Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

MATEMÁTICA ATUARIAL: PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Autor: Rodrigo Correia Muniz

Orientador: Dr. Etereldes Gonçalves Junior

Vitória - ES

12 de maio de 2016

Rodrigo Correia Muniz

MATEMÁTICA ATUARIAL: PROPOSTA DE MATERIAL DIDÁTICO PARA A EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Sociedade Brasileira de Matemática (PROFMAT) em parceria com o Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob orientação do Professor Doutor Etereldes Gonçalves Junior.

Vitória - ES

12 de maio de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Matemática Atuarial: Proposta de Material Didático para a Educação de Jovens e Adultos"

Rodrigo Correia Muniz

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 24/03/2016 por:

____

Etereldes Gonçalves Junior Orientador - UFES

____

Fábio Júlio da Silva Valentim Examinador Interno - UFES

Severino Cirino de Lima Neto

____

Severino Cirino de Lima Neto Examinador Externo - UNIVASF

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa Thalyta por tanto incentivo, carinho, paciência, amor, apoio e perseverança durante todo o curso e principalmente durante a construção deste trabalho. Com certeza a realização do mesmo não seria possível sem você.

Ao meu orientador Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior pelos vários ensinamentos transmitidos durante o curso que certamente serão lembrados em muitos momentos de minha vida como docente, pela compreensão demonstrada e, sobretudo, pela orientação deste trabalho.

À toda a equipe do PROFMAT da Universidade Federal do Espírito Santo pela excelência dos profissionais disponibilizados ao programa.

À Sociedade Brasileira de Matemática pela oportunidade aos discentes.

Resumo

A presente pesquisa busca analisar os conteúdos do ensino médio ao se tratar de matemática financeira e probabilidade na tentativa de compreender a matemática atuarial, além de compreender sua utilidade no dia-a-dia. Apresentadas por meio de análise de situações cotidianas como cálculos de seguros de vida e previdência complementar a fim de elaborar material didático complementar sobre matemática atuarial para a Educação de Jovens e Adultos. Justifica-se pela necessidade de contextualizar os conteúdos à realidade dos estudantes, principalmente na modalidade EJA por meio da elaboração de material complementar.
Baseados em Freitas (2011), Cordeiro Filho (2014), Pacheco (2014) e Freire (2005) a pesquisa se constrói por acreditar que a matemática contribui para o conhecimento científico e também para o conhecimento empírico, com foco nas experiências e relações dos sujeitos.
Esta pesquisa proporciona um caminho diferenciado para a abordagem do conteúdo da matemática financeira e probabilidade e apresenta aos alunos resultados que são influenciados pela expectativa de vida, através de cálculos padronizados, mas de acessível entendimento por meio de conteúdos abordados no Ensino Médio.

Palavras-chave: Atuária; Probabilidades; Matemática financeira; Matemática - Estudo e ensino; Educação de adultos; Seguros.

Abstract

This research intends to analyze the contents taught in high school regarding financial Mathematics and probability, aiming to understand actuarial Mathematics and its utility in daily life. They are presented through analysis of everyday situations, such as calculations of life insurance and private pension, in order to prepare supplementary teaching materials on actuarial Mathematics to education of young people and adults. It is justified by the necessity of contextualizing the contents to the reality of the students, mainly on EJA modality, through the preparation of supplementary materials.

Based on Freitas (2011), Cordeiro Filho (2014), Pacheco (2014) and Freire (2005), the research is build on the belief that Mathematics contributes both to scientific and empirical knowledge, focusing on experiences and relationships of individuals.

In addition, this research provides a different way to approach the financial Mathematics content and probability and presents to students results are influenced on their life expectancy using standard calculations, but of easy understanding through content covered in high school.

Keywords: Actuary; Probability; Financial mathematics; Mathematics - Study and teaching; Education of adults; Insurance.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

Em um mundo cada vez mais conectado onde é crescente a necessidade de que os professores façam com que os estudantes se interessem pelo ensino, torna-se necessário aproximar os conteúdos da escola com as situações em que esse estudante encontra ou encontrará em sua vida fora da mesma. Nesse sentido, o presente Trabalho de Conclusão de Curso se baseia na necessidade de apresentar um material didático complementar, que está relacionado à prática cotidiana. Práticas que, em muitos casos, nos passam desapercebidos como os cálculos de seguros e de previdência complementar.

Ao vislumbrarmos uma análise educativa com base na elaboração de material educativo complementar esta pesquisa justifica-se também pelo fato de poder fixar e/ou reforçar conteúdos relacionados a matemática atuarial, pois utiliza-se da leitura de tabelas e gráficos e também de conceitos já trabalhados anteriormente como noções de probabilidade, estatística e matemática financeira pelos estudantes que compõem o público-alvo do mesmo que são aqueles que estão finalizando o ensino médio.

A pesquisa objetiva-se em analisar os conteúdos do ensino médio ao se tratar de matemática financeira e probabilidade na tentativa de compreender a matemática atuarial. E, ainda, compreender sua utilidade no dia-a-dia, por meio de análise de situações cotidianas como cálculos de seguros de vida com coberturas por sobrevivência e falecimento e, ainda, a previdência complementar a fim de elaborar material didático complementar sobre matemática atuarial para que os conceitos matemáticos possam ser abordados de forma contextualizada na Educação de Jovens e Adultos na qual a faixa etária dos alunos auxilia no sentido de que seguros e previdência façam mais parte de sua realidade devido os mesmos já estarem inseridos no mercado de trabalho.

Nesse contexto, por acreditarmos que a educação precisa ser pautada no cotidiano do estudante buscando contextualizá-la, sugerem-se duas aplicações com análise dos tipos de apólice e método do cálculo dos seus prêmios: seguro de vida e previdência complementar. É importante ressaltar que essa pesquisa não visa o estudo de caso com a participação dos alunos e/ou execução deste conteúdo e, sim, apresentar as possibilidades de sua aplicabilidade. Nesse sentido, qual a importância de se elaborar um material didático complementar baseado na matemática atuarial de seguros de vida e previdência complementar? A fim de respondermos a essa indagação este trabalho divide-se em quatro (04) capítulos.

No capítulo 2 (Abordagens Metodológicas) encontra-se a abordagem metodológica e seus procedimentos para a elaboração desta pesquisa, seguidos das relações educacionais e a importância de uma matemática contextualizada para o ensino com foco na educação de jovens e adultos no capítulo 3 (A Contextualização no Ensino de Matemática na Educação de Jovens e Adultos).

Já o capítulo 4 (Bases Matemáticas) descreve os conteúdos dispostos no currículo do ensino médio necessários para a compreensão da matemática atuarial e seus cálculos.

A proposta de material didático complementar é estabelecida no capítulo 5 (Matemática Atuarial na EJA - Proposta Educativa), o qual descreve conceitos e aplicações possíveis de serem inseridos na educação a partir das justificativas matemáticas do funcionamento dos Seguros de Vida com cobertura por sobrevivência e falecimento e de planos de Previdência Complementar como o PGBL, além do detalhamento dos cálculos envolvidos durante a contratação dos mesmos.

2 Abordagens Metodológicas

2.1 Revisão de Literatura

A revisão de literatura que segue aborda a matemática atuarial não no âmbito do ensino, foco desta pesquisa, mas na área da Economia e Ciências contábeis. As relações com a aprendizagem educacional ocorrem por meio das ementas de cursos superiores de Economia e Ciências Contábeis. A temática, apesar de ser muito utilizada, apresenta pesquisas e referências insuficientes para uma leitura mais ampla.

Iyer (2002) aborda a matemática atuarial de sistemas de previdência social com explicações técnicas sobre os cálculos referentes. Aponta a base teórica e a aplicabilidade dentro da previdência ocupacional, previdência social, financiamentos avançados e planos de contribuição definida. Mostra também a manipulação dos financiamentos com respaldo em estatísticas, probabilidades e juros para o cálculos de prêmios médios. Questões da atuarial referentes a seguro de vida individual e em grupo podem ser vistos na dissertação de mestrado de Sérgio Rangel Guimarães (2003). O autor relata as similaridades destes seguros para os consumidores, mas deixa claro as peculiaridades dos requisitos técnicos dessas modalidades.

Os impactos do risco de longevidade de autoria de Fabiana Lopes da Silva (2010) descreve os fatores históricos da mortalidade vinculados à previdência complementar no Brasil, dados estatísticos e a importância do cálculo de juros com base no fluxo de caixa. Visa ainda que o aumento da expectativa de vida pode ocasionar riscos para as entidades responsáveis.

Antônio Cordeiro Filho (2014) menciona em seu livro, Cálculos Atuarial Aplicado: Teoria e Aplicações - Exercícios Resolvidos e Propostos, todos os quesitos necessários para o entendimento e desenvolvimento para uma matemática atuarial. Já Ricardo Pacheco (2014) apresenta a atuarial de seguros e danos, explorando os seguros de bens e responsabilidades com base na carga de risco que traz consigo. Tanto Cordeiro Filho quanto Pacheco dispõem ao leitor as manipulações necessárias para a compreensão do assunto.

A presente pesquisa difere-se das demais por estar vinculada a área de matemática especificamente, e voltada para uma proposição dessa temática para a Educação de Jovens e Adultos, por considerarmos essas questões pertinentes e relevantes não só para o ensino, mas para o cotidiano desses sujeitos, vistas a compreender os procedimentos advindos dos seguros dados pela Matemática Atuarial.

2.2 Procedimentos Metodológicos

O trabalho constitui-se por meio de pesquisas bibliográficas de modo a conceituar, teorizar e contextualizar a temática, partindo de princípios matemáticos e educacionais de modo a construir uma proposta de material educativo complementar que aborde a matemática atuarial na Educação de Jovens e Adultos.

Efetua-se pelas necessidades primeiras do sujeito nos conhecimentos de matemática dando ênfase e eficácia para a aplicabilidade.

Foi necessário iniciar a construção desse material aprimorando os aprendizados obtidos pelo ensino médio e valorizando as experiências dos sujeitos envolvidos por meio de suas vivências e conhecimentos empíricos.

> É um meio importante de interação entre o professor e o aluno, pois é uma forma de orientar o aluno em um oceano de possibilidades. Por isso, o material didático precisa ser de ótima qualidade, ter uma apresentação impecável, revelar a metodologia implícita no processo de elaboração, dar conta dos temas abordados de modo claro, trazer um roteiro rico em possibilidades de leituras, pesquisas e atividades, além de estimular o aluno a ter o prazer de voltar para ali; ou seja, seduzi-lo. Produzir material didático é uma tarefa complexa [...] (RONDELLI[21], 2007, p.1).

Assim, percebemos a importância de ampliar o repertório do aluno e professor por meio de um material didático complementar que venha a fomentar contextualização e manipulação da matemática junto às necessidades diárias.

3 A Contextualização no Ensino de Matemática na Educação de Jovens e Adultos

3.1 O Ensino de Matemática e a EJA

Paulo Freire nos apresenta a necessidade de valorizar o sujeito em seu todo. O autor relata suas experiências com o ensino de jovens e adultos e nos dá possibilidades de auxiliá-los no processo de aprendizagem baseado nas experiências. Os textos de Freire dialogam ainda com os formatos de uma educação tradicionalista onde o professor era o detentor do conhecimento por uma educação hierarquizada. Reflete a respeito das singularidades dos estudantes e a valorização de suas experiências. É preciso nos desvincularmos de uma educação bancária e promovermos um ensino compartilhado onde todos podem contribuir para o crescimento individual e coletivo.

> [...] não podemos ofertar aos estudantes jovens e adultos "conteúdos que pouco ou nada tenham a ver com seus anseios, com suas dúvidas, com suas esperanças, com seus temores". Isso não significa furtar desses estudantes a oportunidade de vislumbrar conteúdos que são oferecidos em outras modalidades de ensino. (FREIRE[7], 1987, p.100).

Pensar uma educação matemática nesses moldes é partir para associações conhecidas pelos sujeitos envolvidos, visto que:

> A Matemática é indispensável por tudo isso e, mais particularmente, porque serve ao homem. Porque tem aplicações. Porque permite responder, de modo claro, preciso e indiscutível, perguntas que, sem o auxílio dela, continuariam sendo perguntas ou se transformariam em palpites, opiniões ou conjecturas. (LIMA[12], 2007, p. 184)

Refletindo a necessidade de contextualizar o ensino, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática abordam nos seus eixos, três aspectos importantes para o fomento do aprendizado: Conceituação, Manipulação e Contextualização.

A conceituação refere-se aos procedimentos de definição por vias teóricas. Já a manipulação é o meio pelo qual se executam os cálculos e a contextualização é a aplicação dos conteúdos no cotidiano.

> [...] nota-se hoje em dia uma grande e, até certo ponto, muito justa preocupação com a chamada "contextualização", que significa prover o ensino da Matemática de situações reais, concernentes a problemas que de fato ocorrem, ou podem vir a ocorrer, nos dias atuais; problemas onde as ferramentas matemáticas vêm a ser de utilidade decisiva. (LIMA[12], 2007, p. 185).

Apresentado também pelos PCN:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. (BRASIL[3], 2000, p.6).

O problema do ensino de matemática é que muitos profissionais direcionam o aprendizado vislumbrando um eixo mais que outro, e em muitas situações visam a manipulação sem contextualizá-la. Fator pelo qual desmotiva o processo de aprendizagem visto que o aluno não vê aplicabilidade em seu cotidiano na execução dos cálculos.

> Com esta compreensão, o aprendizado deve contribuir não só para o conhecimento técnico, mas também para uma cultura mais ampla, desenvolvendo meios para a interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social. Deve propiciar a construção de compreensão dinâmica da nossa vivência material, de convívio harmônico com o mundo da informação, de entendimento histórico da vida social e produtiva, de percepção evolutiva da vida, do planeta e do cosmos, enfim, um aprendizado com caráter prático e crítico e uma participação no romance da cultura científica, ingrediente essencial da aventura humana.
> Um dos pontos de partida para esse processo a tratar, como conteúdo do aprendizado matemático, científico e tecnológico, elementos do domínio vivencial dos educandos, da escola e de sua comunidade imediata. Isso não deve delimitar o alcance do conhecimento tratado, mas sim dar significado ao aprendizado, desde seu início, garantindo um diálogo efetivo. (BRASIL[3], 2000, p.7).

Assim, esta pesquisa visa construir além de proposições dadas por meio de elaboração de materiais didáticos uma reflexão sobre a importância da contextualização no ensino de matemática, principalmente ao direcionarmos esse aprendizado à Educação de Jovens e Adultos (EJA).

> A EJA, regulamentada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), 9.394/96 garante:

Seção V
Da Educação de Jovens e Adultos
Art. 37º. A educação de jovens e adultos será destinada àqueles que não tiveram acesso ou continuidade de estudos no ensino fundamental e médio na idade própria.
§ 1º. Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.
§ 2º. O Poder Público viabilizará e estimulará o acesso e a permanência do trabalhador na escola, mediante ações integradas e complementares entre si.
Art. 38º. Os sistemas de ensino manterão cursos e exames supletivos, que compreenderão a base nacional comum do currículo, habilitando ao prosseguimento de estudos em caráter regular.
§ 1º. Os exames a que se refere este artigo realizar-se-ão:
I - no nível de conclusão do ensino fundamental, para os maiores de quinze anos;
II - no nível de conclusão do ensino médio, para os maiores de dezoito anos.
§ 2º. Os conhecimentos e habilidades adquiridos pelos educandos por meios informais serão aferidos e reconhecidos mediante exames. (BRASIL[2], 1996, p. 15).

A LDB permite que os estudantes acima de 15 (quinze) anos que por qualquer motivo não pode continuar seus estudos tenham o direito de concluí-lo por meio da modalidade EJA, sendo no ensino fundamental ou médio.

O público da EJA difere-se por em sua maioria já estar imerso no mercado de trabalho e possuir interesses que não correspondem aos das crianças e adolescentes inseridos no ensino regular. Os jovens e os adultos vislumbram seu aprendizado nas salas de aula.

> [...] o adulto está inserido no mundo do trabalho e das relações interpessoais de um modo diferente daquele da criança e do adolescente. Traz consigo uma história mais longa (e provavelmente mais complexa) de experiências, conhecimentos acumulados e reflexões sobre o mundo externo, sobre si mesmo e sobre as outras pessoas. Com relação à inserção em situações de aprendizagem, essas peculiaridades da etapa de vida em que se encontra o adulto fazem com que ele traga consigo diferente habilidades e dificuldades (em comparação com a criança) e, provavelmente, maior capacidade de reflexão sobre o conhecimento e sobre seus próprios processos de aprendizagem. (OLIVEIRA, 1999, pp.60-61 apud FREITAS[8], 2011, p. 35).

> Preocupados com situações cotidianas, empregado ou em busca de empregarse, estes sujeitos já possuem uma história de vida. Muitas sabem o que pretendem com seu retorno à escola. Compartilham conhecimentos que para muitos não são inerentes no processo de ensino aprendizagem. Suas experiências fomentam seu aprendizado, pois "[...] a experiência é o livro

> didático vivo do estudante adulto”(LINDEMAN, 1989, p.7 apud FREITAS[8], 2011, p. 35).

É necessário que para essa modalidade o ensino de matemática esteja vinculado para o contexto do estudante. Algo que promova interesse e prazer para que este permaneça na escola.

O ensino de matemática deve vir a promover uma inserção dos conteúdos curriculares no dia-a-dia por meio de aplicabilidades práticas e coesas com significados e sentidos.

> [...] não podemos ofertar aos estudantes jovens e adultos “conteúdos que pouco ou nada tenham a ver com seus anseios, com suas dúvidas, com suas esperanças, com seus temores”. Isso não significa furtar desses estudantes a oportunidade de vislumbrar conteúdos que são oferecidos em outras modalidades de ensino. (FREIRE[7], 2005, p.100).

E ainda:

> [...] nessa perspectiva o currículo real deverá ser construído em torno dos interesses e necessidades do aluno, que por sua vez, teria capacidade de trazer para o processo educacional experiências vividas no trabalho, lazer, na família, na comunidade, etc., fazendo os ajustes necessários a partir das interações vividas. (FREITAS[8], 2011, p.35).

Freitas mensura a importância de um currículo vivido, real, condizente a realidade do aluno, vinculado a família, a comunidade e até ao lazer, situações inerentes ao estudante da EJA. Estes sujeitos necessitam de motivações surgidas da escola para a vida. Não basta apenas mencionar relações aos conteúdos é preciso mostrar na prática as inúmeras possibilidades de associações entre a vida e a matemática.

> Estabelecer uma ponte entre as experiências de vida e o conhecimento matemático sistematizado talvez seja o maior desafio dos educadores matemáticos que atuam no Proeja, afinal “a tradição Matemática escolar nos impede de ver a matemática operando em situações do cotidiano, apenas porque não há tanta matemática escolar nessas situações.”(SKOVSMOSE, 2007b, p.213, apud FREITAS[8], 2011, p. 38).

Kuenzer (2007, p.75, apud FREITAS[8], 2011, p. 39), afirma que “a grande questão, talvez, seja não pensar ou discutir mais se é importante ou não valorizar as experiências dos estudantes adultos e, sim, refletir sobre o que e como ensinar de forma contextualizada, aproveitando essas experiências”. A matemática para a EJA precisa ter aplicabilidade no cotidiano a fim de contribuir para o crescimento social e cultural do aluno. Tornando-o um cidadão crítico, reflexivo e participativo.

> A matemática está presente em várias situações, desde as pequenas contas feitas em mercados à cálculos de grandes construções. Buscar parcerias com os alunos por meio de sua realidade, do trabalho que executa, das experiências que traz em virtude de suas vivências pode transformar este ensino, mas para que isso ocorra é preciso atribuir responsabilidade a todos os colaboradores da educação, e assim, professor valorizando as experiências do aluno e aluno sentindo-se pertencente torna o aprendizado eficaz. Contudo, "é evidente que não podemos atribuir à valorização de experiências anteriores a responsabilidade total pela aprendizagem de estudantes adultos. De nada adiantaria isso se as capacidades de crítica e reflexão não fossem privilegiadas" (FREITAS[8], 2011 p.43).
>
> [...] somente quando compreendemos e damos condições para que os estudantes adultos possam transformar o saber da experiência em um saber da experiência consciente, via reflexão, podemos dizer que estamos contribuindo para o processo de educação desse estudante. (FREITAS[8], 2011, p. 47).

Nesse sentido, Freitas aponta ainda três aspectos importantes para a valorização da experiência dos sujeitos da EJA para a construção do currículo de matemática:

> Funcionais. Devem ser aplicáveis à resolução de problemas da vida cotidiana.
> Propedêuticos. Seu uso deve possibilitar e levar em conta novas aprendizagens mais avançadas.
> Integradores. Devem estabelecer conexões entre a formação inicial do aluno, suas experiências e o conhecimento matemático que se pretende ensinar. (FREITAS[8], 2011, p. 54 grifos nosso).

Historicamente sabemos que o ensino de matemática foi inspirado em uma cultura diferente da nossa e apenas a poucas décadas ocorre a preocupação em ressignificar e ampliar as perspectivas do processo de ensino aprendizagem dessa disciplina. Pensar em um público que possui especificidades como a EJA exige ainda mais de pesquisadores em busca de uma formação eficaz e de qualidade. Assim, a escolha de materiais didáticos para esses sujeitos precisa ser realizada com zelo e dedicação de modo a permitir que essas experiências sejam exacerbadas pelo ambiente escolar valorizando o meio sócio-histórico-cultural do estudante. O autor relata ainda que "se falamos em valorizar experiências de vida, não podemos pensar em um material didático diferente daqueles que possam ser facilmente adequados para atender às expectativas dos estudantes, que são individuais [...] (FREITAS[8], 2011, p.51). Somos diferentes, cada um ao seu modo constrói seu conhecimento junto a suas vivências, mas é importante compreender que cada pessoa têm um tempo ao transformar as informações recebidas em saber cientifico, pois "[...] a não coincidência entre a 'Matemática acadêmica' e a 'Matemática da vida real' é um dos fatores que explica o sentimento de resistência que muitas pessoas têm a respeito da matemática" (FREITAS[8], 2011, p.54-55).

3.2 A Matemática Atuarial na Educação

As orientações de nossa política nacional de educação e os pesquisadores do ensino de matemática mostram a importância da contextualização e valorização das experiências do sujeito para o desenvolvimento do aprendizado e da formação do ser. É visando esses fatores que as pesquisas relacionadas a matemática atuarial se fazem necessárias com foco na produção de proposta que permeiam dar encaminhamentos para execução e reflexão.

A matemática atuarial recebe esse nome por utilizar ferramentas que fazem uso ao mesmo tempo de técnicas financeiras e estatísticas. Assim, ela é a base teórica para muitos ramos da atividade humana sendo os principais deles os ramos de Seguros e Previdência.

Os seguros surgiram a mais de dois séculos e estão presentes nas mais diversas atividades cotidianas. No entanto, a compreensão dos mecanismos de funcionamento dos mesmos não são de amplo conhecimento de todos os que deles utilizam ou desejam utilizar. O mesmo ocorre para a Previdência Complementar que por muitos passa desapercebida enquanto investimento necessário para garantir condições que possam suprir necessidades futuras.

A matemática atuarial enquadra-se nesses aspectos. De nos fornecer os conhecimentos necessários para a compreensão do funcionamento desses produtos. Ao detalharmos os mesmos, verificaremos que estão baseados basicamente em resultados da teoria das probabilidades e da matemática financeira. Logo, ao investigarmos o funcionamento de tais produtos, teremos uma outra oportunidade de abordagem para esses conteúdos que fazem parte do currículo normalmente utilizado no ensino básico.

4 Bases Matemáticas

4.1 Matemática Financeira

4.1.1 Introdução

Ao iniciar os estudos em Matemática Financeira, algumas perguntas são inevitáveis como: Qual o seu campo de aplicação? Qual a sua utilidade prática? Ela fará alguma diferença em minha vida?

Então, não há melhor oportunidade para dizer que o campo de aplicação dela é bastante amplo pois, suas técnicas são necessárias em operações de financiamento de quaisquer naturezas: crédito a pessoas físicas e empresas, financiamentos habitacionais, crédito direto ao consumidor entre outras. Também são necessárias nas operações de investimentos nos mercados de capitais. Em ambas as situações, é o uso dessas técnicas que permite conhecer o custo e o retorno dessas operações, permitindo tomadas de decisão mais racionais; são elas também que permitem determinar o valor das parcelas devidas pelas transações efetuadas a prazo.

> No mundo dos negócios, seu conhecimento é absolutamente imprescindível, uma vez que os custos dos financiamentos dados e recebidos são peças centrais do sucesso empresarial. Fora dele, seu conhecimento é indispensável, uma vez que operações financeiras permeiam boa parte das nossas atividades diárias sendo praticamente impossível desvencilhá-las de nosso cotidiano. (PUCCINI[17], 2007, p. 8).

Numa visão geral, a Matemática Financeira é um ramo da matemática que estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso de tempo; para isso cria modelos que permitem avaliar e comparar o valor do dinheiro em diversos pontos do tempo.

4.1.2 Conceitos básicos

Para o estudo da Matemática Financeira é necessária a apresentação da linguagem própria utilizada por ela para designar seus diversos elementos e que esses elementos sejam contextualizados com precisão. Os conceitos básicos de seu estudo serão inicialmente vistos através

de um exemplo para que, na sequência, possamos defini-los.
Exemplo: Um gerente de uma empresa necessita de um empréstimo no valor de R$ 100.000,00 para atender às necessidades financeiras do seu negócio. Um banco, após analisar a solicitação anuiu ao pedido e propôs um empréstimo que deverá ser pago após quatro meses; o banco depositará R$ 100.000,00 na conta da empresa e esta pagará ao banco R$ 120.000,00 ao final dos quatro meses.
Esse exemplo nos permite identificar os elementos básicos que serão estudados em Matemática Financeira. Nessa situação você pode ver que:

- Essa operação financeira tem um valor inicial de R$ 100.000,00 que será denominado de capital e um valor final de R$ 120.000,00 que será denominado montante;
- Essa operação financeira tem uma duração de quatro meses;
- Há uma diferença entre o montante e o capital que é denominado juro da operação. Esse juro será um custo para a empresa e uma remuneração para o banco.

No entanto, o estudo da Matemática Financeira exige uma definição precisa desses termos, o que faremos abaixo.

4.1.2.1 Capital

O Capital (C) é o valor de um ativo representado por moeda e/ou direitos passíveis de uma expressão monetária, no início de uma operação financeira.
No exemplo acima, o capital corresponde ao valor de R$ 100.000,00. De acordo com essa definição pode-se considerar como capital:

- Numerário ou depósitos bancários disponíveis;
- Títulos de dívida expressos em valor no início de um processo financeiro;
- Ativos físicos devidamente avaliados: prédios, máquinas, veículos e outros.

4.1.2.2 Juro

Juro (J) é o valor da remuneração do capital (C) acordado entre o credor e o tomador em uma determinada operação financeira. “Seu conceito e utilização é mais antigo que a criação das moedas"(PITON-GONCALVES[24], 2005). O Juro é a remuneração cobrada pelo empréstimo de dinheiro, pode ser compreendido como uma espécie de "aluguel sobre o dinheiro". Ele seria uma compensação paga pelo tomador do empréstimo para ter o direito de usar o dinheiro até o dia do pagamento. O credor, por outro lado, recebe essa compensação por não poder usar o dinheiro emprestado até o dia do pagamento e também por correr o risco de não receber o dinheiro de volta (risco de inadimplência). Em geral, apresenta-se uma taxa de juros (i)[1] uma vez que o valor total dos juros só é conhecido ao final da operação financeira.

4.1.2.3 Montante

Denomina-se montante (M) a soma do capital (C) e do juro (J) que foi acordado na operação financeira e que é devido ao final da mesma. Matematicamente o montante é expresso pela relação:

$$M = C + J \tag{4.1}$$

que é denominada equação básica da Matemática Financeira.

4.1.2.4 Fluxo de Caixa

Fluxo de caixa é uma sucessão de entradas e saídas de dinheiro (ou ativos expressos pelo seu valor monetário) no tempo.

Exemplo: Você entrou numa loja para comprar uma geladeira. O vendedor lhe informa que o preço à vista da geladeira é R$ 1.500,00. Informa também que o pagamento pode ser financiado em quatro pagamentos iguais mensais de R$ 400,00 através de uma instituição financeira (IF). Você faz a compra e opta pelo financiamento, de modo que terá quatro desembolsos mensais sucessivos de R$ 400,00; a instituição financeira pagará para a loja o valor à vista de R$ 1.500,00 e receberá de você as quatro prestações mensais. A figura abaixo representa graficamente as entradas e saídas de dinheiro para cada um dos agentes envolvidos; isso é um fluxo de caixa. Essas entradas e saídas podem ser representadas por um diagrama, denominado diagrama de fluxo de caixa, como mostrado na figura, a partir do qual se apontarão as convenções utilizadas para a sua elaboração.

[1]Utiliza-se a letra i para representar a taxa de juros devido ao termo em inglês - Interest Rate.

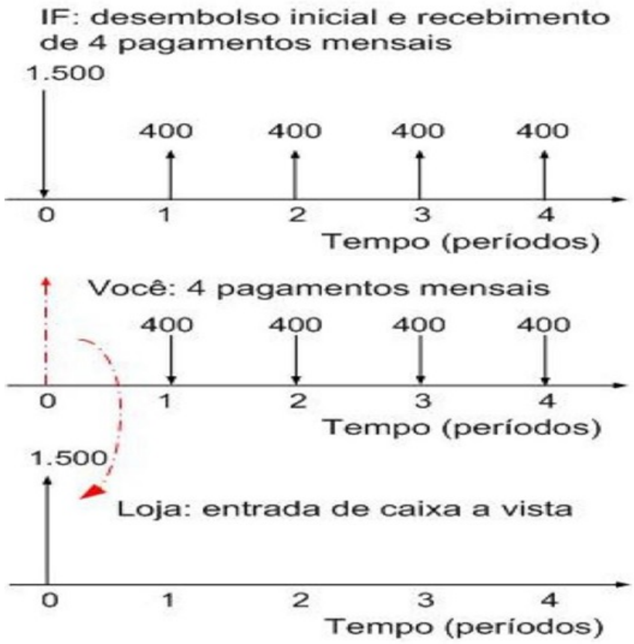

Figura 4.1: Fluxo de caixa. Fonte (PUCCINI[17], 2007, p. 19)

As regras para desenhar um diagrama de fluxo de caixa são:

- no eixo das abscissas (horizontal) representam-se os períodos de tempo; e
- no eixo das ordenadas (vertical) representam-se os valores das entradas e saídas de dinheiro.

Essas entradas e saídas são representadas por flechas orientadas, indicativas dos valores considerados:

- entrada de dinheiro: flechas com orientação positiva,
- saída de dinheiro: flechas com orientação negativa.

A dimensão dessas flechas, geralmente, não considera a proporcionalidade entre elas e os valores representados; as figuras são meramente qualitativas.
Da figura, verificamos que: **instituição financeira:** uma saída de caixa de R$ 1.500,00 no tempo $n = 0$ (zero) e quatro entradas de caixa sucessivas no valor de R$ 400,00; **você:** quatro saídas de caixa sucessivas de R$ 400,00 (seu benefício como contrapartida foi a aquisição da geladeira). Mais rigorosamente, você receberia R$ 1.500,00 da IF e os repassaria à loja; **loja:** recebeu à vista o valor de R$ 1.500,00 pela venda que lhe fez da geladeira.

Os pagamentos mensais de R$ 400,00 são nominalmente iguais, porém, financeiramente distintos, pois se referem a datas diferentes e não são, portanto, comparáveis.
O diagrama de fluxo de caixa é a representação gráfica de um fluxo de caixa. O fluxo de caixa também pode ser representado em forma de tabela.

4.1.2.5 Valor Presente

Valor presente $(PV)^2$ é o valor de uma operação financeira na data presente. É um valor intermediário entre o montante (M) e o capital (C), conforme se pode ver na figura abaixo. Essa nomenclatura se justifica para operações iniciadas no passado e que se prolongam até uma certa data futura. Observe que, para uma operação financeira iniciada hoje o capital e o valor presente coincidem; por essa razão, a expressão valor presente é, freqüentemente, utilizada como sinônima de capital, apesar da diferença conceitual existente.

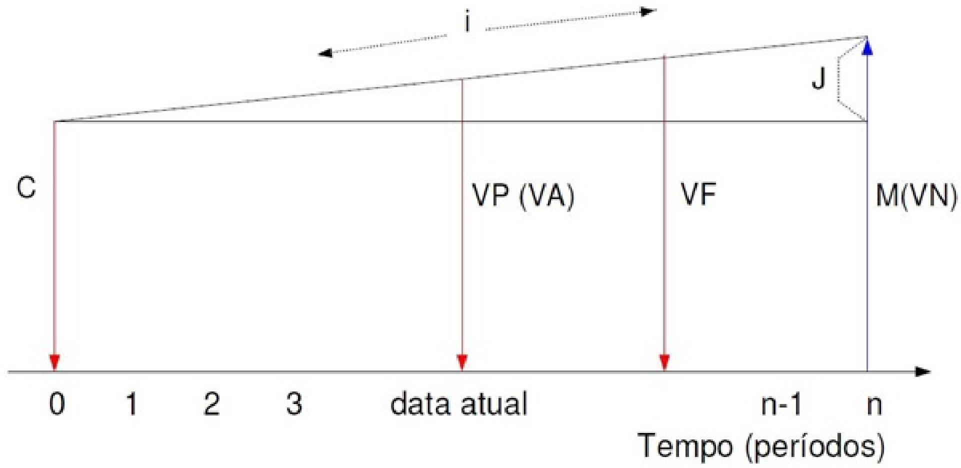

Figura 4.2: Fluxo de caixa. Fonte (PUCCINI[17], 2007, p. 16)

4.1.2.6 Valor Futuro

Valor futuro $(FV)^3$ é o valor de uma operação financeira em qualquer data compreendida entre a data presente e o vencimento da operação. De modo análogo ao valor presente e

[2] A sigla PV vem do inglês (Present Value) e é muito utilizada para o valor presente, até mesmo por calculadoras financeiras como a HP 12C.

[3] A sigla FV vem do inglês (Future Value) e é muito utilizada para o valor futuro, até mesmo por calculadoras financeiras como a HP 12C.

capital, também o valor futuro é, freqüentemente, tomado como sinônimo de montante.

4.1.3 Evolução do Montante com Juros Compostos

4.1.3.1 Definição do cálculo

Nas negociações financeiras, os juros são cobrados segundo dois critérios ou regimes: Capitalização Simples ou Juro Simples e Capitalização Composta ou Juro Composto. Os juros simples são utilizados apenas em algumas situações muito particulares que envolvem curtos períodos de capitalização. Na maioria das outras situações a capitalização utilizada é sempre a composta e, portanto, é somente com ela que vamos trabalhar. Assim, para facilitar nossa apresentação ao regime de Capitalização Composta vamos, novamente, fazer uso de um exemplo. Este exemplo, apesar de retratar uma situação mais hipotética que aquela apresentada anteriormente, será útil no objetivo de introduzir as ideias básicas da capitalização composta.

Exemplo: Você, necessitando de recursos para operar seus negócios, se dirige a um banco e solicita um empréstimo de R$ 1.000,00 para pagar em uma única vez no final de cinco (5) anos. O gerente, após analisar seu comportamento de crédito, aceita seu pedido e lhe informa que a linha de financiamento opera com uma taxa de juros de 15% a.a. e em regime de juros compostos. Qual o valor que deverá ser reembolsado ao banco ao final de operação?

A definição do cálculo dos juros compostos é que, ao fim de cada período financeiro o juro produzido nesse período é somado ao capital que o produziu e passam os dois, capital mais juro, a renderem juro no período seguinte. Nesse caso, a capitalização é realizada periodicamente, do que resulta sempre um capital maior a cada período e juro maior para esse período: é o chamado juro sobre juro que caracteriza o regime de Juros Compostos ou de Capitalização Composta.

Assim, para responder a questão podemos pensar da seguinte forma para obter o cálculo dos juros : O juro incide anualmente sobre o valor presente do empréstimo a uma taxa de 15% a.a. de modo que a cada ano decorrido do início da operação o banco terá direito a um juro expresso por:

$$J = C.i \tag{4.2}$$

Nesse caso, a temporalidade da taxa de juros é o ano; assim, o tempo total do empréstimo pode ser dividido em cinco (5) períodos de ano que correspondem a cinco (5) períodos anuais de incidência de juros. Considerando isso, podemos fazer a evolução do valor do empréstimo período a período. Os cálculos completos podem ser vistos na tabela abaixo:

Período	Valor Inicial (Capital)	Base de Cálculo	Juros	Valor Final (Montante)
0-1	R$ 1.000,00	R$ 1.000,00	R$ 150,00	R$ 1.150,00
1-2	R$ 1.150,00	R$ 1.150,00	R$ 172,50	R$ 1.322,50
2-3	R$ 1.322,50	R$ 1.322,50	R$ 198,38	R$ 1.520,88
3-4	R$ 1.520,88	R$ 1.520,88	R$ 228,13	R$ 1.749,01
4-5	R$ 1.749,01	R$ 1.749,01	R$ 262,35	R$ 2.011,36

Tabela 4.1: Evolução do capital de R$ 1.000,00 a juros compostos de 15% a.a por 5 anos.

Essa tabela mostra que os juros anuais não são todos iguais. Isso é devido ao efeito dos juros sobre juros. No entanto, observando cada uma das linhas, vemos que continua válida a equação fundamental da matemática financeira:

$$M = C + J$$

Desde que tenhamos o cuidado de não misturar as linhas. Assim, chamando de C_1 o capital inicial de R$ 1000,00, de J_1 o juro calculado no primeiro período de capitalização e de M_1 o montante ao fim desse mesmo primeiro período temos que:

$$M_1 \ = \ C_1 \ + \ J_1 \ \Rightarrow \ 1150 \ = \ 1000 \ + \ 150$$

O que, obviamente, é válido para as demais linhas.

Agora, fazemos na relação acima a observação de que $J_1 \ = \ C_1 \ . \ i$, então, podemos reescrevê-la como:

$$M_1 \ = \ C_1 \ + \ J_1 \ \Rightarrow \ M_1 \ = \ C_1 \ + \ C_1.i \ \Rightarrow \ M_1 \ = \ C_1.(1+i)$$

Assim, pelo nosso comentário anterior, são também válidas as relações:

$$M_2 \ = \ C_2.(1+i); \ M_3 \ = \ C_3.(1+i); \ M_4 \ = \ C_4.(1+i); \text{ e } M_5 \ = \ C_5.(1+i)$$

Mas, desde o início, a pergunta que nos foi feita no exemplo acima era para determinar o valor do montante final, ou seja M_5. Vamos então, concluir isso analisando melhor essa

última relação: $M_5 \;=\; C_5.(1+i)$
Se investigarmos corretamente, veremos que o valor de R\$ 1749,01 que funciona como capital C_5 na última linha da tabela é o mesmo valor que foi o montante na linha anterior. Ou seja, $C_5 \;=\; M_4$ e, então, podemos escrever que:

$$M_5 \;=\; M_4.(1+i)$$

Mas, também sabemos que $M_4 \;=\; C_4.(1+i)$ daí substituímos e ficamos com:

$$M_5 \;=\; C_4.(1+i).(1+i)$$

Assim, verificando novamente que $C_4 \;=\; M_3$ e repetindo esse raciocínio até a última linha, quando chegarmos nela teremos:

$$M_5 \;=\; C_1.(1+i).(1+i).(1+i).(1+i).(1+i) \;=\; C_1.(1+i)^5$$

Ou seja, substituindo os valores do exemplo acima, $C_1 =$ R\$ 1000,00 e $i = 15\%$ a.a. vem:

$$M_5 \;=\; 1000.(1+0,15)^5 \;\Rightarrow\; M_5 \;=\; 1000.(1,15)^5 \;\Rightarrow\; M_5 \;=\; 1000.(2,01136) \;\Rightarrow$$
$$M_5 \;\approx \text{R\$ } 2.011,36.$$

Que é, exatamente[4], o mesmo valor encontrado pela tabela anterior.
Assim, o número 5 (cinco) de períodos de incidência de juros aparece como expoente do fator $(1+i)$; essa constatação permite uma generalização para n períodos de incidência (tempo de aplicação). Substituindo o número de linhas da tabela anterior de 5 por n, temos:

[4]O uso do sinal $\approx$ será muito mais comum nos resultados de cálculos da matemática financeira do que o sinal de $=$ devido ao fato de que esses cálculos geralmente resultam em valores com muitas casas decimais e, ao apresentarmos os resultados finais dos mesmos, desejarmos apresentá-los na forma mais próxima com que são encontrados no nosso dia-a-dia onde fazemos o uso de apenas duas casas decimais. Assim, quando utilizamos o sinal de $\approx$ estamos fazendo uso de arredondamentos para os resultados finais.

Período	Valor Inicial (Capital)	Base de Cálculo	Juros	Valor Final (Montante)
0-1	C	C	$C.i$	$C \ + \ C.i \ = \ C.(1+i)$
1-2	$C.(1+i)$	$C.(1+i)$	$[C.(1+i)].i$	$C.(1+i) \ + \ [C.(1+i)].i \ = \ C.(1+i).(1+i) \ = \ C.(1+i)^2$
2-3	$C.(1+i)^2$	$C.(1+i)^2$	$[C.(1+i)^2].i$	$C.(1+i)^2 \ + \ [C.(1+i)^2].i \ = \ C.(1+i)^2.(1+i) \ = \ C.(1+i)^3$
3-4	$C.(1+i)^3$	$C.(1+i)^3$	$[C.(1+i)^3].i$	$C.(1+i)^3 \ + \ [C.(1+i)^3].i \ = \ C.(1+i)^3.(1+i) \ = \ C.(1+i)^4$
...	...	...	...	...
(n-1)-n	$C.(1+i)^{n-1}$	$C.(1+i)^{n-1}$	$[C.(1+i)^{n-1}].i$	$C.(1+i)^{n-1} \ + \ [C.(1+i)^{n-1}].i \ = \ C.(1+i)^{n-1}.(1+i) \ = \ C.(1+i)^n$

Tabela 4.2: Evolução do capital de C a juros compostos de i% ao período por n períodos.

Assim, considerando M_n como o montante final M e C_1 como o capital inicial aplicado C, resulta, após a aplicação do mesmo raciocínio n vezes, a fórmula geral do montante em regime de juros compostos que é dada por:

$$M = C.(1+i)^n \tag{4.3}$$

Onde a taxa de juros i e o número de períodos n deverão estar expressos na mesma temporalidade (em forma compatível).
Com essa fórmula a resposta ao último exemplo seria simplesmente:

$$\begin{aligned} M &= C.(1+i)^n \quad \text{substituindo os valores anteriores} \\ M &= 1000.(1+0,15)^5 \quad \text{assim obtemos} \\ M &\approx \text{R\$ 2.011,36} \end{aligned}$$

sem a necessidade de se construir a tabela anterior.

4.1.3.2 A evolução do Montante em Juros Compostos como uma P.G.

Na construção da última tabela acima, um detalhe interessante é que se observarmos a última coluna da direita – que contém o Valor Final a cada período – verificamos que os valores finais de períodos sucessivos estão relacionados de modo que, para obter o valor final do próximo período basta multiplicar o valor final do período atual por $(1+i)$. Ou seja, dados quaisquer inteiros sucessivos m e $m+1$, temos que:

$$M_{m+1} = M_m.(1+i) \quad \text{ou} \quad \frac{M_{m+1}}{M_m} = (1+i)$$

Assim, a sequência de valores finais após cada período na última coluna acima pode ser obtida a partir da multiplicação sucessiva do fator $(1+i)$ a um dado valor inicial que, pelo que foi visto acima, é o Capital. No entanto, essas são exatamente as características das sequências que são definidas como progressões geométricas (P.G.). "Tais sequências possuem termos que, a partir do segundo, são sempre o resultado do anterior multiplicado por um valor constante que é chamado de razão da P.G"(MORGADO; WAGNER; ZANI[14], 2001, p.20).
Assim, usando a notação q para essa razão e a_0 para o termo inicial da P.G. (aquele que é independente e o único que não exige ser um produto da razão q por um termo anterior) temos que:

$$a_1 = a_0 \cdot q$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_8 = a_7 \cdot q$$
$$a_{12} = a_{11} \cdot q = a_{10} \cdot q \cdot q = a_{10} \cdot q^2$$

Dessa forma, prosseguindo com esse raciocínio, podemos obter uma expressão para o termo geral de uma P.G. somente a partir do seu termo inicial a_0 e da razão q. Assim, sendo a_0 e q conhecidos, obtemos a_n $(n \geq 0)$ por:

$$a_n = a_0 \cdot q^n \tag{4.4}$$

Comparando a expressão obtida acima com a expressão para o cálculo do cálculo geral do montante:

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

concluímos que a formação do montante no regime de juros compostos se dá como uma progressão geométrica na qual o termo inicial a_0 é o Capital C e a razão q é o termo $(1+i)$, sendo i a taxa de juros da operação.

4.1.4 Capitais Equivalentes

Em nossa sociedade, é considerável a quantidade de pessoas físicas e jurídicas que optam pelos financiamentos e operações de crédito a longo prazo, sobre os quais se aplica o sistema de capitalização composto. Devido a isso, é comum a necessidade de se comparar os valores envolvidos em tais operações e, principalmente, considerando os prazos das mesmas.

Em Matemática Financeira, utilizamos o princípio de que só podemos comparar valores se eles estiverem no mesmo tempo comercial, ou seja, opções só podem ser comparadas se estiverem posicionadas no mesmo tempo no fluxo de caixa. A data em que se considera como base de comparação dos valores referidos a datas diferentes é chamada de data focal. A data focal também é chamada data de avaliação, data de referência ou época. Dois capitais são equivalentes quando são iguais se comparados em uma mesma data, ou seja, quando são comparados na mesma data focal.

Assim, se R$ 100,00 são aplicados a uma taxa de juros de 5% ao mês, R$ 100,00 hoje e R$ 105,00 daqui a 1 mês são equivalentes, ou seja, ter R$ 100,00 hoje e R$ 105,00 daqui a 1

mês lhe é indiferente. Isso vale para muitas situações. Uma dívida de R$ 1.000,00 hoje, a uma taxa de juros de 20% ao bimestre, e outra de R$ 1200,00 daqui a 2 meses, também são equivalentes, pois a primeira transformar-se-á na segunda após 2 meses.
Esse conceito nos remete a dois princípios básicos em Matemática Financeira:

- Quantias só podem ser comparadas se estiverem na mesma época;
- Quantias só podem ser somadas se estiverem na mesma época (mesma data).

Isso é importante pois, achar que R$ 100,00 valem menos que R$ 110,00 pode ser um engano uma vez que se aplicarmos R$ 100,00 à taxa de 1% ao mês, após 12 meses, teremos R$ 112,68 o que é maior que R$ 110,00 se este estiver referido à mesma data. Então R$ 100,00 é maior que R$ 110,00 referidos às datas mencionadas, nas condições dadas.
A grande maioria das análises de situações financeiras utiliza esse conceito. Quando calculamos quanto vale uma quantia em outra época, estamos transportando o dinheiro no tempo. Para fazer isso, basta considerar que quando um valor aumenta a uma taxa $i\%$, ele fica multiplicado pelo fator $(1 + i)$ e quando diminui a uma taxa $i\%$ ele fica dividido por $(1 + i)$. Consequentemente, para avançar n períodos no tempo basta multiplicar por $(1 + i)^n$ e; para voltar n períodos no tempo, basta dividir por $(1 + i)^n$.
Ou seja,

$$FV \;=\; PV\ .\ (1+i)^n \tag{4.5}$$

e

$$PV \;=\; FV\ .\ (1+i)^{-n} \tag{4.6}$$

Por exemplo, R$ 1.000,00 na data focal hoje e R$ 1.100,00 na data focal daqui a um mês são equivalentes considerando-se a taxa de 10% a.m., pois se levarmos R$ 1.000,00 um mês à frente para comparar com o valor de R$ 1.100,00 teremos $FV \;=\; 1000.(1 + 0,10) = 1000.(1,1) \;\Rightarrow$ FV = R$ 1.100,00 e eles serão iguais. Da mesma forma, se voltarmos R$ 1.100,00 um mês atrás para comparar com R$ 1.000,00 teremos $PV \;=\; \dfrac{1100}{(1\;+\;0,10)} \;=\; \dfrac{1100}{1,1} \;\Rightarrow\; PV$ = R$ 1.000,00 e eles serão, da mesma forma, iguais.
Tal comparação realizada acima em duas datas focais diferentes para confirmação da equivalência de capitais nem mesmo é necessária uma vez que se dois capitais forem equivalentes em uma determinada data focal eles serão equivalentes em qualquer data focal escolhida para comparação.

O mesmo raciocínio utilizado para capitais equivalentes pode ser usado para um conjunto de capitais. Em uma mesma data a soma dos seus valores atuais será igual à soma dos seus valores atuais em qualquer data, considerando-se uma mesma taxa de juros. Deste princípio decorre que o valor à vista de um bem é igual à soma dos valores atuais das prestações (caso se opte por um pagamento parcelado) em qualquer data focal. Vamos verificar a aplicação desse conceito através de alguns exemplos.

Exemplo: O vendedor de uma concessionária propõe ao cliente a venda de um carro por R\$ 10.000,00 à vista ou em dois pagamentos mensais iguais, sem entrada de R\$ 5.761,90. Considerando que os juros para essa situação estão valendo 10% ao mês, há diferença entre as propostas?

Considerando a data focal 0 (ou seja, hoje, a ocasião em que ele realizaria o pagamento à vista) temos que R\$ 10.000,00 equivalem realmente a R\$ 10.000,00. Já o primeiro pagamento de R\$ 5.761,90, como ocorre daqui um mês, equivale, hoje a $\dfrac{5.761,90}{1,1} \approx$ R\$ 5.238,09. E, o segundo pagamento de R\$ 5.761,90, como ocorre daqui a dois meses, equivale, hoje, a $\dfrac{5.761,90}{1,1^2} = \dfrac{5.761,90}{1,21} \approx$ R\$ 4.761,90.

Assim, na data focal 0 (hoje) R\$ 5.238,09 + R\$ 4.761,90 $\approx$ R\$ 10.000,00 e, os capitais são equivalentes (a diferença é originada por arredondamentos envolvidos nos cálculos). Logo, as propostas também são.

Exemplo: Pedro tomou um empréstimo de 300 reais, a juros de 15% ao mês. Dois meses após, Pedro pagou 150 reais e, um mês após esse pagamento, Pedro liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Os esquemas de pagamento abaixo são equivalentes. Logo, 300 reais, na data 0, têm o mesmo valor de 150 reais dois meses após, mais um pagamento igual a P, na data 3. Igualando os

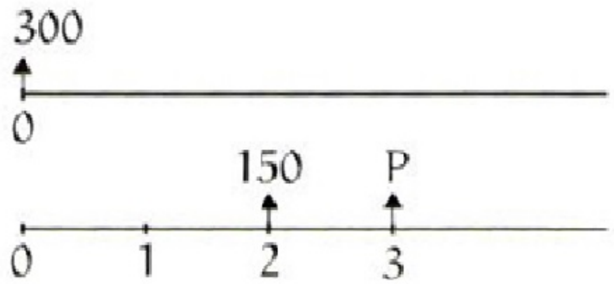

Figura 4.3: Conjunto de capitais equivalentes.

valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos:

$$300 \ = \ \frac{150}{1,15^2} \ + \ \frac{P}{1,15^3} \ \Rightarrow \ 300 \ = \ 113,42 \ + \ \frac{P}{1,15^3} \ \Rightarrow$$
$$(300 \ - \ 113,42) \ . \ (1,15^3) = \ P \ \Rightarrow \ P \ = \ 186,58 \ . \ 1,520875$$

E, daí, $P \ \approx \ 283,76$. O último pagamento foi de R$ 283,76.

4.1.5 Séries de Pagamentos (Rendas)

4.1.5.1 Definição

Em diversas situações comerciais vamos nos deparar com ao menos um dos seguintes fatos (similares):

- Você financiou a compra de um bem em 24 prestações mensais iguais; e/ou
- Resolveu fazer doze (12) depósitos mensais iguais numa conta poupança para com o resultado comprar algum produto.

Nesses dois casos, tem-se uma sucessão de pagamentos (ou recebimentos) à qual se dá genericamente o nome de renda. Assim, uma renda ou anuidade é um conjunto, finito ou infinito, de pagamentos ou recebimentos, cujos elementos, denominados termos da renda, devem ocorrer em datas preestabelecidas.
No primeiro fato você se valeu do conjunto de pagamentos para amortizar (abater) uma dívida e no segundo, para acumular uma poupança. Acumular uma poupança significa efetuar vários pagamentos ou depósitos sucessivos numa conta para utilização futura do resultado; esse resultado é o valor futuro equivalente da renda. Já o pagamento de uma dívida significa que o gasto ou dispêndio inicial foi substituído por um conjunto de pagamentos futuros que lhe é equivalente; assim, o valor presente da renda equivale ao conjunto de prestações futuras que serão pagas.
Uma renda é caracterizada por alguns parâmetros principais evidenciados a seguir:

<u>Número de termos da renda:</u> número de pagamentos (recebimentos) da renda;
<u>Valores dos termos da renda:</u> valor de cada termo da renda; e,
<u>Vencimentos da renda:</u> data do pagamento (recebimento) de cada termo da renda.

A definição apresentada acima é bastante genérica e nada diz sobre a periodicidade dos pagamentos e sobre os seus valores. Assim, para objetivos práticos, precisamos conhecer a **classificação das rendas**.

As rendas podem ser classificadas segundo vários critérios ou pontos de vista, a saber: duração da renda, variação dos elementos da renda, valor dos termos da renda, periodicidade dos pagamentos, vencimento dos termos e início dos pagamentos.

Quanto à duração da rendas ou anuidades

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- **rendas temporárias:** quando o número dos termos que compõe a renda é finito. Exemplo: o conjunto de 12 prestações iguais de uma compra feita a prazo; e,
- **rendas perpétuas:** quando o número dos termos que compõem a renda é infinito onde por infinito deve-se entender que não é conhecido, no início da renda, quantos termos farão parte da mesma. São as rendas que não possuem número exato de termos como as temporárias. Exemplo: uma pessoa muito rica deixa como herança ao seu filho o rendimento mensal perpétuo de um capital aplicado em uma instituição financeira (IF).

Quanto à variação dos seus elementos

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- **rendas certas:** quando todos os seus elementos - número de termos, vencimentos dos termos e valores dos termos - estão previamente fixados; e,
- **rendas aleatórias:** quando pelo menos um dos seus elementos não está determinado. Exemplo de anuidade aleatória é o conjunto de pagamentos dos prêmios de um seguro de vida; o número de pagamentos (número de termos da renda) não é conhecido por não se saber antecipadamente quanto tempo o segurado irá viver.

Quanto ao valor dos termos da renda

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- **rendas constantes:** quando os valores dos termos que as compõem são constantes. Exemplo: prestações iguais em uma compra a crédito; e,

- **rendas variáveis:** quando os valores dos termos que as compõem são variáveis. Exemplo: depósitos crescentes em uma conta de poupança.

Quanto à periodicidade dos pagamentos

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- **rendas periódicas:** quando o intervalo entre dois termos consecutivos é constante (pagamentos mensais, semestrais ou anuais, por exemplo); e,

- **rendas não periódicas:** quando o intervalo entre dois termos consecutivos é variável.

Quanto ao vencimento dos termos

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- **rendas postecipadas:** quando os pagamentos ocorrem no fim de cada período. Exemplo: compra financiada em três pagamentos mensais, ocorrendo o primeiro pagamento 30 dias após a compra; e,

- **rendas antecipadas:** quando os pagamentos ocorrem no início de cada período. Exemplo: compra financiada em três pagamentos mensais, ocorrendo o primeiro pagamento no ato da compra. Informalmente são as operações caracterizadas como "com entrada".

Quanto ao início dos pagamentos

Sob este ponto de vista as rendas podem ser classificadas em:

- **rendas imediatas:** quando o primeiro pagamento é devido no primeiro período contado da origem da renda; e,

- **rendas diferidas:** quando o primeiro pagamento só é devido no período subseqüente a um determinado período de tempo, denominado **período de diferimento**.

Não são todos os tipos de rendas que podem ser generalizados através de fórmulas com aplicação relativamente imediata. No entanto, vamos analisar abaixo alguns tipos específicos de rendas que podem ser modelados com os conceitos vistos anteriormente.

4.1.5.2 Desenvolvimento dos termos de um renda postecipada

Conhecida a classificação das rendas, vamos agora verificar como a equivalência de capitais atua nas mesmas. Com esse fim tomaremos uma **renda temporária, certa, constante, periódica, postecipada e imediata**. Para esse tipo de renda o primeiro pagamento se dá no primeiro período, o número de termos é finito, seus termos são todos iguais em valor, periódicos e devidos ao final dos respectivos períodos.

Como foi visto antes, se temos um conjunto de pagamentos e desejamos saber o valor equivalente "de todo o conjunto" em uma determinada data (passada ou futura) precisamos levar todos os pagamentos para a data desejada utilizando, para isso, as relações dos juros compostos para valor presente e valor futuro definidas nas equações 4.5 e 4.6.

Assim, o procedimento de deslocar cada pagamento/parcela para uma mesma data desejada e, somente após isso, realizar a comparação necessária resolve praticamente qualquer caso que nos for apresentado.

Desse modo, se temos uma renda de n pagamentos iguais a R como essa e desejamos obter, por exemplo, o valor presente PV (na época 0) dos mesmos, pelo que vimos, devemos resolver a seguinte expressão:

$$PV = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + ... + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Onde i é a taxa de juros da operação e cada um dos termos da soma à direita é o valor de cada uma das parcelas da renda levado à data focal 0 do valor presente da mesma para que a comparação possa ser corretamente realizada. Essa soma, apesar de possível, pode ser muito trabalhosa (imagine o cálculo de um financiamento com 48 parcelas). No entanto, há algo de especial nela que facilitará a obtenção do resultado da mesma.

4.1.5.3 Reconhecendo uma P.G. e somando seus termos

Analisando a expressão acima, percebemos que a única diferença entre os termos que estão somados à direita é o expoente do denominador, ou seja, a diferença entre dois termos vizinhos dessa soma é apenas a multiplicação por um fator $\frac{1}{(1+i)}$. No entanto, já vimos sequências anteriormente que sequências com essa característica são definidas como progressões geométricas e, então, o valor presente PV de uma renda com as características acima é a soma dos termos de uma progressão geométrica de termo inicial $a_0 = \frac{R}{(1+i)}$ e razão $q = \dfrac{1}{(1+i)}$.

Para uma progressão geométrica qualquer, podemos obter uma expressão para o cálculo da soma de seus termos fazendo a seguinte observação:

Sendo S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} + a_{n-1}$$

Podemos multiplicar ambos os lados pela razão q, obtendo:

$$q.S_n = q.a_0 + q.a_1 + q.a_2 + ... + q.a_{n-2} + q.a_{n-1}$$

E, usando a relação existente entre os termos da P.G., teremos que:

$$q.S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Daí, fazendo a diferença entre $q.S_n$ e S_n , obtemos:

$$q.S_n - S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n - (a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-2} + a_{n-1}) \Rightarrow$$

$$q.S_n - S_n = a_n - a_0 \Rightarrow$$

$$(q-1) \,.\, S_n = a_0 \,.\, q^n - a_0 \Rightarrow$$

$$(q-1) \,.\, S_n = a_0 \,.\, (q^n - 1)$$

E então:

$$S_n = a_0 \,.\, \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{4.7}$$

Com a razão $q \neq 1$.

Desse modo, aplicando a expressão 4.7 à soma dos valores presentes dos termos da renda temporária, certa, constante, periódica, postecipada e imediata citada anteriormente, com $S_n = PV$, $a_0 = \dfrac{R}{(1+i)}$ e $q = \dfrac{1}{(1+i)}$, teremos:

$$PV = \frac{R}{(1+i)} \,.\, \frac{\dfrac{1}{(1+i)^n} - 1}{\dfrac{1}{(1+i)} - 1} \Rightarrow$$

$$PV = \frac{R}{(1+i)} \,.\, \frac{\dfrac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}}{\dfrac{1-(1+i)}{(1+i)}} \Rightarrow$$

$$PV \ = \ \frac{R}{(1+i)} \cdot \frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)}{1-(1+i)} \ \Rightarrow$$

$$PV \ = \ \frac{R}{(1+i)} \cdot \frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n} \cdot \frac{(1+i)}{(-i)} \ \Rightarrow$$

De onde chegamos a:

$$PV \ = \ R \ . \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}\right] \tag{4.8}$$

Para o valor presente da soma dos termos da renda. Por vezes já temos o valor presente e precisamos calcular o valor dos pagamentos/parcelas R. Assim, a expressão acima também pode ser utilizada para esse fim.

Observe ainda o termo que aparece entre colchetes, apesar do aspecto "pouco simpático". Seu cálculo depende apenas da taxa de juros i e do número de pagamentos n. Devido a isso, em muitas situações práticas cotidianas o mesmo aparece tabelado permitindo, rapidamente, uma conversão entre o valor à vista de uma mercadoria (valor presente) e o valor da parcela a ser paga no caso de um financiamento da mesma (você já deve ter visto algum vendedor fazendo isso).

4.1.5.4 Valor presente e Valor futuro de uma renda

Como foi visto acima, o valor presente equivalente de uma renda nada mais é do que a soma dos valores de todos os termos levados para a data focal 0 por uma dada taxa de juros i, assim, no caso das rendas postecipadas, após a aplicação da relação 4.7 que determina a soma dos termos de uma progressão geométrica, obtivemos a equação 4.8 que estabelece uma relação para o PV dessa renda a partir das características da mesma.

De maneira análoga, também podemos conhecer, para esse modelo de renda, a relação que existe entre o valor dos termos da renda R e o respectivo valor futuro. O valor futuro FV ou montante de um fluxo de caixa nada mais é do que a soma dos valores futuros de cada um dos pagamentos da renda, ou seja, a soma dos valores de todos os pagamentos capitalizados para a data focal n (última que se deseja avaliar) para uma dada taxa de juros i. O montante FV da renda é dado pela soma dos valores futuros ou capitalizados de cada pagamento, ou seja, pela soma dos valores:

$$FV \ = \ R.(1+i)^{n-1} \ + \ + \ R.(1+i)^{n-2} \ + \ ... \ + \ R.(1+i) \ + \ R$$

Novamente, a soma à direita da igualdade é a soma de uma P.G. (mas agora $a_0 = R$ e $q = (1+i)$), então, aplicando-se a 4.7, chega-se a:

$$FV = R \,.\, \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \tag{4.9}$$

Exemplo: Uma loja permite o pagamento de uma mercadoria em quatro prestações de R$ 380,74, mensais, iguais e sucessivas com o primeiro pagamento se dando depois de decorridos trinta dias da compra. Qual seria o valor à vista devido dessa mercadoria se a loja operar com taxa de juro de 5% a.m.?

Neste caso, conhecemos R, n e i. Calculamos PV por:

$$PV = R \,.\, \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}\right]$$

Então, como $R = R\$\ 380,74$; $i = 5\%\ a.m$ e $n = 4\ meses$, temos:

$$\begin{aligned}
PV &= 380,74 \,.\, \left[\frac{(1+0,05)^4 - 1}{0,05.(1+0,05)^4}\right] \Rightarrow\\
PV &= 380,74 \,.\, \left[\frac{(1,05)^4 - 1}{0,05.(1,05)^4}\right] \Rightarrow\\
PV &= 380,74 \,.\, \left[\frac{(1,21551 - 1}{0,05.1,21551}\right] \Rightarrow\\
PV &= 380,74 \,.\, \left[\frac{(0,21551}{0,06078}\right] \Rightarrow\\
PV &= 380,74 \,.\, (3,54574) \Rightarrow\\
PV &\approx 1350,00
\end{aligned}$$

Assim, com uma taxa de juros de 5% a.m., o valor à vista da mercadoria seria de R$ 1.350,00.

Exemplo: Um banco concede um empréstimo no valor de R$ 10.000,00, a ser liquidado em cinco prestações anuais iguais, sendo a primeira daqui a um ano, a uma taxa de 8% ao ano. Qual será o valor das prestações?

Neste caso, conhecemos PV, n e i. Calculamos R por:

$$R = PV \,.\, \left[\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Assim, como $PV = R\$\ 10.000,00$; $i = 8\%\ a.m$; $n = 5\ meses$, temos:

$$R = 10000 \,.\, \left[\frac{0,08.(1+0,08)^5}{(1+0,08)^5 - 1}\right] \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
R &= 10000\ .\ \left[\frac{0,08.(1,08)^5}{(1,08)^5-1}\right] \Rightarrow \\
R &= 10000\ .\ \left[\frac{0,08.1,46933}{1,46933-1}\right] \Rightarrow \\
R &= 10000\ .\ \left[\frac{0,11755}{0,46933}\right] \Rightarrow \\
R &= 10000\ .\ (0,25046) \Rightarrow \\
R &= 2504,60
\end{aligned}
$$

De onde concluímos que cada prestação será de aproximadamente R$ 2.504,60.

4.1.5.5 Uma renda pode ser infinita?

Existem casos onde o número de parcelas da renda R não é finito. Talvez a situação mais comum desse tipo de renda seja aquela de um imóvel que gera para o seu proprietário um determinado rendimento mensal R através do pagamento de aluguel. Em determinado momento pode ser questionado ao proprietário sobre o valor de venda do referido imóvel e para responder à mesma sem nenhum prejuízo financeiro ele deve levar em conta qual seria o rendimento que ele teria com o mesmo através das "infinitas" parcelas que receberia caso o mesmo continuasse alugado. Ou seja, ele precisa comparar o valor da soma das infinitas parcelas ao valor presente do imóvel pelo qual ele seria vendido, ou seja:

$$PV = R + R + R + R + R + ... + R + ...$$

Mas, para fazer a comparação ele precisa deslocar o valor dos pagamentos R para a data focal 0. Assim, considerando o caso postecipado, terá:

$$PV = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + ... + \frac{R}{(1+i)^n} + ...$$

No entanto, como obter o valor do termo da direita já que ele é infinito? Observando novamente esses termos percebemos que eles ainda formam uma P.G. mas, agora, essa é infinita. Todavia, ao analisarmos novamente a fórmula para a soma dos termos de uma P.G:

$$S_n = a_0\ .\ \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Observamos que ela usa o valor de q^n. Numa renda com um número elevado de termos o valor de n é muito grande. Então, caso essa P.G. seja decrescente, ou seja, possua uma razão

q na qual $0 < q < 1$ podemos usar o fato de que q^n se aproxima de zero quando $n \gg 1$ e concluir que:

$$S_n = a_0 \, . \, \frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow$$
$$S_\infty = a_0 \, . \, \frac{0 - 1}{q - 1}$$

De onde chegamos a:

$$S_\infty = \frac{a_0}{1 - q} \tag{4.10}$$

Então, desde que seja decrescente, uma P.G. infinita pode ter o valor da soma dos seus termos calculado pela expressão acima.

No caso de uma renda perpétua postecipada, a razão da P.G. é $\frac{1}{(1+i)}$ e, considerando que estamos trabalhando com taxas de juros positivas[5], ela é decrescente. Assim, teremos que no caso de uma renda infinita ou perpétua:

$$PV = \frac{R}{(1+i)} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + ... + \frac{R}{(1+i)^n} + ... \Rightarrow$$

$$PV = \frac{\frac{R}{(1+i)}}{1 - \frac{1}{(1+i)}} \Rightarrow$$

$$PV = \frac{\frac{R}{(1+i)}}{\frac{i}{(1+i)}}$$

Assim:

$$PV = \frac{R}{i} \tag{4.11}$$

Desse modo, para a análise do valor presente de uma renda perpétua a referência ao número de termos n que era o maior obstáculo para realizar a soma dos termos é suprimida resolvendo, assim, o problema em obter o valor desejado. Obviamente, não faz sentido em falar de valor futuro desse tipo de renda.

Exemplo: Um imóvel está atualmente alugado pelo valor de R$ 850,00 mensais quando o inquilino resolve fazer uma proposta de compra do mesmo ao proprietário. Sabendo que a

[5]Em geral, não há restrições para o uso de taxas de juros negativas nas expressões da matemática financeira. No entanto, é necessário reestabelecer os conceitos de credor e devedor.

taxa de rendimento dos bens do proprietário é de 0,8% a.m., qual é o menor valor da proposta de pagamento à vista que ele pode aceitar do inquilino para que a venda do imóvel não lhe traga nenhum prejuízo?

Neste caso, o valor da proposta de pagamento à vista do inquilino deve ser igual ao valor presente das rendas infinitas dos aluguéis que são recebidos pelo proprietário.

Então, como conhecemos R e i. Calculamos PV por:

$$PV = \frac{R}{i}$$

Então, como $R = R\$ \; 850,00$ e $i = 0,8\% \; a.m.$, temos:

$$\begin{aligned} PV &= \frac{850,00}{0,008} \Rightarrow \\ PV &= 106250,00 \end{aligned}$$

Assim, para que não tenha prejuízo com a venda do imóvel o menor valor da proposta do inquilino que deve ser aceito pelo proprietário é R$ 106.250,00.

4.1.5.6 Rendas Antecipadas e Diferidas

Para finalizarmos a análise das rendas, observe ainda que as fórmulas encontradas anteriormente relacionam o valor presente e o valor futuro apenas para o caso de um produto pago através de uma renda postecipada (sem entrada). Seguindo os mesmos conceitos de progressões geométricas, podemos também encontrar expressões específicas para o cálculo de rendas com entrada (antecipadas) e até para as diferidos. É isso que será apresentado agora.

Renda temporária, certa, constante, periódica, antecipada e imediata

Vimos anteriormente que rendas antecipadas são aquelas nas quais os pagamentos se dão ao início de cada período. Exemplos deste tipo de rendas são as compras financiadas em que o primeiro pagamento se dá no ato da compra (com entrada). Da mesma forma que fizemos para as rendas postecipadas, podemos definir relações entre os valores dos pagamentos R e o valor presente e atual desse tipo de renda. Assim, usando ideias análogas àquelas usadas para as rendas postecipadas, teremos que:

Relação entre valor dos pagamentos R e valor presente PV

O valor presente equivalente dessa renda nada mais é do que a soma dos valores de todos os termos levados para a data focal 0 (que é, também, a data do primeiro pagamento) por uma dada taxa de juros i, assim:

$$PV \;=\; (1+i)\;.\;R\;.\;\left[\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n}\right] \tag{4.12}$$

Sendo a diferença para o PV da renda postecipada apenas a presença do fator $(1+i)$

Relação entre valor dos pagamentos R e o valor futuro FV

De maneira análoga ao item anterior, você poderá conhecer, para este modelo de renda, a relação que existe entre o valor dos termos da renda R e o respectivo valor futuro FV. Com ideias semelhantes, chegamos a:

$$FV \;=\; (1+i)\;.\;R\;.\;\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \tag{4.13}$$

Onde, novamente, a diferença para o FV da renda postecipada é a presença do fator $(1+i)$

Uma vez que já conhecemos, agora, as expressões para o cálculo de valores presentes e futuros para as rendas postecipadas e antecipadas, vamos verificar qual a influência que um atraso de m períodos no início dos pagamentos (ou seja, um período de **diferimento** ou **carência**) ocasiona nessas expressões. Assim, vamos conhecer abaixo as expressões para as rendas diferidas.

Renda temporária, certa, constante, periódica, postecipada e diferida

Relação entre valor dos pagamentos R e valor presente PV

$$PV \;=\; \frac{1}{(1+i)^m}\;.\;R\;.\;\left[\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n}\right] \tag{4.14}$$

Aqui, n é a quantidade de termos da renda (pagamentos ou depósitos) e m é o período de diferimento / carência, ou seja, é quanto se aguarda para iniciar, efetivamente, a renda.

Relação entre valor dos pagamentos R e valor futuro FV

$$FV \;=\; R\;.\;\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \tag{4.15}$$

Ou seja, para uma renda postecipada o período de diferimento m não causa nenhum efeito no valor futuro (montante) gerado.

Renda temporária, certa, constante, periódica, antecipada e diferida

Relação entre valor dos pagamentos R e valor presente PV

$$PV \;=\; \frac{1}{(1+i)^{m-1}}\;.\;R\;.\;\left[\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n}\right] \tag{4.16}$$

Aqui, n é a quantidade de termos da renda (pagamentos ou depósitos) e m é o período de diferimento / carência, ou seja, é quanto se aguarda para iniciar, efetivamente, a renda.

Relação entre valor dos pagamentos R e valor futuro FV

$$FV \ = (1+i) \ . \ R \ . \ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \tag{4.17}$$

Ou seja, comparando essa expressão com aquela encontrada para rendas imediatas, vemos que para uma renda antecipada o período de diferimento m também não causa nenhum efeito no valor futuro (montante) gerado.

Vejamos a utilização dessas expressões com os exemplos abaixo.

Exemplo: Um automóvel é totalmente financiado em 60 prestações mensais e iguais de R$ 838,54. Considerando a taxa de juros do financiamento de 3,15% ao mês, qual será o preço à vista desse automóvel se o comprador efetuar o pagamento da primeira prestação só a partir do próximo mês? E se comprador efetuar o pagamento da primeira prestação no ato da compra? E se o comprador efetuar o pagamento da primeira prestação só daqui 10 meses?

A resolução aqui consiste apenas no cálculo do valor presente da renda. A diferença é que agora temos 3 tipos diferentes de rendas sendo o primeiro uma renda imediata postecipada, o segundo uma renda imediata antecipada e o terceiro uma renda diferida antecipada.

Desse modo, quando o comprador efetua o pagamento da primeira prestação só a partir do próximo mês temos que:

$$PV \ = \ R \ . \ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}\right]$$

Então, como $R \ = \ R\$ \ 883,54$; $i \ = \ 3,15\% \ a.m$ e $n \ = \ 60 \ meses$, temos:

$$\begin{aligned} PV \ &= \ 883,54 \ . \ \left[\frac{(1+0,0315)^{60} - 1}{0,0315.(1+0,0315)^{60}}\right] \ \Rightarrow \\ PV \ &= \ 883,54 \ . \ \left[\frac{(1,0315)^{60} - 1}{0,0315.(1,0315)^{60}}\right] \ \Rightarrow \\ PV \ &= \ 883,54 \ . \ \left[\frac{(6,42916 - 1}{0,0315.6,42916}\right] \ \Rightarrow \\ PV \ &= \ 883,54 \ . \ \left[\frac{(5,42916}{0,20252}\right] \ \Rightarrow \\ PV \ &= \ 883,54 \ . \ (26,80802) \ \Rightarrow \\ PV \ &\approx \ 23685,96 \end{aligned}$$

Logo, por se tratar de uma renda postecipada, o valor para pagamento à vista é de aproximadamente R$ 23.685,96.

Quando o comprador efetua o pagamento da primeira prestação no ato da compra temos que:

$$PV = (1+i)\ .\ R\ .\ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}\right]$$

Uma vez que trata-se de uma renda antecipada e imediata. Então, como $R = R\$\ 883,54$; $i = 3,15\%\ a.m$ e $n = 60\ meses$, temos:

$$\begin{aligned}
PV &= (1+0,0315)\ .\ 883,54\ .\ \left[\frac{(1+0,0315)^{60} - 1}{0,0315.(1+0,0315)^{60}}\right] \Rightarrow \\
PV &= (1,0315)\ .\ 883,54\ .\ \left[\frac{(1,0315)^{60} - 1}{0,0315.(1,0315)^{60}}\right] \Rightarrow \\
PV &= (1,0315)\ .\ 883,54\ .\ \left[\frac{6,42916 - 1}{0,0315.6,42916}\right] \Rightarrow \\
PV &= (1,0315)\ .\ 883,54\ .\ \left[\frac{5,42916}{0,20252}\right] \Rightarrow \\
PV &= (1,0315)\ .\ 883,54\ .\ (26,80802) \Rightarrow \\
PV &= (1,0315)\ .\ (23685,96) \Rightarrow \\
PV &\approx 24432,07
\end{aligned}$$

Logo, por se tratar de uma renda antecipada, o valor para pagamento à vista é de aproximadamente R$ 24.432,07.

Por fim, quando o comprador efetua o pagamento da primeira prestação 10 meses após compra temos que:

$$PV = \frac{1}{(1+i)^{m-1}}\ .\ R\ .\ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}\right]$$

Uma vez que trata-se de uma renda antecipada e diferida. Então, como $R = R\$\ 883,54$; $i = 3,15\%\ a.m$; $m = 10\ meses$ e $n = 60\ meses$, temos:

$$\begin{aligned}
PV &= \frac{1}{(1+0,0315)^{10-1}}\ .\ 883,54\ .\ \left[\frac{(1+0,0315)^{60} - 1}{0,0315.(1+0,0315)^{60}}\right] \Rightarrow \\
PV &= \frac{1}{(1,0315)^{9}}\ .\ 883,54\ .\ \left[\frac{(1,0315)^{60} - 1}{0,0315.(1,0315)^{60}}\right] \Rightarrow \\
PV &= \frac{1}{1,32197}\ .\ 883,54\ .\ \left[\frac{(6,42916 - 1}{0,0315.6,42916}\right] \Rightarrow \\
PV &= (0,75645)\ .\ 883,54\ .\ \left[\frac{(5,42916}{0,20252}\right] \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$PV = (0,75645)\ .\ 883,54\ .\ (26,80802) \Rightarrow$$
$$PV \approx 17917,24$$

Logo, por se tratar de uma renda diferida antecipada, o valor para pagamento à vista é de aproximadamente R\$ 17.917,24.
Podemos ver como o momento inicial do pagamento das prestações afeta diretamente o valor das mesmas a partir do valor presente que está sendo financiado.

Exemplo: Certa concessionária vende veículos seminovos no plano com Carência de 60 dias, com as condições:
Entrada de 20%;
Carência de 60 dias para o pagamento da 1ª prestação;
Taxa de juros = 2,00% a.m.
Se um cliente deseja comprar um veículo de valor à vista igual a R\$ 16.990,00 com 35 pagamentos mensais, qual será o valor da entrada e o valor de cada uma das 35 prestações que ele deverá pagar à concessionária?
Como a entrada precisa ser de 20% do valor do veículo então ela será de

$$Entrada = 0,2.16990 \Rightarrow$$
$$Entrada = 3398,00$$

Assim, como o cliente paga no a entrada de R\$ 3.398,00 então ele financiará o saldo restante que de é de R\$ 13.592,00. Todavia, esse saldo restante será financiado através de uma renda diferida e antecipada com período de carência de 60 dias ou 2 meses. Dessa forma, o saldo de R\$ 13.592,00 será o valor presente dessa renda e a partir da expressão desse para rendas diferidas antecipadas podemos obter o valor das prestações R a serem pagas pelo cliente. Então:

$$PV = \frac{1}{(1+i)^{m-1}}\ .\ R\ .\ \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}\right]$$

Uma vez que trata-se de uma renda antecipada e diferida. Com $PV = R\$\ 13592,00$; $i = 2,00\%\ a.m$; $m = 2\ meses$ e $n = 35\ meses$, temos:

$$13592 = \frac{1}{(1+0,02)^{2-1}}\ .\ R\ .\ \left[\frac{(1+0,02)^{35} - 1}{0,02.(1+0,02)^{35}}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
13592 &= \frac{1}{(1,02)^1} \,.\, R \,.\, \left[\frac{(1,02)^{35}-1}{0,02.(1,02)^{35}}\right] \Rightarrow \\
13592 &= \frac{1}{1,02} \,.\, R \,.\, \left[\frac{(1,99989-1}{0,02.1,99989}\right] \Rightarrow \\
13592 &= (0,98039) \,.\, R \,.\, \left[\frac{(0,99989}{0,04000}\right] \Rightarrow \\
13592 &= (0,98039) \,.\, R \,.\, (24,99725) \Rightarrow \\
13592 &= (24,50705) \,.\, R \Rightarrow \\
R &\approx 554,62
\end{aligned}$$

Logo, por se tratar de uma renda diferida antecipada, o valor das prestações será de aproximadamente R$ 554,62.

4.2 Probabilidade

4.2.1 Definição e critérios

Algumas experiências, realizadas sob as mesmas condições, não apresentam os mesmos resultados ao serem repetidas. Assim, a descrição de tais experiências geralmente vem acompanhada de palavras como "provavelmente", "menos provável", "possibilidade" de ocorrência já que não sabemos com certeza o que vai acontecer, mas, escolhido um resultado de verificação, podemos checar se há chance e, mais ainda, "quanta chance" há de ocorrência do mesmo. Tais experiências são chamadas de aleatórias e, devido à incerteza que as mesmas possuem incorporadas, necessitam de ferramentas próprias para descrevê-las.

Ao realizarmos uma experiência aleatória como, por exemplo, lançar um dado e observar a face que cai virada para cima precisamos ter em mente que não apenas um resultado é possível mas, sim, existem vários resultados possíveis. Matematicamente, chamamos o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória de espaço amostral que, aqui, será denotado por S. Assim, os resultados possíveis para a experiência aleatória que desejamos checar são chamados de **eventos** e são subconjuntos de S.

Desse modo, para decidir "quanta chance" ou "quão provável" é a ocorrência de um evento, precisamos contar o número de vezes que esse poderia ocorrer – ou, o número de elementos do subconjunto do evento[6] - e compará-lo com o número total de eventos possíveis do espaço amostral S – ou, o número total de elementos do conjunto do espaço amostral S. Essa

[6] Na linguagem dos conjuntos, sua cardinalidade.

comparação é o que chamamos de **probabilidade** de um determinado evento ocorrer. Supondo que um evento E pode ocorrer de r formas diferentes – ou, equivalentemente, que o subconjunto relativo a E possui r elementos - de um total de n possibilidades igualmente prováveis do espaço amostral S – ou, que o conjunto do espaço amostral possui n elementos - então a probabilidade de ocorrência do evento E, simbolizada por $P(E)$ pode ser obtida por:

$$P(E) \;=\; \frac{r}{n} \tag{4.18}$$

Na experiência de lançar um dado e observar o valor numérico da face que cai virada para cima podemos, por exemplo, avaliar a probabilidade de dois eventos:

- Evento E_1: A face é o número 5
- Evento E_2: A face é um número ímpar

No caso do evento E_1, considerando que o dado é composto por seis faces distintas e honesto - com chances iguais para cada uma das faces cair virada para cima - temos que existem 6 valores diferentes possíveis para o resultado do lançamento que pode ter como resultado as faces com valor 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Ou ainda, de outro modo, temos que o conjunto relativo ao espaço amostral $S \;=\; \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ possui 6 elementos. Desses 6 valores apenas um deles – a face com o número 5 – faz com que o evento E_1 ocorra. Ou seja, o subconjunto relativo ao evento $E_1 \;=\; \{5\}$ possui apenas um elemento. Sendo assim, temos $r \;=\; 1$ forma possível de ocorrer o evento e $n \;=\; 6$ resultados possíveis no universo ou espaço amostral de resultados do lançamento do dado, então, a probabilidade do evento E_1 será dada por:

$$P(E_1) \;=\; \frac{r}{n} \;=\; \frac{1}{6}$$

$$ou$$

$$P(E_1) \;\approx\; 16,67\%$$

No caso do evento E_2, com as considerações sobre o dado feitas acima, temos que ainda existem 6 valores diferentes possíveis para o resultado do lançamento, ou novamente $S \;=\; \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. No entanto, desses 6 valores, agora três deles – as faces com os números 1, 3 ou 5 – fazem com que o evento E_2 ocorra. Ou seja, o subconjunto relativo ao evento $E_2 \;=\; \{1,\ 3,\ 5\}$ possui três elementos. Sendo assim, temos $r \;=\; 3$ formas possíveis de ocorrer o evento e $n \;=\; 6$ resultados possíveis no universo ou espaço amostral de resultados do lançamento do dado, então, a probabilidade do evento E_2 será dada por:

$$P(E_2) \ = \ \frac{r}{n} \ = \ \frac{3}{6} \ = \ 0,5$$
$$ou$$
$$P(E_2) \ = \ 50,00\%$$

Agora, como mais um exemplo, vamos considerar que dispomos de dois dados (honestos) que são lançados simultaneamente. Qual a probabilidade de que a soma do valor das faces desses dados que caem viradas para cima nesses lançamentos seja igual a 6?

Para responder à questão acima podemos, novamente, nos valer da definição de probabilidade. Sendo assim, como cada um dos dados possui 6 valores diferentes para a face que cai virada para cima teremos um total de $6 \ . \ 6 \ = \ 36$ possíveis duplas de resultados na observação das faces que caíram voltadas para cima. Assim, 36 é o número de elementos do espaço amostral no caso do lançamento simultâneo dos dois dados. No entanto, dessas 36 duplas possíveis de resultados apenas 5 delas satisfazem à condição do evento que desejamos, que é o fato da soma do valor das duas faces ser igual a 6. Essas 5 duplas de resultados são:

$$(1 \ e \ 5) \quad (2 \ e \ 4) \quad (3 \ e \ 3) \quad (4 \ e \ 2) \quad (5 \ e \ 1)$$

Logo, temos $r \ = \ 5$ formas possíveis de ocorrer o evento e $n \ = \ 36$ resultados possíveis no universo ou espaço amostral de resultados dos lançamentos dos dados, então, a probabilidade do evento E: *A soma das faces dos dados é igual a 6*, será dada por:

$$P(E) \ = \ \frac{r}{n} \ = \ \frac{5}{36}$$
$$ou$$
$$P(E) \ \approx \ 13,89\%$$

Aproveitando a definição da probabilidade de um dado evento ocorrer exposta acima podemos também obter a probabilidade de um dado evento não ocorrer. Assim, se em um espaço amostral de n resultados possíveis um determinado evento E pode ocorrer de r formas possíveis então existem também $n \ - \ r$ formas para as quais ele não ocorre. Chamando de E' o evento em que o evento E não ocorre temos que:

$$P(E') \ = \ \frac{n - r}{n} \ \Rightarrow$$
$$P(E') \ = \ \frac{n}{n} \ - \ \frac{r}{n} \ \Rightarrow$$
$$P(E') \ = \ 1 \ - \ P(E)$$

Ou, melhor:

$$P(E) \ + \ P(E') \ = \ 1 \tag{4.19}$$

Ou seja, a soma das probabilidades de ocorrência e de não ocorrência de um determinado evento é igual a 1.

Essa é, como veremos à frente, uma propriedade das probabilidades mas, antes, apresentemos sua definição.

Segundo Lima[11] (2006, p. 114) a probabilidade pode ser definida por:

Definição 1. *Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A de um espaço amostral S um número $P(A)$ de forma que:*

i) *Para todo evento A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.*

ii) $P(S) = 1$

iii) *Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \emptyset$) então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$..*

Os **eventos mutuamente exclusivos** mencionados em *iii)* são importantes para definição e cálculo de probabilidades relacionadas a mais de um evento do mesmo espaço amostral. Conforme citado, eles são eventos que não podem ocorrer simultaneamente como, por exemplo, a probabilidade de se retirar um ás ou um rei num baralho de 52 cartas.

Ao retirar uma carta do baralho não é possível que ela seja um ás e um rei ao mesmo tempo. Logo, tirar um rei ou um ás são eventos mutuamente exclusivos e, sendo os eventos:

- F : Tirar um ás
- G : Tirar um rei

Teremos:

$$\begin{aligned} P(F \cup G) \ &= \ P(F) \ + \ P(G) \ \Rightarrow \\ P(F \cup G) \ &= \ \frac{4}{52} \ + \ \frac{4}{52} \ \Rightarrow \\ P(F \cup G) \ &= \ \frac{2}{13} \end{aligned}$$

É importante observar também que o OU da nossa pergunta foi traduzido no cálculo da probabilidade por uma união dos eventos. Se nossa pergunta tivesse sido acerca de tirar um ás E um rei ela deveria ser traduzida numa interseção dos eventos e seu resultado seria, obviamente:

$$P(F \cap G) \ = \ 0$$

Uma vez que uma carta não pode ser um rei e um às ao mesmo tempo, ratificando, assim que os eventos são mutuamente exclusivos.

Todavia, poderíamos ter feito outra pergunta. Poderíamos ter perguntado qual a probabilidade de se tirar um ás ou uma carta de copas ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas.

Para responder tal pergunta não podemos simplesmente somar as probabilidades individuais como fizemos anteriormente uma vez que esses eventos não são mutuamente exclusivos. Uma carta pode ser um ás e pode ser de copas ao mesmo tempo. Então, como resolver? Felizmente, uma das propriedades das probabilidades nos auxilia para essa resposta. Vejamos abaixo tais propriedades todas oriundas da definição de probabilidade apresentada acima (LIMA[11], 2006, p. 116).

Propriedades das Probabilidades 1. *Sendo A e B são dois eventos, então:*

i) $P(A') \ = \ 1 - P(A)$ *onde* $P(A')$ *é a probabilidade de* A *não ocorrer.*

ii) $P(\emptyset) = 0$.

iii) $P(A-B) \ = \ P(A)-P(A\cap B)$ *onde* $P(A-B)$ *é a probabilidade dos eventos exclusivos de* A *ocorrerem.*

iv) $P(A \cup B) \ = \ P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

v) Se $A \supset B$ *então* $P(A) \geqslant P(B)$.

Como dito acima, todas essas propriedades descendem da definição de probabilidade apresentada anteriormente. Portanto, a partir dela, é possível demonstrar cada uma delas, conforme abaixo:

i) Como $P(S) = 1$ *e* $P(S) = P(A \cup A')$ *então* $P(A \cup A') = 1$

Mas, os eventos A *e* A' *são mutuamente exclusivos pois, não podem ocorrer simultaneamente, então* $P(A \cup A') = P(A) + P(A') = 1$ *e, logo,* $P(A') = 1 - P(A)$.

ii) Temos que $P(S) = P(S \cup \emptyset)$ *e como* S *e* $\emptyset$ *são também eventos mutuamente exclusivos temos que* $P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$. *Assim* $P(S) = P(S) + P(\emptyset)$ *e então* $P(\emptyset) = 0$.

iii) Considerando dois eventos, A *e* B, *os elementos do conjunto do evento* A *podem pertencer a* A, *exclusivamente, ou ao conjunto da interseção dos eventos* A *e* B. *Ou seja,* $P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)]$. *Mas os eventos* $A - B$ *e* $A \cap B$ *são mutuamente excludentes pois, os elementos de um não podem pertencer ao outro. Então,* $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ *e assim* $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) A união de dois eventos, A *e* B *é formada pelos eventos* A *exclusivos mais todos os eventos* B. *Ou seja,* $P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B]$. *Mas,* $A - B$ *e* B *são mutuamente exclusivos e então* $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$. *Agora, da propriedade iii) já sabemos que* $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ *e assim,* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

v) De iii) já sabemos que $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$. *Agora, se* $A \supset B$ *então* $P(A \cap B) = P(B)$ *e assim* $P(A - B) = P(A) - P(B)$. *Mas, da definição decorre que* $P(A - B) \geqslant 0$ *e, logo,* $P(A) \geqslant P(B)$.

Como nada foi exigido dos eventos A e B acima, temos que tais propriedades são válidas para quaisquer dois eventos, sendo eles mutuamente exclusivos ou não.
Assim, podemos utilizar a propriedade *iv)* para responder à pergunta feita acima. Nomeando os eventos como:

- F : Tirar um ás
- G : Tirar uma carta de copas

Temos as seguintes probabilidades:

$$P(F) = \frac{4}{52} \qquad P(G) = \frac{13}{52} \qquad P(F \cap G) = \frac{1}{52}$$

Onde $P(F \cap G)$ tem esse valor pois, existe um único às de copas no baralho. Daí, usando a propriedade *iv)*, vem:

$$P(F \cup G) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} \Rightarrow$$

$$P(F \cup G) = \frac{4 + 13 - 1}{52} \Rightarrow$$

$$P(F \cup G) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

E o fato dos eventos não serem mutuamente exclusivos influencia diretamente no cálculo da probabilidade de sair um ás ou uma carta de copas ao retirarmos uma carta do baralho.

Exemplo: O quadro funcional de uma empresa é composto de 35 empregados efetivos e 15 prestadores de serviços. Do pessoal efetivo 20 são homens e do pessoal prestador de serviço 5 são mulheres. Escolhendo ao acaso uma pessoa do quadro funcional dessa empresa, qual a probabilidade dessa pessoa ser homem ou prestador de serviço?

Como a empresa tem 35 empregado efetivos e 15 prestadores de serviços então conta com 50 pessoas em seu quadro funcional. Esse é o espaço amostral nesse caso. Daí, como existem um total de 30 homens (20 homens efetivos e 10 homens prestadores de serviço, pelo enunciado) e 15 prestadores de serviços teremos que:

$$P(H) = \frac{30}{50} \quad \text{e} \quad P(PS) = \frac{15}{50}$$

Onde H é o evento que ocorre quando a pessoa escolhida é um homem e PS é o evento que ocorre quando a pessoa escolhida é um prestador de serviços.

No entanto, alguns dos 30 homens podem ser também prestadores de serviços. Ou melhor, dos 30 homens existentes 10 são também prestadores de serviços. Ou seja, também temos que:

$$P(H \cap PS) = \frac{10}{50}$$

Assim, como os eventos não são mutuamente exclusivos, utilizamos a propriedade *iv)* com a qual chegamos a:

$$P(H \cup PS) = \frac{30}{50} + \frac{15}{50} - \frac{10}{50} \Rightarrow$$

$$P(H \cup PS) = \frac{30 + 15 - 10}{50} \Rightarrow$$

$$P(H \cup PS) = \frac{35}{50}$$
$$ou$$
$$P(H \cup PS) = 70\%$$

De maneira que a probabilidade da pessoa escolhida do quadro funcional da empresa ser um homem ou um prestador de serviços é de 70%.

4.2.2 Probabilidade condicional

Em alguns casos, ao realizarmos o cálculo da probabilidade de um determinado evento, podemos ter o espaço amostral do mesmo modificado a partir de uma informação adicional vinda de um evento anterior já ocorrido. Nesses casos, ao considerarmos essa informação anterior estaremos calculando uma **probabilidade condicional**. Ou ainda, chamando de R o evento do qual estamos calculando a probabilidade e de T o evento que já ocorreu e que fornece informação adicional para o cálculo da probabilidade de R, diremos que estamos calculando a probabilidade condicional de R na certeza de T a qual é simbolizada por $P(R \mid T)$.
Por exemplo, ao lançarmos um dado e observarmos a face que cai virada para cima, pelo que vimos acima, teremos que a probabilidade dessa face ser a que contém o número 2 é de $\frac{1}{6}$ já que o dado tem 6 faces distintas. No entanto, considere agora que R é o evento no qual o face que cai virada para cima é o número 2 e que T é o evento no qual o número que cai virado para cima é par.
Ao calcularmos $P(R \mid T)$, ou seja, a probabilidade de R sabendo que T ocorreu, teremos que $P(R \mid T) = \frac{1}{3}$ pois, 2 é um número par e já possuímos a informação de que T ocorreu e logo, a face que cai para cima contém um número par. Assim, como dos 6 resultados possíveis do espaço amostral original apenas 3 são pares, calculamos a probabilidade condicional desejada apenas sobre esse espaço amostral "reduzido". Logo, temos um resultado favorável ao evento R em um novo espaço amostral com 3 eventos possíveis e, daí, obtemos $P(R \mid T) = \frac{1}{3}$.

Todavia, tal análise não é necessária todas as vezes em que precisarmos calcular uma probabilidade condicional. Podemos fazer isso de forma mais prática a partir de sua definição. Segundo Lima[11] (2006, p. 124) a probabilidade condicional pode ser definida por:

Definição 2. *Dados dois eventos R e T, com $P(T) \neq 0$, a probabilidade condicional de R*

na certeza de T é o número real

$$P(R \mid T) = \frac{P(R \cap T)}{P(T)} \tag{4.20}$$

Assim, da própria definição podemos verificar a redução do espaço amostral a ser utilizado no cálculo. Ao utilizarmos a certeza de ocorrência do evento T não precisamos mais considerar todos os casos possíveis do espaço amostral mas, sim, apenas aqueles que foram favoráveis a T. Também, não consideraremos todos os casos possíveis para R e, sim, apenas aqueles em que R e T ocorrem concomitantemente (daí o uso da interseção no numerador) já que a certeza que possuímos é que T ocorreu.

Em geral a aplicação da fórmula acima é praticamente direta, mas na análise de probabilidades condicionais podemos fazer uso de diagramas que explicitam as probabilidades de cada "etapa" dos eventos condicionados. Tais diagramas geralmente são chamados de árvores de probabilidades. Vejamos abaixo sua utilização através de um exemplo.

Exemplo: Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade da primeira bola ser branca sabendo que a segunda bola é branca.

Para calcular essa probabilidade condicional usaremos a definição mas, também, o seguinte diagrama:

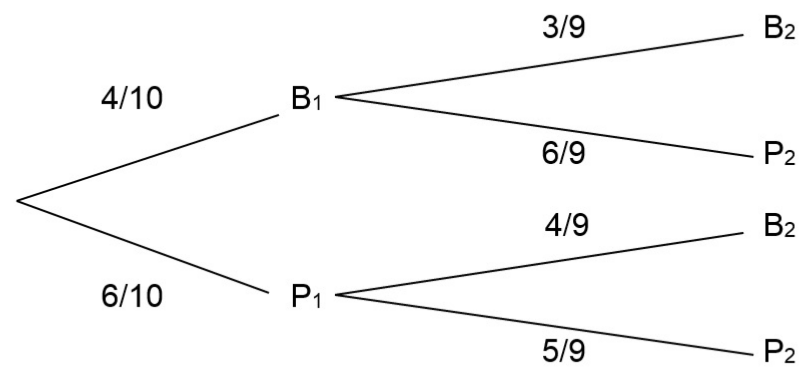

Figura 4.4: Árvore de Probabilidades

Com B_1 sendo o evento da primeira bola a ser retirada ser branca e B_2 aquele da segunda bola retirada ser branca, a probabilidade que precisamos calcular é $P(B_1 \mid B_2)$ então:

$$P(B_1 \mid B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)}$$

Usaremos o diagrama para obter $P(B_1 \cap B_2))$ e $P(B_2)$. A vantagem de utilizar os diagramas de probabilidade é que para definirmos as probabilidades desejadas basta percorrer todos os caminhos que levam ao evento desejado, multiplicando as probabilidades do mesmo caminho e somando com aquelas de caminhos diferentes, caso existam. Assim, teremos:

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

e

$$P(B_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$$

Assim, usando esses valores, teremos que:

$$P(B_1 \mid B_2) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} \Rightarrow$$

$$P(B_1 \mid B_2) = \frac{1}{3}$$

E, logo, a probabilidade da primeira bola ter sido branca sabendo que a segunda bola foi branca é de $\frac{1}{3}$.

Exemplo: Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos. Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a probabilidade dele também estar cursando o curso de espanhol? Iniciamos a resolução nomeando de E o evento que representa os alunos do curso de espanhol e de I o evento que representa os alunos do curso de inglês. Assim, o que pretendemos é determinar a probabilidade de ocorrer E tendo ocorrido I. A partir da definição de probabilidade condicional temos que:

$$P(E \mid I) = \frac{P(E \cap I)}{P(I)}$$

Como, do enunciado, temos que $P(E \cap I) = \frac{200}{2000}$ e $P(I) = \frac{500}{2000}$ então:

$$P(E \mid I) = \frac{200}{500} \Rightarrow$$

$$P(E \mid I) = \frac{2}{5}$$

$$ou$$

$$P(E \mid I) = 40\%$$

Resultando numa probabilidade de 40% de um aluno do curso de inglês selecionado ao acaso estar cursando também o curso de espanhol. No caso da probabilidade condicional, ao invés da necessidade de a calcular em função do número de elementos do espaço amostral, podemos realizar o seu cálculo em função do número de elementos do evento que já ocorreu com certeza.

4.2.3 Eventos independentes

Ao calcularmos uma probabilidade condicional a partir da definição:

$$P(R \mid T) = \frac{P(R \cap T)}{P(T)}$$

Pode ocorrer de encontrarmos que $P(R \mid T) = P(R)$. Ou seja, que o fato da ocorrência anterior do evento T no mesmo espaço amostral de R não altera em nada a probabilidade de ocorrência de R nesse mesmo espaço amostral. Quando isso ocorre dizemos que os eventos R e T são **independentes** e suas probabilidades se relacionam por:

$$P(R \cap T) = P(R) \, . \, P(T) \tag{4.21}$$

Por exemplo, uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas e 20 azuis. Se sortearmos 2 bolas, uma de cada vez e repondo a sorteada na urna, qual será a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?

Como há reposição das bolas os eventos são independentes pois, a cada retirada a urna é exatamente a mesma (veja a diferença para o caso anterior onde não havia reposição na urna). Assim, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada e azul na segunda retirada é igual ao produto das probabilidades individuais, ou seja, $P(V \cap A) = P(V) \, . \, P(A)$. Então, como a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada é $\frac{1}{3}$ e a de sair azul na segunda retirada $\frac{2}{3}$, teremos que a probabilidade de ocorrência dos dois eventos será de

$$P(V \cap A) = P(V) \, . \, P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Um detalhe interessante desse tipo de evento é que, apesar da associação mental que possamos fazer dos mesmos com os eventos mutuamente exclusivos eles, em geral, não são sinônimos. Lembrando que para o caso de dois eventos mutuamente exclusivos R e T devemos ter $P(R \cap T) = 0$ concluímos que *dois eventos serão mutuamente exclusivos e independentes ao mesmo tempo apenas no caso em que a probabilidade de um deles ocorrer no mesmo espaço amostral comum de verificação de ambos os eventos é nula.* Pois, ao analisarmos a independência, precisamos multiplicar as probabilidades individuais e, para que esse produto seja nulo (como é necessário para que eles sejam mutuamente exclusivos), a única possibilidade é que um dos dois fatores já seja nulo.
Antes de avançar para a próxima seção, vamos explorar os eventos independentes com o auxílio de mais alguns exemplos.

Exemplo: Uma moeda não tendenciosa é lançada até que sejam obtidos dois resultados consecutivos iguais. Qual a probabilidade de a moeda ser lançada exatamente três vezes?
Para que seja lançada exatamente três vezes e como dois resultados precisam ser consecutivos então a única forma disso acontecer é se o primeiro lançamento não for igual ao segundo e se o segundo for igual ao terceiro. Assim, nomeando os três lançamentos de L_1, L_2 e L_3 temos que:

$$P(L_1) = 1 \qquad P(L_2) = \frac{1}{2} \qquad P(L_3) = \frac{1}{2}$$

Uma vez que para o primeiro lançamento pode sair qualquer resultado da moeda, ou seja, o espaço amostral de eventos e logo a probabilidade para ele é 1. Já para o segundo só serve um resultado diferente do primeiro e sua probabilidade é $\frac{1}{2}$. O terceiro evento possui a mesma probabilidade de $\frac{1}{2}$ porque ele deve ser exatamente igual ao segundo.
No entanto, como os três lançamentos são independentes pois, o resultado de um deles não influencia em nada no resultado dos outros, temos que para os três resultados que desejamos acontecerem a probabilidade é:

$$P(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = P(L_1).P(L_2).P(L_3) \Rightarrow$$

$$P(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = 1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = \frac{1}{4}$$

E, assim, a probabilidade de dois resultados consecutivos serem encontrados em exatos três lançamentos de uma mesma moeda é de $\frac{1}{4}$ ou 25%.

Exemplo: Um professor aplica uma prova composta de 10 questões do tipo *verdadeiro ou falso* e afirma que a aprovação requer, no mínimo, 7 respostas corretas. Suponha que um aluno "chute" todas as questões. Qual a probabilidade de que as 7 primeiras respostas estejam corretas e as 3 últimas erradas? Qual a probabilidade dele errar todas as questões? E a de acertar todas?

Se as questões da prova possuíssem *cinco alternativas das quais apenas uma está correta* ao invés do tipo verdadeiro ou falso acima, os resultados encontrados anteriormente seriam os mesmos?

No caso das questões do tipo verdadeiro ou falso todas as questões possuem uma mesma probabilidade $P(C) = \frac{1}{2}$ de estarem corretas e uma mesma probabilidade $P(E) = \frac{1}{2}$ de estarem erradas. Assim, como o evento de acertar ou errar uma determinada questão é independente do evento de acertar ou errar uma outra questão, teremos que:

$$P(7C3E) = P(C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap E \cap E \cap E) =$$
$$P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(E).P(E).P(E) \Rightarrow$$

$$P(7C3E) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P(7C3E) = \frac{1}{1024}$$
$$ou$$
$$P(7C3E) \approx 0,1\%$$

Pensando de forma similar, a probabilidade do aluno errar todas as 10 questões pode ser calculada por:

$$P(10E) = P(E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E) =$$
$$P(E).P(E).P(E).P(E).P(E).P(E).P(E).P(E).P(E).P(E) \Rightarrow$$

$$P(10E) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P(10E) = \frac{1}{1024}$$
$$ou$$
$$P(10E) \ \approx \ 0,1\%$$

Ainda, para o caso em que ele acerta as 10 questões teremos:

$$P(10C) = P(C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C) =$$
$$P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C) \Rightarrow$$

$$P(10C) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$P(10C) = \frac{1}{1024}$$
$$ou$$
$$P(10C) \ \approx \ 0,1\%$$

Assim, para as questões do tipo verdadeiro ou falso o aluno possui exatamente a mesma probabilidade de acertar as 7 primeiras questões e errar as 3 últimas, errar todas ou acertar todas. Vejamos agora como ficam essas probabilidades para o caso das questões que possuem cinco alternativas, das quais apenas uma está correta.

No caso das questões com cinco alternativas e apenas uma correta todas as questões possuem uma mesma probabilidade $P(C) = \dfrac{1}{5}$ de estarem corretas e uma mesma probabilidade $P(E) = \dfrac{4}{5}$ de estarem erradas. Assim, como o evento de acertar ou errar uma determinada questão é independente do evento de acertar ou errar uma outra questão, teremos que:

$$P(7C3E) = P(C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap E \cap E \cap E) =$$
$$P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(E).P(E).P(E) \Rightarrow$$

$$P(7C3E) = \frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$P(7C3E) = \frac{64}{9765625}$$
$$ou$$
$$P(7C3E) \ \approx \ 0,0007\%$$

Pensando de forma similar, a probabilidade do aluno errar todas as 10 questões pode ser calculada por:

$$P(10E) = P(E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E \cap E) =$$
$$P(E).P(E).P(E).P(E).P(E).P(E).P(E).P(E).P(E).P(E) \Rightarrow$$

$$P(10E) = \frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5}.\frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$P(10E) = \frac{1048576}{9765625}$$
$$ou$$
$$P(10E) \approx 10,74\%$$

Ainda, para o caso em que ele acerta as 10 questões teremos:

$$P(10C) = P(C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C \cap C) =$$
$$P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C).P(C) \Rightarrow$$

$$P(10C) = \frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5}.\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$P(10C) = \frac{1}{9765625}$$
$$ou$$
$$P(10C) \approx 0,00001\%$$

Desse modo, para as questões com cinco alternativas onde apenas uma é a correta o aluno possui probabilidades diferentes de acertar as 7 primeiras questões e errar as 3 últimas, errar todas ou acertar todas. Neste caso, é muito mais provável que o aluno erre todas as questões do que acerte todas apenas "chutando". Resultado diferente daquele encontrado para as questões do tipo verdadeiro ou falso. O motivo para essa discrepância nos resultados é exatamente a probabilidade diferente atribuída às questões corretas em cada caso. Nas questões do tipo verdadeiro ou falso probabilidades individuais iguais de cada questão levam a probabilidades finais iguais quando analisamos um grupo de questões. No caso das questões com cinco alternativas e apenas uma correta, como temos probabilidades individuais diferentes de acerto e erro encontramos probabilidades finais também diferentes quando analisamos um grupo de questões.

4.3 Esperança Matemática (Valor Esperado)

Ao trabalhar com experimentos aleatórios precisamos de uma "medida"que possa modelar a tendência central de ocorrência dos mesmos. Tal grandeza é chamada de esperança matemática ou valor esperado de uma variável aleatória e nesta seção abordaremos os seus detalhes e sua importância para o ramo dos seguros.

4.3.1 Variáveis Aleatórias

Todavia, para que possamos compreender a esperança matemática, precisamos antes definir o que são variáveis aleatórias. Segundo Rolla[20] (2013, p. 31) uma variável aleatória pode ser definida da seguinte forma:

Definição 3. *Consideremos um experimento aleatório e S um espaço amostral finito associado ao mesmo. Uma função X que associa a cada elemento $s \in S$ um número real $X(s)$ é denominada variável aleatória. Ou seja, uma variável aleatória X é uma função*

$$X \;:\; S \;\rightarrow\; \mathbb{R}$$

que associa a cada subconjunto s de S um número real $X(s)$[7].

As variáveis aleatórias são fundamentais para as aplicações do conceito de probabilidade uma vez que elas são o correspondente numérico do resultado de um experimento aleatório. Por exemplo, em um baralho de 52 cartas estamos interessados em saber o número de cartas vermelhas obtidas numa extração de 5 cartas. Nesse caso, o número de cartas vermelhas é a variável aleatória de interesse. Em um ensaio clínico, podemos estar interessados em avaliar o tempo de vida dos pacientes em anos e, nesse caso, o tempo de vida corresponde à variável aleatória. (PORTAL ACTION[16], 2015).

[7]Uma definição mais generalizada e formal de variável aleatória utiliza o conceito de espaço de probabilidades $(S, \mathfrak{F}, Pr)$ cujas componentes são o espaço amostral S, uma classe de conjuntos mensuráveis (σ-álgebra) $\mathfrak{F}$ de S e uma função Pr que associa a cada conjunto mensurável de $\mathfrak{F}$ um número real e que é denominada *medida de probabilidade*. Pelo motivo de ser uma provável primeira abordagem do conceito junto ao público-alvo do material optamos por utilizar no texto base a definição conforme apresentada acima. Mais detalhes dessa definição generalizada podem ser obtidos em [20].

Exemplo: Considere três lançamentos independentes de uma moeda honesta. Seja C o resultado de lançamento cara e K o resultado de lançamento coroa. O espaço amostral deste experimento é

$$S = \{(C,C,C),(C,C,K),(C,K,C),(K,C,C),(C,K,K),(K,C,K),(K,K,C),(K,K,K)\}$$

Podemos definir uma variável aleatória

$$X \ : \ \text{“}\textit{número de caras obtidas nos três lançamentos}\text{”}$$

Assim teremos, por exemplo, que $X((C,C,C)) = 3$ e $X((K,C,C)) = 2$. Ou seja, a variável aleatória definida aqui representa o resultado de um experimento aleatório como “cara, coroa, cara”através de um número real como “2”, nesse caso.
É a utilização de variáveis aleatórias que nos garantem a possibilidade de tratar numericamente os experimentos aleatórios. A esperança matemática será definida para essas variáveis aleatórias, conforme veremos a seguir.

4.3.2 Definição

A fim de fornecer uma expectativa numérica para os experimentos aleatórios a esperança matemática irá considerar os valores possíveis para os mesmos e suas probabilidades de ocorrência. Sua definição, segundo Rolla[20] (2013, p. 67), é dada por:

Definição 4. *Seja R uma variável aleatória que assume os valores possíveis $R = \{r_1,\ r_2,\ r_3,\ ...,\ r_n\}$ e seja $P(r_i)$ a probabilidade de que a variável aleatória R assuma o valor r_i. Então, o valor esperado de R, também chamado de esperança matemática de R e denotado por $E(R)$ será*

$$E(R) \ = \ \sum_{i=1}^{n} r_i \ . \ P(r_i) \tag{4.22}$$

Por exemplo, consideremos o lançamento de um dado honesto de seis faces. Vamos calcular a esperança matemática da variável aleatória R : “$valor\ da\ face\ que\ cai\ virada\ para\ cima$”. Para tanto, sabemos que os valores possíveis para R são $R = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ e que esses valores são equiprováveis, ou seja, que a probabilidade individual de cada um deles é $\dfrac{1}{6}$ para um dado honesto.
Assim, teremos:

$$E(R) \; = \; \sum_{i=1}^{n} r_i \; . \; P(r_i) \; \Rightarrow$$

$$E(Valor\ da\ Face) \; = \; \sum_{i=1}^{6} r_i \; . \; P(r_i) \; \Rightarrow$$

$$E(Valor\ da\ Face) \; = \; 1 \, . \, \frac{1}{6} \; + \; 2 \, . \, \frac{1}{6} \; + \; 3 \, . \, \frac{1}{6} \; + \; 4 \, . \, \frac{1}{6} \; + \; 5 \, . \, \frac{1}{6} \; + \; 6 \, . \, \frac{1}{6} \; \Rightarrow$$

$$E(Valor\ da\ Face) \; = \; \frac{1 \; + \; 2 \; + \; 3 \; + \; 4 \; + \; 5 \; + \; 6}{6} \; \Rightarrow$$

$$E(Valor\ da\ Face) \; = \; \frac{21}{6} \; = \; \frac{7}{2}$$

Desse modo, a esperança matemática ou valor esperado da variável aleatória que representa o valor da face que cai virada para cima no lançamento de um dado de seis faces é $\frac{7}{2}$. Todavia, o que isso significa? Qual a realidade desse resultado? Para que possamos compreendê-lo melhor precisamos, também, conhecer a Lei dos Grandes Números e é exatamente isso que faremos agora.

4.3.3 A Lei dos Grandes Números

O exemplo acima ilustra que a esperança matemática não é um resultado que podemos esperar quando o experimento aleatório relativo à variável aleatória R for realizado uma única vez. O valor encontrado para a mesma não é nem mesmo o valor de alguma das faces do dado. Esse valor na verdade significa que se jogássemos o dado um grande número de vezes e depois calculássemos a média aritmética dos vários resultados, esperaríamos que essa média ficasse próxima de $\frac{7}{2}$ e quanto maior fosse o número de vezes que o dado fosse lançado, mais ainda a média aritmética se aproximaria de $\frac{7}{2}$ que é o valor esperado ou a esperança matemática da variável aleatória R. Esse resultado é conhecido como **Lei dos Grandes Números** e, apesar da ideia intuitiva contida nele, pode ser demonstrado matematicamente[8]. Uma das condições necessárias que usualmente é imposta para demonstração da Lei dos Grandes Números é que *as variáveis aleatórias sejam independentes.*

A Lei dos Grandes Números é um dos principais resultados no estudo das probabilidades

[8] Não apresentamos a demonstração aqui devido a mesma ser baseada em teoremas de convergência que estão muito além do escopo do ensino básico. No entanto, caso haja algum interesse nos detalhes da mesma as referências [16] e [20] podem ser consultadas para esse fim ou para um primeiro contato com a mesma.

e sua aplicação aparece nos mais diversos ramos da atividade humana. Um dos ramos que mais se utiliza dos resultados obtidos da Lei dos Grandes Números é o de seguros. É a partir dela que ganha sentido o fato de uma seguradora assumir a responsabilidade de indenizar um bem de centenas de milhares de reais recebendo de quem a contrata um pagamento muito menor do que isso. É o papel da seguradora modelar a realidade das situações práticas de nosso cotidiano (experimentos aleatórios) a fim de que possam ser, de certo modo, previstas pelos resultados da Lei dos Grandes Números. Para isso a seguradora precisa se preocupar, por exemplo, em garantir a independência entre os riscos segurados por seus clientes e ainda contar com um grande número clientes expostos ao mesmo tipo de risco segurado para que, assim, as previsões da Lei dos Grandes Números possam garantir a viabilidade do negócio. Veremos mais sobre esses procedimentos no próximo capítulo onde abordaremos diretamente os detalhes para obtenção dos valores envolvidos nos seguros e também na previdência complementar.

4.3.4 O significado do valor médio no cálculo da Esperança

Anteriormente citamos que a esperança matemática era o significado de uma média aritmética mas, isso nem sempre é verdade. Em geral o valor esperado pode ser considerado como uma média ponderada dos possíveis valores r_1, r_2, r_3, ..., r_n da variável aleatória R onde os pesos de tal média são as probabilidades individuais de cada um dos valores que R pode assumir. No caso especial de todos esses valores possíveis serem equiprováveis, ou seja, no caso da probabilidade de R assumir cada um desses valores diferentes ser a mesma (como foi no exemplo do valor da face do dado honesto acima), o valor esperado será representado por uma média aritmética simples dos n possíveis valores para R. Todavia, o conceito de esperança matemática em probabilidade é associado ao conceito de média em estatística, mas não são sinônimos.

A média surge de um conjunto de dados, que é somado e após dividido pelo número de dados que temos. Fazendo isso, obteremos uma média, como dizemos. Assim, podemos usar esse valor como um valor substituto de todos os outros e fazer cálculos com ele. A média é uma medida de tendência central da estatística. Já a esperança matemática é quando obtemos a média dos valores possíveis para uma mesma variável aleatória e então podemos esperar que tendendo ao infinito o número de experimentos aleatórios associados a ela, o resultado da variável aleatória seja igual à esperança matemática. Por isso, a esperança matemática também é conhecida como valor esperado.

5 Matemática Atuarial na EJA - Proposta Educativa

5.1 Introdução

A matemática atuarial recebe esse nome por utilizar em seus resultados ferramentas que fazem uso ao mesmo tempo de técnicas financeiras e estatísticas tornando-se a base teórica para muitos ramos da atividade humana que envolvem riscos, sendo os principais deles os ramos de seguros e previdência. Por meio dela é possível determinar o risco provável e os recursos necessários para sua cobertura, vislumbrando possibilidades em variadas situações como apurar os valores envolvidos nos cálculos previdenciais e dos seguros dos mais diversos tipos como os de automóveis, de bens imóveis e os ligados à vida.

No caso dos seguros ligados à vida e da previdência são utilizados dados estatísticos para avaliar a esperança de vida de um indivíduo a partir de uma certa idade fazendo uso, conjuntamente, de conceitos dos regimes de capitalização financeiros e da teoria da probabilidade.

A teoria da probabilidade em conjunto com a teoria dos juros compostos associada à questão da sobrevivência e morte de um indivíduo, além de outros riscos, são os fundamentos para se estudar quantitativamente as operações de seguros que tem por finalidade a proteção do homem contra eventos aleatórios futuros que possam causar danos contra a sua vida ou seu patrimônio.

A abordagem da matemática atuarial que será feita aqui estará norteada por esses princípios. Analisaremos como funcionam os seguros ligados à vida e a previdência complementar utilizando apenas os resultados da matemática financeira e da teoria da probabilidade que vimos no capítulo anterior, apoiando-se sobretudo na Lei dos Grandes Números. No entanto, como citado acima, também precisamos de dados estatísticos previamente obtidos para que possamos iniciar uma análise através da matemática atuarial. Veremos na próxima seção como esses dados são obtidos.

5.2 Tábuas Biométricas

Vários são os fatores que podem influenciar no risco de morte das pessoas mas, dentre todos, a idade é o de consideração mais comum já que o risco de morte aumenta com ela, para todos. Assim, as tábuas biométricas são a base de sustentação de todos os produtos financeiros da área de vida como os seguros desse tipo e a previdência complementar uma vez que elas são, basicamente, tabelas que contém dados estatísticos destinados a medir a probabilidade de vida e morte das pessoas em cada idade.

Desse modo, partindo de um número fechado e conhecido de participantes, denominado "raiz"da tábua, ela revela a quantidade de pessoas vivas anualmente, em cada idade até que se atinja uma idade limite, representada por ω na qual o número de sobreviventes se anula.

Em geral a construção dessas tábuas é obtida das experiências das seguradoras e até mesmo de censos demográficos, portanto, existem diversas delas em uso atualmente. Cada uma possui um nome específico e alguns exemplos são CSO-1958, AT-1983, AT-2000 e BR-EMS. Ao escolher a tábua a ser utilizada, o ideal é que seja escolhida aquela obtida a partir de dados de uma população com características semelhantes àquelas para a qual vai ser aplicada. A maioria delas são estrangeiras como as ATs que são obtidas do mercado segurador americano. A tábua BR-EMS é a primeira tábua do mercado segurador brasileiro mas, ainda é pouco utilizada. A SUSEP - Superintendência de Seguros Privados é quem normatiza as tábuas do mercado segurador nacional e, no Brasil, a tábua de referência é a AT-1983 Male[1].

Isso significa que as tábuas que forem ser utilizadas por instituições de seguros e de previdência complementar precisam atender os requisitos mínimos de sobrevivência e mortalidade contidos na AT-1983, conforme determinação da SUSEP.

A tábua biométrica ou de sobrevivência ou de mortalidade[2] mais comumente em uso no Brasil atualmente é a AT-2000. Por conta disso ela foi a escolhida para ser utilizada em todos os cálculos a serem realizados neste trabalho e sua versão completa pode ser encontrada no anexo A no final do mesmo.

Segundo Azevedo[1] (2008, p. 202) e Silva[23] (2010, p. 62-63) as tábuas de sobrevivência[3] são compostas por seis colunas sendo:

---

[1] Onde o Male aqui especifica a tábua masculina. É de conhecimento do mercado segurador que as mulheres possuem expectativas de vida levemente superior à dos homens. Assim, tábuas mais modernas consideram essa diferença e normalmente possuem uma versão masculina e outra feminina

[2] Os três termos são equivalentes.

[3] Esse será o termo utilizado de forma mais comum neste trabalho.

- x = coluna de idades, em anos;
- l_x = quantidade de pessoas vivas que atingem a idade x;
- d_x = quantidade de pessoas que falecem com a idade x;
- q_x = probabilidade de falecer com a idade x;
- p_x = probabilidade de sobreviver à idade x;
- e_x = expectativa de vida com a idade x;

Como o número de sobreviventes é sempre decrescente, em qualquer tábua de sobrevivência vale que:

$$l_0 > l_1 > l_2 > ... > l_{x-2} > l_{x-1} > l_x > l_{x+1} > ... > l_\omega$$

Lembrando da definição de probabilidade em que:

$$P(A) = \frac{Casos\ onde\ A\ ocorre}{Total\ de\ casos\ possíveis}$$

Temos que a probabilidade de alguém morrer com a idade x, ou q_x, será:

$$q_x = \frac{Quantidade\ de\ pessoas\ falecidas\ com\ a\ idade\ x}{Total\ de\ pessoas\ com\ a\ idade\ x}$$

Usando a notação descrita acima vem:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \tag{5.1}$$

Do mesmo modo, a probabilidade de sobreviver à idade x, ou p_x será:

$$p_x = \frac{Quantidade\ de\ pessoas\ que\ sobrevivem\ \ à\ idade\ x}{Total\ de\ pessoas\ com\ a\ idade\ x}$$

Agora, a quantidade de pessoas que sobrevivem à idade x é exatamente o número de pessoas vivas que atingem a idade $x + 1$, ou seja, l_{x+1}. Então, temos:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{5.2}$$

Com essa mesma observação, de que o número de pessoas vivas com a idade x é igual ao número de pessoas que chegam vivas à idade $x+1$ somado ao número de pessoas que falecem com a idade x, também temos que:

$$
\begin{aligned}
l_x &= l_{x+1} + d_x \Rightarrow \\
d_x &= l_x - l_{x+1}
\end{aligned}
$$

Dividindo ambos os lados por l_x

$$
\begin{aligned}
\frac{d_x}{l_x} &= \frac{(l_x - l_{x+1})}{l_x} \Rightarrow \\
q_x &= \frac{(l_x - l_{x+1})}{l_x} \Rightarrow \\
q_x &= \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+1}}{l_x} \Rightarrow \\
q_x &= 1 - p_x
\end{aligned}
$$

De onde, vem:

$$p_x + q_x = 1 \tag{5.3}$$

Valor esse que também é deduzido diretamente das propriedades das probabilidades já que, tendo a idade x anos, uma pessoa irá sobreviver ou falecer com essa idade, não restando nenhuma outra possibilidade. Daí a soma das probabilidades de sobrevivência e falecimento de uma mesma idade x anos ser igual a 1.

Uma vez definido como são obtidos os valores de p_x e de q_x poderemos agora calcular probabilidades de sobrevivência e falecimento mais reais, ou seja, da forma como aparecem de fato nas operações de seguros e previdência que abordaremos mais à frente. A partir dos dados contidos na tábua de sobrevivência e da teoria da probabilidade abordada no capítulo anterior veremos agora na próxima seção como podemos fazer isso.

5.3 Probabilidades de vida e morte

Nas situações práticas, relacionadas a seguros ligados à vida e à previdência, somente saber a probabilidade de sobrevivência ou falecimento em uma determinada idade não é o suficiente. Em geral, precisamos saber o valor de tais probabilidades para um período de anos que pode até chegar a várias décadas. São as probabilidades desse tipo que veremos aqui como são calculadas. Como o período pode possuir particularidades, dividimos em alguns casos:

5.3.1 Probabilidade de sobreviver a um determinado período de tempo

Tanto para a previdência quanto para os seguros do ramo vida uma das informações mais importantes no momento em que um cliente os contrata é saber qual a probabilidade de sobrevivência do mesmo durante o período de vigência do produto contratado. Então, como os períodos de vigência de tais produtos geralmente envolvem vários anos, aqui pretendemos responder à seguinte pergunta: Supondo que um indivíduo possua hoje a idade de **x** anos, qual a probabilidade de que ele sobreviva a mais **n** anos?

Para respondê-la, vamos recordar que anteriormente vimos que a probabilidade de sobrevivência de indivíduo entre dois anos consecutivos x e $x+1$ é dada por:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Daí, para calcularmos a probabilidade de um indivíduo sobreviver da idade x até a idade $x+n$ basta considerarmos que tal indivíduo que hoje possui x anos, para sobreviver por mais n anos, terá que sobreviver da idade x até à idade $x+1$ **e** depois da idade $x+1$ até a idade $x+2$ **e** depois da idade $x+2$ até a idade $x+3$ e assim por diante até sobreviver à idade $x+n-1$ **e** atingir a idade $x+n$ anos. Individualmente cada uma dessas probabilidades é dada por:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}, \quad p_{x+1} = \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}, \quad p_{x+2} = \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}}, \quad \dots \quad , p_{x+n-1} = \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}$$

Assim, matematicamente, temos que o evento de um indivíduo com x anos de idade sobreviver por mais n anos está relacionado com os eventos de sobrevivência anuais individuais, uma vez que são definidos a partir da quantidade de sobreviventes. Então, o evento *Sobreviver até a idade $x+n$ anos* pode ser entendido como uma composição dos eventos individuais *Sobreviver à idade x anos, Sobreviver à idade $x+1$ anos, Sobreviver à idade $x+2$ anos, ..., Sobreviver à idade $x+n-1$ anos.* Essa relação determina o cálculo da probabilidade da seguinte forma:

$$P(\textit{Sobreviver até à idade } x+n \textit{ anos}) =$$
$$P(\textit{Sobreviver à idade } x \textit{ anos} \quad \cap \quad \textit{Sobreviver à idade } x+1 \textit{ anos} \quad \cap$$
$$\textit{Sobreviver à idade } x+2 \textit{ anos} \quad \cap \quad \dots \quad \cap \quad \textit{Sobreviver à idade } x+n-1 \textit{ anos})$$

Como a probabilidade de um indivíduo sobreviver a uma determinada idade não influencia a probabilidade do indivíduo sobreviver a uma outra idade diferente, uma vez que os valores das mesmas são obtidos diretamente das tábuas de sobrevivência, os eventos de sobreviver a cada uma das idades são independentes. Assim teremos, conforme vimos no capítulo anterior, que a probabilidade de um indivíduo com idade x sobreviver até a idade $x + n$, a qual será simbolizada por ${}_np_x$, será dada pelo produto das probabilidades de todos esses eventos individuais independentes, ou seja:

$$
\begin{gathered}
{}_np_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \cdots \cdot p_{x+n-1} \Longrightarrow \\
{}_np_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \frac{l_{x+3}}{l_{x+2}} \cdots \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}
\end{gathered}
$$

Assim, observando que $l_k \neq 0$ e fazendo os cancelamentos necessários, chega-se a:

$$
{}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{5.4}
$$

Por exemplo, qual a probabilidade de alguém com 27 anos sobreviver mais 15 anos?

A resolução dessa questão dependerá diretamente da tábua biométrica escolhida pois, os dados para realização do cálculo virão diretamente dela. No nosso caso, como dito anteriormente, utilizaremos as informações contidas na tábua AT-2000. Sendo assim, usando a relação obtida acima temos que:

$$
\begin{gathered}
{}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \Longrightarrow \\
{}_{15}p_{27} = \frac{l_{27+15}}{l_{27}} \Longrightarrow \\
{}_{15}p_{27} = \frac{l_{42}}{l_{27}}
\end{gathered}
$$

Agora, obtendo os valores de l_{27} e l_{42} da tábua AT-2000 temos que:

$$
\begin{gathered}
{}_{15}p_{27} = \frac{97.260,67}{98.499,36} \Longrightarrow \\
{}_{15}p_{27} \approx 0,98742 \Longrightarrow \\
{}_{15}p_{27} \approx 98,74\%
\end{gathered}
$$

Assim, a probabilidade de que alguém com 27 anos sobreviva por mais 15 anos, conforme a tábua biométrica que estamos utilizando, é de 98,74%. Ou seja, é muito provável que alguém com 27 anos chegue à idade de 42 anos e esse fato influenciará diretamente o valor do produto contratado, como logo veremos. Observe ainda que essa é a probabilidade de que alguém com 27 anos sobreviva por mais 15 anos e chegue à idade de 42 anos mas, nada pode ser afirmado acerca de o indivíduo morrer ou não com essa idade.

5.3.2 Probabilidade de falecer em um determinado período de tempo

Do mesmo modo que para alguns produtos é importante ter conhecimento da probabilidade de sobrevivência do contratante para outros é importante saber a probabilidade de falecimento do mesmo em um determinado período de tempo. Dessa forma, agora pretendemos responder à seguinte pergunta: Supondo que um indivíduo possui a idade de **x** anos, qual a probabilidade de que ele faleça nos próximos **n** anos?
Para respondê-la vamos recordar que anteriormente vimos que a probabilidade de morte de um indivíduo de determinada idade x é dada por:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

Daí, para calcularmos a probabilidade de um indivíduo vir a falecer da idade x até a idade $x+n$ basta considerarmos que tal indivíduo poderá morrer com a idade x **ou** com a idade $x+1$ **ou** com a idade $x+2$ **ou** com a idade $x+3$ e assim por diante até a idade $x+n-1$. Como a probabilidade é uma relação entre casos favoráveis e casos possíveis, teremos que individualmente cada uma dessas probabilidades é dada por:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}, \quad q_{x+1} = \frac{d_{x+1}}{l_x}, \quad q_{x+2} = \frac{d_{x+2}}{l_x}, \quad q_{x+3} = \frac{d_{x+3}}{l_x}, \quad \dots \quad , q_{x+n-1} = \frac{d_{x+n-1}}{l_x}$$

Assim, matematicamente, temos que o evento de um indivíduo com x anos de idade falecer nos próximos n anos está relacionado com os eventos de falecimento anuais individuais, uma vez que são definidos a partir da quantidade de falecidos. Então, o evento *Falecer até a idade $x+n$ anos* pode ser entendido como uma composição dos eventos individuais *Falecer com a idade x anos, Falecer com a idade $x+1$ anos, Falecer com a idade $x+2$ anos, ..., Falecer com a idade $x+n-1$ anos.* Essa relação determina o cálculo da probabilidade da seguinte forma:

$$\begin{gathered} P(Falecer\ até\ a\ idade\ x+n\ anos) \ = \\ P(Falecer\ com\ a\ idade\ x\ anos \ \cup \ Falecer\ com\ a\ idade\ x+1\ anos \ \cup \\ Falecer\ com\ a\ idade\ x+2\ anos \ \cup \ \dots \ \cup \ Falecer\ com\ a\ idade\ x+n-1\ anos) \end{gathered}$$

Como os eventos de morrer em cada uma das idades são mutuamente exclusivos, uma vez que um determinado indivíduo só poder falecer com uma única idade específica, teremos que a probabilidade de um indivíduo com idade x falecer em n anos, a qual será simbolizada por ${}_{/n}q_x$, será dada pela soma das probabilidades de todos esses eventos individuais mutuamente exclusivos, ou seja:

$$ {}_{/n}q_x = \frac{d_x}{l_x} \ + \ \frac{d_{x+1}}{l_x} \ + \ \frac{d_{x+2}}{l_x} \ + \ \frac{d_{x+3}}{l_x} + \ ... \ + \ \frac{d_{x+n-1}}{l_x} $$

Agora recordamos também que $d_x = l_x - l_{x+1}$, ou seja, o número de falecimentos numa determinada idade x é a diferença entre os sobreviventes das idades consecutivas x e $x+1$. Substituindo fica:

$$ {}_{/n}q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \ + \ \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} \ + \ \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{l_x} \ + \ \frac{l_{x+3} - l_{x+4}}{l_x} \ + \ ... \ + \ \frac{l_{x+n-1} - l_{x+n}}{l_x} $$

Assim, observando que $l_k \neq 0$ e fazendo os cancelamentos necessários, chega-se a:

$$ {}_{/n}q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \implies $$
$$ {}_{/n}q_x = \frac{l_x}{l_x} - \frac{l_{x+n}}{l_x} \implies $$
$$ {}_{/n}q_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} $$

$$ {}_{/n}q_x = 1 -_n p_x \tag{5.5} $$

O resultado encontrado acima para a probabilidade de falecimento em n anos, apesar de ter sido demonstrado dessa forma também seria obtido diretamente ao considerarmos as propriedades das probabilidades. Como é certo que uma pessoa que hoje possui idade de x anos irá, dentro de n anos, viver ou morrer, temos imediatamente que:

$$ {}_np_x \ + \ {}_{/n}q_x \ = \ 1 $$

E, daí, segue diretamente o resultado obtido na demonstração acima.

Por exemplo, qual a probabilidade de que uma pessoa que hoje possui 31 anos morra nos próximos 20 anos?

Novamente, como dito anteriormente, utilizaremos as informações contidas na tábua AT-2000. Sendo assim, usando a relação obtida acima temos que:

$$ {}_{/n}q_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \implies $$
$$ {}_{/20}q_{31} = 1 - \frac{l_{31+20}}{l_{31}} \implies $$
$$ {}_{/20}q_{31} = 1 - \frac{l_{51}}{l_{31}} $$

Agora, obtendo os valores de l_{31} e l_{51} da tábua AT-2000 temos que:

$$
\begin{gathered}
{}_{/20}q_{31} = 1 - \frac{95.308,68}{98.198,89} \Longrightarrow \\
{}_{/20}q_{31} = 1 - 0,97057 \Longrightarrow \\
{}_{/20}q_{31} \approx 0,02943 \Longrightarrow \\
{}_{/20}q_{31} \approx 2,94\%
\end{gathered}
$$

Assim, a probabilidade de que alguém com 31 anos venha a falecer em 20 anos e não chegue à idade de 51 anos, conforme a tábua biométrica que estamos utilizando, é de 2,94%. Ou seja, é pouco provável que alguém com 31 anos morra antes de chegar à idade de 51 anos e esse fato, como o analisado anteriormente, também influenciará diretamente o valor do produto contratado, conforme logo veremos. Antes, vamos analisar situações onde as probabilidades de sobrevivência e falecimento são consideradas ao mesmo tempo.

5.3.3 Probabilidade de sobreviver a um determinado período de tempo vindo a falecer no próximo ano após o mesmo

Quando determinamos a probabilidade de uma pessoa sobreviver a um determinado período de tempo anteriormente, após obtê-la não podíamos dizer nada sobre o que ocorreria com essa pessoa nos próximos anos. Agora, vamos estimar probabilidades para o que ocorre após esse determinado período.

Desse modo, aqui começamos respondendo à seguinte pergunta: Supondo que um indivíduo possui hoje a idade de **x** anos, qual a probabilidade de que ele sobreviva nos próximos **n** anos, atingido a idade **x+n** anos mas, faleça logo em seguida antes de completar a idade de **x+n+1** anos?

Para respondê-la vamos considerar que essa situação pode ser interpretada como a necessidade do indivíduo sobreviver a um período de n anos e, também, a necessidade dele falecer no próximo período que tem duração de um ano. Assim, como esses dois eventos são independentes, devemos realizar uma multiplicação dessas probabilidades de sobrevivência e morte. Ou seja, a probabilidade de um indivíduo com x anos sobreviver por mais n anos mas, falecer no decorrer do ano seguinte com $x+n$ anos sem chegar à idade de $x+n+1$ anos, que é simbolizada por ${}_{n/}q_x$ será dada por:

$$
{}_{n/}q_x \;=\; {}_{n}p_x \cdot q_{x+n}
$$

Onde ${}_np_x$ representa a probabilidade de que o indivíduo com idade x anos sobreviva aos próximos n anos, conforme visto anteriormente, e q_{x+n} representa a probabilidade de que esse indivíduo morra com $x+n$ anos não chegando, assim, a completar $x+n+1$ anos.
Recordando da definição de ${}_np_x$ e de q_{x+n} e substituindo na expressão acima teremos:

$$\begin{aligned}
{}_{n/}q_x &= {}_np_x \cdot q_{x+n} \Longrightarrow \\
{}_{n/}q_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} \Longrightarrow \\
{}_{n/}q_x &= \frac{d_{x+n}}{l_x}
\end{aligned}$$

Mas, também vimos que $d_{x+n} = l_{x+n} - l_{x+n+1}$, então:

$$\begin{aligned}
{}_{n/}q_x &= \frac{d_{x+n}}{l_x} \Longrightarrow \\
{}_{n/}q_x &= \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x}
\end{aligned}$$

$$ {}_{n/}q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n+1}}{l_x} \tag{5.6}$$

Por exemplo, qual a probabilidade de uma pessoa que hoje tem 50 anos viver por mais 15 anos e morrer em seguida antes de completar 66 anos?
Usando as informações contidas na tábua AT-2000 e a relação obtida acima temos que:

$$\begin{aligned}
{}_{n/}q_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n+1}}{l_x} \Longrightarrow \\
{}_{15/}q_{50} &= \frac{l_{50+15}}{l_{50}} - \frac{l_{50+15+1}}{l_{50}} \Longrightarrow \\
{}_{15/}q_{50} &= \frac{l_{65}}{l_{50}} - \frac{l_{66}}{l_{50}}
\end{aligned}$$

Agora, obtendo os valores de l_{50}, l_{65} e l_{66} da tábua AT-2000 temos que:

$$\begin{aligned}
{}_{15/}q_{50} &= \frac{87.226,23}{95.627,12} - \frac{86.267,35}{95.627,12} \Longrightarrow \\
{}_{15/}q_{50} &= 0,91215 - 0,90212 \Longrightarrow \\
{}_{15/}q_{50} &\approx 0,01003 \Longrightarrow \\
{}_{15/}q_{50} &\approx 1,00\%
\end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de que alguém com 50 anos sobreviva por mais 15 anos e venha a falecer no ano seguinte, sem chegar a completar 66 anos, conforme a tábua biométrica que estamos utilizando, é de 1,00%. Essa probabilidade considera a ocorrência dos dois eventos, a sobrevivência ao período determinado e o falecimento em seguida. Por esse motivo, mesmo considerando uma idade de falecimento maior, ela acaba sendo menor que a probabilidade calculada no exemplo da situação anterior.

Agora, vejamos outro exemplo:

Qual a probabilidade de uma pessoa que hoje tem 40 anos viver por mais 15 anos e morrer em seguida antes de completar 56 anos?

Usando as informações contidas na tábua AT-2000 e a relação obtida acima temos que:

$$\begin{aligned} {}_{n/}q_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n+1}}{l_x} \Longrightarrow \\ {}_{15/}q_{40} &= \frac{l_{40+15}}{l_{40}} - \frac{l_{40+15+1}}{l_{40}} \Longrightarrow \\ {}_{15/}q_{40} &= \frac{l_{55}}{l_{40}} - \frac{l_{56}}{l_{40}} \end{aligned}$$

Agora, obtendo os valores de l_{40}, l_{55} e l_{56} da tábua AT-2000 temos que:

$$\begin{aligned} {}_{15/}q_{40} &= \frac{93.731,08}{97.476,07} - \frac{93.255,21}{97.476,07} \Longrightarrow \\ {}_{15/}q_{50} &= 0,96158 - 0,95670 \Longrightarrow \\ {}_{15/}q_{50} &\approx 0,00488 \Longrightarrow \\ {}_{15/}q_{50} &\approx 0,49\% \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade de que alguém com 40 anos sobreviva por mais 15 anos e venha a falecer no ano seguinte, sem chegar a completar 56 anos, conforme a tábua biométrica que estamos utilizando, é de 0,49%. Valor esse que é bem menor que o obtido anteriormente, mesmo sendo correspondente a um período de sobrevivência e morte igual ao analisado anteriormente.

Dessa forma, conforme evidenciado nos cálculos anteriores, o resultado para essa probabilidade não pode ser generalizado para qualquer período de 15 anos pois, os dados do número de sobreviventes na idade inicial do indivíduo são usados diretamente no cálculo e, logo, influenciam em seu resultado final. Logo, mesmo os períodos sendo os mesmos, valores diferentes são obtidos para cada idade inicial diferente dos contratantes.

5.3.4 Probabilidade de sobreviver a um determinado período de tempo vindo a falecer dentro de um outro período após o mesmo

A única diferença desta última situação que analisaremos para a que foi apresentada anteriormente é que agora, ao invés de exigirmos o falecimento do indivíduo no ano seguinte ao término do período de sobrevivência, a morte do mesmo poderá ocorrer em outro período de vários anos após ele ter passado pelo período de sobrevivência exigindo. De outro modo, aqui pretendemos responder à seguinte pergunta: Supondo que um indivíduo possui hoje a idade de **x** anos, qual a probabilidade de que ele sobreviva nos próximos **n** anos, atingindo a idade **x+n** anos mas, vindo a falecer depois entre as idades **x+n** e **x+n+m** anos?

Para respondê-la vamos considerar que essa situação pode ser interpretada como uma necessidade do indivíduo sobreviver a um período de **n** anos e, também, como uma necessidade dele falecer no próximo período que tem duração de **m** anos. Assim, como esses dois eventos são independentes, iremos novamente realizar uma multiplicação dessas probabilidades de sobrevivência e morte. Ou seja, a probabilidade de um indivíduo com x anos sobreviver por mais n anos mas, falecer no decorrer dos m anos seguintes antes de chegar à idade de $x+n+m$ anos, que é simbolizada por ${}_{n/m}q_x$ será dada por:

$$ {}_{n/m}q_x = {}_n p_x \cdot {}_{/m}q_{x+n} $$

Onde ${}_n p_x$ representa a probabilidade de que o indivíduo com idade x anos sobreviva aos próximos n anos, conforme visto anteriormente, e ${}_{/m}q_{x+n}$ representa a probabilidade de que esse indivíduo que já possui no mínimo a idade $x+n$ anos morra até completar a idade $x+n+m$ anos não chegando, assim, a atingí-la.

Recordando da definição de ${}_n p_x$ e de ${}_{/n}q_x$ e substituindo na expressão acima teremos:

$$
\begin{aligned}
{}_{n/m}q_x &= {}_n p_x \cdot {}_{/m}q_{x+n} \implies \\
{}_{n/m}q_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot (1 -_m p_{x+n}) \implies \\
{}_{n/m}q_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot (1 - \frac{l_{x+n+m}}{l_{x+n}}) \implies \\
{}_{n/m}q_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n} \cdot l_{x+n+m}}{l_x \cdot l_{x+n}} \implies \\
{}_{n/m}q_x &= \frac{l_{x+n}}{l_x} - \frac{l_{x+n+m}}{l_x}
\end{aligned}
$$

$$ {}_{n/m}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x} \tag{5.7} $$

Por exemplo, qual a probabilidade de uma pessoa que hoje tem 30 anos morrer a partir dos 50 anos sem completar 53 anos de idade?

Usando as informações contidas na tábua AT-2000 e a relação obtida acima temos que:

$$ \begin{aligned} {}_{n/m}q_x &= \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x} \Longrightarrow \\ {}_{20/3}q_{30} &= \frac{l_{30+20} - l_{30+20+3}}{l_{30}} \Longrightarrow \\ {}_{20/3}q_{30} &= \frac{l_{50} - l_{53}}{l_{30}} \end{aligned} $$

Agora, obtendo os valores de l_{30}, l_{50} e l_{53} da tábua AT-2000 temos que:

$$ \begin{aligned} {}_{20/3}q_{30} &= \frac{95.627,12 - 94.583,15}{98.275,94} \Longrightarrow \\ {}_{20/3}q_{30} &= \frac{1.043,97}{98.275,94} \Longrightarrow \\ {}_{20/3}q_{30} &\approx 0,01062 \Longrightarrow \\ {}_{20/3}q_{30} &\approx 1,06\% \end{aligned} $$

Assim, a probabilidade de que alguém com 30 anos sobreviva por mais 20 anos e venha a falecer desse momento até completar os 53 anos de idade, conforme a tábua biométrica que estamos utilizando, é de 1,06%. Valor que representa uma pequena chance de ocorrência mas, conforme todos os casos vistos anteriormente, que será diretamente utilizado na determinação do valor do serviço de seguro na ocasião de sua contratação.

Um detalhe importante a ser observado nas expressões obtidas acima para o cálculo das probabilidades é que as formas finais das mesmas envolvem apenas o número de sobreviventes l_k das tábuas biométricas, motivo esse pelo qual essas tábuas são por muitas vezes chamadas de tábuas de sobrevivência. Optou-se por fazer dessa forma para facilitar a obtenção dos dados das tábuas sendo necessário, até esse momento, utilizarmos apenas uma coluna delas para extraí-los. No entanto, para prosseguirmos precisaremos de definir novos conceitos a partir da tábua biométrica que foi apresentada anteriormente.

5.4 Tábuas de Comutação

As tábuas de sobrevivência são um importante recurso na determinação das probabilidades de vida e morte, conforme foi visto acima nas situações analisadas. A aplicação direta das propriedades das probabilidades às mesmas nos fornecem dados fundamentais rapidamente. No entanto, ao tratarmos efetivamente dos seguros de vida e da previdência precisaremos também considerar nos cálculos, além das probabilidades vistas acima, o efeito da taxa de juros com o passar dos anos. Sendo assim, vamos definir aqui outras 4 relações de grandezas que podem ser utilizadas nos cálculos da matemática atuarial chamadas de comutações. Não nos prenderemos muito às definições de cada uma por elas terem sua utilidade maior para simplificar cálculos que veremos futuramente. Ocasião essa em que seu entendimento ficará mais evidente. Então, sendo l_x e d_x vindos da tábua de sobrevivência e $v^x = \dfrac{1}{(1+i)^x}$ o fator de descapitalização já conhecido do capítulo 4, definimos:

$$D_x = l_x \,.\, v^x \tag{5.8}$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + ... + D_\omega \Rightarrow N_x = \sum_{i=x}^{\omega} D_i \tag{5.9}$$

Onde ω é referente à última idade na tábua de sobrevivência.

$$C_x = d_x \,.\, v^{x+1} \tag{5.10}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_\omega \Rightarrow M_x = \sum_{i=x}^{\omega} C_i \tag{5.11}$$

Como pode ser inferido da análise das expressões acima, D_x e N_x são relacionadas à sobrevivência enquanto C_x e M_x ao falecimento. A origem das letras que simbolizam cada uma são históricas. Por exemplo, D_x vem de "denominator"por motivos que em breve entenderemos. Existem ainda outras relações de comutação que não usaremos neste trabalho como S_x e R_x que também se encontram na tábua do apêndice A que, na verdade, se trata de uma tábua de comutação. A diferença entre as tábuas de sobrevivência e as tábuas de comutação, além das grandezas definidas acima que só estão contidas em tábuas de comutações, é que a partir de uma mesma tábua de sobrevivência é possível gerar infinitas tábuas de comutação sendo necessário apenas variar a taxa de juros. Nossa referência aqui, que é a tábua contida no apêndice A será a Tábua AT-2000 a 6% a.a. por ela conter dados de sobrevivência e utilizar uma taxa de juros mais próximos da realidade do mercado brasileiro.

Veremos a melhor forma de utilizarmos essas relações de comutação e como elas podem nos auxiliar a partir do momento em que iniciarmos os cálculos dos prêmios de seguros. Mas, antes de calcularmos esses prêmios, precisamos conhecer o significado dos mesmos.

5.5 Seguros e Previdência

Existem muitos ramos de seguros os quais são definidos pelo tipo de bem que está sendo resguardado ou pelo tipo de dano contra o qual se deseja proteger. Assim, no mercado brasileiro hoje existem os seguros de automóveis, de incêndios, de responsabilidade civil, de riscos diversos, de lucros cessantes, de saúde[4], de vida, entre outros. Todo seguro se baseia no risco e o fato de ser viável para ambas as partes, contratante e seguradora, é uma consequência direta da Lei dos Grandes Números. Para isso as seguradoras seguem à risca procedimentos que visam à sua aplicabilidade e validade, alocando seus clientes em "carteiras"que agrupam aqueles com características comuns e benéficas à ela na tentativa de fazer valer a independência de eventos necessária ao uso dessa lei probabilística. Dessa forma a seguradora diminui seus riscos de falência e também contribui para que o valor que o segurado precise investir seja baixo (quando comparado com seus riscos) de modo que o seguro também seja um "bom negócio"para ele.

> A necessidade de proteção contra o perigo, a insegurança diante do desconhecido, a incerteza do futuro e o medo em reação à imprevisibilidade dos acontecimentos estiveram sempre presentes na vida do homem. Tais sentimentos o levaram a criar formas de proteção para si e para o seu patrimônio. Assim nasceu a ideia do seguro, fruto da imaginação do homem, que encontrou desta forma um mecanismo para a sua proteção. Certos acontecimentos, como a morte de uma pessoa ou a destruição de bens ou coisas, trouxeram ao homem a preocupação de buscar uma forma de reparação por intermédio de uma instituição. O seguro é um organismo que progressivamente se aperfeiçoa para restabelecer, de alguma forma, o equilíbrio perturbado pela materialização do risco. (GUIMARAES[9], 2003, p. 21).

Já a Previdência se constitui, basicamente, num plano de longo prazo para acúmulo de um valor futuro que possa ser recebido, em geral, quando o contratante deseja parar de trabalhar. O governo é o responsável pela previdência social e, grande parte da população brasileira é segurado da mesma. No entanto, ela está baseada sobre um sistema chamado de *repartição* no qual a geração atual de trabalhadores financia a anterior e, com o aumento da expectativa da população advinda de diversos fatores como os avanços na medicina essa conta começa

[4]Que não devem ser confundidos com os Planos de Saúde.

a não fechar de modo que são criados pelos governos mecanismos de controle ou redução dos valores que serão resgatados futuramente através de rendas de aposentadorias como, por exemplo, o fator previdenciário. Para tentar se precaver das incertezas desse futuro um recurso é a contratação da previdência complementar, formada por planos privados. Essa pode ser de dois tipos. A fechada, também conhecida como fundos de pensão, quando ocorre para grupos determinados de empresas e sindicatos e a previdência complementar aberta a qual pode ser contratada diretamente nas instituições (seguradoras, bancos, ...) que oferecem produtos desse tipo como, por exemplo, o PGBL e similares. (Tudo Sobre Seguros[26], 2015).

5.5.1 Definindo Termos

Nas próximas seções iremos detalhar a fundo alguns produtos de Seguros e Previdência diretamente e, portanto, é necessário definir alguns termos que serão utilizados.

O primeiro e mais utilizado será o **prêmio**. O prêmio, no mundo dos seguros, corresponde ao pagamento que o segurado faz à seguradora quando adquire junto à essa uma **apólice** para que a seguradora assuma os riscos dele e nada tem a ver com a ideia de premiação com a qual geralmente essa palavra está relacionada. Os prêmios que serão calculados neste trabalho são os chamados **prêmios de risco** por serem relativos apenas à perda esperada estabelecida através dos resultados da teoria das probabilidades e da matemática financeira. Todavia, antes de comercializar um seguro a seguradora certamente acrescentará ao valor do prêmio de risco outros valores destinados a cobrir seus custos administrativos e até mesmo seu lucro. Esses acréscimos realizados em cima do prêmio de risco são denominados geralmente como *carregamentos*. Observe a figura:

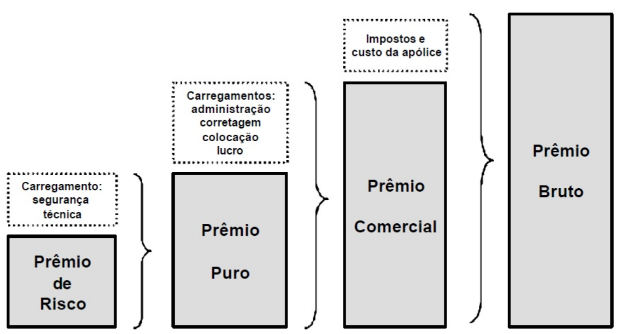

Figura 5.1: Tipos de Prêmios de Seguros (GUIMARAES, 2003, p. 44)

Ela demonstra simbolicamente os carregamentos realizados desde o prêmio de risco que é definido a partir das ferramentas da matemática atuarial até se chegar ao valor do prêmio comercial que é o valor que chega até o cliente da seguradora. Esse valor do prêmio comercial não pode ser modelado uma vez que os carregamentos, apesar de limitados legalmente[5], variam de uma seguradora para outra e são, inclusive mecanismos para promover a concorrência entre elas. Portanto, calcularemos apenas os prêmios de risco.
Após pagar o prêmio o segurado transfere seu risco de prejuízo para a seguradora e, caso o risco se materialize, ou seja, ocorra, diremos que houve um **sinistro** e a seguradora será obrigada a pagar ao segurado uma **indenização**.
Uma **renda por sobrevivência** é um valor que será pago ao contratante de um seguro de vida ou plano de previdência complementar caso ele sobreviva ao período de diferimento contratado. Após iniciar o recebimento da mesma o contratante irá recebê-lo por um período previamente estabelecido ou ainda até a sua morte. Caso ele não sobreviva e morra durante o período de diferimento a seguradora não é obrigada a devolver nenhum valor mas, caso ele também possua uma **cobertura por falecimento** a seguradora será obrigada a indenizar os **beneficiários** escolhidos pelo contratante, já que ele não está mais vivo para receber. (SUSEP[25], 2015).

5.5.2 Seguros de Vida e Previdência Complementar

Acima definimos os diversos tipos de seguros e destacamos a diferença entre o funcionamento da previdência social e complementar. Agora vamos efetivamente iniciar a investigação dos detalhes de tais produtos.
Para tanto, começaremos com o Seguro Dotal Puro que consiste num pagamento único a ser recebido pelo segurado caso ele sobreviva por um período de diferimento contratado. Em seguida abordaremos as Rendas por Sobrevivência que podem ser de vários tipos e os Seguros com Cobertura por Falecimento no qual o segurado contrata um valor que será recebido pelos seus beneficiários na ocasião de seu falecimento. Por fim, analisaremos o funcionamento da previdência aberta complementar, que concentra os conhecimentos analisados até então, com casos que são compatíveis com planos desse tipo como o PGBL.

[5]No caso dos seguros de pessoas, o percentual máximo de carregamentos permitido pela legislação vigente é de 30% (http://www.susep.gov.br/menu/informacoes-ao-publico/planos-e-produtos/seguros/seguro-de-pessoas).

> [...] os pilares dos seguros e previdência são dois: as probabilidades de danos e a taxa de juros. Os dois trabalham juntos [...] sempre estudaremos os casos de seguros e previdência, os quais envolvem vida e falecimento conforme as médias em grupos coletivos considerando a Lei dos Grandes Números. Os grupos serão aqueles nas formações constantes das tábuas de sobrevivência utilizadas. (CORDEIRO FILHO[6], 2014, p. 77).

Assim, veremos a partir de agora como as probabilidades de sobrevivência e falecimento abordadas acima, em conjunto com os conhecimentos de equivalência de capitais abordados no capítulo 4, influenciam na determinação dos valores envolvidos na contratação de planos de seguro de pessoas e de previdência complementar. Veremos também que, em conformidade com a Lei dos Grandes Números, essas probabilidades são sempre oriundas da tábua de sobrevivência que está sendo adotada.

5.6 Calculando Prêmios e Rendas

5.6.1 Cálculo de prêmio único para um seguro dotal puro por sobrevivência

O seguro dotal puro por sobrevivência é um tipo de seguro do ramo vida constituído do pagamento de um valor único (o dote ou capital segurado) pela seguradora ao contratante do seguro, caso ele sobreviva aos n anos contratados. Ou seja, uma pessoa com idade x anos contrata uma apólice junto a uma seguradora onde se compromete a pagar um valor, o prêmio, de uma só vez à mesma para poder receber dessa um outro valor, o capital segurado, caso venha a completar a idade de $x + n$ anos.

"Caso não consiga chegar vivo a essa idade, o valor pago como prêmio único por um usuário de um seguro dotalício ficará para a seguradora tatrando-se, na realidade, de uma aposta com caráter comercial"(CORDEIRO FILHO[6], 2014, p. 78).

Após entendermos a ideia básica do seguro dotal puro por sobrevivência, provavelmente a pergunta que surge é como o valor do prêmio pago pelo contratante se relaciona com o capital segurado que poderá ser recebido pelo mesmo da seguradora. Certamente essa relação precisa envolver a probabilidade de sobrevivência do contratado ao período contratado e, também, o efeito das taxas de juros sobre os valores envolvidos, uma vez que o pagamento do prêmio e o recebimento do capital segurado não ocorrem num mesmo período de tempo.

Dessa forma, o prêmio a ser pago pelo segurado, para o qual utiliza-se o símbolo ${}_nE_x$ é obtido a partir da consideração de que o seguro não pode constituir lucro nem prejuízo devendo o prêmio a ser pago ser suficiente para que a seguradora possa cumprir com sua obrigação futura de indenizá-lo com o capital segurado, caso ele atinja a idade contratada. Então, o valor de ${}_nE_x$ pode ser determinado através da multiplicação do capital segurado, para o qual utilizaremos o símbolo CS, descontado por n anos a uma determinada taxa de juros (trazendo-o para a data na qual está sendo contratado o seguro e o segurado ainda tem a idade de x anos) multiplicado pela probabilidade de alguém com a idade x anos chegar vivo até a idade $x+n$ anos. Ou seja, sendo:

${}_nE_x$ o prêmio único a ser pago pelo segurado com idade x anos à seguradora;
CS o capital segurado que será recebido caso o contratante atinja a idade de $x+n$ anos;
i a taxa de juros da operação, uma vez que o capital precisa ter seu valor comparado em períodos de tempo diferentes;
${}_np_x$ a probabilidade de que alguém com idade x chegue vivo à idade $x+n$ anos, já abordada anteriormente.

Temos que:

$${}_nE_x = CS.\frac{1}{(1+i)^n}.{}_np_x$$

Ou, utilizando a notação das tábuas de comutação:

$${}_nE_x = CS.v^n.{}_np_x \tag{5.12}$$

Como o pagamento de CS ao segurado é incerto pois, não há certeza de que ele sobreviverá ao período de n anos ou período de diferimento para poder recebê-lo, lembramos da relação 4.22 de onde é possível concluir que o valor do prêmio pago pelo segurado nada mais é do que o valor esperado atual da variável aleatória capital segurado, ou ainda, o valor do prêmio é a esperança matemática do pagamento do capital segurado contratado ao segurado.

> Matematicamente, como princípio ou tese, deve existir o conceito de que não se deseja lucro, ou seja, as obrigações futuras dos segurados deverão ser iguais às obrigações futuras da seguradora, pois o princípio básico - no caso do seguro - é cobrir perdas e não lucrar com sinistros. Da mesma forma, se raciocinarmos financeiramente utilizando os conhecimentos da matemática financeira, o "valor atual ou valor presente das obrigações dos segurados

> deverão ser iguais ao valor atual, ou valor presente das obrigações da entidade". (CORDEIRO FILHO[6], 2014, p. 76).

Com relação ao equilíbrio citado acima que deve reger os seguros, observamos que:

$$
\begin{aligned}
{}_nE_x &= CS.v^n.{}_np_x \Rightarrow \\
{}_nE_x &= CS.v^n.\frac{l_{x+n}}{l_x} \Rightarrow \\
\underbrace{{}_nE_x.l_x}_{Receitas} &= \underbrace{CS.l_{x+n}.v^n}_{Despesas}
\end{aligned}
$$

Ou seja, o valor que a seguradora recebe no momento da contratação como prêmios de seus clientes é igual ao valor das futuras despesas que ela terá com o pagamento das indenizações, considerando-se o desconto necessário devido esses dois eventos ocorrerem em momentos distintos (um ocorre n anos após o outro). Essa equivalência só é possível graças à Lei dos Grandes Números mencionada anteriormente. Quando a seguradora realiza um contrato com um cliente ela não considera como será a passagem dos n anos para apenas aquele cliente mas, para um conjunto grande de clientes com aquela idade e com contratos semelhantes. Ao fazer isso, ao aumentar o número de "amostras" ela está aumentando a probabilidade de obter resultados mais próximos daqueles que estão previstos nas tábuas de sobrevivência utilizadas, conforme prevê a Lei dos Grandes Números. É por isso que a receita obtida dos segurados calculada por $l_x.{}_nE_x$ pode ser equiparada à despesa que será gerada à seguradora pelos mesmos calculada por $l_{x+n}.CS$ já que, considerando uma amostra suficientemente grande de pessoas, pela Lei dos Grandes Números não se espera que todas sobrevivam por todo o período de diferimento contratado e assim, das l_x pessoas que contratam o seguro e pagam o prêmio único apenas l_{x+n} irão receber o capital segurado efetivamente.

Na expressão encontrada acima para o cálculo do prêmio único de um seguro dotal puro por sobrevivência vemos que o valor de CS será definido em cada caso, os valores de l_x e l_{x+n} são obtidos das tábuas de sobrevivência (aqui a AT-2000 conforme a escolha já mencionada) e o valor de v^n será obtido a partir da taxa de juros e do período contratados. No entanto, podemos simplificar ainda mais o cálculo do mesmo com auxílio da tábua de comutação. Desse modo, sendo:

$$
{}_nE_x.l_x = CS.v^n.l_{x+n}
$$

Agora, observando que $v^x > 0$ multiplicamos v^x de ambos os lados da equação acima, obtendo:

$$_nE_x.l_x.v^x \;=\; CS.v^n.l_{x+n}.v^x$$

Mas, as relações de comutação nos dizem que $l_k.v^k \;=\; D_k$, assim:

$$\begin{aligned}
_nE_x.l_x.v^x &= CS.v^n.l_{x+n}.v^x \;\Rightarrow \\
_nE_x.l_x.v^x &= CS.l_{x+n}.v^{x+n} \;\Rightarrow \\
_nE_x.D_x &= CS.D_{x+n}
\end{aligned}$$

De onde chegamos a:

$$_nE_x \;=\; \frac{D_{x+n}}{D_x}.CS \tag{5.13}$$

Apesar de equivalente, a expressão acima é mais simples que a anterior para o cálculo de $_nE_x$ pois, permite obter o seu valor diretamente com informações obtidas da tábua de comutação que está sendo utilizada.

Por exemplo, caso uma pessoa atualmente com 40 anos decida fazer um Seguro Dotal Puro por Sobrevivência para que possa receber o valor de R$ 10.000,00 caso sobreviva aos próximos 30 anos, quanto deverá pagar de prêmio único à seguradora? Considere a taxa de juros da operação como sendo de 6% a.a.

A fim de verificar o uso das expressões deduzidas anteriormente para o cálculo de $_nE_x$ vamos obter o seu valor de duas maneiras distintas. Primeiramente sem o uso da tábua de comutação e, logo após, com o auxílio dessa.
Primeiro modo. Sendo:

$$_nE_x \;=\; CS \;.\; v^n \;.\; {}_np_x$$

Então temos:

$$\begin{aligned}
_nE_x &= CS \;.\; v^n \;.\; {}_np_x \;\Rightarrow \\
_nE_x &= CS \;.\; v^n \;.\; \frac{l_{x+n}}{l_x} \;\Rightarrow \\
_nE_x &= CS \;.\; \frac{1}{(1+i)^n} \;.\; \frac{l_{x+n}}{l_x} \;\Rightarrow \\
_{30}E_{40} &= 10000 \;.\; \frac{1}{(1+0,06)^{30}} \;.\; \frac{l_{40+30}}{l_{40}} \;\Rightarrow \\
_{30}E_{40} &= 10000 \;.\; \frac{1}{(1,06)^{30}} \;.\; \frac{l_{70}}{l_{40}}
\end{aligned}$$

Assim, obtendo os valores de l_{40} e l_{70} da tábua de sobrevivência AT-2000, temos que:

$$
\begin{aligned}
{}_{30}E_{40} &= 10000 \;.\; 0,17411 \;.\; \frac{81.382,16}{97.476,07} \Rightarrow \\
{}_{30}E_{40} &= 10000 \;.\; 0,17411 \;.\; 0,83489 \Rightarrow \\
{}_{30}E_{40} &\approx 1453,63
\end{aligned}
$$

Assim, para que uma pessoa com 40 anos possa receber um Seguro Dotal Puro de R\$ 10.000,00 caso sobreviva por 30 anos e complete a idade de 70 anos, ele deve pagar hoje à seguradora um prêmio único de aproximadamente R\$ 1.453,63.

Agora, vamos calcular o prêmio único a partir da última relação que utiliza a tábua de comutação.
Vimos que:

$$
{}_{n}E_{x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \;.\; CS
$$

Então:

$$
\begin{aligned}
{}_{30}E_{40} &= \frac{D_{40+30}}{D_{40}} \;.\; 10000 \Rightarrow \\
{}_{30}E_{40} &= \frac{D_{70}}{D_{40}} \;.\; 10000
\end{aligned}
$$

Agora, basta obter os valores de D_{40} e D_{70} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. Como dito antes, a partir de uma mesma tábua de sobrevivência podem ser obtidas várias tábuas de comutação bastando, apenas, variar a taxa de juros. O cuidado que é necessário é o de usar uma tábua de comutação cujos juros sejam os mesmos da operação que está sendo realizada. Assim, vem:

$$
\begin{aligned}
{}_{30}E_{40} &= \frac{1.377,59}{9.476,84} \;.\; 10000 \Rightarrow \\
{}_{30}E_{40} &= \frac{13.775.900}{9.476,84} \Rightarrow \\
{}_{30}E_{40} &\approx 1453,63
\end{aligned}
$$

Assim, para que uma pessoa com 40 anos possa receber um Seguro Dotal Puro de R$ 10.000,00 caso sobreviva por 30 anos e complete a idade de 70 anos, ele deve pagar hoje à seguradora um prêmio único de aproximadamente R$ 1.453,63.
A simplicidade obtida com o uso das tábuas de comutação é o que as torna uma ferramenta obrigatória nos cálculos atuariais conforme foi visto acima e será visto adiante nos demais casos que serão analisados.

5.6.2 Cálculo de prêmio único para rendas por sobrevivência

Uma outra opção de um contratante de um seguro de vida com cobertura por sobrevivência é optar por receber pagamentos periódicos vitalícios ou temporários ao invés de um único dote. Nesse caso o contratante irá novamente realizar o pagamento de um prêmio único à seguradora mas, ao invés de um único pagamento futuro ele receberá da seguradora uma série de pagamentos os quais constituem uma **renda** ou **anuidade**.
Como foi visto no capítulo 4 as rendas podem ser antecipadas ou postecipadas, temporárias ou vitálicias, imediatas ou diferidas. Cada uma dessas características, as quais serão definidas pelos contratantes de tal seguro em cada caso, traz consequências para o cálculo do valor do prêmio único a ser pago pelo segurado à seguradora, conforme veremos a partir de agora.
Para obter uma expressão para o cálculo do prêmio neste caso usamos, da mesma foi forma que foi feito anteriormente, o argumento de que os seguros não podem constituir lucro devendo as receitas da seguradora serem equivalentes às despesas da mesma. O que há de diferente no caso do Seguro Dotal Puro que vimos acima em comparação ao caso das rendas por sobrevivência é que essas são constituídas de várias rendas anuais de um mesmo valor R que devem ser todas trazidas para a mesma data focal na qual o segurado realiza o pagamento do prêmio único a fim de que a equiparação possa ser realizada.
Assim, utilizando o símbolo $\ddot{a}_x$ para o valor do prêmio único a ser pago no caso de uma **renda imediata antecipada vitalícia** temos, no momento da contratação, os seguintes capitais equivalentes:

Receita: $l_x.\ddot{a}_x$
Despesa: $l_x.R \ + \ l_{x+1}.v.R \ + \ l_{x+2}.v^2.R \ + \ l_{x+3}.v^3.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^{\omega-x}.R$

Onde ω se refere à última linha da tábua de sobrevivência que está sendo utilizada. Observe que, novamente, o cálculo das receitas e das futuras despesas da seguradora utiliza os resultados da Lei dos Grandes Números pois, a avaliação da passagem dos anos não é realizada apenas para um segurado e, sim, para um grande número deles de modo que as probabilidades originadas de dados das tábuas de sobrevivência possam ser utilizadas.
No presente caso o segurado, então com x anos, realiza o pagamento do prêmio $\ddot{a}_x$ e nesse mesmo momento já recebe da seguradora a primeira renda R. Isso se deve ao fato da renda que está sendo considerada aqui ser imediata e antecipada. Basicamente, é apenas no cálculo do valor presente das despesas que surgirão as diferenças pois, os detalhes do momento em que a renda passa a ser recebida pelo segurado e a duração do pagamento feito pela seguradora ao mesmo é que determinam o valor presente dessa renda.

Como devemos ter:

$$Receitas \ = \ Despesas$$ [6]

Então:

$$l_x.\ddot{a}_x \ = \ l_x.R \ + \ l_{x+1}.v.R \ + \ l_{x+2}.v^2.R \ + \ l_{x+3}.v^3.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^{\omega-x}.R$$

Ao contrário do que tínhamos no capítulo 4 o lado direito da igualdade não é uma P.G. (é importante questionar e justificar isso junto aos alunos, uma rápida inspeção da tábua de sobrevivência utilizada pode ser útil) de modo que possamos obter uma expressão para o

[6] A justificativa para a utilização dessa relação ainda no caso das rendas é o fato dos prêmios serem equivalentes à esperança matemática da seguradora pagar o Capital Segurado, agora através de rendas. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
l_x.\ddot{a}_x \ &= \ l_x.R \ + \ l_{x+1}.v.R \ + \ l_{x+2}.v^2.R \ + \ l_{x+3}.v^3.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^{\omega-x}.R \ \Rightarrow \\
\ddot{a}_x \ &= \frac{l_x.R \ + \ l_{x+1}.v.R \ + \ l_{x+2}.v^2.R \ + \ l_{x+3}.v^3.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^{\omega-x}.R}{l_x} \ \Rightarrow \\
\ddot{a}_x \ &= \ \frac{l_x}{l_x}.R \ + \ \frac{l_{x+1}}{l_x}.v.R \ + \ \frac{l_{x+2}}{l_x}.v^2.R \ + \ \frac{l_{x+3}}{l_x}.v^3.R \ + \ ... \ + \ \frac{l_\omega}{l_x}.v^{\omega-x}.R \ \Rightarrow \\
\ddot{a}_x \ &= \ {}_0p_x.R \ + \ {}_1p_x.v.R \ + \ {}_2p_x.v^2.R \ + \ {}_3p_x.v^3.R \ + \ ... \ + \ {}_{\omega-x}p_x.v^{\omega-x}.R \ \Rightarrow \\
\ddot{a}_x \ &= \ \sum_{i=0}^{\omega-x} {}_ip_x.R.v^i
\end{aligned}$$

De onde, lembrando da relação 4.22, concluímos novamente que o prêmio único pago no caso das rendas também é a esperança matemática da seguradora pagar o capital segurado mas, desta vez, sob a forma de rendas. Apesar de ter sido verificado para esse caso, a conclusão também vale para os demais tipos de rendas que ainda serão abordados.

resultado da soma. No entanto, utilizando novamente o artifício de multiplicar ambos os lados por v^x teremos:

$$l_x.v^x.\ddot{a}_x \; = \; l_x.v^x.R \; + \; l_{x+1}.v.v^x.R \; + \; l_{x+2}.v^2.v^x.R \; + \; l_{x+3}.v^3.v^x.R \; + \; ... \; + \; l_\omega.v^{\omega-x}.v^x.R \; \Rightarrow$$
$$l_x.v^x.\ddot{a}_x \; = \; l_x.v^x.R \; + \; l_{x+1}.v^{x+1}.R \; + \; l_{x+2}.v^{x+2}.R \; + \; l_{x+3}.v^{x+3}.R \; + \; ... \; + \; l_\omega.v^\omega.R$$

A partir de agora começamos a perceber a importância e utilidade das relações de comutação vistas acima. E, mais ainda, o quanto nosso caminho será facilitado ao utilizarmos os valores já tabelados na tábua de comutação escolhida. Uma das relações de comutação que foram apresentadas define que $D_k \; = \; l_k.v^k$, então, substituindo na expressão anterior teremos que:

$$D_x.\ddot{a}_x \; = \; D_x.R \; + \; D_{x+1}.R \; + \; D_{x+2}.R \; + \; D_{x+3}.R \; + \; ... \; + \; D_\omega.R$$

Agora, outra relação de comutação apresentada acima e relacionada aos dados de sobrevivência define que:

$$N_x \; = \; D_x \; + \; D_{x+1} \; + \; D_{x+2} \; + \; D_{x+3} \; + \; ... \; + \; D_\omega \; = \; \sum_{i=x}^{\omega} D_i$$

Então, utilizando tais relações, chegamos a:

$$D_x.\ddot{a}_x \; = \; D_x.R \; + \; D_{x+1}.R \; + \; D_{x+2}.R \; + \; D_{x+3}.R \; + \; ... \; + \; D_\omega.R \; \Rightarrow$$
$$D_x.\ddot{a}_x \; = \; [D_x \; + \; D_{x+1} \; + \; D_{x+2} \; + \; D_{x+3} \; + \; ... \; + \; D_\omega] \; . \; R \; \Rightarrow$$
$$D_x.\ddot{a}_x \; = \; N_x \; . \; R$$

E assim:

$$\ddot{a}_x \; = \; \frac{N_x}{D_x} \; . \; R \tag{5.14}$$

Para o caso de o segurado optar por receber uma renda imediata, vitalícia e antecipada.

Por exemplo, caso uma pessoa hoje com 35 anos de idade resolva fazer um seguro de vida com cobertura por sobrevivência de modo que receba R$ 1.500,00 da seguradora no início de cada ano da contratação até o fim de sua vida, quanto deveria pagar de prêmio único hoje à seguradora? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.

Antes de iniciar a resolução do casos de rendas é sempre importante realizar a classificação das mesmas. Nesse caso, como o segurado decide por receber suas rendas no início do ano, a

partir da contratação e até o fim da vida trata-se de uma renda antecipada imediata vitalícia e, logo, podemos utilizar a relação obtida acima.
Assim temos:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \frac{N_x}{D_x}\,.\,R \Rightarrow\\ \ddot{a}_{35} &= \frac{N_{35}}{D_{35}}\,.\,1500\end{aligned}$$

Agora, obtendo os valores de D_{35} e de N_{35} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. vem:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{35} &= \frac{204.653,51}{12.735,88}\,.\,1500 \Rightarrow\\ \ddot{a}_{35} &= 16,06905.\,1500 \Rightarrow\\ \ddot{a}_{35} &\approx 24103,58\end{aligned}$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 35 anos de idade possa receber de uma seguradora no início de cada ano a partir da contratação de um seguro por sobrevivência até o fim de sua vida uma renda de R$ 1.500,00 anuais ela deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 24.103,58.
Esse valor a princípio pode parecer alto quando o comparamos com o valor de cada renda anual que será recebida pelo segurado, mas os dados da tábua de sobrevivência utilizada pela seguradora indicam que uma pessoa com 35 anos provavelmente ainda receberá muitas rendas anuais antes de vir a falecer e é exatamente essa alta probabilidade de sobrevivência a um longo período de anos que estão por vir (probabilidades essas que estão englobadas nos valores de D_x e N_x utilizados acima) que elevam o valor do prêmio único a ser pago pelo segurado na ocasião da contratação. Mesmo ele podendo vir a falecer logo em seguida à contratação do seguro, a seguradora não pode cobrar um valor de prêmio menor porque os dados existentes na tábua de sobrevivência utilizada indicam que essa morte breve tem uma probabilidade muito pequena de ocorrer. De fato, se utilizarmos as expressões apresentadas anteriormente podemos verificar que a probabilidade de que alguém com 35 anos de idade morra antes de completar 50 anos é menor que 2,5
No entanto, esse é apenas um dos casos possíveis de escolha de rendas por parte do segurado na contratação de um seguro vida com cobertura por sobrevivência. Veremos abaixo como obter o valor do prêmio único para os outros sete possíveis casos que podem ser escolhidos pelo segurado.

No caso de uma **renda imediata postecipada vitalícia** é utilizado o símbolo a_x para o valor do prêmio único a ser pago. Nesse caso, no momento da contratação, temos os seguintes capitais equivalentes:

Receita: $l_x.a_x$
Despesa: $l_{x+1}.v.R \ + \ l_{x+2}.v^2.R \ + \ l_{x+3}.v^3.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^{\omega-x}.R$

No presente caso o segurado, então com x anos, realiza o pagamento do prêmio a_x e somente no final do primeiro ano recebe da seguradora a primeira renda R. Isso se deve ao fato da renda que está sendo considerada aqui ser imediata e postecipada.
Como devemos ter:

$$Receitas \ = \ Despesas$$

Então:

$$l_x.a_x \ = \ l_{x+1}.v.R \ + \ l_{x+2}.v^2.R \ + \ l_{x+3}.v^3.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^{\omega-x}.R$$

Multiplicando ambos os lados por v^x e usando as relações de comutação abordadas anteriormente teremos:

$$\begin{aligned}
l_x.v^x.a_x \ &= \ l_{x+1}.v.v^x.R \ + \ l_{x+2}.v^2.v^x.R \ + \ l_{x+3}.v^3.v^x.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^{\omega-x}.v^x.R \ \Rightarrow \\
l_x.v^x.a_x \ &= \ l_{x+1}.v^{x+1}.R \ + \ l_{x+2}.v^{x+2}.R \ + \ l_{x+3}.v^{x+3}.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^\omega.R \ \Rightarrow \\
D_x.a_x \ &= \ D_{x+1}.R \ + \ D_{x+2}.R \ + \ D_{x+3}.R \ + \ ... \ + \ D_\omega.R \ \Rightarrow \\
D_x.a_x \ &= \ [D_{x+1} \ + \ D_{x+2} \ + \ D_{x+3} \ + \ ... \ + \ D_\omega] \ . \ R \ \Rightarrow \\
D_x.a_x \ &= \ N_{x+1} \ . \ R
\end{aligned}$$

E assim:

$$a_x \ = \ \frac{N_{x+1}}{D_x} \ . \ R \tag{5.15}$$

Para o caso de o segurado optar por receber uma renda imediata, vitalícia e postecipada. Ou seja, comparado com o caso anterior da renda antecipada a única diferença aparece no numerador da expressão final.
Como mencionado anteriormente, somente utilizando as relações de comutação vamos entendendo o significado dos nomes atribuídos às mesmas.

Por exemplo, caso uma pessoa hoje com 35 anos de idade resolva fazer um seguro de vida com cobertura por sobrevivência de modo que receba R$ 1.500,00 da seguradora no final de cada ano da contratação até o fim de sua vida, quanto deveria pagar de prêmio único hoje à seguradora? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a. *(Vamos utilizar para o caso das rendas por sobrevivência exemplos com um segurado da mesma idade a fim de comparar, no final, o efeito das características das rendas na determinação do valor do prêmio único a ser pago pelo mesmo).*

Nesse caso, como o segurado decide por receber suas rendas no final do ano, a partir da contratação e até o fim da vida trata-se de uma renda postecipada imediata vitalícia e, logo, utilizamos a última relação obtida.
Assim temos:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \,.\, R \Rightarrow$$
$$a_{35} = \frac{N_{36}}{D_{35}} \,.\, 1500$$

Agora, obtendo os valores de D_{35} e de N_{36} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. vem:

$$a_{35} = \frac{191.917,63}{12.735,88} \,.\, 10000 \Rightarrow$$
$$a_{35} = 15,06905.\ 1500 \Rightarrow$$
$$a_{35} \approx 22603,58$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 35 anos de idade possa receber de uma seguradora no final de cada ano a partir da contratação de um seguro por sobrevivência até o fim de sua vida uma renda de R$ 1.500,00 anuais ela deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 22.603,58.
Esse valor é inferior ao pago no caso postecipado pois, aqui, a seguradora começa a pagar o segurado um ano mais tarde e essa diferença no momento de início de recebimento das rendas é a responsável por tornar o valor do prêmio único no caso postecipado inferior ao do caso em que a renda é antecipada.

No caso de uma **renda imediata antecipada temporária** é utilizado o símbolo $_{/n}\ddot{a}_x$ para o valor do prêmio único a ser pago. Aqui n é o número de anos pelos quais o segurado receberá a renda já que essa não será mais recebida pelo mesmo até o fim de sua vida. Nesse caso, no momento da contratação, temos os seguintes capitais equivalentes:

Receita: $l_x \cdot {}_{/n}\ddot{a}_x$

Despesa: $l_x.R \; + \; l_{x+1}.v.R \; + \; l_{x+2}.v^2.R \; + \; l_{x+3}.v^3.R \; + \; ... \; + \; l_{x+n-1}.v^{n-1}.R$

No presente caso o segurado, então com x anos, realiza o pagamento do prêmio ${}_{/n}\ddot{a}_x$ e nesse mesmo momento já recebe da seguradora a primeira renda R. Isso se deve ao fato da renda que está sendo considerada aqui ser imediata e antecipada.
Como devemos ter:

$$Receitas \; = \; Despesas$$

Então:

$$l_x \cdot {}_{/n}\ddot{a}_x \; = \; l_x.R \; + \; l_{x+1}.v.R \; + \; l_{x+2}.v^2.R \; + \; l_{x+3}.v^3.R \; + \; ... \; + \; l_{x+n-1}.v^{n-1}.R$$

Multiplicando ambos os lados por v^x e usando as relações de comutação abordadas anteriormente teremos:

$$\begin{aligned}
l_x.v^x \cdot {}_{/n}\ddot{a}_x \; &= \; l_x.v^x.R + l_{x+1}.v.v^x.R + l_{x+2}.v^2.v^x.R + l_{x+3}.v^3.v^x.R + ... + l_{x+n-1}.v^{n-1}.v^x.R \; \Rightarrow \\
l_x.v^x \cdot {}_{/n}\ddot{a}_x \; &= \; l_x.v^x.R + l_{x+1}.v^{x+1}.R + l_{x+2}.v^{x+2}.R + l_{x+3}.v^{x+3}.R + ... + l_{x+n-1}.v^{x+n-1}.R \; \Rightarrow \\
D_x \cdot {}_{/n}\ddot{a}_x \; &= \; D_x.R \; + \; D_{x+1}.R \; + \; D_{x+2}.R \; + \; D_{x+3}.R \; + \; ... \; + \; D_{x+n-1}.R \; \Rightarrow \\
D_x \cdot {}_{/n}\ddot{a}_x \; &= \; [D_x \; + \; D_{x+1} \; + \; D_{x+2} \; + \; D_{x+3} \; + \; ... \; + \; D_{x+n-1}].R
\end{aligned}$$

Não há nenhuma relação de comutação que forneça diretamente a soma entre colchetes na direita. No entanto, considerando que $(x + n - 1) < \omega$ pois, caso contrário a renda seria vitalícia e não temporária, podemos fazer a seguinte observação a partir das definições das relações de comutação que vimos antes:

$$\begin{aligned}
N_x \; &= \; D_x \; + \; D_{x+1} \; + \; D_{x+2} \; + \; D_{x+3} \; + \; ... \; + \; D_\omega \; \Rightarrow \\
N_x \; &= \; D_x \; + \; D_{x+1} \; + \; D_{x+2} \; + \; D_{x+3} \; + \; ... \; + \; D_{x+n-1} \; + \; D_{x+n} \; + \; D_{x+n+1} \; + \; ... \; + \; D_\omega \; \Rightarrow \\
N_x \; &= \; D_x \; + \; D_{x+1} \; + \; D_{x+2} \; + \; D_{x+3} \; + \; ... \; + \; D_{x+n-1} \; + \; N_{x+n} \; \Rightarrow \\
D_x \; + \; D_{x+1} \; + \; D_{x+2} \; + \; D_{x+3} \; + \; ... \; + \; D_{x+n-1} \; &= \; N_x \; - \; N_{x+n}
\end{aligned}$$

Assim, como é mais simples consultar dois valores nas tábuas de comutação ao invés de uma quantidade não previamente determinada deles fazemos a substituição da soma entre colchetes obtendo:

$$D_x . {}_{/n}\ddot{a}_x \;=\; [N_x \;-\; N_{x+n}].R$$

E assim:

$$_{/n}\ddot{a}_x \;=\; \frac{N_x \;-\; N_{x+n}}{D_x}\;.\;R \tag{5.16}$$

Para o caso de o segurado optar por receber uma renda imediata, temporária e antecipada.

Por exemplo, caso uma pessoa hoje com 35 anos de idade resolva fazer um seguro de vida com cobertura por sobrevivência de modo que receba R$ 1.500,00 da seguradora no início de cada ano da contratação até daqui a 25 anos, quanto deveria pagar de prêmio único hoje à seguradora? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.

Nesse caso, como o segurado decide por receber suas rendas no início do ano, a partir da contratação e durante 25 anos trata-se de uma renda antecipada imediata temporária e, logo, utilizamos a última relação obtida.
Assim temos:

$$_{/n}\ddot{a}_x \;=\; \frac{N_x \;-\; N_{x+n}}{D_x}\;.\;R \;\Rightarrow$$
$$_{/25}\ddot{a}_{35} \;=\; \frac{N_{35} \;-\; N_{60}}{D_{35}}.\;1500$$

Agora, obtendo os valores de D_{35}, N_{35} e de N_{60} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. vem:

$$_{/25}\ddot{a}_{35} \;=\; \frac{204.653,51 \;-\; 34.547,44}{12.735,88}.\;1500$$
$$_{/25}\ddot{a}_{35} \;=\; \frac{170.106,07}{12.735,88}\;.\;1500 \;\Rightarrow$$
$$_{/25}\ddot{a}_{35} \;=\; 13,35644.\;1500 \;\Rightarrow$$
$$_{/25}\ddot{a}_{35} \;\approx\; 20034,66$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 35 anos de idade possa receber de uma seguradora no início de cada ano por 25 anos a partir da contratação de um seguro por sobrevivência uma renda de R$ 1.500,00 anuais ela deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor

de aproximadamente R$ 20.034,66.
Comparado com o valor do prêmio para a renda antecipada e vitalícia, que foi o primeiro caso de rendas analisado, esse valor é menor. O motivo para isso é que agora a seguradora sabe exatamente quando começa e quando terminará de pagar as rendas ao segurado e, para a seguradora, o período de contratação escolhido por ele gerará menos custos à mesma do que se ele optasse por uma renda vitalícia. Como o mais provável é que ela tenha uma despesa menor ela precisará de uma receita menor para cobrir essa despesa e, logo, o valor do prêmio que o contratante precisa pagar à mesma para adquirir o seguro também será menor do que o do caso vitalício.

No caso de uma **renda imediata postecipada temporária** é utilizado o símbolo $_{/n}a_x$ para o valor do prêmio único a ser pago. Nesse caso, no momento da contratação, temos os seguintes capitais equivalentes:

Receita: $l_x . _{/n}a_x$
Despesa: $l_{x+1}.v.R \ + \ l_{x+2}.v^2.R \ + \ l_{x+3}.v^3.R \ + \ ... \ + \ l_{x+n}.v^n.R$

No presente caso o segurado, então com x anos, realiza o pagamento do prêmio $_{/n}a_x$ e ao final do primeiro ano recebe da seguradora a primeira renda R. Isso se deve ao fato da renda que está sendo considerada aqui ser imediata e postecipada.
Como devemos ter:

$$Receitas \ = \ Despesas$$

Então:

$$l_x . _{/n}a_x \ = \ l_{x+1}.v.R \ + \ l_{x+2}.v^2.R \ + \ l_{x+3}.v^3.R \ + \ ... \ + \ l_{x+n}.v^n.R$$

Multiplicando ambos os lados por v^x e usando as relações de comutação abordadas anteriormente teremos:

$$l_x.v^x . _{/n}a_x \ = \ l_{x+1}.v.v^x.R \ + \ l_{x+2}.v^2.v^x.R \ + \ l_{x+3}.v^3.v^x.R \ + \ ... \ + \ l_{x+n}.v^n.v^x.R \ \Rightarrow$$
$$l_x.v^x . _{/n}a_x \ = \ l_{x+1}.v^{x+1}.R \ + \ l_{x+2}.v^{x+2}.R \ + \ l_{x+3}.v^{x+3}.R \ + \ ... \ + \ l_{x+n}.v^{x+n}.R \ \Rightarrow$$
$$D_x . _{/n}a_x \ = \ D_{x+1}.R \ + \ D_{x+2}.R \ + \ D_{x+3}.R \ + \ ... \ + \ D_{x+n}.R \ \Rightarrow$$
$$D_x . _{/n}a_x \ = \ [D_{x+1} \ + \ D_{x+2} \ + \ D_{x+3} \ + \ ... \ + \ D_{x+n}].R$$

Novamente não há nenhuma relação de comutação que forneça diretamente a soma entre colchetes na direita. No entanto, considerando que $(x+n) < \omega$ pois, caso contrário a renda seria vitalícia e não temporária, podemos observar o seguinte a partir das definições das relações de comutação:

$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{\omega} \Rightarrow$$
$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{x+n-1} + D_{x+n} + D_{x+n+1} + ... + D_{\omega} \Rightarrow$$
$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{x+n} + N_{x+n+1} \Rightarrow$$
$$D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{x+n} = N_{x+1} - N_{x+n+1}$$

Assim, fazendo a devida substituição:

$$D_x \cdot {}_{/n}a_x = [N_{x+1} - N_{x+n+1}].R$$

E assim:

$${}_{/n}a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \, . \, R \tag{5.17}$$

Para o caso de o segurado optar por receber uma renda imediata, temporária e postecipada.

Por exemplo, caso uma pessoa hoje com 35 anos de idade resolva fazer um seguro de vida com cobertura por sobrevivência de modo que receba R$ 1.500,00 da seguradora no final de cada ano da contratação até daqui a 25 anos, quanto deveria pagar de prêmio único hoje à seguradora? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.

Nesse caso, como o segurado decide por receber suas rendas no final do ano, a partir da contratação e durante 25 anos trata-se de uma renda postecipada imediata temporária e, logo, utilizamos a última relação obtida.
Assim temos:

$${}_{/n}a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \, . \, R \Rightarrow$$
$${}_{/25}a_{35} = \frac{N_{36} - N_{61}}{D_{35}} . \, 1500$$

Agora, obtendo os valores de D_{35}, N_{36} e de N_{61} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. vem:

$$
\begin{aligned}
{}_{/25}\ddot{a}_{35} &= \frac{191.917,63 \ - \ 31.788,50}{12.735,88}.\ 1500 \\
{}_{/25}\ddot{a}_{35} &= \frac{160.129,13}{12.735,88}\ .\ 1500 \ \Rightarrow \\
{}_{/25}\ddot{a}_{35} &= 12,57307.\ 1500 \ \Rightarrow \\
{}_{/25}\ddot{a}_{35} &\approx 18859,61
\end{aligned}
$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 35 anos de idade possa receber de uma seguradora no final de cada ano por 25 anos a partir da contratação de um seguro por sobrevivência uma renda de R$ 1.500,00 anuais ela deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 18.859,61.
A exemplo do que foi obtido no caso vitalício, o valor do prêmio a ser pago no caso de uma renda temporária postecipada também é menor do que aquele pago no caso de uma renda temporária antecipada. O motivo é o mesmo que foi verificado anteriormente, como as rendas postecipadas começam a ser pagas pela seguradora depois das antecipadas isso reduz levemente sua probabilidade de ter que efetuar todos os pagamentos ao segurado e, logo, o valor do prêmio pago pelo mesmo na contratação do seguro também torna-se menor.

No caso de uma **renda diferida antecipada temporária** é utilizado o símbolo ${}_{m/n}\ddot{a}_x$ para o valor do prêmio único a ser pago. Aqui n é o número de anos pelos quais o segurado receberá a renda e m é o número de anos que o mesmo deseja aguardar para que comece a recebê-la chamado de período de diferimento. Nesse caso, no momento da contratação, temos os seguintes capitais equivalentes:

Receita: $l_{x} \cdot {}_{m/n}\ddot{a}_x$
Despesa: $l_{x+m}.v^{m}.R \ + \ l_{x+m+1}.v^{m+1}.R \ + \ l_{x+m+2}.v^{m+2}.R \ + \ l_{x+m+3}.v^{m+3}.R \ + \ ... \ + \ l_{x+m+n-1}.v^{m+n-1}.R$

No presente caso o segurado, então com x anos, realiza o pagamento do prêmio ${}_{m/n}\ddot{a}_x$ e aguarda m anos para que possa receber da seguradora a primeira renda R. Isso se deve ao fato da renda que está sendo considerada aqui ser diferida e antecipada.
Como devemos ter:

$$Receitas \ = \ Despesas$$

Então:

$$l_{x} \cdot {}_{m/n}\ddot{a}_x \ =$$
$$l_{x+m}.v^m.R + l_{x+m+1}.v^{m+1}.R + l_{x+m+2}.v^{m+2}.R + l_{x+m+3}.v^{m+3}.R + ... + l_{x+m+n-1}.v^{m+n-1}.R$$

Multiplicando ambos os lados por v^x e usando as relações de comutação abordadas anteriormente teremos:

$$l_x.v^x \cdot {}_{m/n}\ddot{a}_x \ = \ l_{x+m}.v^m.v^x.R \ + \ l_{x+m+1}.v^{m+1}.v^x.R \ + \ l_{x+m+2}.v^{m+2}.v^x.R \ +$$
$$l_{x+m+3}.v^{m+3}.v^x.R \ + \ ... \ + \ l_{x+m+n-1}.v^{m+n-1}.v^x.R \ \Rightarrow$$
$$l_x.v^x \cdot {}_{m/n}\ddot{a}_x \ = \ l_{m+x}.v^{m+x}.R \ + \ l_{m+x+1}.v^{m+x+1}.R \ + \ l_{m+x+2}.v^{m+x+2}.R \ +$$
$$l_{m+x+3}.v^{m+x+3}.R \ + \ ... \ + \ l_{m+x+n-1}.v^{m+x+n-1}.R \ \Rightarrow$$
$$D_x \cdot {}_{m/n}\ddot{a}_x \ = \ D_{m+x}.R \ + \ D_{m+x+1}.R \ + \ D_{m+x+2}.R \ + \ D_{m+x+3}.R \ + \ ... \ + \ D_{m+x+n-1}.R \ \Rightarrow$$
$$D_x \cdot {}_{m/n}\ddot{a}_x \ = \ [D_{m+x} \ + \ D_{m+x+1} \ + \ D_{m+x+2} \ + \ D_{m+x+3} \ + \ ... \ + \ D_{m+x+n-1}].R$$

Aqui também vamos considerar que $(m + x + n - 1) < \omega$ pois, caso contrário a renda seria vitalícia e não temporária. Com isso observamos o seguinte:

$$N_{m+x} \ = \ D_{m+x} \ + \ D_{m+x+1} \ + \ D_{m+x+2} \ + \ D_{m+x+3} \ + \ ... \ + \ D_\omega \ \Rightarrow$$
$$N_{m+x} \ = \ D_{m+x} \ + \ D_{m+x+1} \ + \ D_{m+x+2} \ + \ D_{m+x+3} \ + \ ... \ + \ D_{m+x+n-1} \ + \ D_{m+x+n} \ +$$
$$D_{m+x+n+1} \ + \ ... \ + \ D_\omega \ \Rightarrow$$
$$N_{m+x} \ = \ D_{m+x} \ + \ D_{m+x+1} \ + \ D_{m+x+2} \ + \ D_{m+x+3} \ + \ ... \ + \ D_{m+x+n-1} \ + \ N_{m+x+n} \ \Rightarrow$$
$$D_{m+x} \ + \ D_{m+x+1} \ + \ D_{m+x+2} \ + \ D_{m+x+3} \ + \ ... \ + \ D_{m+x+n-1} \ = \ N_{m+x} \ - \ N_{m+x+n}$$

Substituindo na expressão anterior vem:

$$D_x \cdot {}_{m/n}\ddot{a}_x \ = \ [N_{m+x} \ - \ N_{m+x+n}].R$$

Assim:

$${}_{m/n}\ddot{a}_x \ = \ \frac{N_{m+x} \ - \ N_{m+x+n}}{D_x} \ . \ R \tag{5.18}$$

Para o caso de o segurado optar por receber uma renda diferida, temporária e antecipada. É interessante observar que mesmo num caso a princípio mais complicado que os demais, a única diferença na expressão final para obtenção do valor do prêmio a ser pago pelo contratante do seguro aparece apenas no denominador. Isso se dá graças à simplificação oriunda das relações de comutação. Naturalmente, essas relações precisaram de muito tempo de uso e desenvolvimento para que pudessem proporcionar à matemática atuarial as facilidades que hoje obtemos ao utilizá-las.

Por exemplo, caso uma pessoa hoje com 35 anos de idade resolva fazer um seguro de vida com cobertura por sobrevivência de modo que daqui a 15 anos receba R$ 1.500,00 da seguradora no início de cada ano durante 20 anos, quanto deveria pagar de prêmio único hoje à seguradora? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.

Nesse caso, como o segurado decide por receber suas rendas no início do ano, 15 anos depois da contratação e durante 20 anos trata-se de uma renda antecipada diferida temporária e, logo, utilizamos a última relação obtida.
Assim temos:

$$
\begin{aligned}
{}_{m/n}\ddot{a}_x &= \frac{N_{m+x} - N_{m+x+n}}{D_x} . R \Rightarrow \\
{}_{15/20}\ddot{a}_{35} &= \frac{N_{50} - N_{70}}{D_{35}} . 1500
\end{aligned}
$$

Agora, obtendo os valores de D_{35}, N_{50} e de N_{70} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. vem:

$$
\begin{aligned}
{}_{15/20}\ddot{a}_{35} &= \frac{74.373,86 - 13.785,08}{12.735,88} . 1500 \\
{}_{15/20}\ddot{a}_{35} &= \frac{60.588,78}{12.735,88} . 1500 \Rightarrow \\
{}_{15/20}\ddot{a}_{35} &= 4,75733 . 1500 \Rightarrow \\
{}_{15/20}\ddot{a}_{35} &\approx 7136,00
\end{aligned}
$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 35 anos de idade possa receber de uma seguradora no início de cada ano por 20 anos a partir de 15 anos após a contratação de um seguro por sobrevivência uma renda de R$ 1.500,00 anuais ela deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 7.136,00.
Esse é o menor valor que obtivemos até agora para o valor do prêmio a ser pago pelo contratante de uma renda por sobrevivência e a diferença em comparação com os demais casos analisados até agora é devida exatamente ao momento em que o mesmo pretende iniciar o seu recebimento. Mesmo o que o segurado receba sua renda por 20 anos, ele iniciará o recebimento dela apenas quando tiver 50 anos de idade. Desse modo, como a probabilidade de alguém falecer entre 50 e 70 anos de idade é bem maior que a probabilidade dessa mesma

pessoa vir a falecer entre 35 e 60 anos de idade[7] e por ser o valor do prêmio a ser pago pelo contratante diretamente influenciado por essa probabilidade, ele torna-se menor pois, a seguradora tem aqui uma maior chance de não precisar ter que pagar a renda ao segurado por todo o período contratado pelo mesmo.

No caso de uma **renda diferida postecipada temporária** é utilizado o símbolo $_{m/n}a_x$ para o valor do prêmio único a ser pago. Aqui também n é o número de anos pelos quais o segurado receberá a renda e m é o número de anos que o mesmo deseja aguardar para que comece a recebê-la ou período de diferimento. Nesse caso, no momento da contratação, temos os seguintes capitais equivalentes:

Receita: $l_x \cdot {}_{m/n}a_x$
Despesa: $l_{m+x+1}.v^{m+1}.R \; + \; l_{m+x+2}.v^{m+2}.R \; + \; l_{m+x+3}.v^{m+3}.R \; + \; ... \; + \; l_{m+x+n}.v^{m+n}.R$

No presente caso o segurado, então com x anos, realiza o pagamento do prêmio $_{m/n}a_x$ e aguarda m+1 anos para que possa receber da seguradora a primeira renda R. Isso se deve ao fato da renda que está sendo considerada aqui ser diferida e postecipada.
Como devemos ter:

$$Receitas \; = \; Despesas$$

Então:

$$l_x \cdot {}_{m/n}a_x \; = \; l_{m+x+1}.v^{m+1}.R \; + \; l_{m+x+2}.v^{m+2}.R \; + \; l_{m+x+3}.v^{m+3}.R \; + \; ... \; + \; l_{m+x+n}.v^{m+n}.R$$

Multiplicando ambos os lados por v^x e usando as relações de comutação abordadas anteriormente teremos:

$$l_x.v^x \cdot {}_{m/n}a_x \; =$$
$$l_{m+x+1}.v^{m+1}.v^x.R \; + \; l_{m+x+2}.v^{m+2}.v^x.R \; + \; l_{m+x+3}.v^{m+3}.v^x.R \; + \; ... \; + \; l_{m+x+n}.v^{m+n}.v^x.R \; \Rightarrow$$
$$l_x.v^x \cdot {}_{m/n}a_x \; =$$
$$l_{m+x+1}.v^{m+x+1}.R \; + \; l_{m+x+2}.v^{m+x+2}.R \; + \; l_{m+x+3}.v^{m+x+3}.R \; + \; ... \; + \; l_{m+x+n}.v^{m+x+n}.R \; \Rightarrow$$

[7] De fato, utilizando as relações definidas acima temos que $_{/25}q_{35} \approx 7,03\%$ enquanto $_{/20}q_{50} \approx 14,90\%$. Ou seja, é duas vezes mais provável uma pessoa vir a falecer entre 50 e 70 anos de idade do que entre 35 e 60 anos de idade, mesmo que esse segundo período seja maior que o primeiro.

$$D_{x} \cdot {}_{m/n}a_x = D_{m+x+1}.R + D_{m+x+2}.R + D_{m+x+3}.R + ... + D_{m+x+n}.R \Rightarrow$$
$$D_{x} \cdot {}_{m/n}a_x = [D_{m+x+1} + D_{m+x+2} + D_{m+x+3} + ... + D_{m+x+n}].R$$

Considerando que $(m+x+n) < \omega$ pois, caso contrário a renda seria vitalícia e não temporária, vem:

$$N_{m+x+1} = D_{m+x+1} + D_{m+x+2} + D_{m+x+3} + ... + D_{\omega} \Rightarrow$$
$$N_{m+x+1} =$$
$$D_{m+x+1} + D_{m+x+2} + D_{m+x+3} + ... + D_{m+x+n-1} + D_{m+x+n} + D_{m+x+n+1} + ... + D_{\omega} \Rightarrow$$
$$N_{m+x+1} = D_{m+x+1} + D_{m+x+2} + D_{m+x+3} + ... + D_{m+x+n} + N_{m+x+n+1} \Rightarrow$$
$$D_{m+x+1} + D_{m+x+2} + D_{m+x+3} + ... + D_{m+x+n} = N_{m+x+1} - N_{m+x+n+1}$$

Fazendo a devida substituição:

$$D_{x} \cdot {}_{m/n}a_x = [N_{m+x+1} - N_{m+x+n+1}].R$$

Assim:

$${}_{m/n}a_x = \frac{N_{m+x+1} - N_{m+x+n+1}}{D_x} \,.\, R \tag{5.19}$$

Para o caso de o segurado optar por receber uma renda diferida, temporária e postecipada.

Por exemplo, caso uma pessoa hoje com 35 anos de idade resolva fazer um seguro de vida com cobertura por sobrevivência de modo que daqui a 15 anos receba R$ 1.500,00 da seguradora no final de cada ano durante 20 anos, quanto deveria pagar de prêmio único hoje à seguradora? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.

Nesse caso, como o segurado decide por receber suas rendas no final do ano, 15 anos a partir da contratação e durante 20 anos trata-se de uma renda postecipada diferida temporária e, logo, utilizamos a última relação obtida.
Assim temos:

$${}_{m/n}a_x = \frac{N_{m+x+1} - N_{m+x+n+1}}{D_x} \,.\, R \Rightarrow$$
$${}_{15/20}a_{35} = \frac{N_{51} - N_{71}}{D_{35}}.\, 1500$$

Agora, obtendo os valores de D_{35}, N_{51} e de N_{71} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. vem:

$$ {}_{15/20}\ddot{a}_{35} \;=\; \frac{69.182,42 \;-\; 12.407,49}{12.735,88}.\;1500 $$
$$ {}_{/25}\ddot{a}_{35} \;=\; \frac{56.774,93}{12.735,88}\;.\;1500 \;\Rightarrow $$
$$ {}_{/25}\ddot{a}_{35} \;=\; 4,45787.\;1500 \;\Rightarrow $$
$$ {}_{/25}\ddot{a}_{35} \;\approx\; 6686,81 $$

Assim, para que uma pessoa hoje com 35 anos de idade possa receber de uma seguradora no final de cada ano por 20 anos a partir de 15 anos após a contratação de um seguro por sobrevivência uma renda de R$ 1.500,00 anuais ela deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 6.686,81. Valor esse que é ainda menor que o encontrado no caso anterior, o que se deve, como discutido anteriormente, ao fato dessa renda ser postecipada.
Vejamos agora os últimos dois casos que dizem respeito às rendas por sobrevivência: as rendas diferidas vitalícias. Nesses casos o contratante efetua o pagamento do prêmio único para que possa, após a passagem de um determinado período de diferimento, receber da seguradora uma renda anual até o fim de sua vida.

No caso de uma **renda diferida antecipada vitalícia** é utilizado o símbolo ${}_{m/}\ddot{a}_x$ para o valor do prêmio único a ser pago. Onde m é o período de diferimento, ou seja, o número de anos que o segurado deseja aguardar para que comece a recebê-la. Nesse caso, no momento da contratação, temos os seguintes capitais equivalentes:

Receita: $l_x \cdot {}_{m/}\ddot{a}_x$
Despesa: $l_{x+m}.v^m.R + l_{x+m+1}.v^{m+1}.R + l_{x+m+2}.v^{m+2}.R + l_{x+m+3}.v^{m+3}.R + ... + l_\omega.v^{\omega-x}.R$

No presente caso o segurado, então com x anos, realiza o pagamento do prêmio ${}_{m/}\ddot{a}_x$ e aguarda m anos para que possa receber da seguradora a primeira renda R. Isso se deve ao fato da renda que está sendo considerada aqui ser diferida e antecipada.
Como devemos ter:

$$ Receitas \;=\; Despesas $$

Então:

$$ l_x \cdot {}_{m/}\ddot{a}_x \;=\; l_{x+m}.v^m.R + l_{x+m+1}.v^{m+1}.R + l_{x+m+2}.v^{m+2}.R + l_{x+m+3}.v^{m+3}.R + ... + l_\omega.v^{\omega-x}.R $$

Multiplicando ambos os lados por v^x e usando as relações de comutação abordadas anteriormente teremos:

$$l_x.v^x._{m/}\ddot{a}_x \;=\; l_{x+m}.v^m.v^x.R \;+\; l_{x+m+1}.v^{m+1}.v^x.R \;+\; l_{x+m+2}.v^{m+2}.v^x.R \;+$$
$$l_{x+m+3}.v^{m+3}.v^x.R \;+\; ... \;+\; l_\omega.v^{\omega-x}.v^x.R \;\Rightarrow$$
$$l_x.v^x._{m/}\ddot{a}_x \;=$$
$$l_{m+x}.v^{m+x}.R + l_{m+x+1}.v^{m+x+1}.R + l_{m+x+2}.v^{m+x+2}.R + l_{m+x+3}.v^{m+x+3}.R + ... + l_\omega.v^\omega.R \Rightarrow$$
$$D_{x}\cdot{}_{m/}\ddot{a}_x \;=\; D_{m+x}.R \;+\; D_{m+x+1}.R \;+\; D_{m+x+2}.R \;+\; D_{m+x+3}.R \;+\; ... \;+\; D_\omega.R \;\Rightarrow$$
$$D_{x}\cdot{}_{m/}\ddot{a}_x \;=\; [D_{m+x} \;+\; D_{m+x+1} \;+\; D_{m+x+2} \;+\; D_{m+x+3} \;+\; ... \;+\; D_\omega].R$$

Como a soma entre colchetes vai de m+n até ω temos:

$$D_{x}\cdot{}_{m/}\ddot{a}_x \;=\; N_{m+x}\;.\;R$$

E assim:

$$_{m/}\ddot{a}_x \;=\; \frac{N_{m+x}}{D_x}\;.\;R \tag{5.20}$$

Para o caso de o segurado optar por receber uma renda diferida, vitalícia e antecipada.

Por exemplo, caso uma pessoa hoje com 35 anos de idade resolva fazer um seguro de vida com cobertura por sobrevivência de modo que daqui a 25 anos passe a receber R$ 1.500,00 da seguradora no início de cada ano até o fim de sua vida, quanto deveria pagar de prêmio único hoje à seguradora? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.

Nesse caso, como o segurado decide por receber suas rendas no início do ano, 25 anos depois da contratação e até o seu falecimento trata-se de uma renda antecipada diferida vitalícia e, logo, utilizamos a última relação obtida.
Assim temos:

$$_{m/}\ddot{a}_x \;=\; \frac{N_{m+x}}{D_x}\;.\;R \;\Rightarrow$$
$$_{25/}\ddot{a}_{35} \;=\; \frac{N_{60}}{D_{35}}.\;1500$$

Agora, obtendo os valores de D_{35} e de N_{60} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. vem:

$$
\begin{aligned}
{}_{25/}\ddot{a}_{35} &= \frac{34.547,44}{12.735,88}.\ 1500 \ \Rightarrow \\
{}_{25/}\ddot{a}_{35} &= 2,71261.\ 1500 \ \Rightarrow \\
{}_{15/20}\ddot{a}_{35} &\approx 4068,92
\end{aligned}
$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 35 anos de idade possa receber de uma seguradora no início de cada ano a partir de 25 anos após a contratação de um seguro por sobrevivência, ou seja, ao atingir 60 anos de idade até o fim de sua vida uma renda de R$ 1.500,00 anuais ela deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 4.068,92. Esse valor é ainda menor que os valores dos prêmios obtidos anteriormente nos casos das rendas diferidas temporárias, mesmo a renda sendo agora vitalícia. O motivo para isso é que para o presente caso o segurado só receberá as rendas contratadas da seguradora a partir dos 60 anos de idade. Como a probabilidade de morte do segurado aumenta com a idade do mesmo, a partir dos 60 anos de idade é maior a probabilidade de morte do mesmo e, logo, maior a probabilidade de a seguradora não pagar as rendas contratadas ou ainda, caso venha a pagá-las, que isso não seja feito por um período longo de tempo. Assim, essa redução na probabilidade das despesas da seguradora se traduz para o segurado numa redução do valor do prêmio a ser pago pelo mesmo à ela na ocasião da contratação das rendas por sobrevivência.

Como último caso possível para as rendas por sobrevivência temos o caso de uma **renda diferida postecipada vitalícia** para a qual é utilizado o símbolo ${}_{m/}a_x$ para o valor do prêmio único a ser pago. Onde m é o período de diferimento, ou seja, o número de anos que o segurado deseja aguardar para que comece a recebê-la. Nesse caso, no momento da contratação, temos os seguintes capitais equivalentes:

Receita: $l_x \cdot {}_{m/}a_x$
Despesa: $l_{x+m+1}.v^{m+1}.R \ + \ l_{x+m+2}.v^{m+2}.R \ + \ l_{x+m+3}.v^{m+3}.R \ + \ ... \ + \ l_{\omega}.v^{\omega-x}.R$

No presente caso o segurado, então com x anos, realiza o pagamento do prêmio ${}_{m/}a_x$ e aguarda m+1 anos para que possa receber da seguradora a primeira renda R. Isso se deve ao fato da renda que está sendo considerada aqui ser diferida e postecipada.
Como devemos ter:

$$Receitas \ = \ Despesas$$

Então:

$$l_{x \cdot m/}a_x \ = \ l_{x+m+1}.v^{m+1}.R \ + \ l_{x+m+2}.v^{m+2}.R \ + \ l_{x+m+3}.v^{m+3}.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^{\omega-x}.R$$

Multiplicando ambos os lados por v^x e usando as relações de comutação abordadas anteriormente teremos:

$$l_x.v^x{}_{\cdot m/}a_x \ =$$
$$l_{x+m+1}.v^{m+1}.v^x.R \ + \ l_{x+m+2}.v^{m+2}.v^x.R \ + \ l_{x+m+3}.v^{m+3}.v^x.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^{\omega-x}.v^x.R \ \Rightarrow$$
$$l_x.v^x{}_{\cdot m/}a_x \ = \ l_{m+x+1}.v^{m+x+1}.R \ + \ l_{m+x+2}.v^{m+x+2}.R \ + \ l_{m+x+3}.v^{m+x+3}.R \ + \ ... \ + \ l_\omega.v^\omega.R \ \Rightarrow$$
$$D_{x \cdot m/}a_x \ = \ D_{m+x+1}.R \ + \ D_{m+x+2}.R \ + \ D_{m+x+3}.R \ + \ ... \ + \ D_\omega.R \ \Rightarrow$$
$$D_{x \cdot m/}a_x \ = \ [D_{m+x+1} \ + \ D_{m+x+2} \ + \ D_{m+x+3} \ + \ ... \ + \ D_\omega].R$$

Como a soma entre colchetes vai de m+n+1 até ω temos:

$$D_{x \cdot m/}a_x \ = \ N_{m+x+1} \ . \ R$$

E assim:

$$_{m/}a_x \ = \ \frac{N_{m+x+1}}{D_x} \ . \ R \tag{5.21}$$

Para o caso de o segurado optar por receber uma renda diferida, vitalícia e postecipada.

Por exemplo, caso uma pessoa hoje com 35 anos de idade resolva fazer um seguro de vida com cobertura por sobrevivência de modo que daqui a 25 anos passe a receber R$ 1.500,00 da seguradora no final de cada ano até o fim de sua vida, quanto deveria pagar de prêmio único hoje à seguradora? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.

Nesse caso, como o segurado decide por receber suas rendas no final do ano, 25 anos depois da contratação e até o seu falecimento trata-se de uma renda postecipada diferida vitalícia e, logo, utilizamos a última relação obtida.
Assim temos:

$$_{m/}a_x \ = \ \frac{N_{m+x+1}}{D_x} \ . \ R \ \Rightarrow$$
$$_{25/}a_{35} \ = \ \frac{N_{61}}{D_{35}}. \ 1500$$

Agora, obtendo os valores de D_{35} e de N_{61} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. vem:

$$
\begin{aligned}
{}_{25/}a_{35} &= \frac{31.788,50}{12.735,88}.\ 1500 \Rightarrow \\
{}_{25/}\ddot{a}_{35} &= 2,49598.\ 1500 \Rightarrow \\
{}_{15/20}\ddot{a}_{35} &\approx 3743,97
\end{aligned}
$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 35 anos de idade possa receber de uma seguradora no final de cada ano a partir de 25 anos após a contratação de um seguro por sobrevivência, ou seja, ao atingir 60 anos de idade até o fim de sua vida uma renda postecipada de R$ 1.500,00 anuais ela deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 3.743,97. O valor encontrado aqui é ainda menor que o do último caso devido agora, além do diferimento, ainda existir sobre o valor do prêmio a ser pago pelo contratante o efeito da postecipação conforme abordado anteriormente.

Os valores dos prêmios para as oito situações distintas dos exemplos acima onde o segurado possui a mesma idade no momento da contratação não estão em ordem decrescente por acaso. Isso foi feito para que possa ser evidenciado junto aos alunos o efeito das probabilidades e da equivalência de capitais no cálculo do prêmio que deverá ser pago pelo segurado à seguradora para que possa receber a renda por sobrevivência.

> [...] o prêmio será maior na razão direta da certeza de pagamento por parte da seguradora [...] quanto mais tarde o segurado desejar receber, menos será a chance de conseguir, assim, a postecipação influirá de modo a diminuir o prêmio, uma vez que o segurado deseja o benefício mais tarde [...] o período de diferimento e a duração da temporariedade influem sobremaneira nos prêmios, permitindo que rendas temporárias percebam prêmios maiores que rendas vitalícias [...] a seguradora leva em consideração o fato de que sua probabilidade de honrar um compromisso com alguém, dos 50 aos 70 anos, é muito maior do que a partir dos 60 anos. (AZEVEDO[1], 2008, p. 215).

Isso porque os seguros de vida com cobertura por sobrevivência só serão recebidos pelos segurados (sob a forma de dote ou de rendas) caso os mesmos sobrevivam ao período contratado, ou seja, a seguradora só realiza o pagamento enquanto o segurado está vivo. Caso venha a falecer, os valores pagos pelo segurado (como prêmios) ficam para a seguradora e essa não precisa realizar nenhuma indenização aos beneficiários do segurado.

Caso o segurado deseje que seus beneficiários sejam indenizados se ele vier a falecer ele precisa contratar um seguro de vida com cobertura por risco de morte. Nos casos onde há cobertura por risco de morte o Capital Segurado será pago pela seguradora aos beneficiários do segurado, caso ele venha a falecer durante o período contratado. No entanto, os cálculos são outros conforme veremos na próxima seção.

5.6.3 Cálculo de prêmio único para seguro de vida com cobertura por falecimento

O seguro de vida com cobertura por falecimento ou seguro de vida com cobertura por risco de morte como também é conhecido é um tipo de seguro no qual o contratante realiza o pagamento de um prêmio para que, no caso de seu falecimento durante o período de cobertura, os beneficiários (indicados pelo mesmo) recebam um determinado Capital Segurado definido no momento da contratação do seguro. Quando o período de cobertura contratado pelo segurado é vitalício a despesa para a seguradora com o pagamento do Capital Segurado aos beneficiários é certa, mas como esse período de cobertura nem sempre é vitalício alguns detalhes surgem na determinação do valor do prêmio a ser pago pelo contratante e são esses detalhes que analisaremos a partir de agora a partir dos assuntos já abordados anteriormente.
Com o mesmo argumento utilizado anteriormente de que as receitas devem ser iguais às despesas (já que se trata de um seguro), comparadas na mesma data focal, para a seguradora, e lançando mão da Lei dos Grandes Números para que possamos utilizar as proporções e probabilidades estabelecidas na tábua biométrica que estamos utilizando, será possível encontrar expressões para o cálculo do prêmio único de um seguro de vida com cobertura por falecimento. O que muda quando comparado aos cálculos dos seguros de pessoas com cobertura por sobrevivência é que as receitas considerarão novamente o número de pessoas vivas na idade x do segurado, l_x, mas as despesas irão levar em conta agora o número de pessoas falecidas a partir da data de contratação do seguro $d_x, d_{x+1}, ..., d_{x+k}$ já que o Capital Segurado nesse caso será pago apenas aos beneficiários dos segurados que vierem a falecer.
Também nos casos de cobertura por falecimento os períodos de contratação do seguro por parte do segurado poderão ser vitalícios ou temporários e imediatos ou diferidos (para o caso desse tipo de seguro não faz sentido falar em antecipação ou postecipação). Investigaremos abaixo um exemplo de cada um dos quatro tipos possíveis a fim de identificar o efeito das probabilidades de falecimento e dos períodos de cobertura escolhidos pelo contratante na determinação do valor dos prêmios a serem pagos na ocasião da contratação desse tipo de seguro.

Iniciando pelo caso **imediato e vitalício**, também chamado de **Seguro Vida Inteira**, onde o prêmio único é simbolizado por A_x temos a seguinte situação:

Receita: $l_x.A_x$

Despesa: $d_x.CS.v \ + \ d_{x+1}.CS.v^2 \ + \ d_{x+2}.CS.v^3 \ + \ ... \ + \ d_\omega.CS.v^{\omega-x+1}$

Os valores atribuídos à receita e à despesa acima são estabelecidos a partir da Lei dos Grandes Números. Quando um cliente de determinada idade x anos procura uma seguradora para adquirir um seguro de vida com cobertura por falecimento ela trata de o alocar numa espécie de carteira de clientes que possuem todos a mesma idade x anos na ocasião da contratação do seguro para que os prêmios pagos por esses clientes à seguradora forneçam os recursos necessários para que a mesma realize os pagamentos das despesas com o Capital Segurado que será pago aos beneficiários dos segurados quando esses vierem a falecer. Com isso temos as condições necessárias para a aplicação da Lei dos Grandes Números à essa carteira de clientes de modo que as probabilidades de falecimento dos mesmos com o passar dos anos possam ser obtidas diretamente a partir das tábuas de sobrevivência adotadas pela seguradora; de onde vem os valores de l_k e de d_k utilizados acima.

No cálculo das despesas também é considerado que as indenizações por morte serão pagas aos beneficiários apenas no final do ano. É por esse motivo que o fator de desconto acima já aparece no primeiro termo da soma.

> Para efeito das demonstrações e desenvolvimento de fórmulas dos prêmios dos seguros, é utilizado o sistema que prevê o pagamento das indenizações ao final do ano de falecimento [...] tal critério possui grandes vantagens algébricas para a dedução dos prêmios dos seguros. Na prática, porém, o capital é pago aos beneficiários em qualquer época do ano, depois da regulação do benefício, que tem início com a entrega da documentação comprobatória do falecimento. (ORNSTEIN, 1961 apud GUIMARAES[9], 2003, p. 63).

Então, igualando as receitas às despesas temos:

$$l_x.A_x \ = \ d_x.CS.v \ + \ d_{x+1}.CS.v^2 \ + \ d_{x+2}.CS.v^3 \ + \ ... \ + \ d_\omega.CS.v^{\omega-x+1}$$

Multiplicando, novamente, ambos os lados por v^x vem:

$$l_x.v^x.A_x \ = \ d_x.CS.v.v^x \ + \ d_{x+1}.CS.v^2.v^x \ + \ d_{x+2}.CS.v^3.v^x \ + \ ... \ + \ d_\omega.CS.v^{\omega-x+1}.v^x \ \Rightarrow$$
$$D_x.A_x \ = \ d_x.CS.v^{x+1} \ + \ d_{x+1}.CS.v^{x+2} \ + \ d_{x+2}.CS.v^{x+3} \ + \ ... \ + \ d_\omega.CS.v^{\omega+1}$$

Agora, lembrando da relação de comutação $C_k = d_k.v^{k+1}$ temos que:

$$D_x.A_x = C_x.CS + C_{x+1}.CS + C_{x+2}.CS + ... + C_\omega.CS \Rightarrow$$
$$D_x.A_x = [C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_\omega].CS$$

Também, das tábuas de comutação temos que:

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_\omega = \sum_{i=x}^{\omega} C_i$$

Substituindo:

$$D_x.A_x = M_x \,.\, CS$$

E daí:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \,.\, CS \qquad (5.22)$$

Para o caso de o segurado optar por um seguro de vida com cobertura por falecimento imediato e vitalício.

Como citado anteriormente as relações de comutação C_x e M_x estão relacionadas com os dados relativos aos falecimentos e, por esse motivo, surgem agora na obtenção do valor do prêmio de um seguro de vida com cobertura por falecimento. Novamente é possível verificar a simplificação obtida com as relações de comutação, justificando a inserção das mesmas mesmo numa abordagem introdutória da matemática atuarial como estamos fazendo aqui.
Vejamos agora abaixo o cálculo do prêmio único numa situação prática utilizando a relação obtida acima.
Por exemplo, qual o valor do prêmio único que uma pessoa de 40 anos deverá pagar à seguradora para contratar um seguro de vida com cobertura por falecimento imediato e vitalício com Capital Segurado de R$ 20.000,00 a ser pago aos seus beneficiários na ocasião de seu falecimento? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.
Como se trata de um Seguro Vida Inteira, temos:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \,.\, CS \Rightarrow$$
$$A_{40} = \frac{M_{40}}{D_{40}} \,.\, 20000$$

Daí, obtendo os valores de D_{40} e de M_{40} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. temos:

$$\begin{aligned} A_{40} &= \frac{1.106,88}{9.476,84} \,.\, 20000 \;\Rightarrow \\ A_{40} &= 0,11680 \,.\, 20000 \;\Rightarrow \\ A_{40} &\approx 2336,00 \end{aligned}$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 40 anos de idade possa contratar um seguro de vida com cobertura por falecimento vitalício de modo que seus beneficiários recebam o valor de R$ 20.000,00 quando ele falecer, deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 2.336,00.

Agora, vamos analisar o caso **diferido e vitalício**, também chamado de **Seguro Vida Inteira Diferido**, onde o prêmio único é simbolizado por ${}_{m/}A_x$. Como nesse caso o segurado realiza o pagamento do prêmio único hoje mas, seus beneficiários só serão indenizados se ele vier a falecer daqui a m anos, temos a seguinte situação:

Receita: $l_{x} \cdot {}_{m/}A_x$
Despesa: $d_{x+m}.CS.v^{m+1} \;+\; d_{x+m+1}.CS.v^{m+2} \;+\; d_{x+m+2}.CS.v^{m+3} \;+\; ... \;+\; d_{\omega}.CS.v^{\omega-x+1}$

Então, igualando as receitas às despesas temos:

$$l_{x} \cdot {}_{m/}A_x \;=\; d_{x+m}.CS.v^{m+1} \;+\; d_{x+m+1}.CS.v^{m+2} \;+\; d_{x+m+2}.CS.v^{m+3} \;+\; ... \;+\; d_{\omega}.CS.v^{\omega-x+1}$$

Multiplicando ambos os lados por v^x vem:

$$l_x.v^x \cdot {}_{m/}A_x \;=$$
$$d_{x+m}.CS.v^{m+1}.v^x + d_{x+m+1}.CS.v^{m+2}.v^x + d_{x+m+2}.CS.v^{m+3}.v^x + ... + d_{\omega}.CS.v^{\omega-x+1}.v^x \;\Rightarrow$$
$$D_{x} \cdot {}_{m/}A_x \;=\; d_{x+m}.CS.v^{x+m+1} + d_{x+m+1}.CS.v^{x+m+2} + d_{x+m+2}.CS.v^{x+m+3} + ... + d_{\omega}.CS.v^{\omega+1}$$

Agora, lembrando da relação de comutação $C_k \;=\; d_k.v^{k+1}$ temos que:

$$\begin{aligned} D_{x} \cdot {}_{m/}A_x &= C_{x+m}.CS \;+\; C_{x+m+1}.CS \;+\; C_{x+m+2}.CS \;+\; ... \;+\; C_{\omega}.CS \;\Rightarrow \\ D_{x} \cdot {}_{m/}A_x &= [C_{x+m} \;+\; C_{x+m+1} \;+\; C_{x+m+2} \;+\; ... \;+\; C_{\omega}].CS \end{aligned}$$

Também, das tábuas de comutação temos que:

$$M_k \;=\; C_k \;+\; C_{k+1} \;+\; C_{k+2} \;+\; ... \;+\; C_\omega$$

Substituindo:

$$D_{x} \cdot {}_{m/}A_x \;=\; M_{x+m} \;.\; CS$$

E daí:

$$_{m/}A_x \;=\; \frac{M_{x+m}}{D_x} \;.\; CS \tag{5.23}$$

Para o caso de o segurado optar por um seguro de vida com cobertura por falecimento diferido e vitalício.

Por exemplo, qual o valor do prêmio único que uma pessoa de 40 anos deverá pagar à seguradora para contratar um seguro de vida com cobertura por falecimento vitalício que deverá iniciar quando o segurado completar 60 anos com Capital Segurado de R$ 20.000,00 a ser pago aos seus beneficiários na ocasião de seu falecimento? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.
Como se trata de um Seguro Vida Inteira, temos:

$$\begin{aligned} _{m/}A_x \;&=\; \frac{M_{x+m}}{D_x} \;.\; CS \;\Rightarrow \\ _{20/}A_{40} \;&=\; \frac{M_{60}}{D_{40}} \;.\; 20000 \end{aligned}$$

Daí, obtendo os valores de D_{40} e de M_{60} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. temos:

$$\begin{aligned} _{20/}A_{40} \;&=\; \frac{803,42}{9.476,84} \;.\; 20000 \;\Rightarrow \\ _{20/}A_{40} \;&=\; 0,08478 \;.\; 20000 \;\Rightarrow \\ _{20/}A_{40} \;&\approx\; 1695,60 \end{aligned}$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 40 anos de idade possa contratar um seguro de vida com cobertura por falecimento vitalício que inicie quando o segurado completar 60 anos de modo que seus beneficiários recebam o valor de R$ 20.000,00 quando ele falecer, deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 1.695,60.
Esse valor é menor do que o obtido anteriormente para o caso imediato, mesmo esse seguro agora também sendo vitalício. A diferença nos valores é devida ao fato de que aqui a seguradora tem uma probabilidade de aproximadamente 6,6% de não precisar pagar a indenização

aos beneficiários pois, essa é a probabilidade de que o segurado faleça entre os 40 e 60 anos de idade[8] quando o pagamento aos beneficiários não está coberto. Como no caso do seguro vitalício imediato essa probabilidade é nula[9], o valor do prêmio a ser pago pelo contratante na ocasião da obtenção do seguro diferido é menor do que aquele pago pelo mesmo na ocasião da obtenção do seguro imediato.

O caso **imediato e temporário**, também chamado de **Seguro Contra Morte Temporário Imediato**, onde o prêmio único é simbolizado por ${}_{/n}A_x$, é aquele em que o segurado realiza o pagamento do prêmio único hoje mas, seus beneficiários só serão indenizados se ele vier a falecer dentro de um período de tempo de n anos. Assim, temos a seguinte situação:

Receita: $l_x . {}_{/n}A_x$
Despesa: $d_x.CS.v \;+\; d_{x+1}.CS.v^2 \;+\; d_{x+2}.CS.v^3 \;+\; ... \;+\; d_{x+n-1}.CS.v^n$

Então, igualando as receitas às despesas temos:

$$l_x . {}_{/n}A_x \;=\; d_x.CS.v \;+\; d_{x+1}.CS.v^2 \;+\; d_{x+2}.CS.v^3 \;+\; ... \;+\; d_{x+n-1}.CS.v^n$$

Multiplicando ambos os lados por v^x vem:

$$\begin{aligned} l_x.v^x . {}_{/n}A_x \;&=\; d_x.CS.v.v^x \;+\; d_{x+1}.CS.v^2.v^x \;+\; d_{x+2}.CS.v^3.v^x \;+\; ... \;+\; d_{x+n-1}.CS.v^n.v^x \;\Rightarrow \\ D_x . {}_{/n}A_x \;&=\; d_x.CS.v^{x+1} \;+\; d_{x+1}.CS.v^{x+2} \;+\; d_{x+2}.CS.v^{x+3} \;+\; ... \;+\; d_{x+n-1}.CS.v^{x+n} \end{aligned}$$

Agora, lembrando da relação de comutação $C_k \;=\; d_k.v^{k+1}$ temos que:

$$\begin{aligned} D_x . {}_{/n}A_x \;&=\; C_x.CS \;+\; C_{x+1}.CS \;+\; C_{x+2}.CS \;+\; ... \;+\; C_{x+n-1}.CS \;\Rightarrow \\ D_x . {}_{/n}A_x \;&=\; [C_x \;+\; C_{x+1} \;+\; C_{x+2} \;+\; ... \;+\; C_{x+n-1}].CS \end{aligned}$$

Considerando que $(x + n - 1) < \omega$ pois, caso contrário a cobertura seria vitalícia e não temporária, podemos observar o seguinte:

$$\begin{aligned} M_x \;&=\; C_x \;+\; C_{x+1} \;+\; C_{x+2} \;+\; ... \;+\; C_\omega \;\Rightarrow \\ M_x \;&=\; C_x \;+\; C_{x+1} \;+\; C_{x+2} \;+\; ... \;+\; C_{x+n-1} \;+\; C_{x+n} \;+\; C_{x+n+1} \;+\; ... \;+\; C_\omega \;\Rightarrow \end{aligned}$$

[8]De fato, utilizando as relações definidas acima temos que ${}_{/20}q_{40} = 1 - \dfrac{l_{60}}{l_{40}} = 1 - \dfrac{91.011,01}{97.476,07} \approx 6,63\%$.
[9]Observados os quesitos legais de ascendência e descendência.

$$M_x \;=\; C_x \;+\; C_{x+1} \;+\; C_{x+2} \;+\; ... \;+\; C_{x+n-1} \;+\; M_{x+n} \;\Rightarrow$$
$$C_x \;+\; C_{x+1} \;+\; C_{x+2} \;+\; ... \;+\; C_{x+n-1} \;=\; M_x \;-\; M_{x+n}$$

Substituindo temos:

$$D_{x} \cdot {}_{/n}A_x \;=\; [M_x \;-\; M_{x+n}].\, CS$$

E daí:

$$_{/n}A_x \;=\; \frac{M_x \;-\; M_{x+n}}{D_x}\;.\,CS \tag{5.24}$$

Para o caso de o segurado optar por um seguro de vida com cobertura por falecimento imediato e temporário.

Por exemplo, qual o valor do prêmio único que uma pessoa de 40 anos deverá pagar à seguradora para contratar um seguro de vida com cobertura por falecimento durante 20 anos iniciando no momento da contratação com Capital Segurado de R$ 20.000,00 a ser pago aos seus beneficiários na ocasião de seu falecimento? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.
Como se trata de um Seguro Contra Morte Temporário Imediato, temos:

$$_{/n}A_x \;=\; \frac{M_x \;-\; M_{x+n}}{D_x}\;.\,CS \;\Rightarrow$$
$$_{/20}A_{40} \;=\; \frac{M_{40} \;-\; M_{60}}{D_{40}}\;.\,20000$$

Daí, obtendo os valores de D_{40}, M_{40} e de M_{60} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. temos:

$$_{/20}A_{40} \;=\; \frac{1.106,68 \;-\; 803,42}{9.476,84}\;.\,20000 \;\Rightarrow$$
$$_{/20}A_{40} \;=\; \frac{303,26}{9.476,84}\;.\,20000 \;\Rightarrow$$
$$_{20/}A_{40} \;=\; 0,03200\;.\,20000 \;\Rightarrow$$
$$_{20/}A_{40} \;\approx\; 640,00$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 40 anos de idade possa contratar um seguro de vida com cobertura por falecimento por 20 anos que inicie no momento da contratação de modo que seus beneficiários recebam o valor de R$ 20.000,00 se ele falecer durante o período de cobertura, deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 640,00.

Esse valor é bem menor do que aqueles calculados para os dois casos anteriores. A razão é que agora a seguradora tem um risco menor de ter que indenizar os beneficiários quando comparado ao caso do seguro vitalício. Aqui eles só receberão o Capital Segurado caso o segurado venha a falecer num período determinado de tempo, no caso, os 20 anos compreendidos entre as idades 40 e 60 anos do mesmo.

Por fim temos o caso **diferido e temporário**, também chamado de **Seguro Contra Morte Temporário Diferido**, onde o prêmio único é simbolizado por ${}_{m/n}A_x$. Como nesse caso o segurado realiza o pagamento do prêmio único hoje mas, seus beneficiários só serão indenizados se ele vier a falecer dentro de um período de n anos que será iniciado m anos após a contratação, temos a seguinte situação:

Receita: $l_x \cdot {}_{m/n}A_x$
Despesa: $d_{x+m}.CS.v^{m+1} + d_{x+m+1}.CS.v^{m+2} + d_{x+m+2}.CS.v^{m+3} + ... + d_{x+m+n-1}.CS.v^{m+n}$

Então, igualando as receitas às despesas temos:

$$l_x \cdot {}_{m/n}A_x = d_{x+m}.CS.v^{m+1} + d_{x+m+1}.CS.v^{m+2} + d_{x+m+2}.CS.v^{m+3} + ... + d_{x+m+n-1}.CS.v^{m+n}$$

Multiplicando ambos os lados por v^x vem:

$$l_x.v^x \cdot {}_{m/n}A_x = d_{x+m}.CS.v^{m+1}.v^x + d_{x+m+1}.CS.v^{m+2}.v^x + d_{x+m+2}.CS.v^{m+3}.v^x + ... + d_{x+m+n-1}.CS.v^{m+n}.v^x \Rightarrow$$
$$D_x \cdot {}_{m/n}A_x =$$
$$d_{x+m}.CS.v^{x+m+1} + d_{x+m+1}.CS.v^{x+m+2} + d_{x+m+2}.CS.v^{x+m+3} + ... + d_{x+m+n-1}.CS.v^{x+m+n}$$

Agora, lembrando da relação de comutação $C_k = d_k.v^{k+1}$ temos que:

$$D_x \cdot {}_{m/n}A_x = C_{x+m}.CS + C_{x+m+1}.CS + C_{x+m+2}.CS + ... + C_{x+m+n-1}.CS \Rightarrow$$
$$D_x \cdot {}_{m/n}A_x = [C_{x+m} + C_{x+m+1} + C_{x+m+2} + ... + C_{x+m+n-1}].CS$$

Considerando que $(x + m + n - 1) < \omega$ pois, caso contrário a cobertura seria vitalícia e não temporária, podemos observar o seguinte:

$$M_{x+m} \;=\; C_{x+m} \;+\; C_{x+m+1} \;+\; C_{x+m+2} \;+\; ... \;+\; C_{\omega} \;\Rightarrow$$
$$M_{x+m} \;=\; C_{x+m} + C_{x+m+1} + C_{x+m+2} + ... + C_{x+m+n-1} + C_{x+m+n} + C_{x+m+n+1} + ... + C_{\omega} \;\Rightarrow$$
$$M_{x+m} \;=\; C_{x+m} \;+\; C_{x+m+1} \;+\; C_{x+m+2} \;+\; ... \;+\; C_{x+m+n-1} \;+\; M_{x+m+n} \;\Rightarrow$$
$$C_{x+m} \;+\; C_{x+m+1} \;+\; C_{x+m+2} \;+\; ... \;+\; C_{x+m+n-1} \;=\; M_{x+m} \;-\; M_{x+m+n}$$

Substituindo temos:

$$D_{x \cdot m/n}A_x \;=\; [M_{x+m} \;-\; M_{x+m+n}].\, CS$$

E daí:

$$_{m/n}A_x \;=\; \frac{M_{x+m} \;-\; M_{x+m+n}}{D_x}\;.\, CS \tag{5.25}$$

Para o caso de o segurado optar por um seguro de vida com cobertura por falecimento diferido e temporário.

Por exemplo, qual o valor do prêmio único que uma pessoa de 40 anos deverá pagar à seguradora para contratar um seguro de vida com cobertura por falecimento durante 15 anos iniciando 20 anos após contratação com Capital Segurado de R$ 20.000,00 a ser pago aos seus beneficiários na ocasião de seu falecimento? Considere que os juros da operação junto à seguradora são de 6% a.a.

Como se trata de um Seguro Contra Morte Temporário Diferido, temos:

$$_{m/n}A_x \;=\; \frac{M_{x+m} \;-\; M_{x+m+n}}{D_x}\;.\, CS \;\Rightarrow$$
$$_{20/15}A_{40} \;=\; \frac{M_{40+20} \;-\; M_{40+20+15}}{D_40}\;.\; 20000 \;\Rightarrow$$
$$_{20/15}A_{40} \;=\; \frac{M_{60} \;-\; M_{75}}{D_{40}}\;.\; 20000$$

Daí, obtendo os valores de D_{40}, M_{60} e de M_{75} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. temos:

$$_{20/15}A_{40} \;=\; \frac{803,42 \;-\; 468,05}{9.476,84}\;.\; 20000 \;\Rightarrow$$
$$_{20/15}A_{40} \;=\; \frac{335,37}{9.476,84}\;.\; 20000 \;\Rightarrow$$
$$_{20/15}A_{40} \;=\; 0,03539 \;.\; 20000 \;\Rightarrow$$
$$_{20/15}A_{40} \;\approx\; 707,80$$

Assim, para que uma pessoa hoje com 40 anos de idade possa contratar um seguro de vida com cobertura por falecimento por 15 anos que inicie 20 anos após o momento da contratação de modo que seus beneficiários recebam o valor de R$ 20.000,00 quando ele falecer, deverá pagar hoje à seguradora um prêmio único no valor de aproximadamente R$ 707,80.

Da mesma forma que ocorreu para os seguros de vida com cobertura por sobrevivência observamos que os valores do prêmio aumentam quando a probabilidade de que a seguradora tenha que indenizar o segurado cresce. Assim, nos casos vitalícios dos exemplos acima os prêmios são maiores do que nos casos temporários já que nesses últimos a probabilidade de que a seguradora tenha que indenizar os beneficiários é menor.
Comparando os casos vitalícios nota-se que o imediato possui valor do prêmio a ser pago maior do que o caso diferido, pois no imediato a seguradora com certeza terá que pagar a indenização enquanto que no caso diferido há chance de que isso não ocorra (o segurado pode morrer antes de terminar o período de diferimento).
Comparando os casos temporários nota-se que o prêmio é maior para o período de cobertura com maior probabilidade de morte do segurado. Assim, nos casos que foram analisados acima é maior a probabilidade de que o segurado morra dos 60 aos 75 anos de idade do que dos seus 40 aos 60 anos de idade[10] e, por isso, o valor do prêmio a ser pago no caso temporário diferido - mesmo o segurado estando coberto por um intervalo de tempo menor - foi maior do que no caso temporário e imediato.

Esgotados os casos das coberturas de vida e morte dos seguros de vida veremos agora um produto onde o interesse do contratante também é o de receber rendas (ou até um único dote, mesmo sendo mais incomum) mas, nesse caso, ao invés de realizar o pagamento de um prêmio único para ter esse direito a formação do valor a ser recebido é feita durante prazos mais longos através da realização de pagamentos também periódicos. Essas são características comumente encontradas nos planos de previdência complementar, assunto da próxima seção.

---

[10] De fato, utilizando as relações definidas acima temos que ${}_{/15}q_{60} \approx 20,63\%$ enquanto ${}_{/20}q_{40} \approx 6,63\%$. Ou seja, a probabilidade de uma pessoa vir a falecer entre 60 e 75 anos de idade é três vezes maior do que ela falecer entre 40 e 60 anos de idade, mesmo que esse segundo período seja maior que o primeiro.

5.6.4 Calculando a previdência complementar

A previdência complementar consiste basicamente numa reserva de longo prazo que é feita pelo contratante junto a uma instituição de modo que contribua com sua formação durante um período de tempo (em geral décadas) chamado de período de diferimento a fim de que no futuro possa receber de volta os valores (com as devidas correções contratuais) geralmente sob a forma de uma renda que irá complementar sua aposentadoria[11].

Assim, recordando que os seguros e a previdência se estabelecem a partir das probabilidades de danos e da taxa de juros, o funcionamento da previdência complementar se baseia em dois momentos: o primeiro onde o contratante realiza o pagamento da contribuição mensal junto à instituição a fim de formar um montante e o segundo no qual o contratante recebe o valor acumulado sob a forma de uma renda vitalícia ou temporária. O primeiro momento tem seus detalhes matemáticos estabelecidos pelas expressões de valor futuro de uma renda constante apresentadas no capítulo 4 e o segundo momento possui procedimento idêntico ao caso das rendas por sobrevivência vistas anteriormente. Desse modo, nos cálculos da previdência complementar o montante que é acumulado pelo contratante durante o período de diferimento funciona como um prêmio único da renda[12] que ele receberá posteriormente da instituição de previdência complementar.

No entanto, antes de verificarmos os cálculos da previdência complementar efetivamente, vamos verificar na próxima seção como trabalhar com rendas que não sejam anuais já que, para a grande maioria dos contratantes de planos de previdência complementar, essa é a opção mais escolhida.

5.6.4.1 Rendas Subanuais

As tábuas de sobrevivência possuem as informações de número de pessoas vivas e mortas a cada ano. Por esse motivo, quando usamos as informações das tábuas diretamente (como fizemos até este momento) os valores calculados só podem ser anuais conforme foram todas as demonstrações e exemplos até agora.

Todavia, na realidade da previdência complementar, falar em contribuições anuais e posterio-

[11] Onde aposentadoria aqui se refere ao benefício concedido pelo governo devido a pessoa ter atingido os requisitos de elegibilidade (hoje critérios como idade e tempo de contribuição mínimos).

[12] O contratante também pode optar por receber o valor acumulado como um dote, mas não abordaremos essa opção.

res recebimentos de rendas anuais é no mínimo estranho já que nossa renda tem, geralmente, uma base mensal. Sendo assim, torna-se necessário um método de relacionarmos os prêmios envolvidos nas rendas com um valor mensal para as mesmas. Nesse caso, diremos que a renda será fracionada em períodos subanuais ou que a renda é subanual.

> [...] considerando-se a proporcionalidade dos falecimentos para o subperíodo que se deseja e, ainda, que seja utilizada a taxa de juros equivalente ao subperíodo correspondente, calculamos os valores atuais das rendas subanuais com o objetivo de saber o prêmio único puro para as mesmas [...] se por acaso existissem tábuas de sobrevivência mensais, trimestrais, semestrais, não teríamos que fazer um estudo específico para esta situação do fracionamento. (CORDEIRO FILHO[6], 2014, p. 127-128).

Conforme Azevedo[1] (2014, p. 221), as rendas subanuais podem ser deduzidas considerando que:

$$
\begin{aligned}
{}_{/1}a_x &= a_x - {}_{1/}a_x \Rightarrow \\
\frac{N_x - N_{x+1}}{D_x} &= \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x} \Rightarrow \\
\frac{D_x}{D_x} &= \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x} \Rightarrow \\
1 &= \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+1}}{D_x} \Rightarrow \\
{}_{1/}a_x &= a_x - 1
\end{aligned}
$$

Então, no caso em que os períodos da renda são fracionados sendo m períodos com duração de $\frac{1}{m}$ ano, temos:

$$
{}_{1/m/}a_x = a_x - 1/m
$$

> A análise [...] nos leva a que o valor atual de uma renda anual deve ser igual à soma de seus fracionamentos mais algum ajuste, simplesmente pelo fato de que algo que deveria ser pago à vista está sendo parcelado[...].(CORDEIRO FILHO[6], 2014. p. 128).

Assim, conforme Guimarães (2003, p. 76) o valor atual de uma renda fracionada antecipada, simbolizado por $\ddot{a}_x^{(m)}$ pode ser deduzido por:

$$
m.\ddot{a}_x^{(m)} \cong [\ddot{a}_x + (\ddot{a}_x - \frac{1}{m}) + (\ddot{a}_x - \frac{2}{m}) + ... + (\ddot{a}_x - \frac{m-1}{m})\ ]
$$

Como o lado direito é a soma de uma P.A. de m termos, sendo $\ddot{a}_x$ o termo inicial e $-\dfrac{1}{m}$ a razão vem que:

$$\ddot{a}_x^{(m)} \;=\; \ddot{a}_x \;-\; \frac{m-1}{2m} \tag{5.26}$$

E, utilizando raciocínio análogo para rendas fracionadas postecipadas temos:

$$a_x^{(m)} \;=\; a_x \;+\; \frac{m-1}{2m} \tag{5.27}$$

De modo que, para obter os prêmios únicos com as relações acima, basta multiplicá-las pelo número de subperíodos m e pelo valor de R, que é a renda em cada subperíodo.

Vejamos um exemplo a fim de demonstrar o uso dessas relações facilitadoras acima.

Um empresário, ao completar 52 anos de idade, decide investir seus recursos financeiros num plano de previdência complementar vitalício. Supondo que ele possui um recurso de R\$ 150.000,00, qual será o valor da renda mensal vitalícia postecipada que ele terá? Considere a taxa de juros da operação sendo de 6% a.a.

Nesse caso, como a renda desejada será mensal, temos $m \;=\; 12$ e:

$$a_{52}^{(12)} \;=\; a_{52} \;+\; \frac{12-1}{2.12} \Rightarrow a_{52}^{(12)} \;=\; a_{52} \;+\; \frac{11}{24}$$

Esse é o valor atual da renda fracionada mensal e $a_{52} \;=\; \dfrac{N_{53}}{D_{52}}$ como vimos anteriormente. Então, como os recursos do empresário serão o prêmio único que será pago para a obtenção de sua renda vitalícia mensal teremos que:

$$150000 \;=\; R \;.\; 12 \;.\; a_{52}^{(12)}$$

Onde R é o valor da renda mensal que queremos determinar. Então:

$$150000 \;=\; R \;.\; 12 \;.\; a_{52}^{(12)} \;\Rightarrow$$
$$150000 \;=\; R \;.\; 12 \;.\; (a_{52} \;+\; \frac{11}{24}) \;\Rightarrow$$
$$150000 \;=\; R \;.\; 12 \;.\; (\frac{N_{53}}{D_{52}} \;+\; \frac{11}{24})$$

Utilizando os dados da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. temos:

$$
\begin{aligned}
150000 &= R\ .\ 12\ .\ (\frac{N_{53}}{D_{52}} + \frac{11}{24}) \Rightarrow \\
150000 &= R\ .\ 12\ .\ (\frac{59.712,96}{4588,18} + \frac{11}{24}) \Rightarrow \\
150000 &= R\ .\ 12\ .\ (13,01452 + 0,45833) \Rightarrow \\
150000 &= R\ .\ 12\ .\ 13,47285 \Rightarrow \\
150000 &= R\ .\ 161,6742 \Rightarrow \\
R &= \frac{150000}{161,6742} \Rightarrow \\
R &\approx 927,79
\end{aligned}
$$

Assim, a renda mensal vitalícia do empresário será de aproximadamente R$ 927,79. Importante observar junto com os alunos o efeito das probabilidades de sobrevivência na determinação do resultado final já que os dados da tábua de comutação aparecem no denominador dividindo o prêmio. Desse modo, caso o empresário optasse por uma renda antecipada o valor da renda mensal seria menor do que o obtido acima, pois $N_{52} > N_{53}$ e, logo, o prêmio seria dividido por um número maior.

5.6.4.2 Calculando a contribuição e a renda mensal

Considerando o que foi dito antes, que a análise da previdência complementar envolve dois momentos, temos duas situações que podem ser investigadas. Na primeira, o contratante sabe quanto pode pagar de contribuição mensal durante o período de diferimento e deseja saber quanto terá de renda mensal vitalícia quando começar a receber os pagamentos da instituição. E, na segunda, temos o caso de um contratante que sabe quanto deseja de renda no momento em que começar a receber os pagamentos da instituição mas, ainda não sabe quanto deve pagar como contribuição mensal à entidade durante o período de diferimento. Vamos, agora, analisar esses dois casos[13].

Primeiro caso, uma pessoa de 40 anos de idade faz plano de previdência complementar junto a uma instituição visando receber dessa uma renda vitalícia mensal assim que completar 70

[13] É claro que também poderíamos variar as situações com o contratante optando por receber sua previdência complementar da instituição através de rendas antecipadas ou postecipadas, imediatas ou diferidas e temporárias ou vitalícias. No entanto, acreditando que esses detalhes já foram bem explorados anteriormente apresentaremos as situações apenas através de rendas antecipadas, imediatas e vitalícias (no caso do pagamento da previdência complementar pela instituição).

anos de idade. O contratante escolhe um plano onde ele irá pagar à instituição uma contribuição mensal desde o momento da contratação no valor de R$ 300,00 durante todo o período de diferimento. Sabendo que a rentabilidade das contribuições mensais do contratante na instituição é de 0,5% ao mês[14] e que para a operação de pagamento das rendas por parte da instituição a taxa de juros é de 6% ao ano[15], qual será o valor da renda mensal que o contratante terá direito?

Pelas características citadas, tanto a renda das contribuições do contratante como a renda que será paga pela instituição ao mesmo após o período de diferimento são imediatas e antecipadas. A única diferença é que a primeira é constante e temporária enquanto a segunda é vitalícia. Assim, durante o período de diferimento, lembrando das relações para valor futuro de rendas constantes temporárias antecipadas apresentadas no capítulo 4, teremos que:

$$FV = (1+i).R.[\frac{(1+i)^n - 1}{i}] \Rightarrow$$

Então, com $i = 0,5\%$, $n = 360$ e $R = 300$ temos:

$$\begin{aligned}
FV &= (1+0,005).300.[\frac{(1+0,005)^{360} - 1}{0,005}] \Rightarrow \\
FV &= (1,005).300.[\frac{(1,005)^{360} - 1}{0,005}] \Rightarrow \\
FV &= (1,005).300.[\frac{6,02258 - 1}{0,005}] \Rightarrow \\
FV &= (1,005).300.[\frac{5,02258}{0,005}] \Rightarrow \\
FV &= (1,005).300.1004,516 \Rightarrow \\
FV &\approx 302861,57 \Rightarrow
\end{aligned}$$

Assim, após 30 anos de pagamento da contribuição de R$ 300,00 à instituição, com o rendimento informado, o contratante dispõe do valor de aproximadamente R$ 302.861,57. Agora, no segundo momento dos cálculos da previdência complementar, o valor do montante acumulado durante o período de diferimento é utilizado como o prêmio único de uma renda

[14]Atualmente, na prática, essa taxa fica em torno dos rendimentos da poupança e, por isso, estamos usando tal valor aqui.

[15]É importante destacar a existência de taxas distintas devido à própria dinâmica do funcionamento da previdência complementar, conforme já mencionado. A taxa de juros para pagamento das rendas por sobrevivência é regulamentada pela SUSEP - Superintendência de Seguros Privados - e seu valor é que define a tábua de comutação de onde os dados serão extraídos no momento em que forem requisitados nos cálculos.

fracionada mensal imediata vitalícia antecipada. Nesse momento o contratado possui a idade de 70 anos e, usando expressões apresentadas nas seções anteriores temos que:

$$\begin{aligned}
302861,57 &= R \;.\; 12 \;.\; \ddot{a}_{70}^{(12)} \;\Rightarrow \\
302861,57 &= R \;.\; 12 \;.\; \ddot{a_{70}} \;-\; \frac{12-1}{2.12} \;\Rightarrow \\
302861,57 &= R \;.\; 12 \;.\; (\frac{N_{70}}{D_{70}} \;-\; \frac{11}{24})
\end{aligned}$$

Então, obtendo os valores de D_{70} e N_{70} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. vem:

$$\begin{aligned}
302861,57 &= R \;.\; 12 \;.\; (\frac{13.785,08}{1.377,59} \;-\; \frac{11}{24}) \;\Rightarrow \\
302861,57 &= R \;.\; 12 \;.\; (10,00666 \;-\; 0,45833) \;\Rightarrow \\
302861,57 &= R \;.\; 12 \;.\; 9,54833 \;\Rightarrow \\
302861,57 &= R \;.\; 114,57996 \;\Rightarrow \\
R &= \frac{302861,57}{114,57996} \;\Rightarrow \\
R &\approx 2643,23
\end{aligned}$$

Assim, a renda mensal vitalícia do contratante a ser paga pela instituição de previdência complementar quando ele atingir a idade de 70 anos será de aproximadamente R$ 2.643,23. Agora, vejamos a situação inversa onde, o contratante tem ideia de quanto deseja de renda futura mas, não sabe quanto precisa contribuir mensalmente para poder obtê-la.

Segundo caso, uma pessoa de 35 anos de idade deseja fazer um plano de previdência complementar junto a uma instituição visando receber dessa uma renda vitalícia mensal assim que completar 60 anos de idade. O contratante deseja um plano onde ele irá pagar à seguradora uma contribuição mensal desde o momento da contratação e durante todo o período de diferimento de modo que ao completar 60 anos de idade possa receber dessa uma renda vitalícia mensal de R$ 3.000,00. Sabendo que a rentabilidade das contribuições mensais do contratante na instituição é de 0,5% ao mês e que para a operação de pagamento das rendas por parte da instituição a taxa de juros é de 6% ao ano, qual será o valor da contribuição mensal à instituição que o contratante deverá fazer para obter o direito à renda desejada? Pelas características citadas tanto a renda das contribuições do contratante como a renda que será paga pela instituição ao mesmo após o período de diferimento são imediatas e antecipadas. A única diferença é que a primeira é constante e temporária enquanto a segunda é vitalícia. No entanto, como agora sabemos primeiro dos dados relativos à renda vitalícia paga pela instituição ao segurado e precisamos determinar o valor do prêmio único que uma pessoa com 60 anos de idade deve pagar para obter uma renda mensal vitalícia antecipada de R$ 3.000,00 iremos inverter a ordem dos cálculos determinando antes o valor desse prêmio e, após, usando-o como o valor futuro de uma renda constante a fim de descobrirmos o valor R de seus termos ou contribuições periódicas do contratante à instituição. Assim, usando a notação $PU(\ddot{a}_x^{(m)})$ para o prêmio único de uma renda fracionada antecipada vitalícia, temos:

$$\begin{aligned} PU(\ddot{a}_x^{(m)}) &= R \,.\, m \,.\, \ddot{a}_x^{(m)} \;\Rightarrow \\ PU(\ddot{a}_{60}^{(12)}) &= 3000 \,.\, 12 \,.\, \ddot{a}_{60} - \frac{12-1}{2.12} \;\Rightarrow \\ PU(\ddot{a}_{60}^{(12)}) &= 3000 \,.\, 12 \,.\, (\frac{N_{60}}{D_{60}} - \frac{11}{24}) \end{aligned}$$

Então, obtendo os valores de D_{60} e N_{60} da tábua de comutação AT-2000 a 6% a.a. vem:

$$\begin{aligned} PU(\ddot{a}_{60}^{(12)}) &= 3000 \,.\, 12 \,.\, (\frac{34.547,44}{2.758,94} - \frac{11}{24}) \;\Rightarrow \\ PU(\ddot{a}_{60}^{(12)}) &= 3000 \,.\, 12 \,.\, (12,52200 - 0,45833) \;\Rightarrow \\ PU(\ddot{a}_{60}^{(12)}) &= 3000 \,.\, 12 \,.\, 12,06367 \;\Rightarrow \\ PU(\ddot{a}_{60}^{(12)}) &\approx 434292,12 \end{aligned}$$

Assim, para que possa ter a partir dos 60 anos de idade uma renda vitalícia de R$ 3.000,00 mensais o contratante precisa ter acumulado na instituição um montante no valor de aproximadamente R$ 434.292,12 para que tal valor funcione como o prêmio único de sua renda desejada. Agora, no segundo momento dos cálculos, verificamos qual o valor de contribuição mensal durante o período de diferimento é capaz de gerar tal montante através de uma renda temporária antecipada cuja duração será de 25 anos com o rendimento informado acima. Novamente, temos que:

$$FV = (1+i).R.[\frac{(1+i)^n - 1}{i}] \;\Rightarrow$$

Então, com $i = 0,5\%$, $n = 300$ e $FV = 434292,12$ temos:

$$\begin{aligned} 434292,12 &= (1+0,005).R.[\frac{(1+0,005)^{300}-1}{0,005}] \;\Rightarrow \\ 434292,12 &= (1,005).R.[\frac{(1,005)^{300}-1}{0,005}] \;\Rightarrow \\ 434292,12 &= (1,005).R.[\frac{4,46497-1}{0,005}] \;\Rightarrow \\ 434292,12 &= (1,005).R.[\frac{3,46497}{0,005}] \;\Rightarrow \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
434292,12 &= (1,005).R.692,994 \quad \Rightarrow \\
434292,12 &= R.696,45897 \quad \Rightarrow \\
R &= \frac{434292,12}{696,45897} \quad \Rightarrow \\
R &\approx 623,57
\end{aligned}
$$

Assim, para que o contratante com idade de 35 anos tenha uma renda mensal vitalícia a ser paga pela instituição de previdência complementar quando ele atingir a idade de 60 anos no valor de R$ 3.000,00 ele deve realizar pagamentos de contribuições mensais no valor de aproximadamente R$ 623,57 à instituição durante o período de diferimento, ou seja, por 25 anos.

Esses dois casos ilustram a influência das probabilidades de sobrevivência e falecimento e da equivalência de capitais na determinação dos valores envolvidos na previdência complementar. Mesmo que em ambos os casos a renda a ser recebida pelo contratante seja vitalícia, no primeiro o contratante opta por iniciar o recebimento da mesma aos 70 anos de idade, enquanto que no primeiro caso ele decide que esse início seja aos 60 anos de idade. Ainda, no primeiro caso o contratante escolhe o período de diferimento de 30 anos para a formação do valor que será usado como prêmio único de sua renda vitalícia, enquanto que no segundo ele decide que esse período seja de 25 anos.

Desse modo, no primeiro caso o contratante tem um período maior para a formação do valor que será utilizado como prêmio único de sua renda vitalícia e decide recebê-la com mais idade quando comparado ao segundo caso. Esses fatores fazem com que o valor da contribuição mensal a ser pago pelo mesmo à instituição de previdência complementar seja maior no segundo caso do que no primeiro já que, no segundo, as despesas prováveis para a instituição são maiores uma vez que ele inicia o recebimento de sua renda vitalícia mais cedo e, ainda, o contratante possui um tempo menor para a formação do valor necessário como prêmio único dessa renda, reforçando a tendência de que o valor da contribuição seja maior do que aquele que foi previamente definido no primeiro caso.

Como ficou evidenciado após os cálculos, essas tendências foram totalmente confirmadas, mas essa discussão a respeito do que esperar dos cálculos pode ser realizada com o alunos antes de os mesmos serem executados já que todos os aspectos envolvidos nos mesmos já foram tratados anteriormente a partir das definições e exemplos das seções anteriores. O fato de o valor da contribuição mensal paga pelo contratante encontrado no segundo caso ser maior que o dobro daquele do primeiro caso pode também ser explorado junto aos alunos destacando a inexistência de linearidade entre essas grandezas, que não deveria ser esperada pelos mesmos devido às relações que são utilizadas nas etapas dos cálculos envolvidos.

6 Conclusão

A matemática está presente em nosso cotidiano, mas, por muitas vezes, ela não é associada à prática diária em função de um ensino estabelecido a partir de situações distante das realidades dos alunos. Assim, a produção deste material educativo complementar visa proporcionar correlações da matemática com atividades cotidianas como as apólices de seguro de vida e previdência complementar.

Dentre as análises dos dados e teorias pode-se constatar que a matemática, além de cálculos e estratégias em formas de números, expressões e equações atua no potencial de desenvolvimento da capacidade cognitiva do sujeito. As contribuições desta pesquisa vislumbram a compreensão da matemática enquanto lógica, passiva de reflexão e entendimento continuo por meio do pensar.

Já a elaboração e execução dos cálculos mostram que a matemática é possível de ser efetuada e efetivada. Os dados apresentados por meio de tabelas e expressões são padronizados garantindo assim acessibilidade às informações necessárias. Por meio das aplicações da matemática financeira e das probabilidades em seguros de vida e previdência é possível estimular professores e alunos a criarem estratégias de modo a contribuir para o seu bem estar social, cultural e histórico. Pensar em um futuro. Calcular apólices de seguros que nos acompanharão até a morte com base no tempo de investimento previamente estabelecido.

Ao analisar as tábuas de sobrevivência são usados diversos conceitos e propriedades das probabilidades e sem utilizar a capitalização e descapitalização, ou seja, os capitais equivalentes, não se poderia nem ao menos falar das tábuas de comutação que utilizam-se deste conceito diretamente. As rendas calculadas, mesmo as por sobrevivência, são definidas puramente por conceitos matemáticos. A acumulação de valores na previdência complementar é estabelecida a partir do valor futuro dos depósitos efetuados e a renda que o contratante irá obter é definida a partir do valor presente em poder da instituição contratada. Todos os cálculos de prêmios puros de seguros de vida que foram apresentados se originam do fato de que eles correspondem à esperança matemática do contratado ou dos beneficiários receberem o capital segurado, fato que decorre diretamente da Lei dos Grandes Números.

Assim, ao refletirmos sobre a educação e a matemática para uma educação matemática percebe-se a necessidade de contextualizarmos e aprimorarmos esse ensino. Algo que busque as necessidades do aluno por meio da junção da conceituação, manipulação e aplicação.

Referências Bibliográficas

[1] AZEVEDO, Gustavo Henrique W. de *Seguros, Matemática Atuarial e Financeira*. Editora Saraiva. São Paulo. 2008.

[2] BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Lei nº 9.394/96*. Brasília/DF. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/CCIVIL_03/leis/L9394.htm> Acessado em 29/07/2015.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília/DF. 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acessado em 10/07/2015.

[4] BRASIL ESCOLA. *Probabilidade condicional*. Disponível em: <http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-probabilidade-condicional.htm>. Acesso em 20/01/2016.

[5] CONHECIMENTOS BANCÁRIOS. *Esperança matemática*. Disponível em: <http://conhecimentosbancarios.blogspot.com.br/201305/esperanca-matematica.html>. Acesso em 28/01/2016. matica.html 28/01/2016

[6] CORDEIRO FILHO, Antonio. *Cálculo Atuarial Aplicado*. Editora Atlas. 2ª edição. São Paulo. 2014.

[7] FREIRE, Paulo. *Pedagogia do Oprimido*, 17ª Ed. Rio de janeiro: Paz e Terra, 1987.

[8] FREITAS, Rony C. O. *Educação Matemática na Formação Profissional de Jovens e Adultos*. Editora Appris. Curitiba. 2011.

[9] GUIMARÃES, Sérgio Rangel. *Fundamentação técnica e atuarial dos seguros de vida: um estudo comparativo entre o seguro de vida individual e o seguro de vida em grupo no Brasil*. 2003. Dissertação (Mestrado em Economia) - Faculdade de Ciências Econômicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003. Disponível em:

<https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/3227/000383993.pdf?sequence=1>. Acessado em 02/05/2015.

[10] IYER, Subramaniam. *Matemática Atuarial de Sistemas de Previdência Social*. Brasília: MPAS, 2002. Disponível em <http://www.previdencia.gov.br/arquivos/office/3_081014-111358-623.pdf>. Acessado em 16/07/2015.

[11] LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*. 6ª ed. Editora SBM. Rio de Janeiro. 2006.

[12] LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino*. SBM. Rio de Janeiro. 2007.

[13] MATEMÁTICA DIDÁTICA. *Probabilidade*. Disponível em: <http://www.matematicadidatica.com.br/ProbabilidadeExercicios.aspx>. Acesso em 30/01/2016.

[14] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C.. *Progressões e Matemática Financeira*. Editora SBM. Rio de Janeiro. 2001.

[15] PACHECO, Ricardo. *Matemática Atuarial de Seguros e Danos*. Editora Atlas. São Paulo. 2014.

[16] PORTAL ACTION. *Lei Forte dos Grandes Números*. Disponível em: <http://www.portalaction.com.br/probabilidades/722-lei-forte-dos-grandes-numeros>. Acesso em 25/05/2015.

[17] PUCCINI, Ernesto Coutinho. *Matemática Financeira*. Brasília/DF, UAB/MEC. 2007. Disponível em <http://www.proativams.com.br/files_aberto/Livro%20de%20MForiginal.pdf>. Acesso em 20/04/2015.

[18] RODRIGUES, Flávio Wagner. *Eventos independentes*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 04, p. 21-24, 1984.

[19] RODRIGUES, Flávio Wagner. *A estatística e as pesquisas eleitorais*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 40, p. 23-30, 1999.

[20] ROLLA, Leonardo T. *Introdução à Probabilidade*. Rio de Janeiro/RJ. 2013. Disponível em <http://mate.dm.uba.ar/∼leorolla/teaching/intro-probab.pdf>. Acesso em 21/01/2016.

[21] RONDELLI, Elizabeth. *Material didático: Interatividade é fundamental*. Disponível em: <http://www.ead.sp.senac.br/newsletter/novembro06/mercado/mercado.htm>. Acesso em: 06/08/2015.

[22] SABER MATEMÁTICA. *Probabilidade.*. Disponível em: <http://sabermatematica.com.br/probabilidadeer.html>. Acesso em 29/01/2016.

[23] SILVA, Fabiana Lopes da. *Impacto do risco de longevidade em planos de previdência complementar.* 2010. Tese (Doutorado em Controladoria e Contabilidade: Contabilidade) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/12/12136/tde-29112010-182036>. Acesso em: 11/07/2015.

[24] SÓ MATEMÁTICA. A História da Matemática Comercial e Financeira. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/historia/matfinanceira.php>. Acesso em: 22/10/2015.

[25] SUSEP - SUPERINTENDÊNCIA DE SEGUROS PRIVADOS. Disponível em: <http://www.susep.gov.br>. Acesso em: 10/06/2015.

[26] TUDO SOBRE SEGUROS. Disponível em:<http://www.tudosobreseguros.com.br>. Acesso em: 13/07/2015.

A Tábua de Comutação AT-2000 a 6% a.a.

Tábua AT-2000 – com juros de 6% ao ano

SOA885 Masculino Idade (x)	AT-2000 q_x	Tx. Juros 6% l_x	d_x	L_x	p_x	e_x	D_x	T_x	N_x	S_x	e^o_x	C_x	M_x
0	0,002311	100.000,00	231,10	99.884,45	0,997689	79,57	100.000,00	8.006.910,91	1.730.595,57	28.979.768	80,07	218,02	2.041,76
1	0,000906	99.768,90	90,39	99.723,70	0,999094	78,75	94.121,60	7.907.026,46	1.630.595,57	27.249.172	79,25	80,45	1.823,74
2	0,000504	99.678,51	50,24	99.653,39	0,999496	77,82	88.713,52	7.807.302,76	1.536.473,96	25.618.576	78,32	42,18	1.743,29
3	0,000408	99.628,27	40,65	99.607,95	0,999592	76,86	83.649,82	7.707.649,37	1.447.760,44	24.082.102	77,36	32,20	1.701,11
4	0,000357	99.587,62	35,55	99.569,85	0,999643	75,90	78.882,73	7.608.041,42	1.364.110,63	22.634.342	76,40	26,57	1.668,92
5	0,000324	99.552,07	32,25	99.535,94	0,999676	74,92	74.391,10	7.508.471,57	1.285.227,90	21.270.231	75,42	22,74	1.642,35
6	0,000301	99.519,82	29,96	99.504,84	0,999699	73,95	70.157,54	7.408.935,63	1.210.836,80	19.985.003	74,45	19,92	1.619,61
7	0,000286	99.489,86	28,45	99.475,63	0,999714	72,97	66.166,44	7.309.430,79	1.140.679,26	18.774.167	73,47	17,85	1.599,69
8	0,000328	99.461,41	32,62	99.445,09	0,999672	71,99	62.403,32	7.209.955,16	1.074.512,82	17.633.487	72,49	19,31	1.581,84
9	0,000362	99.428,78	35,99	99.410,79	0,999638	71,01	58.851,74	7.110.510,06	1.012.109,50	16.558.975	71,51	20,10	1.562,53
10	0,000390	99.392,79	38,76	99.373,41	0,999610	70,04	55.500,41	7.011.099,28	953.257,76	15.546.865	70,54	20,42	1.542,43
11	0,000413	99.354,03	41,03	99.333,51	0,999587	69,07	52.338,46	6.911.725,87	897.757,35	14.593.607	69,57	20,39	1.522,01
12	0,000431	99.312,99	42,80	99.291,59	0,999569	68,10	49.355,51	6.812.392,36	845.418,88	13.695.850	68,60	20,07	1.501,62
13	0,000446	99.270,19	44,27	99.248,05	0,999554	67,12	46.541,74	6.713.100,77	796.063,37	12.850.431	67,62	19,58	1.481,55
14	0,000458	99.225,91	45,45	99.203,19	0,999542	66,15	43.887,72	6.613.852,72	749.521,63	12.054.368	66,65	18,96	1.461,96
15	0,000470	99.180,47	46,61	99.157,16	0,999530	65,18	41.384,54	6.514.649,53	705.633,91	11.304.846	65,68	18,35	1.443,00
16	0,000481	99.133,85	47,68	99.110,01	0,999519	64,22	39.023,67	6.415.492,37	664.249,37	10.599.212	64,72	17,71	1.424,65
17	0,000495	99.086,17	49,05	99.061,65	0,999505	63,25	36.797,08	6.316.382,35	625.225,70	9.934.963	63,75	17,18	1.406,94
18	0,000510	99.037,12	50,51	99.011,87	0,999490	62,28	34.697,04	6.217.320,71	588.428,62	9.309.737	62,78	16,69	1.389,76
19	0,000528	98.986,61	52,26	98.960,48	0,999472	61,31	32.716,36	6.118.308,84	553.731,58	8.721.308	61,81	16,30	1.373,07
20	0,000549	98.934,35	54,31	98.907,19	0,999451	60,34	30.848,20	6.019.348,36	521.015,21	8.167.577	60,84	15,98	1.356,77
21	0,000573	98.880,03	56,66	98.851,71	0,999427	59,37	29.086,10	5.920.441,16	490.167,02	7.646.562	59,87	15,72	1.340,79
22	0,000599	98.823,38	59,20	98.793,78	0,999401	58,41	27.423,99	5.821.589,46	461.080,92	7.156.395	58,91	15,50	1.325,07
23	0,000627	98.764,18	61,93	98.733,22	0,999373	57,44	25.856,19	5.722.795,68	433.656,93	6.695.314	57,94	15,29	1.309,57
24	0,000657	98.702,26	64,85	98.669,83	0,999343	56,48	24.377,34	5.624.062,46	407.800,74	6.261.657	56,98	15,11	1.294,28
25	0,000686	98.637,41	67,67	98.603,58	0,999314	55,52	22.982,38	5.525.392,63	383.423,40	5.853.856	56,02	14,87	1.279,17
26	0,000714	98.569,74	70,38	98.534,55	0,999286	54,56	21.666,62	5.426.789,05	360.441,02	5.470.433	55,06	14,59	1.264,30

Figura A.1: Tábua de Comutação AT-2000 - Parte I

27	0,000738	98.499,36	72,69	98.463,02	0,999262	53,59	20.425,61	5.328.254,50	338.774,40	5.109.992	54,09	14,22	1.249,70
28	0,000758	98.426,67	74,61	98.389,37	0,999242	52,63	19.255,22	5.229.791,48	318.348,79	4.771.217	53,13	13,77	1.235,48
29	0,000774	98.352,06	76,12	98.314,00	0,999226	51,67	18.151,54	5.131.402,11	299.093,56	4.452.868	52,17	13,25	1.221,71
30	0,000784	98.275,94	77,05	98.237,42	0,999216	50,71	17.110,84	5.033.088,11	280.942,03	4.153.775	51,21	12,66	1.208,46
31	0,000789	98.198,89	77,48	98.160,15	0,999211	49,75	16.129,64	4.934.850,70	263.831,19	3.872.833	50,25	12,01	1.195,80
32	0,000789	98.121,41	77,42	98.082,70	0,999211	48,79	15.204,64	4.836.690,54	247.701,55	3.609.002	49,29	11,32	1.183,80
33	0,000790	98.043,99	77,45	98.005,27	0,999210	47,83	14.332,68	4.738.607,84	232.496,91	3.361.300	48,33	10,68	1.172,48
34	0,000791	97.966,54	77,49	97.927,79	0,999209	46,87	13.510,72	4.640.602,57	218.164,23	3.128.803	47,37	10,08	1.161,80
35	0,000792	97.889,05	77,53	97.850,28	0,999208	45,91	12.735,88	4.542.674,78	204.653,51	2.910.639	46,41	9,52	1.151,72
36	0,000794	97.811,52	77,66	97.772,69	0,999206	44,94	12.005,46	4.444.824,49	191.917,63	2.705.986	45,44	8,99	1.142,20
37	0,000823	97.733,86	80,43	97.693,64	0,999177	43,98	11.316,91	4.347.051,81	179.912,17	2.514.068	44,48	8,79	1.133,21
38	0,000872	97.653,42	85,15	97.610,85	0,999128	43,01	10.667,55	4.249.358,16	168.595,26	2.334.156	43,51	8,78	1.124,42
39	0,000945	97.568,27	92,20	97.522,17	0,999055	42,05	10.054,95	4.151.747,32	157.927,71	2.165.560	42,55	8,96	1.115,64
40	0,001043	97.476,07	101,67	97.425,23	0,998957	41,09	9.476,84	4.054.225,15	147.872,76	2.007.633	41,59	9,32	1.106,68
41	0,001168	97.374,40	113,73	97.317,53	0,998832	40,13	8.931,09	3.956.799,92	138.395,93	1.859.760	40,63	9,84	1.097,36
42	0,001322	97.260,67	128,58	97.196,38	0,998678	39,18	8.415,71	3.859.482,38	129.464,84	1.721.364	39,68	10,50	1.087,51
43	0,001505	97.132,09	146,18	97.059,00	0,998495	38,23	7.928,86	3.762.286,01	121.049,13	1.591.899	38,73	11,26	1.077,02
44	0,001715	96.985,90	166,33	96.902,74	0,998285	37,29	7.468,80	3.665.227,01	113.120,27	1.470.850	37,79	12,08	1.065,76
45	0,001948	96.819,57	188,60	96.725,27	0,998052	36,36	7.033,95	3.568.324,27	105.651,48	1.357.730	36,86	12,93	1.053,68
46	0,002198	96.630,97	212,39	96.524,77	0,997802	35,43	6.622,87	3.471.599,00	98.617,53	1.252.078	35,93	13,73	1.040,75
47	0,002463	96.418,57	237,48	96.299,83	0,997537	34,50	6.234,26	3.375.074,23	91.994,65	1.153.461	35,00	14,49	1.027,02
48	0,002740	96.181,09	263,54	96.049,33	0,997260	33,59	5.866,89	3.278.774,40	85.760,39	1.061.466	34,09	15,17	1.012,53
49	0,003028	95.917,56	290,44	95.772,34	0,996972	32,68	5.519,64	3.182.725,07	79.893,50	975.706	33,18	15,77	997,37
50	0,003330	95.627,12	318,44	95.467,90	0,996670	31,78	5.191,44	3.086.952,73	74.373,86	895.812	32,28	16,31	981,60
51	0,003647	95.308,68	347,59	95.134,89	0,996353	30,89	4.881,28	2.991.484,83	69.182,42	821.438	31,39	16,79	965,29
52	0,003980	94.961,09	377,95	94.772,12	0,996020	30,00	4.588,18	2.896.349,94	64.301,14	752.256	30,50	17,23	948,50
53	0,004331	94.583,15	409,64	94.378,33	0,995669	29,12	4.311,25	2.801.577,82	59.712,96	687.955	29,62	17,62	931,27
54	0,004698	94.173,51	442,43	93.952,29	0,995302	28,25	4.049,60	2.707.199,50	55.401,71	628.242	28,75	17,95	913,65
55	0,005077	93.731,08	475,87	93.493,14	0,994923	27,38	3.802,43	2.613.247,20	51.352,11	572.840	27,88	18,21	895,70
56	0,005465	93.255,21	509,64	93.000,39	0,994535	26,52	3.568,98	2.519.754,06	47.549,68	521.488	27,02	18,40	877,49
57	0,005861	92.745,57	543,58	92.473,78	0,994139	25,67	3.348,57	2.426.753,67	43.980,70	473.938	26,17	18,52	859,09
58	0,006265	92.201,99	577,65	91.913,16	0,993735	24,82	3.140,51	2.334.279,90	40.632,13	429.958	25,32	18,56	840,58

Figura A.2: Tábua de Comutação AT-2000 - Parte II

59	0,006694	91.624,34	613,33	91.317,67	0,993306	23,97	2.944,18	2.242.366,74	37.491,63	389.326	24,47	18,59	822,02
60	0,007170	91.011,01	652,55	90.684,73	0,992830	23,14	2.758,94	2.151.049,06	34.547,44	351.834	23,64	18,66	803,42
61	0,007714	90.358,46	697,03	90.009,94	0,992286	22,30	2.584,11	2.060.364,33	31.788,50	317.287	22,80	18,81	784,76
62	0,008348	89.661,43	748,49	89.287,19	0,991652	21,48	2.419,03	1.970.354,39	29.204,39	285.498	21,98	19,05	765,96
63	0,009093	88.912,94	808,49	88.508,70	0,990907	20,66	2.263,06	1.881.067,20	26.785,36	256.294	21,16	19,41	746,90
64	0,009968	88.104,45	878,23	87.665,34	0,990032	19,85	2.115,55	1.792.558,50	24.522,30	229.508	20,35	19,89	727,49
65	0,010993	87.226,23	958,88	86.746,79	0,989007	19,05	1.975,90	1.704.893,16	22.406,76	204.986	19,55	20,49	707,60
66	0,012188	86.267,35	1.051,43	85.741,64	0,987812	18,26	1.843,57	1.618.146,37	20.430,85	182.579	18,76	21,20	687,11
67	0,013572	85.215,92	1.156,55	84.637,65	0,986428	17,48	1.718,02	1.532.404,74	18.587,28	162.148	17,98	22,00	665,91
68	0,015160	84.059,37	1.274,34	83.422,20	0,984840	16,72	1.598,77	1.447.767,09	16.869,27	143.561	17,22	22,87	643,91
69	0,016946	82.785,03	1.402,88	82.083,60	0,983054	15,98	1.485,41	1.364.344,89	15.270,49	126.692	16,48	23,75	621,05
70	0,018920	81.382,16	1.539,75	80.612,28	0,981080	15,26	1.377,59	1.282.261,29	13.785,08	111.421	15,76	24,59	597,30
71	0,021071	79.842,41	1.682,36	79.001,23	0,978929	14,55	1.275,02	1.201.649,01	12.407,49	97.636	15,05	25,35	572,71
72	0,023388	78.160,05	1.828,01	77.246,04	0,976612	13,86	1.177,50	1.122.647,78	11.132,47	85.229	14,36	25,98	547,36
73	0,025871	76.332,04	1.974,79	75.344,65	0,974129	13,20	1.084,87	1.045.401,73	9.954,97	74.096	13,70	26,48	521,38
74	0,028552	74.357,25	2.123,05	73.295,73	0,971448	12,55	996,99	970.057,09	8.870,09	64.141	13,05	26,85	494,91
75	0,031477	72.234,21	2.273,72	71.097,35	0,968523	11,91	913,70	896.761,36	7.873,11	55.271	12,41	27,13	468,05
76	0,034686	69.960,49	2.426,65	68.747,17	0,965314	11,30	834,85	825.664,01	6.959,41	47.398	11,80	27,32	440,92
77	0,038225	67.533,84	2.581,48	66.243,10	0,961775	10,71	760,27	756.916,84	6.124,56	40.439	11,21	27,42	413,60
78	0,042132	64.952,36	2.736,57	63.584,07	0,957868	10,13	689,82	690.673,74	5.364,29	34.314	10,63	27,42	386,18
79	0,046427	62.215,79	2.888,49	60.771,54	0,953573	9,58	623,36	627.089,67	4.674,47	28.950	10,08	27,30	358,77
80	0,051128	59.327,29	3.033,29	57.810,65	0,948872	9,05	560,77	566.318,13	4.051,11	24.275	9,55	27,05	331,46
81	0,056250	56.294,01	3.166,54	54.710,74	0,943750	8,53	501,98	508.507,48	3.490,34	20.224	9,03	26,64	304,41
82	0,061809	53.127,47	3.283,76	51.485,59	0,938191	8,04	446,93	453.796,74	2.988,36	16.734	8,54	26,06	277,78
83	0,067826	49.843,71	3.380,70	48.153,36	0,932174	7,57	395,57	402.311,14	2.541,43	13.746	8,07	25,31	251,72
84	0,074322	46.463,01	3.453,22	44.736,40	0,925678	7,12	347,87	354.157,78	2.145,86	11.204	7,62	24,39	226,40
85	0,081326	43.009,79	3.497,81	41.260,88	0,918674	6,69	303,79	309.421,38	1.797,99	9.058	7,19	23,31	202,01
86	0,088863	39.511,98	3.511,15	37.756,40	0,911137	6,29	263,28	268.160,49	1.494,20	7.260	6,79	22,07	178,71
87	0,096958	36.000,82	3.490,57	34.255,54	0,903042	5,90	226,31	230.404,09	1.230,92	5.766	6,40	20,70	156,63
88	0,105631	32.510,26	3.434,09	30.793,21	0,894369	5,53	192,80	196.148,55	1.004,61	4.535	6,03	19,21	135,93
89	0,114858	29.076,17	3.339,63	27.406,35	0,885142	5,19	162,67	165.355,34	811,81	3.531	5,69	17,63	116,72
90	0,124612	25.736,53	3.207,08	24.132,99	0,875388	4,86	135,84	137.948,99	649,14	2.719	5,36	15,97	99,09

Figura A.3: Tábua de Comutação AT-2000 - Parte III

91	0,134861	22.529,45	3.038,34	21.010,28	0,865139	4,55	112,18	113.816,00	513,30	2.070	5,05	14,27	83,13
92	0,145575	19.491,11	2.837,42	18.072,40	0,854425	4,26	91,56	92.805,72	401,12	1.556	4,76	12,57	68,85
93	0,156727	16.653,69	2.610,08	15.348,65	0,843273	3,99	73,80	74.733,32	309,56	1.155	4,49	10,91	56,28
94	0,168290	14.043,61	2.363,40	12.861,91	0,831710	3,73	58,71	59.384,67	235,76	846	4,23	9,32	45,37
95	0,180245	11.680,21	2.105,30	10.627,56	0,819755	3,48	46,07	46.522,76	177,05	610	3,98	7,83	36,05
96	0,192565	9.574,91	1.843,79	8.653,01	0,807435	3,25	35,63	35.895,20	130,98	433	3,75	6,47	28,21
97	0,205229	7.731,12	1.586,65	6.937,79	0,794771	3,02	27,14	27.242,19	95,35	302	3,52	5,25	21,74
98	0,218683	6.144,47	1.343,69	5.472,62	0,781317	2,80	20,35	20.304,39	68,22	206	3,30	4,20	16,49
99	0,233371	4.800,78	1.120,36	4.240,60	0,766629	2,59	15,00	14.831,77	47,87	138	3,09	3,30	12,29
100	0,249741	3.680,42	919,15	3.220,84	0,750259	2,38	10,85	10.591,17	32,87	90	2,88	2,56	8,99
101	0,268237	2.761,26	740,67	2.390,93	0,731763	2,17	7,68	7.370,33	22,02	58	2,67	1,94	6,43
102	0,289305	2.020,59	584,57	1.728,31	0,710695	1,96	5,30	4.979,41	14,35	35	2,46	1,45	4,49
103	0,313391	1.436,02	450,04	1.211,01	0,686609	1,76	3,55	3.251,10	9,05	21	2,26	1,05	3,04
104	0,340940	985,99	336,16	817,91	0,659060	1,57	2,30	2.040,09	5,49	12	2,07	0,74	1,99
105	0,372398	649,82	241,99	528,83	0,627602	1,38	1,43	1.222,19	3,19	7	1,88	0,50	1,25
106	0,408210	407,83	166,48	324,59	0,591790	1,20	0,85	693,36	1,76	3	1,70	0,33	0,75
107	0,448823	241,35	108,32	187,19	0,551177	1,03	0,47	368,77	0,91	2	1,53	0,20	0,42
108	0,494681	133,03	65,81	100,12	0,505319	0,86	0,25	181,58	0,44	1	1,36	0,11	0,22
109	0,546231	67,22	36,72	48,86	0,453769	0,71	0,12	81,46	0,19	0	1,21	0,06	0,11
110	0,603917	30,50	18,42	21,29	0,396083	0,57	0,05	32,59	0,08	0	1,07	0,03	0,05
111	0,668186	12,08	8,07	8,05	0,331814	0,44	0,02	11,30	0,03	0	0,94	0,01	0,02
112	0,739483	4,01	2,96	2,53	0,260517	0,31	0,01	3,26	0,01	0	0,81	0,00	0,01
113	0,818254	1,04	0,85	0,62	0,181746	0,20	0,00	0,73	0,00	0	0,70	0,00	0,00
114	0,904945	0,19	0,17	0,10	0,095055	0,10	0,00	0,11	0,00	0	0,60	0,00	0,00
115	1,000000	0,02	0,02	0,01	0,000000	0,00	0,00	0,01	0,00	0	0,50	0,00	0,00

Figura A.4: Tábua de Comutação AT-2000 - Parte IV