_0} - \left(\frac{-b_0}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2$$

Substituindo $x = \left(-\frac{b_0}{2a}\right)$ na última expressão temos:

$$y^2 = \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - 2(x)\left(\frac{c_0}{b_0}\right) - (x)^2 - \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - \left[(x)^2 + 2(x)\left(\frac{c_0}{b_0}\right) + \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2\right] \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 - \left[x + \left(\frac{c_0}{b_0}\right)\right]^2 \Leftrightarrow$$

$$\left[x + \left(\frac{c_0}{b_0}\right)\right]^2 + y^2 = \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left[x - \left(\frac{-c_0}{b_0}\right)\right]^2 + y^2 = \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2$$

Concluimos assim que os valores de $z = (x, y)$ com $y \neq 0$ que satisfazem a equação $az^2 + b_0z + c_0 = 0$ são tais que

$$\left[x - \left(-\frac{c_0}{b_0}\right)\right]^2 + y^2 = \left(\frac{c_0}{b_0}\right)^2$$

onde, $x = \left(\frac{-b_0}{2a}\right)$ e $y = \frac{\pm\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a}$.

Tal equação corresponde à circunferência de centro $O = (-c_0/b_0, 0)$ e o raio $r = |c_0/b_0|$ conforme queríamos.

Devemos enfatizar que o procedimento descrito é possível pois a , b_0 e c_0 são considerados números reais diferentes de zero.

Observe ainda que na função $x = \left(\frac{-b_0}{2a}\right)$, x tende a zero à medida que a tende ao infinito.

Do mesmo modo, podemos observar que $y = \pm\frac{\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a} \neq 0$ sempre que $(4ac_0 > b_0^2)$ e ainda, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a} = 0$.

Das observações feitas segue que $\lim_{a \rightarrow +\infty} (x, y) = (0, 0)$, ou seja, quanto maior o valor assumido para a variável a mais próximo de $(0, 0)$ torna-se o número $z = (x, y)$ e além disso $z = (0, 0)$ não é solução do problema.

Finalmente, concluímos que:

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; az^2 + b_0z + c_0 = 0; a \in \mathbb{R}^*\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}; \left[x - \left(-\frac{c_0}{b_0} \right) \right]^2 + y^2 = \left(\frac{c_0}{b_0} \right)^2; y \neq 0 \right\}$$

3.1.2 Casos particulares de b_0 e c_0

Na subseção 3.1.1 abordamos as equações nas quais b_0 e c_0 são números reais diferentes de zero. Vamos agora fazer as últimas observações quanto ao lugar geométrico das raízes complexas não reais da equação $az^2 + b_0z + c_0 = 0$ quando $b_0 = 0$ ou $c_0 = 0$.

Por ser uma análise bem simples que a apresentada anteriormente, o professor pode propor aos alunos investigar e obter a solução do problema sem realizar muitas interferências.

Vamos inicialmente considerar $b_0 = 0$ e $c_0 \neq 0$. Recordando que a solução da equação, equivale aos números complexos $z = (x, y) = \frac{-b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - 4ac_0}}{2a}$ Temos $x = 0$ pois $x = -\frac{b_0}{2a}$ e ainda $b_0^2 - 4ac_0 < 0$ se e somente se a e c_0 tiverem o mesmo sinal. Nesse caso:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\pm \sqrt{4ac_0 - b_0^2}}{2a} \Leftrightarrow \\ y &= \frac{\pm \sqrt{4ac_0}}{2a} \Leftrightarrow \\ y &= \pm \sqrt{\frac{c_0}{a}} \end{aligned}$$

De acordo com a expressão obtida acima, observamos que $y \neq 0$ e mais, quando $|a|$ tende ao infinito, y tende a zero. Por outro lado, quando $|a|$ tende a zero (sendo $c_0 \neq 0$), $y = \pm \sqrt{\frac{c_0}{a}}$ tende ao infinito.

Note que a solução corresponde então a todos os números imaginários puros, ou seja, $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; az^2 + c_0 = 0; a \in \mathbb{R}^*\} \Leftrightarrow \{(0, y) \in \mathbb{C}; y \neq 0\}$. Outra forma de se chegar ao resultado obtido é isolando a incógnita z em um dos lados da igualdade.

$$\begin{aligned} az^2 + c_0 &= 0 \Leftrightarrow \\ az^2 + c_0 - c_0 &= 0 - c_0 \Leftrightarrow \\ az^2 &= -c_0 \Leftrightarrow \\ aa^{-1}z^2 &= -c_0a^{-1} \Leftrightarrow \\ z^2 &= -\frac{c_0}{a} \Leftrightarrow \\ z &= \pm i \sqrt{\frac{c_0}{a}} \end{aligned}$$

Voltamos a destacar que $a \neq 0$ e que a última passagem é possível porque a e c_0 possuem mesmo sinal, consequência da condição $b_0^2 < 4ac_0$.

Por fim, caso $c_0 = 0$ todas as soluções possíveis serão reais pois nesse caso $b_0^2 - 4ac_0 \Leftrightarrow b_0^2 > 0$ para todo a . Tal fato pode ser facilmente observado se resolvermos a equação $az^2 + b_0z = 0$ colocando z em evidência. Por este método obtemos: $az^2 + b_0z = 0 \Leftrightarrow z(az + b_0) = 0$. Concluimos então que: $z = 0$ ou $(az + b_0) = 0$ e disto que $z = 0$ e $z = -\frac{b_0}{a}$ são as raízes da equação.

3.2 Estudo das raízes complexas da equação $a_0z^2 + bz + c_0 = 0$

De modo análogo ao procedimento adotado na seção anterior, vamos investigar o lugar geométrico das raízes complexas não reais das equações do tipo $a_0z^2 + bz + c_0 = 0$ variando agora o coeficiente b . Iniciaremos o nosso estudo representando no plano complexo os conjuntos:

$$D = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; z^2 + bz + 4 = 0, b \in \mathbb{R}\}$$

$$E = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; -z^2 + bz - 9 = 0, b \in \mathbb{R}\}$$

$$F = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; z^2 + bz + 16 = 0, b \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; 3z^2 + bz + 12 = 0, b \in \mathbb{R}\}$$

Sendo $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, as soluções da equação $az^2 + bz + c = 0$, a fim de que as raízes encontradas sejam complexas não reais devemos ter $(b^2 - 4ac) < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4ac \Leftrightarrow |b| < 2\sqrt{ac}$. Note que uma condição necessária para se obter o resultado descrito, é que a e c tenham o mesmo sinal. Caso os sinais destes coeficientes sejam opostos ou $c = 0$, os zeros da equação serão reais. A Tabela 2 apresenta os coeficientes a_0 e c_0 , as soluções complexas das equações que definem os conjuntos D , E , F e G , bem como os valores de b que tornam estas possíveis.

Conjunto	a_0	c_0	$2\sqrt{a_0c_0}$	z
D	1	4	4	$\left(-\frac{b}{2}, \pm \frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}\right)$
E	-1	-9	6	$\left(-\frac{b}{2}, \pm \frac{\sqrt{36 - b^2}}{2}\right)$
F	1	16	8	$\left(-\frac{b}{2}, \pm \frac{\sqrt{64 - b^2}}{2}\right)$
G	3	12	12	$\left(-\frac{b}{2}, \pm \frac{\sqrt{144 - b^2}}{2}\right)$

Tabela 2 – Relações entre coeficientes e soluções complexas das equações associadas aos conjuntos D , E , F e G .

Com o auxílio do GeoGebra, pelo desenvolvimento descrito na seção 3.4, obtemos as soluções apresentadas nas figuras:

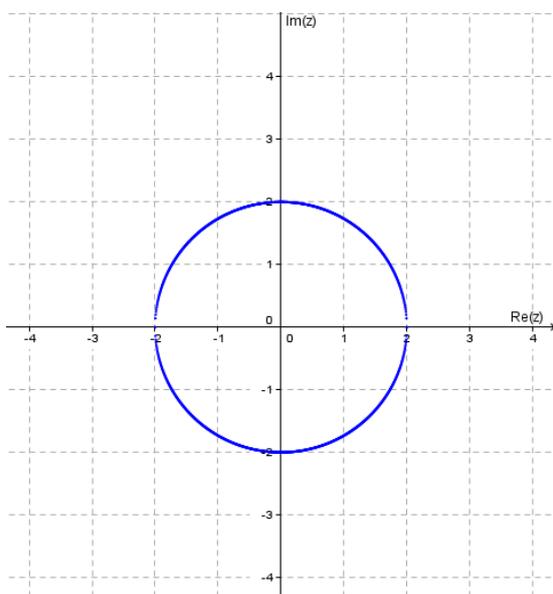


Figura 6 – Representação do conjunto D.

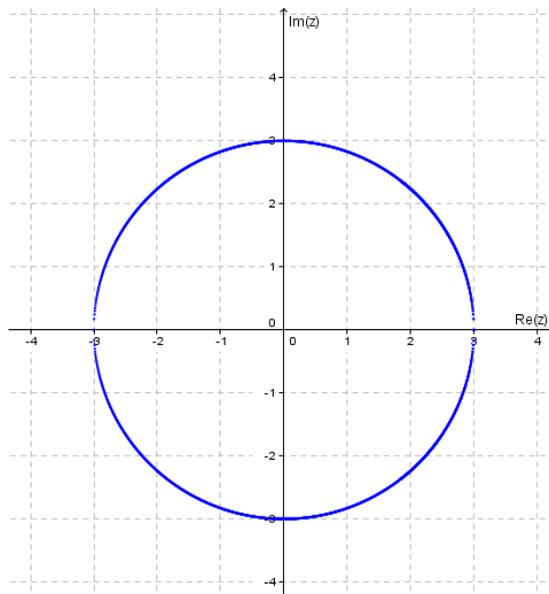


Figura 7 – Representação do conjunto E.

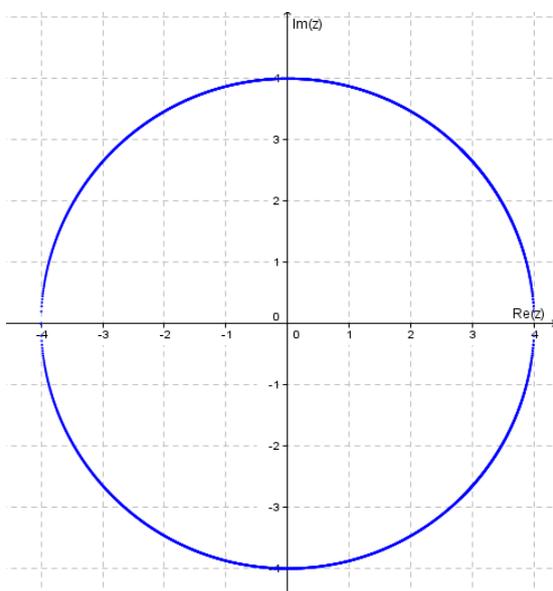


Figura 8 – Representação do conjunto F.

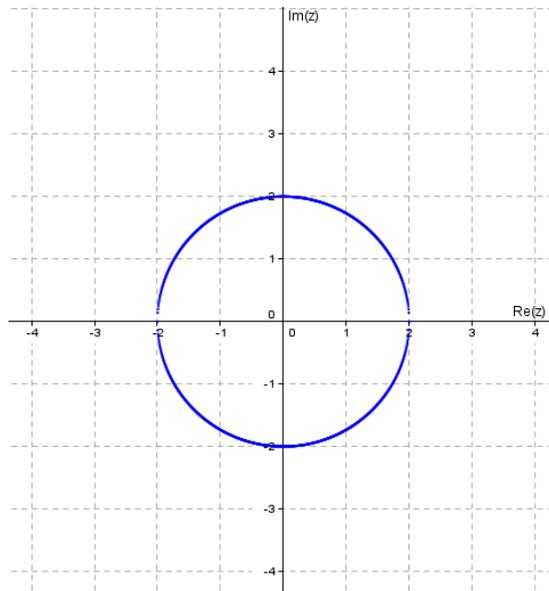


Figura 9 – Representação do conjunto G.

É válido destacar que os pontos nos quais a parte imaginária de z é nula não fazem parte da solução procurada. Novamente percebemos que os conjuntos obtidos possuem como solução, pontos pertencentes a uma circunferência.

Vamos fazer uma investigação para a equação $z^2 + bz + 4 = 0$. Nesta, $z = (x, y) = \left(-\frac{b}{2}, \pm \frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}\right)$, com $-4 < b < 4$.

Considere as funções $x = -\frac{b}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}$, cujos gráficos são apresentados nas figuras 10 e 11.

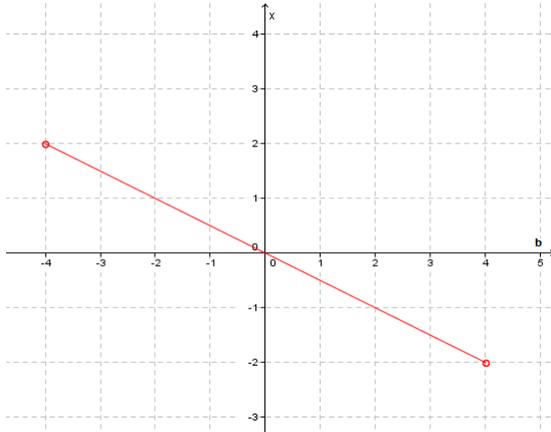


Figura 10 – função $x = -b/2$

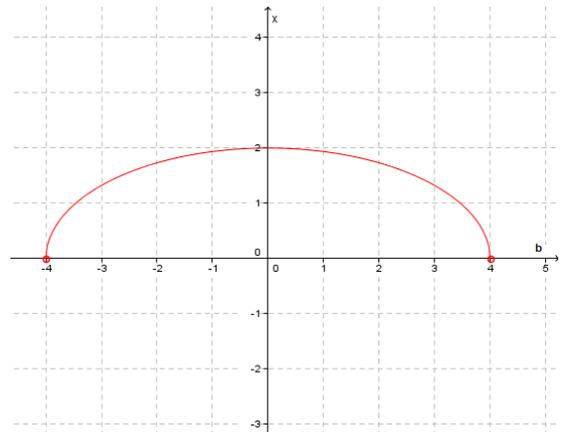


Figura 11 – função $y = \frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}$

A função $x = -b/2$ é linear e portanto contínua. Verifique ainda que $\lim_{b \rightarrow -4} (-b/2) = 2$ e $\lim_{b \rightarrow 4} (-b/2) = -2$. Assim, a parte real de z pertence ao intervalo $(-2, 2)$.

A função $y = \frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}$ é contínua no intervalo $(-4, 4)$ e $\lim_{b \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}\right) = \lim_{b \rightarrow -4} \left(\frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}\right) = 0$. O mesmo limite é obtido se considerarmos $y = -\frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}$.

Na verdade, $y = \pm \frac{\sqrt{16 - b^2}}{2}$ corresponde à elipse $\frac{b^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Percebemos então que a parte imaginária de z pertence ao conjunto $(-2, 2) \setminus \{0\}$.

Da continuidade das funções, pelo limite verificado acima e pela Figura 6, podemos presumir que o conjunto D definido por $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; z^2 + bz + 4 = 0; b \in \mathbb{R}\}$ possui como solução, pontos da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $r = 2$ podendo consequentemente, ser escrito como $\{(x, y) \in \mathbb{C}; x^2 + y^2 = 4; y \neq 0\}$

Buscando generalizar a equação da circunferência cujos pontos satisfazem as condições de cada conjunto, apresentamos na Tabela 3, os valores dos coeficientes a_0 e c_0 nas equações que definem D , E , F e G , especificando o centro O e o raio r visualizado nas representações.

De acordo com o exposto, podemos acreditar que o lugar geométrico obtido corresponde a pontos da circunferência de centro $O = (0, 0)$ e raio $r = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}$ (observe que os conjuntos D e G são iguais).

Conjunto	a_0	c_0	O	r
D	1	4	(0,0)	2
E	-1	-9	(0,0)	3
F	1	16	(0,0)	4
G	3	12	(0,0)	2

Tabela 3 – Elementos da equação e da representação geométrica dos conjuntos D , E , F e G .

Vamos provar então que o lugar geométrico das raízes complexas não reais da equação $a_0z^2 + bz + c_0 = 0$ realmente correspondem a pontos da circunferência de raio e centro descritos, ou seja, tal curva tem equação dada por $x^2 + y^2 = \frac{c_0}{a_0}$.

Sabemos que a solução de $a_0z^2 + bz + c_0 = 0$ é dada por $z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a_0c_0}}{2a_0}$.

Como queremos as raízes complexas não reais da equação, podemos escrever $z = \frac{-b \pm i\sqrt{4a_0c_0 - b^2}}{2a_0}$. Nesse caso, recordamos que $b^2 - 4a_0c_0 < 0 \Leftrightarrow |b| < 2\sqrt{a_0c_0}$.

Na forma de par ordenado temos $z = (x, y)$ onde $x = -\frac{b}{2a_0}$ e $y = \pm \frac{\sqrt{4a_0c_0 - b^2}}{2a_0}$.

Agora,

$$\begin{aligned} y &= \pm \frac{\sqrt{4a_0c_0 - b^2}}{2a_0} \Leftrightarrow \\ y^2 &= \frac{4a_0c_0 - b^2}{4a_0^2} \Leftrightarrow \\ y^2 &= \frac{c_0}{a_0} - \left(-\frac{b}{2a_0}\right)^2 \Leftrightarrow \\ y^2 &= \frac{c_0}{a_0} - x^2 \Leftrightarrow \\ x^2 + y^2 &= \frac{c_0}{a_0} \end{aligned}$$

A equação acima fornece os números (x, y) que são raízes complexas da equação $a_0z^2 + bz + c_0 = 0$. Entretanto, devemos tomar cuidados com os valores possíveis de x e y .

Note que a função $x = -\frac{b}{2a_0}$ é contínua e linear, assim, para todos os valores possíveis de b , temos $x \in \left(-\sqrt{\frac{c_0}{a_0}}, \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}\right)$ pois,

$$\lim_{b \rightarrow 2\sqrt{a_0c_0}} x = \lim_{b \rightarrow 2\sqrt{a_0c_0}} \left(-\frac{b}{2a_0}\right) = -\sqrt{\frac{c_0}{a_0}}$$

e

$$\lim_{b \rightarrow -2\sqrt{a_0c_0}} x = \lim_{b \rightarrow -2\sqrt{a_0c_0}} \left(-\frac{b}{2a_0}\right) = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}.$$

Sendo $y = \pm \frac{\sqrt{4a_0c_0 - b^2}}{2a_0}$, quando b tende a $\pm 2\sqrt{a_0c_0}$, percebemos que o valor de y torna-se cada vez mais próximo de zero, sendo sempre diferente deste valor já que $|b| < 2\sqrt{a_0c_0}$.

Desse modo, o conjunto $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; a_0z^2 + bz + c_0 = 0; a_0, c_0 \in \mathbb{R}^*\} = \{(x, y) \in \mathbb{C}; x^2 + y^2 = c_0/a_0; y \neq 0\}$.

Observe ainda que a equação $a_0z^2 + bz + c_0 = 0$ pode ser reescrita (dividindo-se todos os termos por a_0) como $z^2 + b'z + c'_0 = 0$, a equação da curva pode ser expressa de forma mais simples como $x^2 + y^2 = c'_0$.

No Capítulo 4, destacaremos uma aplicação de números complexos em oscilações amortecidas. A representação no plano complexo, de conjuntos como os apresentados nessa seção, permitem visualizar com mais clareza a variação do amortecimento em função dos coeficientes da equação.

3.3 Estudo das raízes complexas da equação $a_0z^2 + b_0z + c = 0$

Podemos investigar por fim, o lugar geométrico corresponde às soluções complexas não reais das equações $a_0z^2 + b_0z + c = 0$, com a_0 e b_0 diferentes de zero.

Aqui, o desenvolvimento é ainda mais simples. Consideremos por exemplo a proposta de representação do conjunto $H = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; z^2 + 4z + c = 0; c \in \mathbb{R}\}$. Resolvendo a equação que define o conjunto, obtemos $z = (x, y) = (-2, \pm\sqrt{c-4})$ com $c > 4$. Note que a parte real do número complexo z apresenta valor fixo, enquanto a parte imaginária y , varia de acordo com o valor de c . Note que y tende a zero quando c se aproxima de 4, e ainda, quando c tende ao infinito $|y|$ torna-se cada vez maior.

A representação deste conjunto no plano complexo, corresponde então a todos os números complexos com parte real igual -2 e parte imaginária diferente de zero, conforme podemos perceber na Figura 12.

De modo geral, podendo as soluções complexas serem escritas na forma de par ordenado como $\left(-\frac{b_0}{2a_0}, \pm \frac{\sqrt{4a_0c - b_0^2}}{2a_0}\right)$ note que quando variamos o coeficiente c a parte real da solução não é alterada, enquanto a parte imaginária pode assumir qualquer valor real diferente de zero.

Assim, o conjunto dado por $N = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; a_0z^2 + b_0z + c = 0; c \in \mathbb{R}\}$ também pode ser expresso por $N = \left\{\left(-\frac{b_0}{a_0}, y\right) \in \mathbb{C}; y \neq 0\right\}$

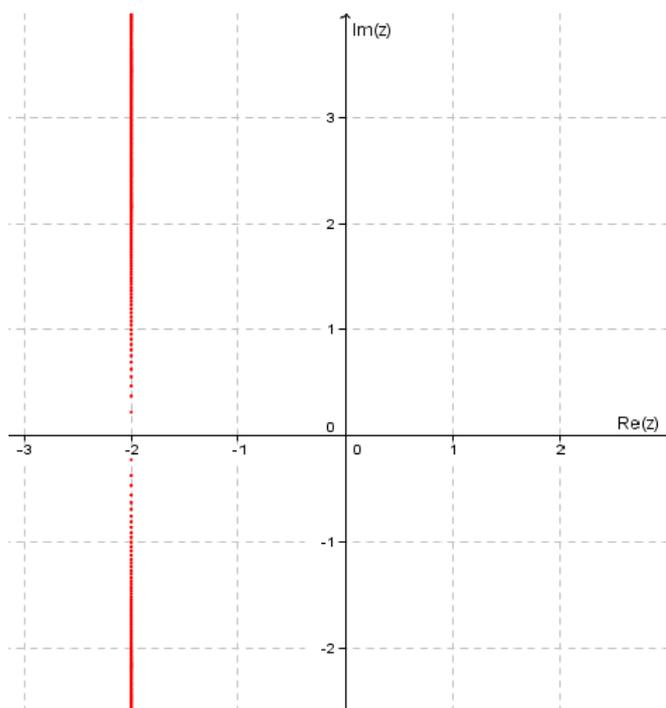


Figura 12 – Representação do conjunto H.

3.4 O GeoGebra

3.4.1 Apresentação

O *GeoGebra* é um software gratuito e multiplataforma de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino, que combina Geometria, álgebra, planilha eletrônica, gráficos, estatística e cálculo. Por apresentar um ambiente fácil de usar e com inúmeros recursos, o aplicativo se destaca, tendo recebido vários prêmios educacionais internacionais. O programa reúne ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo, permitindo a representação das características geométricas e algébricas de um objeto em um único ambiente visual. No estado do Espírito Santo, este software foi explorado pelos professores da rede estadual que participaram do Multicurso Matemática (curso de aperfeiçoamento oferecido gratuitamente aos professores pelo governo do estado em parceria com a fundação Roberto Marinho) no período de 2008 a 2013. Para os docentes que ainda não conhecem este recurso, o download pode ser feito pelo site www.geogebra.org e inúmeros vídeos explicativos podem ser encontrados em www.youtube.com.

3.4.2 Construção

Nesta seção apresentamos o passo a passo da construção realizada com o GeoGebra que possibilita visualizar o lugar geométrico das raízes complexas não reais da equação

$az^2 + bz + c = 0$ quando variamos um de seus coeficientes.



1) Clique no botão seletor  e em seguida na janela de visualização para criar a variável a .

2) Defina esta variável no intervalo -50 a 50 e incremento 0.01 Clicando em seguida no botão *Aplicar*.

3) Clique novamente na janela de visualização e repita os passos acima para criar as variáveis b e c .

Você pode arrastar os segmentos que correspondentes às variáveis criadas para a posição que achar conveniente na janela de visualização.

4) Digite no campo de entrada:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)$$

5) Digite no campo de entrada:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\right)$$

6) Na janela de álgebra, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto A e selecione a opção *habilitar rastro*. Faça o mesmo para o ponto B .

No conjunto A apresentado na Seção 1 deste capítulo temos $b = 4$ e $c = 8$. Para representar o lugar geométrico correspondente às raízes complexas não reais deste conjunto, clique com o botão direito do mouse sobre a variável b , vá em propriedades, básico e defina a variável b com valor 4 . Faça o mesmo para fixar o valor de $c = 8$.

7) Varie por fim o valor de a observando para quais valores obtemos raízes complexas para a equação. Perceba também que quanto maior o valor de a , mais próximo de $(0, 0)$ se encontra as raízes complexas não reais da equação. Você pode alterar o incremento e o intervalo a fim de visualizar melhor a região correspondente ao conjunto. Também é possível animar o objeto, clicando como botão direito do mouse sobre este.

Vale destacar que a mesma construção pode ser utilizada para os demais conjuntos descritos nesse capítulo. Outra observação importante é que podemos comparar o lugar geométrico das raízes das equações $ax^2 + bx + c = 0$ com os gráficos das respectivas funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Basta para isso, digitar no campo de entrada:

$$f(x) = a*x^2+bx+c$$

A sobreposição dos planos real e complexo permite visualizar além das raízes, o que acontece com o gráfico da função quando variamos apenas um de seus coeficientes.

4 Aplicações de Números Complexos no estudo de Oscilações amortecidas

Conforme já exposto em nosso trabalho, existem diversas aplicações para números complexos nas mais variadas áreas do conhecimento. Neste capítulo, apresentamos de forma sucinta um estudo sobre oscilações, visando perceber a importância dos números complexos nesse campo de estudo.

O objetivo aqui, não é aprofundar e nem apresentar conceitos matemáticos que estejam além da compreensão do aluno. Queremos simplesmente, aproximar o indivíduo de um universo no qual, a resolução de alguns problemas é viabilizada pela utilização de números que transcendem o universo real.

Optamos por descrever superficialmente o tema *Oscilações*, destacando características do Movimento Harmônico Simples e do Movimento Oscilatório Forçado. Uma abordagem sobre o sistema de suspensão dos automóveis aproxima nosso objeto de estudo do contexto dos estudantes. Destacamos que a parceria com o professor da disciplina de Física pode proporcionar melhores discussões sobre o tema e suas aplicações. Um aprendizado mais significativo, pode ser alcançado por meio da realização de experimentos associados ao tema.

4.1 Oscilações

Movimentos oscilatórios são comuns no nosso cotidiano, aparecendo em diversos sistemas mecânicos e na corrente elétrica alternada da qual nos servimos. A corda vibrante de uma guitarra e o movimento do pêndulo de um relógio, são exemplos de movimentos oscilatórios.

Podemos dizer que um corpo se movimenta de forma oscilatória quando executa movimentos (ida e volta) em torno de certa posição que esteja em equilíbrio.

Por suas características, os movimentos oscilatórios são tais que as equações horárias podem ser expressas em funções seno e cosseno. Quando podemos utilizar apenas uma função seno (ou cosseno) para a equação horária do movimento, dizemos que o movimento oscilatório é simples, (ou Movimento Harmônico Simples - MHS), (Figura 13). No Ensino Médio, geralmente este tipo de movimento aparece nos programas da disciplina de Física. Nussenzveig [9] destaca, entretanto, que o Movimento Harmônico simples é comum apenas em sistemas conservativos. Em geral todos os sistemas oscilatórios apresentam amortecimento, seja por atrito fluido, quando corpos rígidos se movem num fluido,

sejam por atrito interno, entre as moléculas de um corpo aparentemente elástico (Figura 14). O amortecimento é consequência da dissipação de energia. O referido autor cita, por exemplo, que no caso de um pêndulo, as oscilações se amortecem devido à resistência do ar, além do atrito no suporte. As oscilações de um líquido em um tubo em U, por sua vez também se amortecem devido à viscosidade do líquido.

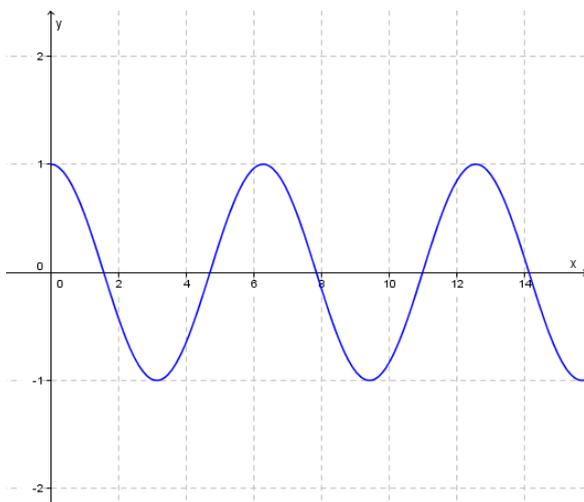


Figura 13 – Movimento Harmônico Simples.

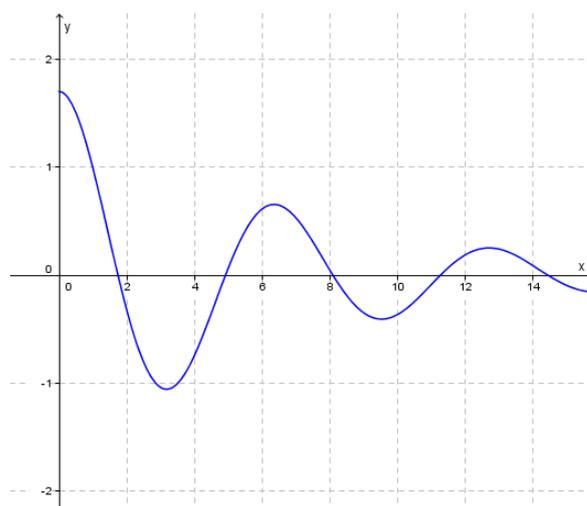


Figura 14 – Movimento Oscilatório Amortecido.

O emprego dos Números Complexos nas funções horárias para Movimentos Oscilatórios Amortecidos é conveniente pelo fato de, por meio deste conjunto, ser possível a associação da função trigonométrica à exponencial, o que facilita a resolução de problemas, conforme cita Nussenzveig (1987) a vantagem do emprego da notação complexa está no fato de que é bem mais fácil manipular a exponencial do que senos e cossenos.

4.1.1 Oscilador Harmônico Simples

Considere uma mola ideal de constante elástica k . Um corpo de massa m fixado a essa mola e livre para mover-se sobre uma superfície horizontal sem atrito, é um exemplo de oscilador harmônico simples e seu movimento é denominado Movimento Harmônico Simples. A Figura 15 ilustra a situação descrita. Note que quando a mola se encontra distendida, esta exerce sobre o corpo uma força orientada para a esquerda e quando comprimida para a direita, existindo um ponto de equilíbrio O no qual a mola não exerce força sobre o corpo (relaxada). Em cada caso, a força aplicada é restauradora e, nesse caso, proporcional ao deslocamento. É fácil observar que quanto maior a distância x do corpo à posição de equilíbrio, maior a força aplicada pela mola (a mola completamente distendida está associada na figura à posição x_m e quando completamente comprimida a $-x_m$).

Escrevemos: $F_x(x) = -kx$ (Lei de Hooke).

Aplicando a segunda lei de Newton, $\Sigma F_x = ma_x$ e substituindo $a_x = \frac{D^2x}{dt^2}$ temos:

$$-kx = m \frac{D^2x}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$m \frac{D^2x}{dt^2} + kx = 0$$

A equação descrita acima é chamada de *equação de movimento* do oscilador harmônico simples e dela obtemos *equação característica* $mx^2 + k = 0$ que possui duas raízes complexas imaginárias, sendo a solução, uma combinação das funções seno e cosseno. O movimento harmônico simples pode ser descrito como a projeção do movimento circular uniforme ao longo de um diâmetro do círculo, daí a sua associação a uma função trigonométrica.

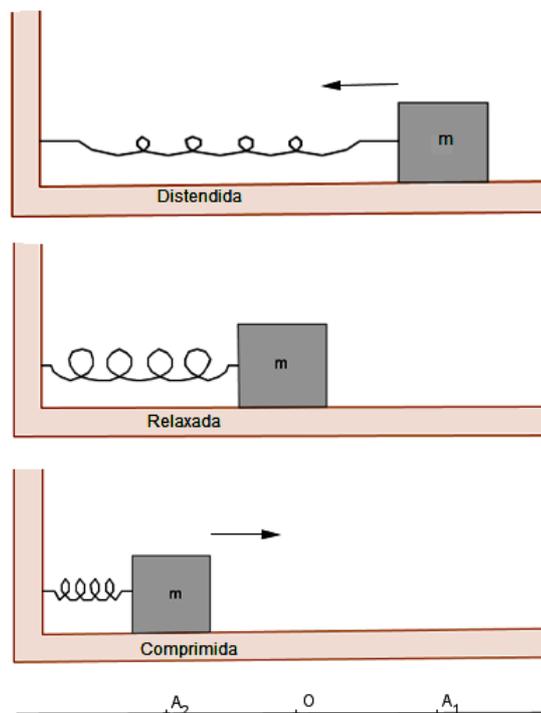


Figura 15 – Representação de um oscilador harmônico simples.

4.1.2 Oscilador Amortecido

De modo semelhante ao modelo de oscilador harmônico simples, a Figura 16 apresenta uma forma particular para a força de amortecimento. Um modelo de oscilador amortecido no qual podemos utilizar as leis de Newton para resolver as equações de movimento. Nesse sistema, considera-se que o corpo oscilante de massa m seja fixado a uma palheta sem massa imersa em um fluido, de modo que essa fica sujeita a uma força de amortecimento provocada pelo fluido (denominada força de amortecimento viscosa).

Considera-se ainda que não há atrito entre o corpo e a superfície horizontal. Tal força é proporcional à velocidade do corpo.

A força de amortecimento exercida pelo fluido é dada por $F_x = -bv_x$, sendo b uma constante positiva cujo valor depende das propriedades do fluido e das dimensões e forma da palheta.

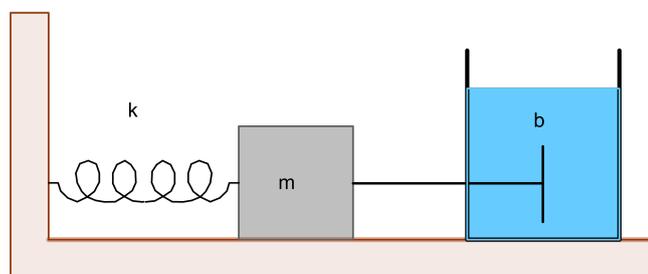


Figura 16 – Representação de um oscilador harmônico amortecido.

Aplicando a segunda lei de Newton, temos $\Sigma F_x = ma_x = -kx - bv_x$, ou seja:

$$m \frac{D^2x}{dt^2} + b \frac{Dx}{dt} + kx = 0.$$

A equação acima da origem à equação denominada *equação característica*, $mp^2 + bp + k = 0$

Ou ainda:

$$p^2 + (b/m)p + (k/m) = 0.$$

Ressaltamos que como o estudo de derivadas não faz parte do conteúdo programado para o Ensino Médio, o professor deve apenas destacar que a solução da equação $ma_x = -kx - bv_x$ está associada a $p^2 + (b/m)p + (k/m) = 0$. Uma equação quadrática cujas raízes podem ser reais ou não. Tal equação é obtida tomando $x(t) = e^{pt}$, com p podendo ser complexo.

Se a equação característica apresenta raízes reais distintas, o amortecimento é denominado Supercrítico. Caso as raízes sejam iguais o amortecimento é denominado crítico e, por fim, se as raízes são complexas não reais o amortecimento é denominado subcrítico.

Fazendo $\gamma = b/m$ e $\omega_0^2 = k/m$, a equação característica pode ser escrita como:

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0.$$

Cujas raízes são:

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}.$$

Note que se $\gamma/2 < \omega_0$ temos $\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2$ negativo e portanto p não é real. Podemos nesse caso, reescrever a equação $p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0$ como:

$$p = -\gamma/2 \pm i\omega,$$

onde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$.

Cada tipo de amortecimento possui características próprias quanto a $x(t)$ (posição em função do tempo).

Destacamos que o professor pode aprofundar seus conhecimentos sobre estas soluções, tanto no estudo de equações diferenciais ordinárias, quanto nas Recorrências Lineares de Segunda Ordem.

4.1.3 Amortecimento supercrítico ($\gamma/2 > \omega_0$)

O amortecimento supercrítico tem por característica ser não oscilatório com o retorno à posição de equilíbrio após determinado tempo. Para este tipo de amortecimento temos: $x(t) = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$, com $A = \left[\frac{x_0 p_2 - v_0}{p_2 - p_1} \right]$ e $B = \left[\frac{v_0 - x_0 p_1}{p_2 - p_1} \right]$, sendo:

x_0 : posição inicial;

v_0 : velocidade inicial;

p_1 e p_2 : raízes da equação característica.

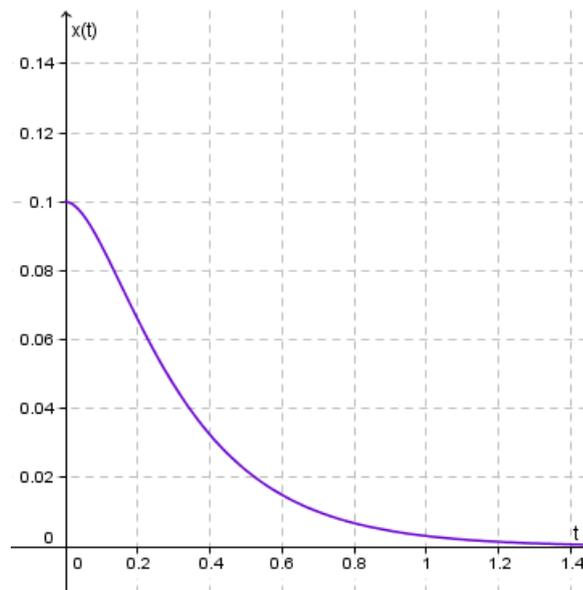


Figura 17 – Gráfico para amortecimento supercrítico.

4.1.4 Amortecimento crítico ($\gamma/2 = \omega_0$)

O amortecimento crítico é aquele no qual $\gamma/2 = \omega_0$, ou seja, a equação característica possui duas raízes reais iguais. O movimento também é não oscilatório mas nesse caso, o corpo retorna à posição de equilíbrio mais rapidamente. Um exemplo desse sistema é o dispositivo amortecedor em portas de elevador, caso se solte a porta bruscamente, ela não bate com violência no batente. Em balanças de precisão, também se deseja amortecer o movimento o mais depressa possível para mais rapidamente ser verificada a leitura do instrumento.

Para este tipo de amortecimento, temos

$$x(t) = \left(x_0 + \left(v_0 + x_0 \frac{\gamma}{2} \right) t \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

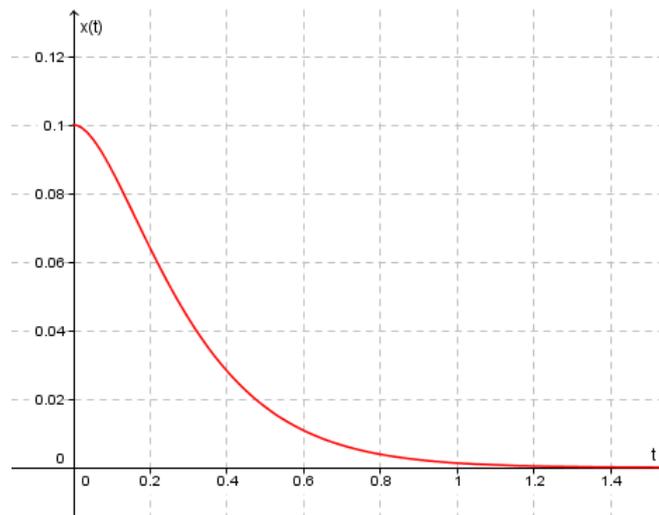


Figura 18 – Gráfico para amortecimento crítico.

4.1.5 Amortecimento subcrítico ($\gamma/2 < \omega_0$)

O amortecimento subcrítico tem por característica ser oscilatório. Temos:

$$x(t) = \left(x_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega} \right) \sin(\omega t) \right) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

No amortecimento subcrítico, as oscilações ocorrem de modo que os picos da função determinam o que ainda denominamos como *período* T , apesar de as oscilações não serem mais periódicas. Para um amortecimento baixo, utilizamos $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

As curvas $f(t) = \pm x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ são denominadas envoltórias da função $x(t)$. A Figura 19, apresenta as envoltórias em linha tracejada.

Analisando a função $f(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ podemos perceber que quanto maior o valor da constante de amortecimento b , mais rapidamente a amplitude de oscilação diminui. Temos nesse caso, o denominado *amortecimento forte*.

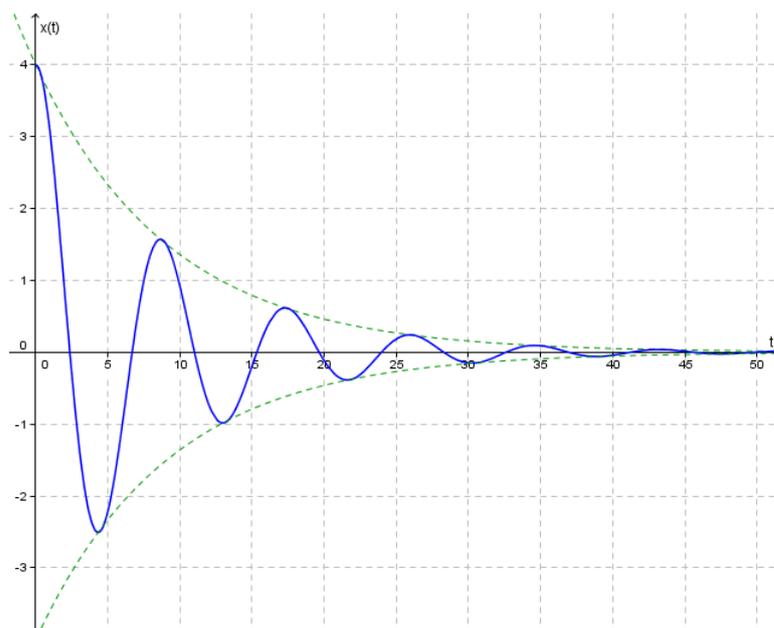


Figura 19 – Gráfico para amortecimento subcrítico e as envoltórias de $x(t)$.

Por outro lado, para valores relativamente pequenos de b , a amplitude das oscilações não decai tão rapidamente, caracterizando-se o *amortecimento fraco*. Nesse caso, $\gamma = b/m$ tende a zero e portanto, podemos utilizar a aproximação $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \approx \omega_0$.

Um bom exemplo para verificarmos a aplicação do Movimento Oscilatório forçado é o estudo do sistema de suspensão dos automóveis .

4.2 Sistema de suspensão de automóveis

O sistema de suspensão dos automóveis consta basicamente de molas e amortecedores. As molas oscilam de um modo forçado quando o carro passa por pistas irregulares. Se a suspensão de um veículo fosse constituída apenas com molas, dependendo do terreno, seria impossível controlar o carro.

Os amortecedores atenuam os movimentos das molas, produzindo oscilações amortecidas. Sem os amortecedores as molas continuariam a oscilar e o carro oscilaria por um tempo muito maior a cada solavanco. O papel do amortecedor é diminuir o tempo de oscilação da mola para que o sistema adquira maior estabilidade.

No sistema de suspensão dos automóveis, aparece o amortecimento viscoso, causado pelo atrito do fluido nos cilindros do amortecedor. Um modelo semelhante ao apresentado na Seção 4.1.2.

Os amortecedores trabalham em dois ciclos (compressão e o de distensão). O ciclo da compressão ocorre quando o pistão se move para baixo, comprimindo o fluido



Figura 20 – Modelo de molas e amortecedores de automóveis.

hidráulico na câmara abaixo. O ciclo da extensão ocorre quando o fluido é comprimido na câmara acima. O amortecimento ocorre no cilindro do amortecedor que contém óleo. O pistão restringe o fluxo de óleo quando o amortecedor entra e sai. A taxa de pressão é uma combinação da viscosidade do óleo e da restrição do pistão.

As características da viscosidade do fluido determinam a constante de amortecimento b do fluido existente no pistão. A unidade da constante de amortecimento b é o Newtonxsegundo/metro.

Nos amortecedores modernos, quanto mais rápido a suspensão se movimenta, mais resistência o amortecedor fornece. Isso permite aos amortecedores que se ajustem às condições da estrada e que controlem todos os movimentos indesejados que possam ocorrer em um veículo em movimento.

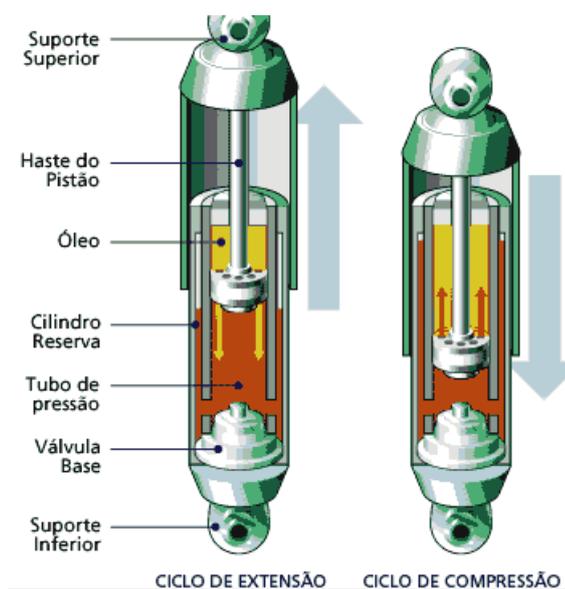


Figura 21 – Amortecedor

Seguem abaixo, atividades que podem ser desenvolvidas com os alunos utilizando o modelo apresentado neste capítulo.

Atividades propostas

Atividade 1. O amortecedor de um automóvel cuja massa da suspensão é de 70kg e é suportado por uma mola de constante elástica de $35000\text{N}/\text{m}$, Seja a constante de amortecimento $b = 2800\text{Ns}/\text{m}$.

i - Determine:

a) O tipo de amortecimento;

b) $x(t)$ considerando $x_0 = 0.12\text{m}$ e $v_0 = 0$.

ii - Construa com o auxílio do GeoGebra o gráfico para $x(t)$.

Solução da Atividade 1.

i - a) De acordo com o exposto quanto ao movimento harmônico amortecido, temos para a equação característica $p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0$:

$$\gamma = b/m = 2800/70 = 40$$

$$\omega_0^2 = k/m = 35000/70 = 500$$

temos assim $\Delta = \gamma^2 - 4\omega_0^2 = -400$. Sendo Δ negativo, as raízes da equação característica são complexas e portanto o amortecimento é subcrítico.

i - b) Sendo o amortecimento subcrítico, $x(t) = \left(x_0 \cos(\omega t) + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega}\right) \sin(\omega t)\right) e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ com $x_0 = 0.12$, $V_0 = 0$, $\gamma = 40$ e $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = 10$.

Assim,

$$x(t) = (0.12 \cos(10t) + (0.24) \sin(10t)) e^{-20t}$$

ii - Digite no campo de entrada:

$$\text{função} [(0.12\cos(10x)+0.24\sin(10x))*e^{(-20x)}, 0, 10]$$

Será construída no geogebra, o gráfico da função $f(x) = (0.12\cos(10x) + 0.24\sin(10x))e^{(-20x)}$ com domínio definido no intervalo $[0, 10]$, sendo $f(x)$ equivalente a $x(t)$. Pode-se alterar o rótulo dos eixos x e y para t e $x(t)$, clicando com o botão direito do mouse na janela de visualização.

A Figura 22, apresenta a função descrita. Note que apesar de o amortecimento ser subcrítico, a amplitude das oscilações decresce rapidamente, ou seja, tem-se um amortecimento forte.

Atividade 2. (Adaptado de [13]) Suponha que você esteja examinando as características do sistema de suspensão de um automóvel de 2000kg . A suspensão cede 10cm , quando todo o peso do automóvel é colocado sobre ela, e a amplitude da oscilação diminui

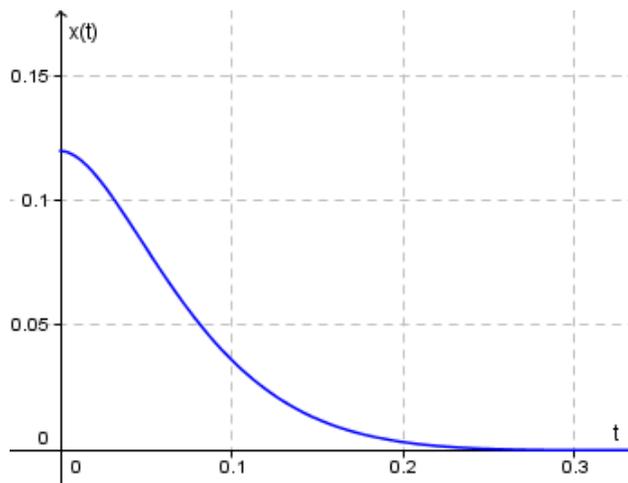


Figura 22 – Função $x(t) = (0.12 \cos(10t) + 0.24 \sin(10t)) e^{-20t}$

de 50 % durante um ciclo completo. Determine os valores de k e b supondo que cada roda suporte $500kg$.

Solução da Atividade 2.

De acordo com o problema temos: $m = 500kg$ e $d = 0,1m$

Tomando $g = 9,8m/s^2$, a força exercida sobre cada mola é $F = mg = 4900kg.m/s^2$

A constante elástica da mola é $k = F/d = 49000kg/s^2$

Vamos determinar agora o valor da constante de amortecimento b .

Considerando $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$ temos $\omega \approx 9,9$.

Para determinar o valor de b , podemos utilizar o fato de a amplitude da oscilação diminuir de 50 % durante um ciclo completo. Temos $f(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$, com $\gamma = b/m = b/500$. Assim $f(t) = x_0 e^{-\frac{b}{1000}t}$. Sendo $f(0) = x_0$, em um ciclo completo T , temos $f(T) = \frac{x_0}{2} = x_0 e^{-\frac{b}{1000}T}$ e disto,

$$e^{-\frac{b}{1000}T} = 1/2 \Leftrightarrow \ln(e^{-\frac{b}{1000}T}) = \ln(1/2) \Leftrightarrow -\frac{bT}{1000} = \ln(1/2) \Leftrightarrow b = -\frac{1000 \cdot \ln(1/2)}{T}$$

Agora, sendo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,63$, obtemos: $b \approx 1100kg/s$.

Atividade 3. No GeoGebra:

- Defina as variáveis v_0 , x_0 , m , b e k com v_0 e x_0 variando de 0 a 10, $0 \leq m \leq 50$, $0 \leq b \leq 100$ e $0 \leq k \leq 50$;
- Defina a função $f(x) = mx^2 + bx + k$;
- Defina e represente no plano as raízes complexas da função quadrática descrita no item anterior.

- d) Construa o gráfico da função $h(x) = \left(x_0 \cos(\omega x) + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{\gamma x_0}{2\omega}\right) \sin(\omega x)\right) e^{-\frac{\gamma}{2}x}$ (Movimento oscilatório com amortecimento subcrítico);
- e) Construa o gráfico de $p(x) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}x}$ e $q(x) = -x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}x}$ (Envoltórias de $h(x)$);
- f) Fixe as variáveis $x_0 = 4$, $V_0 = 0$, $m = 4$ e $k = 36$ variando apenas o valor de b . Observe o gráfico de f quando este valor é alterado e ainda o lugar geométrico das raízes complexas da equação.

Solução da Atividade 3.

- a) Selecione o botão *controle deslizante* e em seguida clique na janela de visualização. Defina cada variável no intervalo especificado com incremento de 0.01 para a variável b e 0.1 para as demais.
- b) Digite no Campo de entrada:

$$f(x) = m \cdot x^2 + b \cdot x + k$$

Tecla *Enter*

- c) Digite no campo de Entrada:

$$\left(\frac{-b}{2m}, \sqrt{4mk - b^2} / (2m)\right)$$

Tecla *Enter*

$$\left(\frac{-b}{2m}, -\sqrt{4mk - b^2} / (2m)\right)$$

Tecla *Enter*

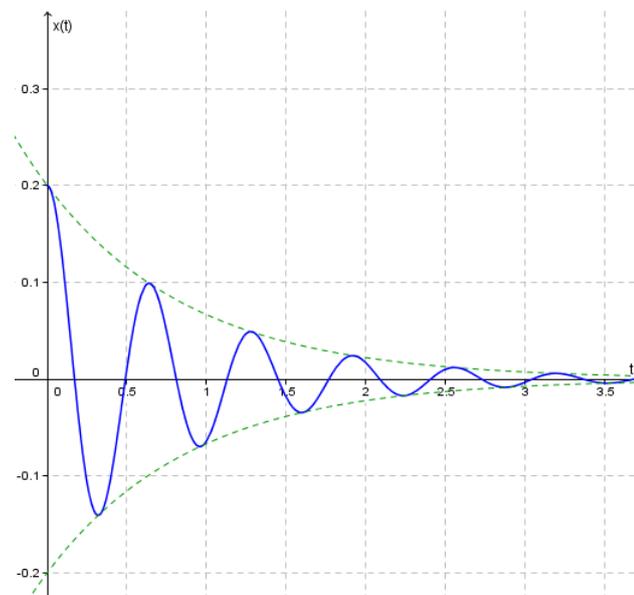


Figura 23 – Gráfico para o amortecimento descrito na questão 2 considerando $x_0 = 0,2$

Os pares ordenados descritos correspondem às raízes complexas da equação $mx^2 + bx + k = 0$. Os pontos só serão exibidos quando $4m * k - b^2 > 0$. Habilite o rastro destes pontos clicando com o botão direito do mouse sobre eles.

- d) Sendo $\gamma = b/m$ e $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$, digite no campo de entrada:

$$h(x) = (x_0 * \cos(\sqrt{4m*k - b^2} / (2m) * x) + (v_0 / (\sqrt{4m*k - b^2} / (2m))) + b / (2m) * x_0 / (\sqrt{4m*k - b^2} / (2m))) * \sin(\sqrt{4m*k - b^2} / (2m) * x) e^{((-b) / (2m) * x)}$$

Tecla *Enter*.

Para limitar o domínio desta função ao intervalo $[0, 10]$, por exemplo, podemos digitar no campo de entrada:

Função [h, 0, 10]

Tecla *Enter*.

O limite superior 10 pode ser substituído por ∞ para um domínio em \mathbb{R}_+ .

- e) Digite no campo de entrada:

$$p(x) = x_0 e^{-(b / (2m)) x}$$

Tecla *Enter*

$$q(x) = -x_0 e^{-(b / (2m)) x}$$

Tecla *Enter*

Clique com o botão direito do mouse sobre a curva, para alterar o estilo e a cor dos gráficos esboçados.

- f) Atribua os valores de $m = 4$, $k = 36$, $v_0 = 0$ e $x_0 = 4$ conforme especificado na questão.

Lembrando que tal equação, admite raízes complexas para $|b| < 2\sqrt{mk}$, conforme obtido no Capítulo 3 pela fórmula resolutive, altere o valor de b , no intervalo $[0, 24]$.

Note que para $b = 0$, não existe amortecimento e nesse caso, as raízes complexas da equação característica correspondem a números imaginários puros.

A medida em que aumentamos o valor de b , observamos observamos que o amortecimento se torna mais forte e os pontos correspondentes às raízes complexas da equação, se aproximam de $(-\sqrt{k/m}, 0) = (-3, 0)$.

Para $b = 24$, o gráfico deixa de ser exibido. Temos evidentemente nesse caso o amortecimento crítico.

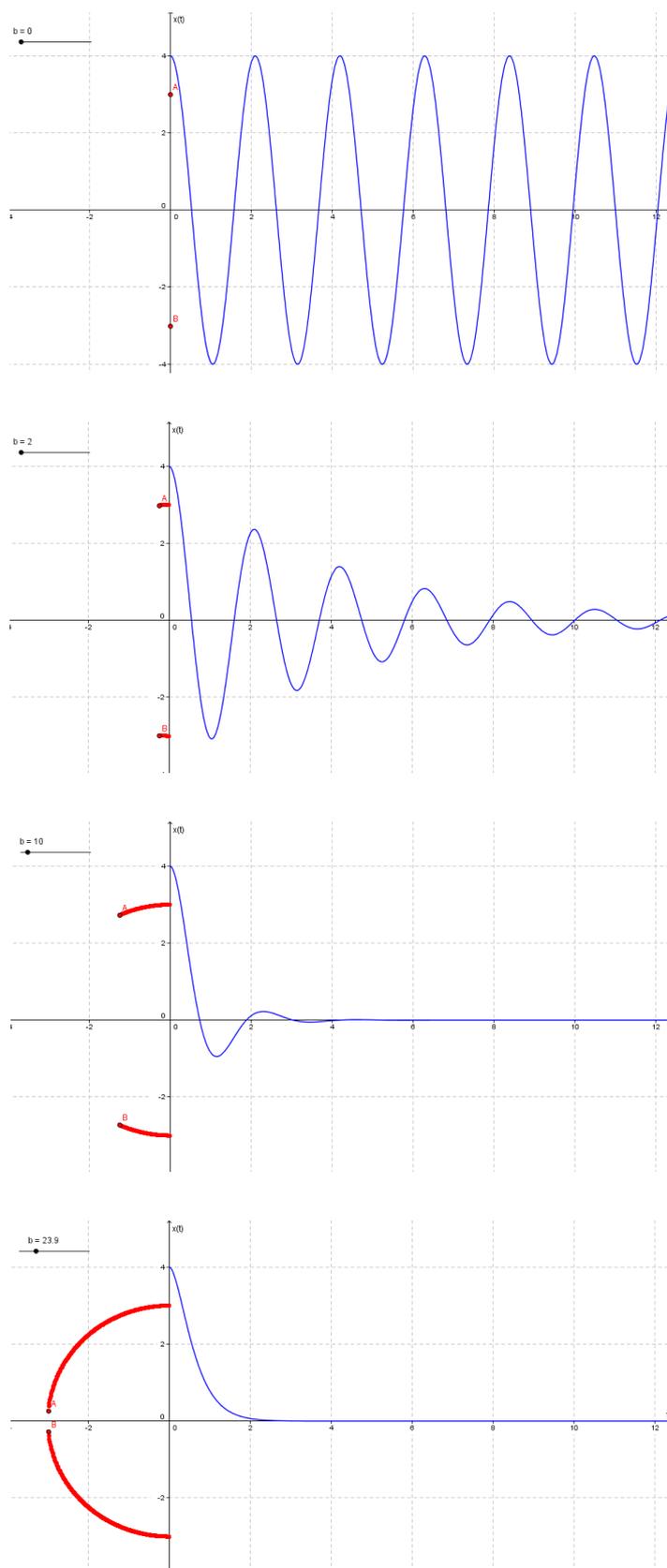


Figura 24 – Amortecimento Subcrítico para diferentes valores de b .

Destacamos que o desenvolvimento desta questão tem por objetivo, simplesmente facilitar a visualização de como o movimento oscilatório varia quando alteramos o coeficiente b da equação característica $mx^2 + bx + k = 0$. Utilizando a mesma construção, podemos variar os coeficientes m e k , solicitando aos alunos uma justificativa para tal variação, levando em consideração as grandezas que estes coeficientes representam no caso estudado neste capítulo.

Conclusão

Certo dia, ao resolver no quadro, uma questão referente à representação das raízes complexas de determinada equação quadrática, um questionamento sem resposta imediata incomodou. Como não dar a devida atenção à curiosidade de um aluno se o maior objetivo da educação é o seu comprometimento com a formação efetiva do cidadão? Inquietar-se e buscar junto com o estudante a solução para o problema, permite por meio da aproximação, uma percepção individual do aprendizado. Uma atividade realizada em sala, proporcionou uma pesquisa maior, com novos desafios. Ao investigarmos o lugar geométrico das raízes complexas das equações quadráticas quando variamos um de seus coeficientes, foi possível estabelecer uma conexão entre este estudo e conteúdos já apreendidos como a equação da circunferência e algumas funções.

Utilizando construções com o software GeoGebra, verificamos a possibilidade de aproximar os alunos de contextos onde o emprego dos números complexos é fundamental na resolução de problemas, e mais, com o auxílio deste recurso, podemos perceber relações entre a representação das raízes complexas de uma equação característica e o movimento oscilatório fornecido por ela. Reconhecemos assim a grande contribuição deste software na construção do conhecimento matemático, por favorecer de forma significativa a compreensão de resultados.

Quanto à análise dos livros didáticos, podemos perceber que destacar fatos históricos é uma preocupação de todos os autores. Entretanto, apresentar uma definição precisa para o conjunto dos números complexos e abordar de forma mais produtiva aplicações para estes números não é consenso.

Esperamos que tanto a proposta de investigação do lugar geométrico das raízes das equações quanto as atividades desenvolvidas referentes às aplicações de números complexos em oscilações amortecidas, possam colaborar com o trabalho docente. Acreditamos que a realização de experimentos com os alunos em parceria com o professor da disciplina de Física, possam produzir resultados significativos, por proporcionarem pela prática o contato com os resultados obtidos em atividades.

Como novos trabalhos acerca do tema, sugerimos a aplicação e avaliação de nossa proposta com os alunos da terceira série do Ensino Médio e ainda a realização de experimentos associadas a aplicações de números complexos.

Por último, é interessante chamarmos a atenção por termos a oportunidade de desenvolver interessantes trabalhos acadêmicos que contribuem para o desenvolvimento científico quando queremos de fato ser professores buscando respostas consistentes a certos questionamentos.

Referências

- [1] Barroso, Juliane Matsubara *et al.*: *Conexões com a matemática*, volume 3. Moderna, São Paulo, 1ª edição, 2010.
- [2] Boyer, Carl B.: *História da Matemática*. Blucher, São Paulo, 3ª edição, 2010.
- [3] Brasil: *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília, 2000.
- [4] Brasil: *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2006.
- [5] Carmo, Augusto Cezar Morgado Manfredo Perdigão do e Eduardo Wagner: *Trigonometria Números Complexos*. SBM, Rio de Janeiro, 1ª edição, 1992.
- [6] Dante, Luiz Roberto: *Matemática: contexto e aplicações*, volume 3. Ática, São Paulo, 1ª edição, 2010.
- [7] Iezzi, Gelson *et al.*: *Matemática: ciência e aplicações*, volume 3. Saraiva, São Paulo, 6ª edição, 2010.
- [8] Júnior, Ulício Pinto: *A história dos Números Complexos*. Dissertação de Mestrado. UFRJ, Rio de Janeiro, 2009.
- [9] Nussenzveig, Moysés: *Curso de Física Física 2 Fluidos Oscilações e Ondas*. Edgard Blucher LTDA, São Paulo, 1ª edição, 1987.
- [10] Paiva, Manoel: *Matemática - Paiva*, volume 3. Moderna, São Paulo, 1ª edição, 2009.
- [11] PNLD: *Guia de Livros Didáticos: PNLD 2012: Matemática*. Ministério da educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2011.
- [12] Ribeiro, Jackson: *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*, volume 3. Scipione, São Paulo, 1ª edição, 2010.
- [13] Robert Resnick, David Halliday e Kenneth S. Krane: *Física 2*. LTC Editora, Rio de Janeiro, 5ª edição, 2002.
- [14] Smole, Kátia Stocco e Maria Ignez Diniz: *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*, volume 3. Saraiva, São Paulo, 6ª edição, 2010.
- [15] Souza, Joamir Roberto de: *Novo olhar matemática*, volume 3. FTD, São Paulo, 1ª edição, 2010.