Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

# O Polinômio de Alexander e o Determinante de um Nó

**Mauro Munsignatti Junior**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
**Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi**

**2013**

510 Munsignatti Junior, Mauro
M969p O Polinômio de Alexander e o Determinante de um Nó/ Mauro Munsignatti Junior- Rio Claro: [s.n.], 2013.
51 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Alice Kimie Miwa Libardi

1. Matemática. 2. Teoria de nós - Alguns invariantes. 3. Grupo Fundamental. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

## TERMO DE APROVAÇÃO

Mauro Munsignatti Junior

O Polinômio de Alexander e o Determinante de um Nó

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Orientadora

Prof. Dr. João Peres Vieira
Departamento de Matemática - Unesp/Rio Claro

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
Departamento de Matemática - Ufscar/São Carlos

**Rio Claro, 11 de Abril de 2013**

*aos meus pais:*
*Mauro Munsignatti e Alaide Aparecida Grangeiro Munsignatti*

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Mauro Munsignatti e Alaide Aparecida Grangeiro Munsignatti, por todas as oportunidades de estudo que tive em minha vida. Agradeço também ás minhas professoras de matemática do Ensino Fundamental, Rosângela e Mie Abe, por toda a competência em seus trabalhos, o que me permitiu ter uma excelente base em matemática, necessária para o bom aprendizado nos anos seguintes de estudo. Agradeço ao grande professor que tive no Ensino Médio, Artur Zorzetto Filho. Foram 3 anos de ensino médio tendo aula com um excelente professor, que influenciou diretamente na minha decisão em ser professor de matemática. Certamente, tudo que conquistei profissionalmente até agora, devo ao Artur. Agradeço também ao COTUCA (Colégio Técnico de Campinas), colégio onde fiz o Ensino Médio e onde leciono matemática há 8 anos. É um colégio onde aprendi muita matemática como aluno de ensino médio, onde tive as minhas primeiras expriências em ensinar matemática, trabalhando como monitor desta disciplina durante 3 anos enquanto cursava a graduação em Licenciatura em Matemática, e que hoje me dá todas as possibilidades e condições de exercer a profissão de professor da forma desejada. Agradeço ao Luiz Roberto Rosa da Silva, que é meu companheiro de trabalho no COTUCA e uma pessoa por quem tenho uma admiração muito grande; agradeço ao Luiz por todas as conversas, todos os conselhos, pelo companheirismo e pela amizade. Um agradecimento especial também vai aos amigos Anderson Afuso, Denis Silva, Fabiana Moreto, Henrique Figo e Juliana Silveira, pela convivência bastante agradável nos 2 anos de aulas do Profmat na Unesp/Rio Claro. E por fim, agradeço a profa. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato, por toda a coordenação do Profmat na Unesp/Rio Claro, sempre nos ajudando no que foi possível, e também a profa. Alice Kimie Miwa Libardi, por toda a atenção dada, ajuda e orientação na elaboração deste trabalho.

# Resumo

Neste trabalho faremos uma exposição, muitas vezes intuitiva, da teoria de nós, baseada no livro de Derek Hacon (Introdução á Teoria dos Nós em $\mathbb{R}^3$) com o objetivo de apresentar os invariantes de isotopia: o determinante e o polinômio de Alexander de um nó. O grupo fundamental do complementar de um nó é um invariante de isotopia de nós mais poderoso do que os dois acima mencionados, porém muito difícil de ser calculado. Faremos uma breve apresentação dele.

**Palavras-chave:** Matemática, Teoria de nós - Alguns invariantes, Grupo Fundamental.

# Abstract

In this work we present an intuitive approach of the Knot Theory, based on the book "Introdução á Teoria dos Nós em $\mathbb{R}^3$", of Derek Hacon. The main purpose of this work is to present two invariants of isotopy of knots: the determinant and the Alexander's polynomial of a knot. The fundamental group of the complement of a knot in $\mathbb{R}^3$ is an isotopy invariant stronger than the two above mentioned invariants, but hard to calculate. We will present some basics features of that group.

**Keywords:** Mathematic, Knot Theory - some invariant, Fundamental Group.

# Lista de Figuras

# Sumário

# 1 Introdução

De acordo com [7], o estudo de nós e enlaçamentos de forma razoavelmente formalizada começa com Gauss em 1833. Ele e alguns de seus alunos começam a estudar o assunto, focalizando em enlaçamentos e tinham como objetivo aplicações na eletrodinâmica.

Lord Kelvin acreditava que os nós eram a chave para o entendimento das substâncias químicas, que seriam descritas pelas "formas dos nós". Tabelando-se os nós teria-se uma descrição das substâncias químicas. Começa então uma corrida para se obter tabelas de nós, nós cada vez mais complexos, com cada vez mais cruzamentos.

Ernest Rutherford e Dimitri Mendeleev põem fim a essa animação: Rutherford cria o modelo de átomos que até hoje utilizamos, e a ênfase na pesquisa dos elementos químicos muda para a Tabela Periódica organizada por Mendeleev. Com isso, os matemáticos continuam os estudos sobre nós, mas o trabalho se torna "abstrato".

Na década de 1980 bioquímicos descobriram enodamentos nas moleculas de DNA. Surgem então questões como: "seria possível criar moléculas inodadas?"; "enodamentos poderiam determinar algumas das propriedades das substâncias?"

Trabalhos recentes mostram que o estudo da Teoria de Nós e Enlaçamentos podem estar relacionados com outras áreas de conhecimento, como a Mecânica Estatística na Física, o estudo do DNA na Biologia e o estudo das estruturas tridimensionais das moléculas na Química.

Nós são um importante objeto de estudo na topologia. Um nó matemático é, basicamente, uma curva fechada que se enoda no espaço tridimensional. Formamos um nó torcendo e entrelaçando um fio e unindo no fim as extremidades. Como não é muito simples desenhar figuras em três dimensões, os nós são representados por projeções nos planos, chamadas de diagramas de nós.

Os pontos onde as curvas estão partidas representam as sobreposições e chamamos de cruzamentos. O número de cruzamentos depende do modo como a corda foi torcida e emaranhada, e pode ser tão grande quanto se queira, porém, cada nó tem um diagrama com um número mínimo de cruzamentos. Esses cruzamentos dividem a curva em um número finito de intervalos abertos. Estes intervalos são chamados de arcos do diagrama.

Um problema da teoria dos nós consiste em saber quando é que dois nós representam

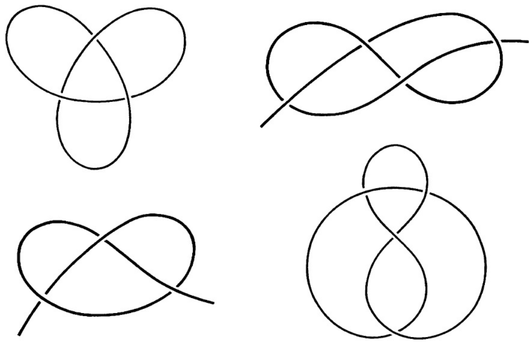

Figura 1.1: Exemplos de nós

o mesmo nó. Para mostrarmos que dois diagramas representam o mesmo nó, temos que tentar trasformar um até obter o outro. Em 1920, o matemático alemão Kurt Reidemeister provou que qualquer deformação de um nó pode ser efetuada mediante uma sequência de três tipos de movimentos simples. Os três tipos de movimentos de Reidemeister encontram-se ilustrados na figura 1.2:

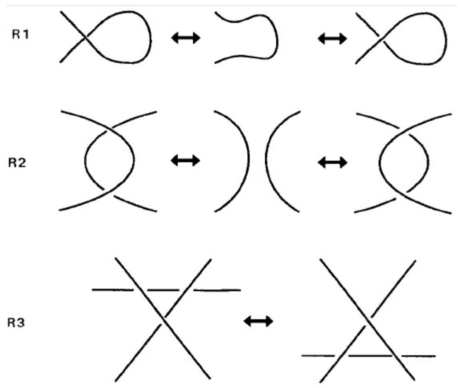


Figura 1.2: Movimentos de Reidemeister

Porém, transformar um nó em outro pode não ser tarefa simples.

Uma das maneiras para mostrar que dois nós são diferentes consiste em calcular os seus invariantes, ou seja, expressões algébricas ou numéricas associadas aos nós que não variam quando o nó é deformado. Estudar alguns desses invariantes será o objetivo deste trabalho.

No capítulo 2, apresentamos os pré-requisitos necessários ao entendimento dos capítulos seguintes; em seguida, no capítulo 3, definimos o Grupo Fundamental, que é constituído por classes de equivalência de laços em um espaço topológico X com base em um de seus pontos $x_0$. O Grupo Fundamental do complementar de um nó é um invariante. No Capítulo 4, apresentamos outros dois invariantes de nós: o Determinante e o Polinômio de Alexander. Esses dois invariantes são menos poderosos que o Grupo Fundamental do complementar de um nó, porém são mais fáceis de serem calculados. No capítulo 5, faremos algumas observações sobre o Grupo Fundamental do complementar de um nó. Por fim, no capítulo 6, apresentamos uma sugestão de atividade sobre nós para ser aplicada a alunos do Ensino Médio.

# 2 Pré-requisitos

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos, subsídios para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Os conceitos listados até a Definição 2.9 podem ser vistos em [2].

**Definição 2.1.** *Uma relação $R$ sobre um conjunto $E \neq \emptyset$ é chamada relação de equivalência sobre $E$ se, e somente se, $R$ é reflexiva, simétrica e transitiva, isto é, se são verdadeiras:*

1. $\forall x \in E, xRx$
2. $\forall x, y : xRy \Longrightarrow yRx$
3. $\forall x, y, z : xRy$ *e* $yRz \Longrightarrow xRz$

**Definição 2.2.** *Seja $R$ uma relação de equivalência sobre $E$. Dado $a \in E$, chama-se classe de equivalência determinada por $a$ o subconjunto $[a]$ de $E$ constituido pelos elementos $x$ tais que $xRa$. Em símbolos:*

$$[a] = \{x \in E | xRa\}$$

*O conjunto quociente, denotado por $E/R$, é constituído por todas as classes de equivalência dos elementos de $E$.*

**Teorema 2.1.** *Seja $R$ uma relação de equivalência sobre $E$ e sejam $a \in E$ e $b \in E$. As seguintes proposições são equivalentes:*

1. $aRb$
2. $a \in [b]$
3. $b \in [a]$
4. $[a] = [b]$

**Definição 2.3.** *Seja $* : G \times G \to G$ uma operação em um conjunto $G$. Dizemos que $G$ é um grupo se satisfaz as seguintes condições:*

1. *A operação é associativa:* $\forall a, b, c \in G; (a * b) * c = a * (b * c)$.

2. *Existe um elemento neutro* $e \in G : e * a = a * e = a$.

3. $\forall a \in G, \exists a' \in G$ *simétrico de* $a$ *tal que* $a * a' = a' * a = e$.

**Definição 2.4.** *Dado um grupo* $G$*, o comutador de dois elementos* $g_1, g_2$ *de* $G$ *é dado por:* $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$. *O subgrupo comutador é o subgrupo gerado pelos comutadores dos elementos de* $G$.

**Definição 2.5.** *Dizemos que um grupo (G, *) é abeliano se, e somente se, a lei* $(x, y) \to x * y$ *é comutativa, isto é:*

$$a * b = b * a, \forall a, b \in G$$

**Definição 2.6.** *Sejam* $(x, y) \to x + y$ *e* $(x, y) \to xy$ *leis de composição internas num conjunto* $A \neq \varnothing$. *Suponhamos que*

1. *O conjunto* $A$ *é um grupo abeliano em relação á primeira dessas leis (adição);*

2. *A segunda das leis consideradas é associativa:*

$$\forall a, b, c \in A : a(bc) = (ab)c;$$

3. *A multiplicação é distributiva em relação à adição:*

$$\forall a, b, c \in A : a(b + c) = ab + ac$$

*e*

$$(a + b)c = ac + bc;$$

*Nas condições expostas dizemos que* $A$ *é um anel em relação à adição e à multiplicação consideradas.*

**Definição 2.7.** *Dizemos que um anel* $A$ *é um anel comutativo se a multiplicação é comutativa, isto é:*

$$\forall a, b \in A : ab = ba$$

**Definição 2.8.** *Seja* $A$ *um anel comutativo. Dizemos que um subconjunto* $I \subset A, I \neq \varnothing$*, é um ideal em* $A$ *se, e somente se:*

1. $x, y \in I \Longrightarrow x - y \in I$;

2. $a \in A$ *e* $x \in I \Longrightarrow ax \in I$.

**Definição 2.9.** *Dados dois grupos* $(G, *)$ *e* $(J, \Delta)$*, dizemos que uma aplicação* $f : G \to J$ *é um homomorfismo de* $G$ *em* $J$ *se, e somente se,*

$$\forall a, b \in G : f(a * b) = f(a) \Delta f(b)$$

**Definição 2.10.** *Sejam $(G,*)$ e $(J,\Delta)$ grupos genéricos. Dizemos que uma aplicação $f : G \to J$ é um isomorfismo do grupo $G$ no grupo $J$ se, e somente se,*

1. *$f$ é bijetora;*

2. *$f$ é um homomorfismo de grupos.*

**Definição 2.11.** *Se $U$ e $V$ são abertos em $\mathbb{R}^3$, uma bijeção entre $U$ e $V$, $F : U \to V$, é chamada de difeomorfismo se $F$ e $F^{-1}$ são diferenciáveis e com derivadas contínuas.*

*Mais geralmente, se $A \subseteq \mathbb{R}^3$ e $B \subseteq \mathbb{R}^3$, uma função $f : A \to B$ é chamada de difeomorfismo se existem abertos $U \supseteq A$, $V \supseteq B$ e um difeomorfismo $F : U \to V$ tal que, em $A$, $F = f$, ou seja, $F(a) = f(a)$, $\forall a \in A$.[3]*

**Definição 2.12.** *Dizemos que $X$ e $Y$ sao isotópicos se existe um difeomorfismo $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que preserva a orientação em $\mathbb{R}^3$ e manda $X$ em $Y$.[3]*

**Definição 2.13.** *Um nó $K$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ homeomorfo a $S^1$, ou seja, existe um homeomorfismo $f : S^1 \to K \subset \mathbb{R}^3$.*

Para a classificação de objetos em geral são usados invariantes. Um invariante pode ser um número, um grupo ou uma propriedade que se associa a um determinado objeto satisfazendo a seguinte condição: objetos equivalentes têm os respectivos invariantes iguais. Um invariante de isotopia de nós é um número (ou alguma coisa algébrica mais sofisticada) que é associado a cada nó e que é igual para todo par de nós isotópicos.

**Lema 2.1.** *(Lema da Colagem)*

*Sejam $M$ e $N$ espaços topológicos e $A$ e $B$ subconjuntos fechados de $M$ tais que $A \cup B = M$. Sejam $f : A \to N$ e $g : B \to N$ funções contínuas satisfazendo a condição: $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A \cap B$. Então a função $h : M \to N$ definida por:*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A, \\ g(x), & \text{se } x \in B, \end{cases}$$

*é contínua.[5]*

*Demonstração:*

*Vamos provar que se $F$ e um subconjunto fechado de $N$ então $h^{-1}(F)$ é um subconjunto fechado de $M$.*

*Seja $F$ um subconjunto fechado de $N$. Como $f$ e $g$ sao contínuas, então $f^{-1}(F)$ é um fechado de $A$ e $g^{-1}(F)$ é um fechado de $B$. Daí, uma vez que por hipótese $A$ e $B$ sao fechados de $M$, segue que $f^{-1}(F)$ e $g^{-1}(F)$ são fechados de $M$. Agora é fácil ver que $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$ e portanto $h^{-1}(F)$ é fechado de $M$, pois é reunião de dois fechados de $M$.*

# 3 O Grupo Fundamental

Dados um espaço topológico $X$ e $x_0 \in X$, associaremos um grupo, chamado Grupo Fundamental, constituído por classes de equivalência de laços em $X$ com base $x_0$.

Esse grupo além de ser um invariante topológico, no sentido de que se dois espaços são homeomorfos, então os respectivos grupos fundamentais são isomorfos, é um belo exemplo de que grupos podem se constituir de elementos interessantes, como laços.

Um dos invariantes mais fortes que temos em relação à teoria de nós está relacionado com o Grupo Fundamental. Comentaremos neste trabalho sobre o Grupo Fundamental do complementar de um nó.

**Definição 3.1.** *Sejam $X$ um espaço topológico. Um caminho em $X$ com ponto inicial $x_0$ e ponto final $x_1$ é uma aplicação contínua $\lambda : I = [0,1] \to X$ tal que $\lambda(0) = x_0$ e $\lambda(1) = x_1$. Quando $\lambda(0) = \lambda(1) = x_0$, para algum $x_0 \in X$, dizemos que $\lambda$ é um laço.*

*Denotemos por $\Omega(X, x_0)$ o conjunto $\{\lambda : I = [0,1] \to X;\ \lambda$ é laço em $x_0\}$*

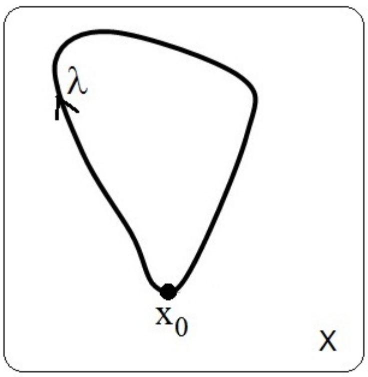


Figura 3.1: laço $\lambda$ em $x_0$

**Definição 3.2.** *Sejam $\lambda, \gamma : I \to X$ caminhos tais que $\lambda(1) = \gamma(0)$. O produto dos caminhos $\lambda$ e $\gamma$ é denotado por $\lambda * \gamma$ e definido por:*

$$\lambda * \gamma(x) = \begin{cases} \lambda(2t), & se\ 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \gamma(2t-1), & se\ 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

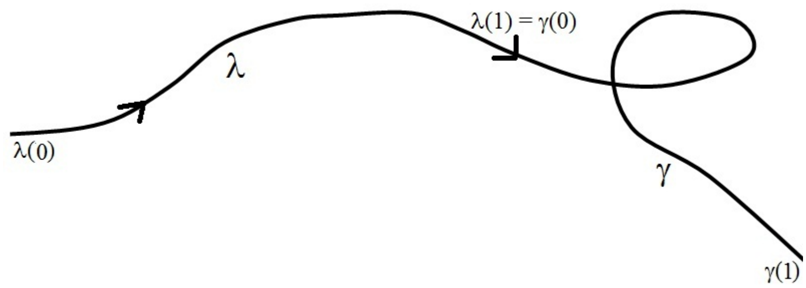


Figura 3.2: caminhos $\lambda$ e $\gamma$ onde $\lambda(1) = \gamma(0)$

**Definição 3.3.** *Dizemos que $\lambda$ e $\gamma$ em $\Omega(X, x_0)$ são homotópicos e denotamos por $\lambda \sim \gamma$ se existe uma função $H : I \times I \to X$ contínua tal que*

$$H(t, 0) = \lambda(t),\ \forall t \in I,$$

$$H(t, 1) = \gamma(t),\ \forall t \in I,$$

$$H(0, s) = H(1, s) = x_0,\ \forall s \in I$$

*O parâmetro $s$ é dito nível de homotopia e esta homotopia é relativa a $\{0, 1\}$.*

**Proposição 3.1.** *A relação de homotopia é uma relação de equivalência.*

Demonstração:

1. Reflexiva

   Para todo $\lambda \in \Omega(X, x_0)$, definindo-se

$$H : I \times I \to X$$

$$(t, s) \to \lambda(t)$$

   tem-se que $H$ é contínua e $H(t, 0) = \lambda(t) = H(t, 1)$ e $H(0, s) = x_0 = H(1, s)$, logo, $\lambda \sim \lambda$.

2. Simétrica

   Sejam $\lambda, \gamma \in \Omega(X, x_0)$ tais que $\lambda \sim \gamma$ por uma homotopia H. Definindo-se

$$G : I \times I \to X$$

$$(t, s) \to H(t, 1 - s)$$

   tem-se que $G$ é contínua e $G(t, 0) = H(t, 1) = \gamma(t)$, $G(t, 1) = H(t, 0) = \lambda(t)$ e $G(0, s) = H(0, 1 - s) = H(1, 1 - s) = G(1, s) = x_0$. Segue que $\gamma \sim \lambda$.

3. Transitiva

   Sejam $\lambda, \gamma, \phi \in \Omega(X, x_0)$ tai que $\gamma \sim \lambda$ e $\lambda \sim \phi$ por homotopias $H_0$, $H_1$, respectivamente. Definindo-se

$$H : I \times I \to X$$

$$(t, s) \to \begin{cases} H_0(t, 2s), & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ H_1(t, 2s - 1), & \text{se } 1/2 \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

   tem-se, pelo Lema da Colagem, que $H$ é contínua, pois $H_0(t, 1) = \lambda(t) = H_1(t, 0)$ e $H_0$, $H_1$, sao continuas, ambas definidas em intervalos fechados. Além disso, $H(t, 0) = H_0(t, 0) = \gamma(t)$, $H(t, 1) = H_1(t, 1) = \phi(t)$,

$$H(0, s) = \begin{cases} H_0(0, 2s) = x_0, & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ H_1(0, 2s - 1) = x_0, & \text{se } 1/2 \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

   e

$$H(1, s) = \begin{cases} H_0(1, 2s) = x_0, & \text{se } 0 \leqslant s \leqslant 1/2, \\ H_1(1, 2s - 1) = x_0, & \text{se } 1/2 \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

   segue que $\gamma \sim \phi$.

Denotemos por $\pi_1(X, x_0)$ o conjunto quociente $\Omega(X, x_0)/\sim$.

Primeiramente observemos que: para quaisquer $\alpha, \beta, \alpha' e \beta' \in \Omega(X, x_0)$ tais que $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$, pelas homotopias $H$ e $G$, respectivamente, podemos definir $F : I \times I \to X$ por:

$$(t, s) \to \begin{cases} H(2t, s), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ G(2t - 1, s), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

Como para $t = 1/2$, $H(1, s) = x_0 = G(0, s)$ e $G$ e $H$ são funções contínuas, ambas definidas em intervalos fechados, o Lema da Colagem nos garante que $F$ é contínua. Além disso,

$$F(t, 0) = \begin{cases} H(2t, 0), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ G(2t - 1, 0), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \beta(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = (\alpha * \beta)(t)$$

e

$$F(t,1) = \begin{cases} H(2t,1), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ G(2t-1,1), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = \begin{cases} \alpha'(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \beta'(2t-1), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = (\alpha' * \beta')(t)$$

e também $F(0,s) = H(0,s) = x_0 = G(1,s) = F(1,s)$, mostrando assim que $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$.

Segue que temos bem definida a operação

$$\cdot : \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$$
$$([\alpha],[\beta]) \to [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$$

**Teorema 3.1.** *O par $(\pi_1(X,x_0), \cdot)$ é um grupo, chamado grupo fundamental de $X$ com ponto base $x_0$.*

Demonstração:

1. Associativa

   Para quaisquer $[\alpha], [\beta], [\gamma]$ em $\pi_1(X,x_0)$, mostraremos que

   $$([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]),$$

   ou seja, mostraremos que

   $$[(\alpha * \beta) * \gamma] = [\alpha * (\beta * \gamma)],$$

   resultado que, de acordo com o Teorema 2.1, é equivalente a:

   $$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$$

   De acordo com a definição 3.1, temos que:

   $$((\alpha*\beta)*\gamma)(t) = \begin{cases} (\alpha * \beta)(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \gamma(2t-1), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = \begin{cases} \alpha(4t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/4, \\ \beta(4t-1), & \text{se } 1/4 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \gamma(2t-1), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

   e

   $$(\alpha*(\beta*\gamma))(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ (\beta * \gamma)(2t-1), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/4, \\ \beta(4t-2), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 3/4, \\ \gamma(4t-3), & \text{se } 3/4 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

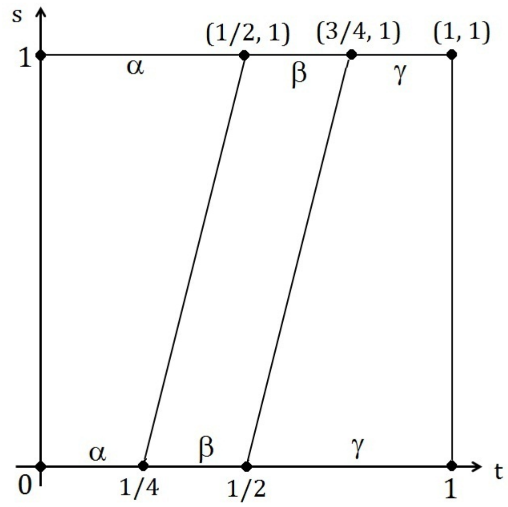


Figura 3.3: Associatividade

Baseado na figura 3.1,

definimos a seguinte homotopia:

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{s+1}), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{s+1}{4}, \\ \beta(4t-s-1), & \text{se } \frac{s+1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{s+2}{4}, \\ \gamma(\frac{4t-s-2}{2-s}), & \text{se } \frac{s+2}{4} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Temos que $H$ é contínua e

$$H(t,0) = ((\alpha * \beta) * \gamma)(t)$$

$$H(t,1) = (\alpha * (\beta * \gamma))(t)$$

$$H(0,s) = \alpha(0) = x_0$$

$$H(1,s) = \gamma(0) = x_0$$

e com isso, temos que $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$.

2. Elemento neutro

Mostraremos agora que $e_{x_0} = [c_{x_0}]$ é o elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$, onde $c_{x_0}(t) = x_0, \forall t$.

A figura abaixo justificará as homotopias escolhidas:

Tomaremos $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ qualquer. Então:

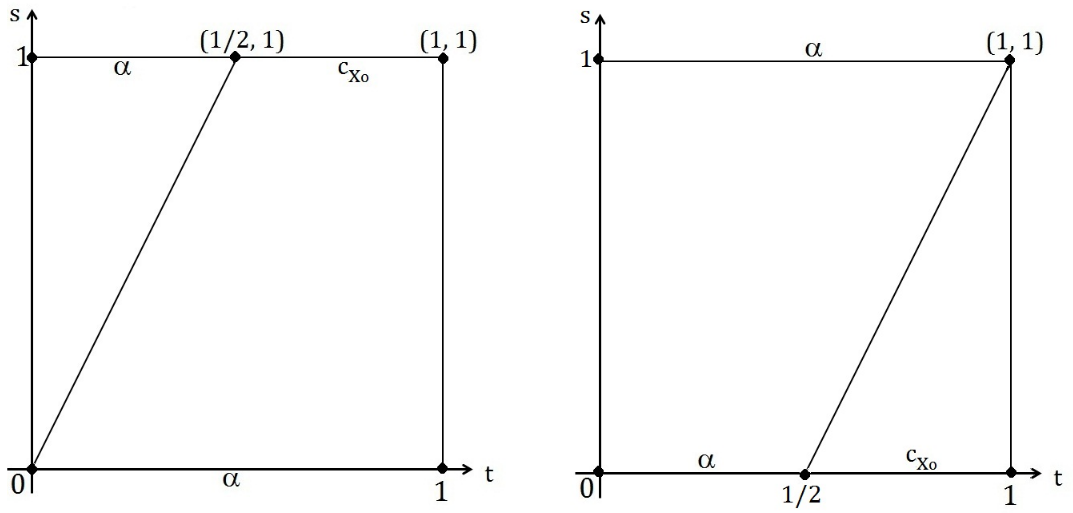


Figura 3.4: Existência do elemento neutro

$$(\alpha * c_{x_0})(x) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ c_{x_0}(2t-1) = x_0, & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

Para mostrar que $[\alpha * c_{x_0}] = [\alpha]$, ou seja: $\alpha * c_{x_0} \sim \alpha$, basta tomar:

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{s+1}), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{s+1}{2}, \\ x_0, & \text{se } \frac{s+1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$H$ é contínua e

$$H(t,0) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ x_0, & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = (\alpha * c_{x_0})(t)$$

$$H(t,1) = \alpha(t)$$

$$H(0,s) = x_0 = H(1,s)$$

Com isso, temos que $\alpha * c_{x_0} \sim \alpha$.

Agora, para mostrar que $[c_{x_0} * \alpha] = [\alpha]$, ou seja $c_{x_0} * \alpha \sim \alpha$, tomamos:

$$G(t,s) = \begin{cases} x_0 & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1-s}{2}, \\ \alpha(\frac{2t-1+s}{s+1}), & \text{se } \frac{1-s}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

pois neste caso, $G$ é contínua e

$$G(t,0) = \begin{cases} x_0, & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \alpha(2t-1), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = (c_{x_0} * \alpha)(t)$$

$$G(t,1) = \alpha(t)$$

$$G(0,s) = x_0 = G(1,s)$$

Assim, $c_{x_0} * \alpha \sim \alpha$.

3. Simétrico

Dado $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, tomamos $\overline{\alpha} : I \to X$ o laço $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$. Mostremos que $[\alpha] \cdot [\overline{\alpha}] = [\overline{\alpha}] \cdot [\alpha] = c_{x_0}$, ou seja, $\alpha * \overline{\alpha} \sim c_{x_0}$ e $\overline{\alpha} * \alpha \sim c_{x_0}$.

Primeiramente, considerando a homotopia:

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{s}{2}, \\ \alpha(s), & \text{se } \frac{s}{2} \leqslant t \leqslant \frac{2-s}{2}, \\ \overline{\alpha}(2t-1), & \text{se } \frac{2-s}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

temos que $H$ é contínua e:

$$H(t,0) = \alpha(0) = x_0 = c_{x_0}$$

$$H(t,1) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \overline{\alpha}(2t-1), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = (\alpha * \overline{\alpha})(t)$$

$$H(0,s) = \alpha(0) = x_0$$

$$H(1,s) = \overline{\alpha}(1) = \alpha(0) = x_0$$

ou seja, $c_{x_0} \sim \alpha * \overline{\alpha}$, e de acordo com a Proposição 3.1 , temos que $\alpha * \overline{\alpha} \sim c_{x_0}$.

Agora, considerando a homotopia

$$K(t,s) = \begin{cases} \overline{\alpha}(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{s}{2}, \\ \overline{\alpha}(s), & \text{se } \frac{s}{2} \leqslant t \leqslant \frac{2-s}{2}, \\ \alpha(2t-1), & \text{se } \frac{2-s}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

temos:

$$K(t,0) = \overline{\alpha}(0) = \alpha(1) = x_0 = c_{x_0}$$

$$K(t,1) = \begin{cases} \overline{\alpha}(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \alpha(2t-1), & \text{se } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = (\overline{\alpha} * \alpha)(t)$$

$$K(0,s) = \overline{\alpha}(0) = \alpha(1) = x_0$$

$$K(1,s) = \alpha(1) = x_0$$

o que implica que $c_{x_0} \sim \overline{\alpha} * \alpha$, ou seja, $\overline{\alpha} * \alpha \sim c_{x_0}$.

**Proposição 3.2.** *Seja $X$ um espaço topológico conexo por caminhos e sejam $x_0$, $x_1$ $\in X$ quaisquer. Então $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(X,x_1)$ são isomorfos.*

Demonstração:

Sendo $X$, por hipótese, conexo por caminhos e $x_0, x_1 \in X$, temos que existe um caminho $\gamma : I \to X$ tal que $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

Definimos $\gamma_\# : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_1)$ por $\gamma_\#([\beta]) = [\gamma^{-1} * \beta * \gamma]$.

Mostremos que a aplicação está bem definida. Para isso, devemos mostrar que se $[\alpha] = [\beta]$ então $\gamma_\#([\alpha]) = \gamma_\#([\beta])$, isto é, que $= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] = [\gamma^{-1} * \beta * \gamma]$, ou equivalentemente, que $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma \sim \gamma^{-1} * \beta * \gamma$.

De fato, sejam $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,x_0)$, tais que $[\alpha] = [\beta]$. Então, $\alpha \sim \beta$, o que implica que existe $F : I \times I \to X$ homotopia entre $\alpha$ e $\beta$, isto é, $F$ contínua tal que $F(t,0) = \alpha(t), F(t,1) = \beta(t), \forall t \in I$ e $F(0,s) = x_0 = F(1,s), \forall s \in I$.

Definimos $G : I \times I \to X$ por: $G(t,s) = (\gamma^{-1} * F_s * \gamma)(t)$, onde $F_s : I \to X$, é dado por $F_s(t) = F(t,s)$. Assim, para todo $s \in I$, $F_s$ é contínua, $F_s(0) = F(0,s) = x_0$ e $F_s(1) = F(1,s) = x_0$. Logo, $F_s$ é um laço em $x_0$.

Também a aplicação $G$ é contínua, pelo Lema da Colagem, e

$$G(t,0) = (\gamma^{-1} * F_o * \gamma)(t) = (\gamma^{-1} * \alpha * \gamma)(t),$$

desde que $F_o(t) = F(t,0) = \alpha(t), \forall t \in I$ e, portanto, $F_o = \alpha$;

$$G(t,1) = (\gamma^{-1} * F_1 * \gamma)(t) = (\gamma^{-1} * \beta * \gamma)(t),$$

desde que $F_1(t) = F(1,t) = \beta(t), \forall t \in I$ e, portanto, $F_1 = \beta$;

$$G(0,s) = \gamma^{-1} * F_s * \gamma)(0) = \gamma^{-1}(0) = x_1$$

$$G(1,s) = \gamma^{-1} * F_s * \gamma)(1) = \gamma(1) = x_1$$

Assim, $\gamma^{-1} * \alpha * \gamma \sim \gamma^{-1} * \beta * \gamma$, o que implica que $\gamma_\#([\alpha]) = \gamma_\#([\beta])$. Portanto, $\gamma_\#$ está bem definida.

Mostremos agora que $\gamma_\#$ um homomorfismo.

Sejam $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,x_0)$. Devemos mostrar que $\gamma_\#([\alpha] \cdot [\beta]) = \gamma_\#([\alpha]) \cdot \gamma_\#([\beta])$. Observemos que, se $\gamma \in \Omega(X,x_0,x_1)$, então $\gamma * \gamma^{-1} \sim c_{x_0}$, onde $c_{x_0} : I \to X$ é dado por $c_{x_0}(t) = x_0$, $\forall t \in I$. Definamos $H : I \times I \to X$ por:

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1-s}{2}, \\ \gamma^{-1}(s), & \text{se } \frac{1-s}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1+s}{2}, \\ \gamma^{-1}(2t-1), & \text{se } \frac{1+s}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

Então, $H$ é uma homotopia entre $\gamma * \gamma^{-1}$ e $c_{x_0}$, pois desde que, para $t = \frac{1-s}{2}$, $\gamma(2t) = \gamma(1-s) = \gamma^{-1}(s)$ e, para $t = \frac{1+s}{2}$, $\gamma^{-1}(s) = \gamma^{-1}(2t-1)$, então H é contínua. Além disso:

$$H(t,0)=\begin{cases}\gamma(2t), & \text{se } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ \gamma^{-1}(0), & \text{se } t=\frac{1}{2},\\ \gamma^{-1}(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases} = \begin{cases}\gamma(2t), & \text{se } 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},\\ \gamma^{-1}(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases} = \gamma*\gamma^{-1}(t), \forall t\in I,$$

$$H(t,1)=\begin{cases}\gamma(2t), & \text{se } t=0,\\ \gamma^{-1}(1), & \text{se } 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \gamma^{-1}(2t-1), & \text{se } t=1,\end{cases} = \begin{cases}\gamma(0)=x_0, & \text{se } t=0,\\ \gamma^{-1}(s)=x_0, & \text{se } 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \gamma^{-1}(1)=x_0, & \text{se } t=1,\end{cases} = c_{x_0}(t), \forall t\in I,$$

e $H(0,s)=\gamma(0)=x_0$ e $H(1,s)=\gamma^{-1}=x_0$. Assim,
$\gamma*\gamma^{-1}\sim c_{x_0}\Longrightarrow \alpha*\gamma*\gamma^{-1}\sim\alpha*c_{x_0}\sim\alpha\Longrightarrow\alpha*\gamma*\gamma^{-1}*\beta\sim\alpha*\beta\Longrightarrow\alpha*\beta\sim\alpha*\gamma*\gamma^{-1}*\beta\Longrightarrow\gamma^{-1}*\alpha*\beta*\gamma\sim\gamma^{-1}*\alpha*\gamma*\gamma^{-1}*\beta*\gamma$.

Então,
$\gamma_{\#}([\alpha]\cdot[\beta]) = \gamma_{\#}([\alpha*\beta]) = [\gamma^{-1}*\alpha*\beta*\gamma] = [\gamma^{-1}*\alpha*\gamma*\gamma^{-1}*\beta*\gamma] = [\gamma^{-1}*\alpha*\gamma][\gamma^{-1}*\beta*\gamma]=\gamma_{\#}([\alpha])\cdot\gamma_{\#}([\beta])$.

Finalmente, mostremos que $\gamma_{\#}$ é bijetor:

Injetividade: Seja $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$ tal que $\gamma_{\#}([\alpha])=e_{x_1}=[c_{x_1}]$. Então:

$[\gamma^{-1}*\alpha*\gamma]=[c_{x_1}]\Longrightarrow\gamma^{-1}*\alpha*\gamma\sim c_{x_1}\Longrightarrow\gamma*\gamma^{-1}*\alpha*\gamma*\gamma^{-1}\sim\gamma*c_{x_1}*\gamma^{-1}\Longrightarrow c_{x_0}*\alpha*c_{x_0}\sim\gamma*c_{x_1}*\gamma^{-1}\Longrightarrow\alpha\sim\gamma*c_{x_1}*\gamma^{-1}\Longrightarrow\alpha\sim c_{x_0}\Longrightarrow[\alpha]=e_{x_0}$,
desde que $\gamma*c_{x_1}\sim\gamma$, pois $K:I\times I\to X$ dada por::

$$K(t,s)=\begin{cases}\gamma(\frac{2t}{s+1}), & \text{se } 0\leqslant t\leqslant\frac{s+1}{2},\\ x_1, & \text{se } \frac{s+1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

é uma homotopia entre $\gamma*c_{x_1}$ e $\gamma$, uma vez que $K$ é contínua pelo Lema da Colagem,

$$K(t,0)=\begin{cases}\gamma(2t), & \text{se } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ x_1, & \text{se } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases} = \gamma*c_{x_1}(t), \forall t\in I,$$

$$K(t,1)=\begin{cases}\gamma(t), & \text{se } 0\leqslant t\leqslant 1,\\ x_1, & \text{se } t=1,\end{cases} = \gamma(t), \forall t\in I,$$

e $K(0,s)=\gamma(0)=x_0$ e $K(1,s)=x_1$. Portanto $\gamma_{\#}$ é injetor.

Sobrejetividade: dado $[\beta]\in\pi_1(X,x_1)$, tome $[\gamma*\beta*\gamma^{-1}]\in\pi_1(X,x_0)$. Então $\gamma_{\#}([\gamma*\beta*\gamma^{-1}])=[\gamma^{-1}*\gamma*\beta*\gamma^{-1}*\gamma]=[c_{x_1}*\beta*c_{x_1}]=[\beta]$. Assim, $\gamma_{\#}$ é sobrejetor.

Portanto $\gamma_{\#}$ é um isomorfismo e $\pi_1(X,x_0)$ e $\pi_1(X,x_1)$ são isomorfos.

Por este teorema, podemos ver que o grupo fundamental de um espaço topológico independe do ponto base considerado, se o espaço for conexo por caminhos. Neste caso, denotaremos $\pi_1(X, x_0)$ simplesmente por $\pi_1(X)$.

Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Observemos que $f \circ \alpha$ é um laço em $f(x_0)$, pois:

$$f \circ \alpha : [0,1] \to Y$$
$$t \to (f \circ \alpha)(t)$$

é contínua e $(f \circ \alpha)(0) = f(x_0) = (f \circ \alpha)(1)$.

Sejam $\alpha$ e $\alpha'$ dois laços em $x_0$ tais que $\alpha \sim \alpha'$, por uma homotopia G.

Definimos $H : I \times I \to Y$ por $H(t,s) = (f \circ G)(t,s)$ e observamos que $H$ é contínua, pois $f$ e $G$ o são. Além disso,

$$H(t,0) = f \circ G(t,0) = (f \circ \alpha)(t),$$
$$H(t,1) = f \circ G(t,1) = (f \circ \alpha')(t),$$
$$H(0,s) = f \circ G(0,s) = f(x_0),$$
$$H(1,s) = f \circ G(1,s) = f(x_0),$$

Portanto $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$ e podemos dar a seguinte definição:

**Definição 3.4.** *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Definimos $f_\#$, a induzida de $f$, por*

$$f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$
$$[\alpha] \to [f \circ \alpha]$$

**Proposição 3.3.** *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ aplicações contínuas, onde $X, Y$ e $Z$ são espaços topológicos com $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$, e $z_0 = g(y_0) \in Z$. Então:*

1. *$f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ é um homomorfismo.*

2. *$(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$.*

3. *$Id_\#$ é o homomorfismo identidade do $\pi_1(X, x_0)$, onde $Id : X \to X$ é a aplicação identidade.*

   *Demonstração:*

1. *Primeiramente observamos que para quaisquer laços $f$ e $g$, temos $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$. De fato, para todo $t \in I$ temos:*

$$(f \circ (\alpha * \beta)) = \begin{cases} f(\alpha(2t)) & se\ 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ f(\beta(2t-1)), & se\ 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)(t)$$

*Sendo assim, temos que:*

$$f_{\#}([\alpha]\cdot[\beta]) = f_{\#}([\alpha*\beta]) = [f\circ(\alpha*\beta)] = [(f\circ\alpha)*(f\circ\beta)] = [f\circ\alpha]\cdot[f\circ\beta] = f_{\#}([\alpha])\cdot f_{\#}([\beta])$$

*e portanto $f_{\#}$ é um homomorfismo.*

2. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções contínuas. Considerando as respectivas aplicações induzidas:*

$$f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$[\alpha] \to f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

*e*

$$g_{\#} : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0)$$
$$[\alpha] \to g_{\#}([\alpha]) = [g \circ \alpha]$$

*Então $(g \circ f)_{\#}$ é dada por*

$$(g \circ f)_{\#} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0)$$
$$[\alpha] \to (g \circ f)_{\#}([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha]$$

*e portanto,*

$$(g\circ f)_{\#}([\alpha]) = [(g\circ f)\circ\alpha)] = [g\circ(f\circ\alpha)] = g_{\#}([f\circ\alpha]) = g_{\#}(f_{\#}([\alpha])) = (g_{\#}\circ f_{\#})([\alpha]).$$

3. *É imediato.*

□

**Teorema 3.2.** *Se $f : X \to Y$ é um homeomorfismo, então $f_{\#} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ é um isomorfismo.*

Demonstração:

Sendo $f$ um homeomorfismo segue que $f \circ f^{-1} = Id = f^{-1} \circ f$, onde $f^{-1}$ denota a função inversa de $f$. Pelas propriedades acima, temos:

$$(f \circ f^{-1})_{\#} = f_{\#} \circ (f^{-1})_{\#} = (Id)_{\#}$$

e

$$(f^{-1} \circ f)_{\#} = (f^{-1})_{\#} \circ (f)_{\#} = (Id)_{\#}$$

o que implica que $f_{\#}$ é um isomorfismo.

# 4 O Determinante e o Polinômio de Alexander de um Nó

Neste capítulo, apresentaremos dois invariantes de nós: O Determinante e o Polinômio de Alexander. São invariantes mais fracos do que o grupo fundamental do complementar de um nó, porém, mais fáceis de serem calculados. Após definirmos como calcular cada um desses invariantes, e fazer esses cálculos para alguns exemplos, verificaremos que há uma relação direta entre os dois.

## 4.1 Determinante

O Determinante $D$ de um nó é calculado da seguinte maneira:

1. associe a cada arco uma variável e a cada cruzamento uma equação da forma

$$a + b - 2d = 0;$$

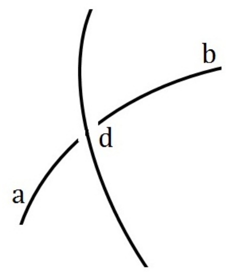


Figura 4.1:

2. coloque uma variável qualquer igual a zero;

3. descarte uma equação qualquer;

4. ficará determinado então um sistema de $n-1$ equações e $n-1$ variáveis. Calcule o valor absoluto do determinante da matriz formada pelos coeficientes das equações do sistema linear obtido.

Exemplo 1:

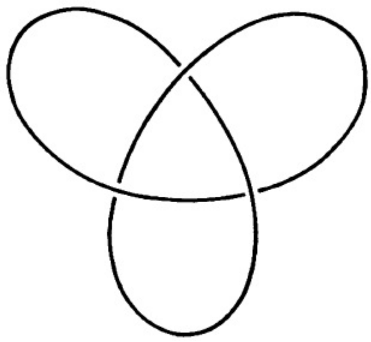

Figura 4.2: Nó - Exemplo 1

Equações:

$$a + c - 2b = 0$$

$$a + b - 2c = 0$$

$$c + b - 2a = 0$$

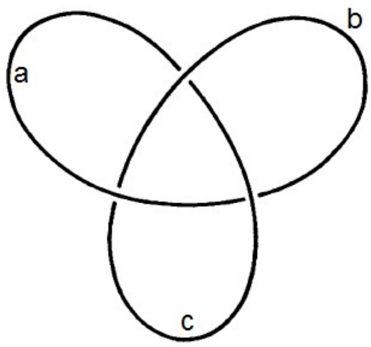


Figura 4.3: Nó - Exemplo 1: associação de cada arco a uma variável

Colocando a variável a $=$ 0 e eliminando a primeira equação, temos o sistema:

$$\begin{cases} b - 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

Calculando o determinante correspondente, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Assim, temos que $D = |3| = 3$.

Exemplo 2:

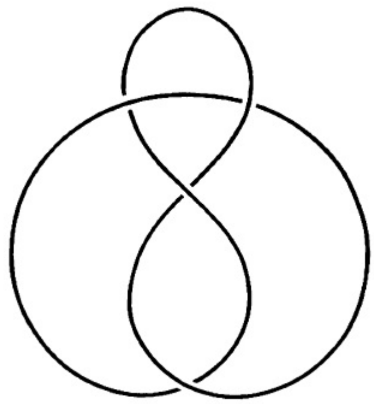

Figura 4.4: Nó - Exemplo 2

Equações:

$$a + d - 2c = 0$$

$$d + c - 2b = 0$$

$$a + b - 2d = 0$$

$$c + b - 2a = 0$$

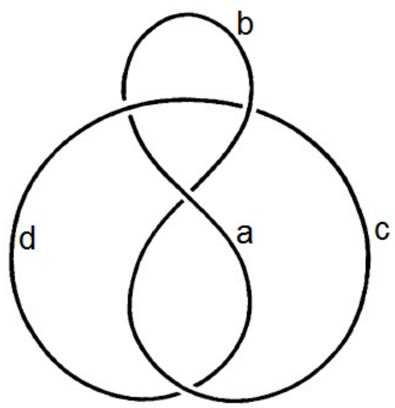


Figura 4.5: Nó - Exemplo 2: associação de cada arco a uma variável

Colocando a variável d = 0 e eliminando a quarta equação, temos o sistema:

$$\begin{cases} a - 2c = 0 \\ -2b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

Calculando o determinante correspondente, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

Assim, temos que $D = |-5| = 5$.

## 4.2 O Polinômio de Alexander

O Polinômio de Alexander é calculado mais ou menos da mesma maneira que o determinante. É um polinômio $\triangle(t)$ da forma $a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_o + ... + a_{-m}t^{-m}$, onde os coeficientes $a_i$ são inteiros e a variável $t$ satisfaz $t^p t^q = t^{p+q}$.

$\triangle(t)$ é mais trabalhoso de calcular do que o determinante, porém é mais poderoso, pois o determinante é o valor absoluto de $\triangle(-1)$.

1. Escolha um diagrama para $K$ e uma orientação para o diagrama;

2. associe a cada arco uma variável. A cada cruzamento escreva a equação

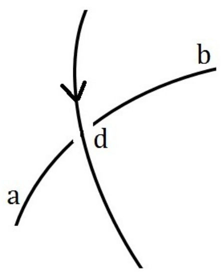


Figura 4.6:

$$b - ta - (1-t)d = 0;$$

Obs: d deve ser identificado com a variável que passa superiormente na região do cruzamento; para a escolha de a e b na equação, procedemos da seguinte forma: usando a orientação do trecho superior do nó, no cruzamento, a deve identificado com a variável associada à direita de d, e consequentemente, b deve ser idenficado com a variável à esquerda de d.

3. coloque uma variável qualquer igual a zero;

4. descarte uma equação qualquer;

5. calcule o determinante $\delta(t)$ deste sistema;

6. multiplique $\delta(t)$ por $\pm t^j$ apropriado para obter $\triangle(t)$, com $\triangle(t) = \triangle(t^{-1})$ e $\triangle(1) = +1$.

Usando os mesmos nós dos exemplos que calculamos o determinante, temos:
Exemplo 1:

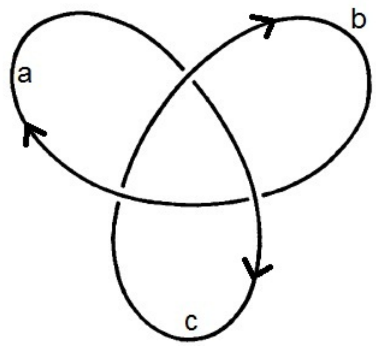


Figura 4.7: Nó - Exemplo 1: orientação definida

Equações:

$$a - tc - (1-t)b = 0$$

$$b - ta - (1-t)c = 0$$

$$c - tb - (1-t)a = 0$$

Adotando $a = 0$ e eliminando a primeira equação, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} b - (1-t) = 0 \\ -tb + c = 0 \end{cases}$$

assim, temos que:

$$\delta(t) = \begin{vmatrix} 1 & -1+t \\ -t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t + t^2$$

e com isso, para que $\triangle(t) = \triangle(t^{-1})$ e $\triangle(1) = +1$, multiplicamos $\delta(t)$ por $t^{-1}$, obtendo:

$$t^{-1}\delta(t) = t - 1 + t^{-1} = \triangle(t)$$

Exemplo 2:
Equações:

$$b - tc - (1-t)a = 0$$

$$d - tc - (1-t)b = 0$$

$$d - ta - (1-t)c = 0$$

$$b - ta - (1-t)d = 0$$

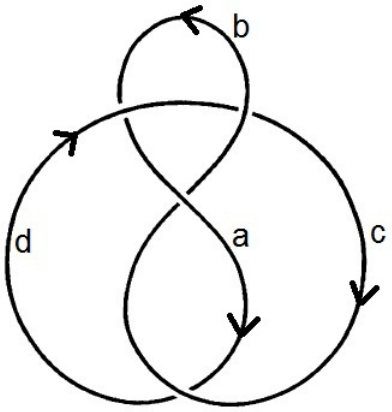


Figura 4.8: Nó - Exemplo 2: orientação definida

Adotando $d = 0$ e eliminando a quarta equação, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} (-1+t)a + b - tc = 0 \\ (-1+t)b - tc = 0 \\ -ta + (-1+t)c = 0 \end{cases}$$

assim, temos que:

$$\delta(t) = \begin{vmatrix} -1+t & 1 & -t \\ 0 & -1+t & -t \\ -t & 0 & -1+t \end{vmatrix} = -t^2 + 3t - 1$$

e com isso, para que $\triangle(t) = \triangle(t^{-1})$ e $\triangle(1) = +1$ , multiplicamos $\delta(t)$ por $t^{-1}$, obtendo:

$$t^{-1}\delta(t) = -t + 3 - t^{-1} = \triangle(t)$$

Obs: Como dissemos anteriormente, $|\triangle(-1)|$ é o determinante. Para ver isso, seja $\delta(t)$ o determinante do sistema. Temos $\triangle(t) = \pm t^j \delta(t)$. Colocando $t = -1$, a equação $a - tb - (1-t)c = 0$ se torna $a + b - 2c = 0$. Então $D = |\delta(-1)| = |\pm\triangle(-1)| = |\triangle(-1)|$.

Verificando este resultado para os dois nós acima, temos:

Exemplo 1:

$\triangle(t) = t - 1 + t^{-1} \Rightarrow |\triangle(-1)| = |(-1)^{-1} - 1 + (-1)^{-1}| = |-1-1-1| = |-3| = 3$

Exemplo 2:

$\triangle(t) = -t + 3 - t^{-1} \Rightarrow |\triangle(-1)| = |-(-1) + 3 - (-1)^{-1}| = |1+3+1| = |5| = 5$

# 5 Observações sobre o Grupo Fundamental do complementar de um nó

Seja $K$ um nó com uma orientação escolhida e seja $P$ um ponto base. Vamos dar uma descrição de $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - K; P)$. A cada arco de $K$ corresponde um elemento de $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - K; P)$ dado pelo laço que desce de $P$ até o arco, passa debaixo do arco no sentido positivo e volta para $P$. Para cada cruzamento do tipo abaixo,

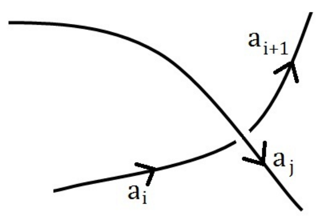


Figura 5.1:

temos uma relação do tipo $a_i a_j = a_j a_{i+1}$, e duas palavras $a_i$ representam o mesmo elemento se, e somente se, uma pode ser transformada na outra introduzindo ou cancelando $a_i^{-1}a_i$ ou $a_i a_i^{-1}$ e trocando $a_i a_j$ por $a_j a_{i+1}$. Esta é a descrição de $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - K; P)$, porém a sua determinação, mesmo em casos simples, não é trivial.

Uma maneira de obter informações seria abelianizar o grupo, ou seja, fazer o quociente pelo comutador. Embora em muitos casos o grupo abelianizado seja interessante, no caso de nós, ele é sempre isomorfo a $\mathbb{Z}$.

O grupo fundamental do complementar de um nó é um invariante mais forte do que o determinante e o polinômio de Alexander, porém o seu cálculo requer técnicas mais sofisticadas que vão além dos objetivos desta dissertação.

# 6 Atividade aplicada para o ensino Médio

Segundo consta em [9], a idéia de determinante apareceu em 1683, num manuscrito do matemático japonês T. S. Kowa (1642-1708), que a usou para a resolução de sistemas lineares. Com essa finalidade desenvolveu determinantes de até ordem 5 usando algumas propriedades que descobriu. Dez anos depois, Leibniz (1646-1716), um dos maiores matemáticos, fez a discussão de um sistema de 3 equações a duas incógnitas, na qual, pela primeira vez no Ocidente, aparece a ideia de determinante. Leibniz mostrou que se o sistema é consistente, então o determinante 3x3 formado pelas colunas dos coeficientes e as colunas dos termos independentes é igual a zero. A conhecida Regra de Cramer para a resolução de sistemas lineares de $n$ equações e $n$ incógnitas, por meio de determinantes, é, na verdade, uma descoberta do escocês Colin Maclaurin (1698-1746), e data aproximadamente de 1729, embora só tenha sido publicado em 1750, porém, o crédito dado ao suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não é totalmente infundado, uma vez que ele tambem chegou à regra em 1750.

O primeiro matemático a fazer uma exposição organizada da teoria de determinantes foi A. T. Vandermonde (1735-1796), num trabalho de 1772. Um ano depois, P. S. Laplace (1749-1827) demonstrou um importante teorema, que hoje é reconhecido pelo seu nome. Porém, A. L. Cauchy (1789-1857) foi quem modernizou a teoria de determinantes; a notação usada atualmente para indicar um determinante foi introduzida em 1841 por Arthur Cayley (1821-1895).

O assunto Determinantes faz parte do currículo de Matemática da $2^a$ série do Ensino Médio. Em relação ao tópico Determinantes, embora tenha importância considerável na Matemática, os principais livros didáticos atualmente não compartilham desta opinião.

O PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) é um programa do governo voltado à distribuição de livros didáticos aos estudantes da rede pública de ensino brasileiro.

De acordo com o arquivo

$$http://pnld.edunet.sp.gov.br/2012/Arquivos/MATEMATICA.pdf$$

encontrado no site

$$http://pnld.edunet.sp.gov.br/2012/,$$

"muitos **educadores** criticam a inclusão de determinantes no ensino médio, apoiados no fato de esse conceito não ser atualmente uma ferramenta utilizada na resolução de sistemas lineares, que é feita de modo muito mais eficiente pelo método de escalonamento."

Para se ter uma ideia de como o assunto Determinantes vem perdendo importância no ensino médio, comparemos o volume 2 da coleção "Matemática - Ciências e Aplicações", da Atual Editora. No livro da $4^a$ edição (2006), temos um capítulo inteiro apenas para o assunto Determinantes, que contém Regras para cálculo de determinantes 1x1, 2x2 e 3x3, Cofator e o Teorema de Laplace, propriedades, finalizando com o Teorema de Jacobi e a Regra de Chió. Já no livro da $6^a$ edição (2010), o capítulo sobre Determinantes foi retirado. O assunto aparece apenas de forma bem discreta como um item do capítulo de Sistemas Lineares, e ali, são apresentadas apenas as regras para cálculos de determinantes 1x1, 2x2 e 3x3, e nada mais.

Neste trabalho sobre introdução à teoria dos nós, uma das maneiras que apresentamos para classificar um nó foi através de Determinantes. Assim, utilizaremos este modo de classificação para propor uma atividade aos alunos do $2^a$ série do ensino médio. A atividade consiste em falar brevemente e de forma acessível sobre algumas das áreas de estudo da Matemática, como a Topologia; em seguida apresentar, também de forma acessível, o que é um nó, sua origem e importância futura de suas aplicações (que já esta apresentada na Introdução). Depois, apresentar a regra de classificação de um nó por determinantes (que também já está feita no capítulo 4), e para finalizar, pedir aos alunos para fazer a classificação de alguns nós, e verificar se, de acordo com essa regra de Determinantes, esses nós são equivalentes ou não.

ATIVIDADE PROPOSTA - $2^a$ SÉRIE DO ENSINO MÉDIO - DETERMINANTES

Quando um aluno opta em fazer graduação em Matemática, além de optar pela Licenciatura, que é a modalidade voltada para a formação do futuro professor, ele também pode optar pelo Bacharelado, modalidade que tem sua formação voltada principalmente para as atividades de pesquisa científica. Dentre as áreas de estudo da Matemática, temos a Topologia, que é o ramo da matemática que estuda os espaços topológicos, sendo considerado como uma extensão da geometria. A Topologia é uma área muito ampla, com muitas sub-áreas, sendo uma delas a Topologia Algébrica, que investiga conceitos como a homotopia (estudo de deformação de uma aplicação entre espaços topológicos) e a homologia (consiste na atribuição de uma sequência de grupos a um espaço topológico).

Na Topologia Algébrica, um dos assuntos que vem sendo estudado por alguns matemáticos é a Teoria dos Nós.

O estudo dos nós e enlaçamentos de forma razoavelmente formalizada começa com Gauss em 1833. Ele e alguns de seus alunos começam a estudar o assunto, focalizando enlaçamentos. Seus estudos tinham como objetivo aplicações na eletrodinâmica.

Lord Kelvin acreditava que os nós eram a chave para o entendimento das substâncias químicas, que seriam descritas pelas "formas dos nós". Tabelando-se os nós teria-se uma descrição das substâncias químicas. Começa então uma corrida para se obter tabelas de nós, nós cada vez mais complexos, com cada vez mais cruzamentos.

Ernest Rutherford e Dimitri Mendeleev põem fim a essa animação: Rutherford cria o modelo de átomos que até hoje utilizamos, e a ênfase na pesquisa dos elementos químicos muda para a Tabela Periódica organizada por Mendeleev. Com isso, os matemáticos continuam os estudos sobre nós, mas o trabalho se torna "abstrato".

Na década de 1980 bioquímicos descobriram enodamentos nas moleculas de DNA. Surgem então questões como: "seria possível criar moléculas inodadas?"; "enodamentos poderiam determinar algumas das propriedades das substâncias?"

Trabalhos recentes mostram que o estudo da Teoria de Nós e Enlaçamentos podem estar relacionados com outras áreas de conhecimento, como a Mecânica Estatística na Física, o estudo do DNA na Biologia e o estudo das estruturas tridimensionais das moléculas na Química.

Nós são um importante objeto de estudo na topologia. Um nó matemático é, basicamente, uma curva fechada que se enoda no espaço tridimensional. Formamos um nó torcendo e entrelaçando um fio e unindo no fim as extremidades. Como não é muito simples desenhar figuras a três dimensões, os nós são representados por projeções nos planos, chamadas de diagramas de nós.

Os pontos onde as curvas estão partidas representam as sobreposições e chamamos de cruzamentos. O número de cruzamentos depende do modo como a corda foi torcida e emaranhada, e pode ser tão grande quanto se queira, porém, cada nó tem um diagrama com um número mínimo de cruzamentos.

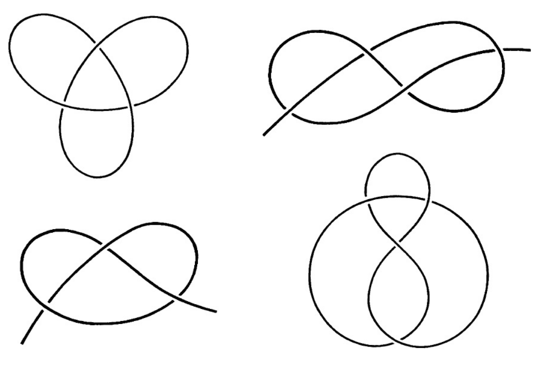

Figura 6.1: Exemplos de nós

Um problema da teoria dos nós consiste em saber quando é que dois nós são realmente o mesmo nó. Para mostrarmos que dois diagramas representam o mesmo nó, temos que tentar trasformar um até obter o outro. Em 1920, o matemático alemão Kurt Reidemeister provou que qualquer deformação de um nó pode ser efetuada mediante uma sequência de três tipos de movimentos simples. Os três tipos de movimentos de Reidemeister encontram-se ilustrados na figura 6.2:

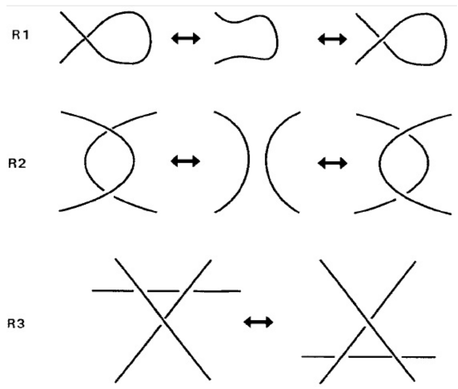


Figura 6.2: Movimentos de Reidemeister

Porém, transformar um nó em em outro pode não ser tarefa simples.

Uma das maneiras para mostrar que dois nós são diferentes consiste em calcular os seus invariantes, ou seja, expressões algébricas ou numéricas associadas aos nós que não variam quando o nó é deformado.

Um dos invariantes que existe envolve Determinantes. Explicaremos abaixo como funciona este invariante:

Invariante de um nó: Determinante

O Determinante D relacionado a um nó é calculado da seguinte maneira:

1. associe a cada arco uma variável e a cada cruzamento uma equação da forma

$$a + b - 2d = 0;$$

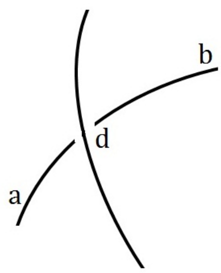


Figura 6.3:

2. coloque uma variável qualquer igual a zero;
3. descarte uma equação qualquer;
4. ficará determinado então um sistema de $n-1$ equaçoes e $n-1$ variáveis. Calcule o valor absoluto do determinante da matriz formada pelos coeficientes das equações do sistema linear obtido.

Exemplo:

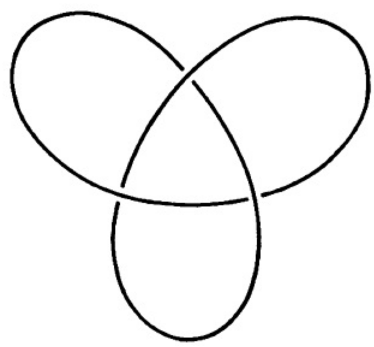

Figura 6.4: Nó

Equações:

$$a + c - 2b = 0$$
$$a + b - 2c = 0$$
$$c + b - 2a = 0$$

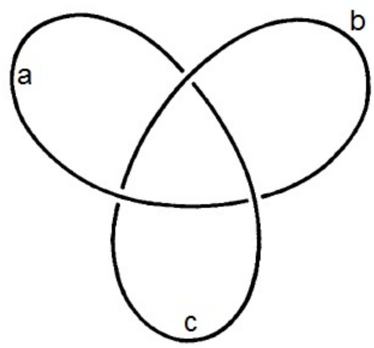


Figura 6.5: Nó: associação de cada arco a uma variável

Colocando a variável a $= 0$ e eliminando a primeira equação, temos o sistema:

$$\begin{cases} b - 2c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

Calculando o determinante correspondente, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Assim, temos que $D = |3|$

<u>EXERCÍCIO:</u> De acordo com o invariante acima, verifique se os dois nós abaixo possuem o mesmo determinante.

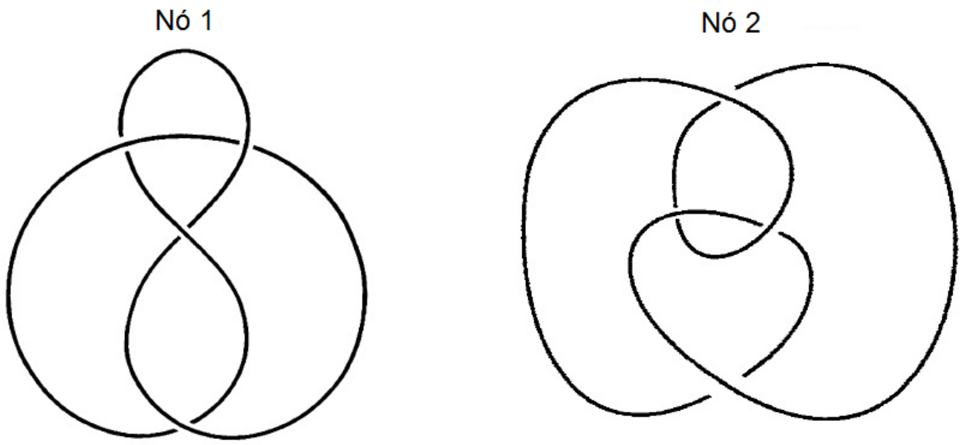


Figura 6.6:

Resolução:
Para o Nó 1, temos:
Equações:

$$a + d - 2c = 0$$

$$d + c - 2b = 0$$

$$a + b - 2d = 0$$

$$c + b - 2a = 0$$

Colocando a variável d $=$ 0 e eliminando a quarta equação, temos o sistema:

$$\begin{cases} a - 2c = 0 \\ -2b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

Calculando o determinante correspondente, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

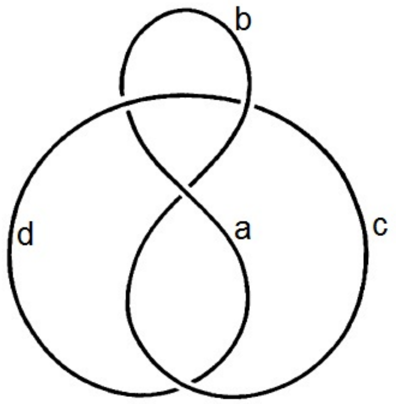


Figura 6.7: Nó 1: associação de cada arco a uma variável

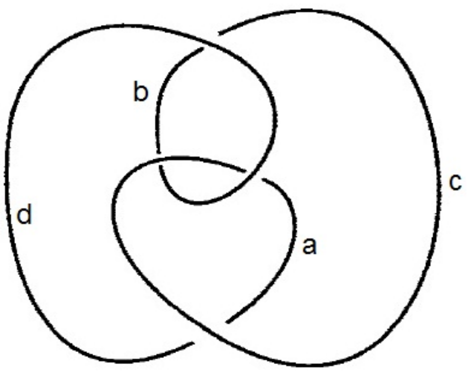


Figura 6.8: Nó 2: associação de cada arco a uma variável

Assim, temos que, para o nó 1: $D = |-5| = 5$.
Para o Nó 2, temos:
Equações:

$$b + d - 2a = 0$$

$$a + c - 2b = 0$$

$$a + d - 2c = 0$$

$$b + c - 2d = 0$$

Colocando a variável a $=0$ e eliminando a primeira equação, temos o sistema:

$$\begin{cases} -2b + c = 0 \\ -2c + d = 0 \\ b + c - 2d = 0 \end{cases}$$

Calculando o determinante correspondente, obtemos:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

Assim, temos que, para o nó 2: $D = |-5| = 5$.

Conclusão: Os nós 1 e 2 possuem o mesmo determinante.

Essa atividade exige que o aluno compreenda todo o procedimendo de como é feito o cálculo de determinante para um nó, entenda este procedimento através de um exemplo, e com isso, aplique este conceito para outros exemplos. Além disso, exige que o aluno tenha conhecimento sobre Sistemas Lineares, Matrizes e cálculos de determinantes 3x3. É um exercício adequado aos alunos do segundo ano do Ensino Médio, após o estudo desses tópicos em sala de aula.

# 7 Referências


1. Kosniowski, C., *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, 1980.

2. Domingues, H. H.; Iezzi, G.,*Álgebra Moderna*, Atual Editora, 1982.

3. Hacon, D., *Introdução à teoria dos nós*, IMPA, 1985.

4. Loibel, G. F., *Introdução à Topologia*, Editora Unesp, 2007.

5. Libardi, A. K. M.; Vieira, J. P.; Melo, T., *Invariantes topológicos*, Cultura Acadêmicas Editora, Unesp, 2012.

6. Uribe, O. E. O.; Santos, A. P., *Uma conexão entre geometria e álgebra: o grupo fundamental*, VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Imecc-Unicamp, 2012.

7. Neto, O. M.,*Teoria de Nós*, II Colóquio de Matemática do Sudeste, SBM, 2013.

8. Vilches, M. A., *Introdução à Topologia Algébrica*, Departamento de Análise - IME - UERJ.

9. Iezzi, G.; Dolce O.; Degenszajn, D.; Périgo, R.; Almeida, N., *Matemática, ciência e aplicações*, Atual Editora, 2006.

10. Providência, N. B., 2+2=11, Biblioteca Desafios Matemáticos, RBA Coleccionables, 2008.

11. Gilbert, N. D., Knots and Surfaces, Oxford Univerity Press, 1994.

12. Crowell, R. H.; Fox R. H., Introduction to Knot Theory, Springer-Verlag, 1963.