

Sistemas Dinâmicos Discretos

Eliane Alves de Jesus¹

Telles Timóteo da Silva²

Luis Alberto D'Afonseca³

Resumo: Sistemas dinâmicos discretos são sistemas em que a evolução no tempo ocorre em passos discretos, em oposição ao tempo contínuo. Neste trabalho fazemos um estudo da teoria matemática associada aos sistemas dinâmicos discretos descritos por equações de diferença. Apresentamos seus conceitos iniciais, exploramos as representações gráficas, pontos fixos e formas fechadas de equações de diferenças lineares. Depois consideramos os sistemas de equações de diferenças lineares e não-lineares.

Exploramos também o uso desses sistemas na modelagem de fenômenos biológicos como a dinâmica populacional e a epidemiologia, mostrando o efeito no comportamento dos modelos decorrente da variação das constantes associadas à cada equação.

Nosso objetivo final é propor que os professores ministrem o conteúdo abordado nesse trabalho para alunos do Ensino Médio. Propomos que tal abordagem seja feita a partir do uso de ferramentas gráficas e da análise dos gráficos dessas equações a fim de não somente discorrer sobre sistemas dinâmicos, mas principalmente, trabalhar com a análise de gráficos, assunto de grande importância para o processo de aprendizagem desses alunos.

No intuito de direcionar uma forma como o assunto pode ser ministrado, criamos um plano de aula contendo sugestões de como os problemas podem ser apresentados e analisados conjuntamente por alunos e professores. Nesse plano de aula sugerimos a utilização de planilhas eletrônicas como ferramenta computacional capaz de fazer todos os cálculos e gerar os gráficos das equações de diferenças. Exploramos o caráter de crescimento, decréscimo, aproximação assintótica dos gráficos e o seu significado para o contexto da modelagem de um sistema real.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos discretos, equações de diferenças, relações de recorrência, biomatemática, dinâmica populacional, representação gráfica, modelagem matemática

¹Aluna de Mestrado do PROFMAT, Turma 2014, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, elianeaj@gmail.com

²Professor orientador, Departamento de Física e Matemática - DEFIM, UFSJ, timoteo@ufs.br

³Professor co-orientador, Departamento de Física e Matemática - DFM, CEFET-MG, luisdafonseca@des.cefetmg.br

1 Introdução

Na modelagem de sistemas dinâmicos, ou seja, sistemas que evoluem no tempo, há casos em que é mais adequado levar em consideração variações discretas do tempo. Tais modelos são denominados discretos. Boa parte desses modelos é descrita por equações de diferenças, que são o objeto de estudo desse trabalho.

Na segunda seção desse trabalho apresentamos os principais conceitos relacionados a equações de diferenças, exemplificando esses conceitos e sugerindo tanto uma abordagem analítica quanto uma abordagem gráfica para a análise dos mesmos. Seguimos definindo e ilustrando dois importantes modelos discretos de crescimento populacional, conhecidos como modelos de Malthus e de Verhulst e finalizamos apresentando um método para encontrar formas fechadas para equações de diferenças lineares homogêneas e com coeficientes constantes.

Na terceira seção apresentamos os principais conceitos relacionados a sistemas de equações de diferenças lineares e apresentamos um método para encontrar uma forma fechada que descreva esses sistemas.

A quarta seção desse trabalho é dedicada ao estudo de equações e sistemas de equações de diferenças não-lineares, apresentando métodos para a linearização dos mesmos, haja vista a grande dificuldade de se determinar formas fechadas que descrevam modelos não-lineares.

Na quinta seção mostramos diferentes modelos epidemiológicos cuja descrição e análise passam pelo processo de linearização desenvolvida na seção anterior.

A sexta e última seção é dedicada à apresentação das principais informações contidas nas seções anteriores em uma linguagem direcionada para alunos do Ensino Médio. Nela a construção e análise de gráficos são apresentadas como principal ferramenta de estudo de modelos dinâmicos discretos, descritos por equações e sistemas de equações de diferenças. Ao final apresentamos planos de aula que podem servir de parâmetro para professores que se interessem por apresentar esse assunto em sala de aula. Vale ressaltar a importância da abordagem deste tema no Ensino Médio, pois trata-se de uma aplicação concreta de equações matemáticas e é uma forma de ilustrar e desenvolver os conceitos relacionados à análise gráfica.

2 Equações de Diferenças

Esta seção apresenta os principais conceitos matemáticos ligados à equações de diferenças. Na primeira subseção apresentaremos conceitos básicos que definem os principais tipos de equações de diferenças. Na segunda, apresentaremos alguns gráficos que podem ser gerados a partir de equações de diferenças, os quais serão analisados para obter conclusões sobre o comportamento dos sistemas representados por essas equações. Na terceira, vamos ilustrar a teoria apresentada até então por alguns modelos de crescimento populacional.

A quarta subseção é dedicada a definir os conceitos ligados a pontos de equilíbrio e a observá-los sob um enfoque gráfico. Na quinta, mostraremos como encontrar uma forma fechada para um tipo específico de equações, denominado equações de diferenças lineares com coeficientes constantes e homogêneas, o que será essencial para o desenvolvimento da terceira e da quarta seção desse trabalho.

2.1 Conceitos Iniciais

É importante saber lidar com equações de diferenças, uma vez que elas podem ser usadas para descrever modelos das mais diversas áreas do conhecimento como biologia, economia, física, dentre outros. Um exemplo de equação de diferenças pode ser observado no problema proposto por **Fibonacci** em 1202, a respeito de uma população de coelhos: Um casal de coelhos pode reproduzir-se após dois meses de vida e, a partir daí, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de n meses? Os números de casais de coelhos ao longo dos meses são denominados *números de Fibonacci* e formam a sequência

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots \quad (1)$$

Podemos observar uma lei de formação, associada à sequência, dada por:

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_n &= x_{n-1} + x_{n-2} \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Uma relação como esta é denominada *relação de recorrência*, pois há uma dependência entre cada termo, a partir do terceiro, e os termos anteriores a ele.

Definição 2.1. *Uma **relação de recorrência** ou **equação de diferenças** é uma equação que define cada termo de uma sequência em função de termos anteriores e pode ser denotada por*

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}) \quad n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

sendo f uma função qualquer.

O nome *equação de diferenças* deve-se ao fato de podermos escrever a equação anterior como a diferença

$$x_n - x_{n-1} = g(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$$

a fim de fazer uma analogia com o operador diferencial, ver [1]. Como o termo *equação de diferenças* é mais usual que o termo *relação de recorrência*, no que diz respeito aos exemplos abordados neste texto, passaremos a usá-lo a partir de agora.

Definição 2.2. Se a função $f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$ é linear nas variáveis x_{n-1} até x_{n-k} dizemos que

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$$

é uma **equação de diferenças linear**, caso contrário, dizemos que é uma **equação de diferenças não-linear**.

Mais especificamente, uma **equação de diferenças linear** é uma equação da forma

$$x_n = c_1(n)x_{n-1} + c_2(n)x_{n-2} + \dots + c_k(n)x_{n-k} + c_{k+1}(n) \quad (4)$$

Em que $c_i(n)$ são os coeficientes da equação. Observe que, para uma equação de diferenças ser linear, deve-se manter a linearidade nas variáveis x_i , podendo os coeficientes $c_i(n)$ ser funções não lineares de n .

2.1.1 Exemplos de Equações de Diferenças

A equação de Fibonacci (2) é uma equação de diferenças linear, bem como as equações

$$\begin{aligned} x_n &= n^2 x_{n-1} \\ x_n &= 7x_{n-2} + 9x_{n-3} + \text{sen } n \end{aligned}$$

Enquanto que, as equações

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1}^2 \\ x_n &= x_{n-1}(1 - x_{n-1}) \\ x_n &= \sqrt{x_{n-1}} \end{aligned}$$

são todas não-lineares.

Definição 2.3. Classificamos a equação (4) como **homogênea** se $c_{k+1}(n) = 0$. Caso contrário, diremos que é uma equação **não-homogênea**.

Definição 2.4. Classificamos uma equação de diferenças como sendo de primeira ordem, segunda ordem, e assim por diante, conforme um termo genérico seja definido em função de um, ou dois, ou mais termos anteriores, respectivamente.

Sendo assim, uma equação de diferenças da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1})$$

é dita de primeira ordem, uma equação da forma

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2})$$

é uma equação de segunda ordem e

$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$$

é uma equação de ordem k .

2.2 Mapas e Sua Representação Gráfica

Em geral, modelamos um sistema dinâmico por uma equação matemática para compreender seu comportamento ao longo do tempo n . Se tal equação tem caráter recursivo então a abordagem mais direta para visualizar tal comportamento é analisar o gráfico dos resultados das iterações, ou seja, dos termos consecutivos da equação de diferenças.

A tarefa de descobrir os resultados dessas iterações era bastante custosa há não muitas décadas, mas atualmente ela é trivial devido ao número considerável de recursos computacionais, como planilhas eletrônicas, disponíveis nas mais diversas versões. Os resultados das iterações em geral serão usados para fazer inferências sobre o comportamento do sistema modelado por uma equação de diferenças.

Definição 2.5. *A sequência x_0, x_1, x_2, \dots gerada pelas iterações sucessivas de uma equação de diferenças é denominada **órbita** de x_0 e é denotada por $O(x_0)$.*

2.2.1 Exemplos de Órbitas

A sequência dos *números de Fibonacci*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

nada mais é que a órbita, $O(1)$ de sua equação (2).

Analogamente, dada a equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 5$$

para cada valor inicial, x_0 temos uma órbita diferente. A tabela a seguir mostra três exemplos de órbitas para esta equação de diferenças

x_0	Órbita	Primeiros termos					
2	$O(2)$	2	1	-2	-11	-38	-119
3	$O(3)$	3	4	7	16	43	124
2,5	$O(2,5)$	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5	2,5

Considerando agora a equação não-linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1}}$$

podemos dar dois exemplos de órbitas, com valores aproximados dados na tabela

x_0	Órbita	Primeiros termos					
1,5	$O(1,5)$	1,5	1,22	1,11	1,05	1,03	1,01
0,6	$O(0,6)$	0,6	0,77	0,88	0,94	0,97	0,98

A partir da órbita de uma equação de diferenças podemos fazer inferências sobre seu comportamento, como deduzir se a órbita é crescente, decrescente, constante, etc. Contudo, uma análise gráfica, em geral, é mais eficiente para fazer tal análise. Podemos construir um gráfico a partir de pontos da forma (n, x_n) conforme a definição:

Definição 2.6. Denomina-se **mapa** o conjunto de pontos (n, x_n) , $n \in \mathbb{N}$, em que x_n é o n -ésimo termo da órbita $O(x_0)$ da equação de diferenças.

Para ilustrar o conceito de mapas, representaremos na Figura 1 o mapa obtido a partir das 50 primeiras iterações da equação de diferenças $x_n = 0,9x_{n-1}$ usando $x_0 = 10$ como ponto inicial. Nesta figura cada ponto representa um termo do mapa da equação. A componente horizontal indica o índice do ponto, n , e a componente vertical indica o valor de x_n . Observe que nesse primeiro exemplo o mapa inicia-se no ponto $(n, x_n) = (0, 10)$ indicando que o primeiro valor da órbita tem índice zero e valor igual a 10. Os pontos seguintes indicam que o valor da órbita diminui gradualmente a cada iteração. Note que, após 5 iterações a solução é igual a 6 e que após 15 a solução é 2. Ao alcançar as 50 iterações vemos que a solução se aproximou bastante de zero e aparenta tender para esse valor quando n cresce.

Observe, agora, a Figura 2 onde estão representadas as 50 primeiras iterações da equação de diferenças $x_n = 0,9x_{n-1} + 2$ usando $x_0 = 10$ como ponto inicial. O mapa inicia-se no ponto $(n, x_n) = (0, 10)$ e o gráfico indica que os valores x_n da órbita crescem a cada iteração. Além disso observamos que após as 50 iterações o gráfico se aproximou bastante de 20 aparentando tender para esse valor quando n cresce.

Por fim, observe a Figura 3 em que estão representadas as 50 primeiras iterações de $x_n = 1,1x_{n-1}$ tomando-se $x_0 = 10$ como valor inicial. Este gráfico também inicia-se no ponto $(n, x_n) = (0, 10)$, contudo, seu comportamento difere bastante dos anteriores uma vez que, como a inclinação do gráfico mostrou-se crescente, podemos supor que os valores de x_n crescerão de forma ilimitada.

Percebemos, portanto, que a análise gráfica do mapa de uma equação de diferenças pode nos dar um indício do seu comportamento ao longo do tempo.

2.3 Modelos de Crescimento Populacional

Aplicaremos os conceitos vistos até aqui a dois importantes modelos de crescimento populacional, o modelo de Malthus e o modelo logístico ou de Verhulst.

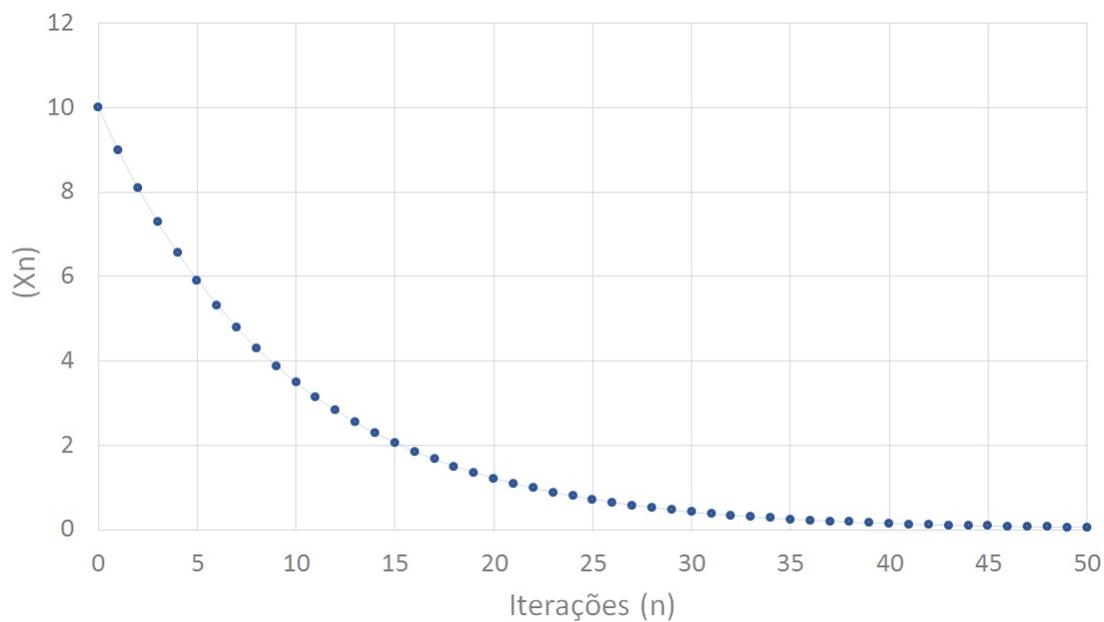


Figura 1: Mapa de $x_n = 0,9x_{n-1}$ para $x_0 = 10$. Vemos uma órbita decrescente cujos valores parecem se aproximar cada vez mais de $x = 0$.

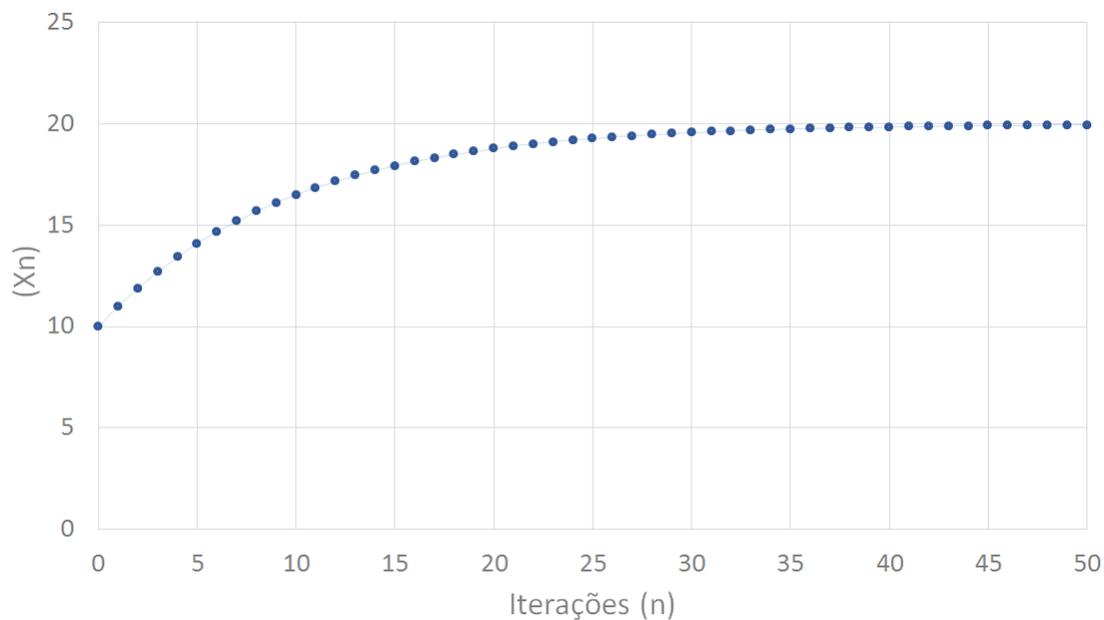


Figura 2: Mapa de $x_n = 0,9x_{n-1} + 2$ para $x_0 = 10$. Vemos uma órbita crescente cujos valores parecem se aproximar cada vez mais de $x = 20$.

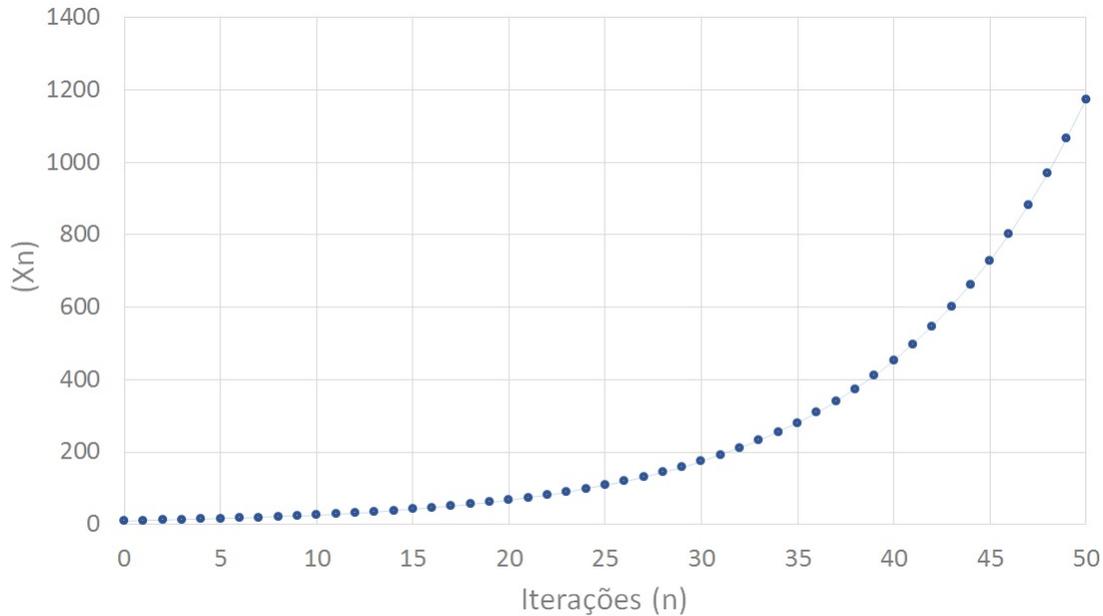


Figura 3: Mapa de $x_n = 1,1x_{n-1}$ para $x_0 = 10$. Vemos uma órbita crescente que parece ser ilimitada.

2.3.1 O Modelo Malthusiano

Em 1798, **Thomas Malthus** propôs um modelo de crescimento populacional segundo o qual uma população cresce, em um determinado instante, proporcionalmente à população total naquele instante, [9].

Representando por x_n o tamanho da população no tempo n , com $n \in \mathbb{N}$ e por α , a taxa, supostamente constante, de crescimento ou de declínio da população, teremos que a seguinte equação de diferenças descreve a forma discreta do modelo proposto por Malthus

$$x_n = (1 + \alpha)x_{n-1} \tag{5}$$

Observamos que x_n pode representar tanto o número de indivíduos da população quanto sua biomassa, ou seja, a massa biológica da população.

Esse modelo é bastante utilizado para descrever o crescimento de populações em um curto intervalo de tempo, pois não leva em conta muitos fatores que poderiam influenciar na dinâmica da população (tanto em seu crescimento quanto em seu declínio), como interação com outras espécies, a competição por recursos, dentre outros.

Se o valor de α for positivo, então o tamanho da população será crescente, uma vez que o valor de cada termo x_n corresponderá ao valor do produto do termo anterior x_{n-1} pela constante $(1 + \alpha)$ que é maior que 1. A título de exemplo, se na equação (5) tomarmos $\alpha = 0,06$ e $x_0 = 10$, teremos a equação de diferenças $x_n = 1,06x_{n-1}$ com $x_0 = 10$ cuja

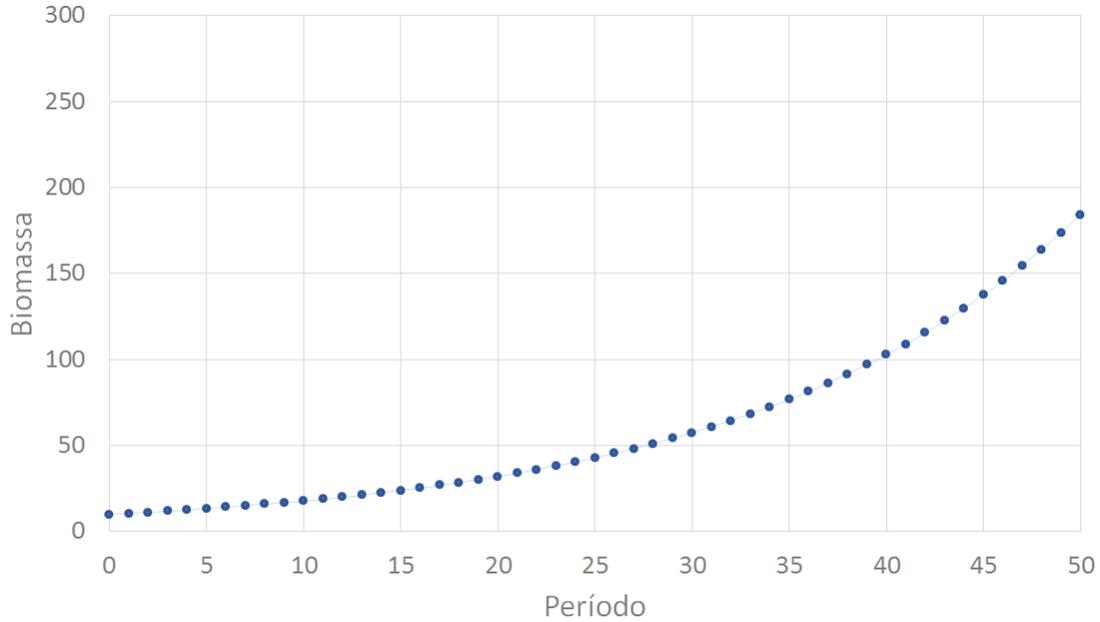


Figura 4: Mapa para a equação de Malthus com $x_n = 1,06x_{n-1}$ para $x_0 = 10$. Observamos uma população sempre crescente que parece ser não-limitada.

órbita crescente pode ser observada na Figura 4, que contém a representação das primeiras iterações dessa equação.

Agora, se $-1 < \alpha < 0$ a população será decrescente, uma vez que teremos $0 < (1+\alpha) < 1$. Por exemplo, se em (5) tomarmos $x_0 = 10$ e $\alpha = -0,09$, teremos a equação $x_n = 0,91x_{n-1}$, $x_0 = 10$, cujas primeiras iterações estão representadas no gráfico da Figura 5, cujo comportamento, além de ser decrescente, parece estar tendendo a zero a medida que n cresce.

Vale lembrar que devemos ter $\alpha > -1$, caso contrário teríamos valores negativos para a população dado que, nesse caso, teríamos $(1 + \alpha) < 0$.

2.3.2 O Modelo de Verhulst

Como dissemos, o modelo proposto por Malthus não leva em consideração o caráter finito do ambiente, uma vez que o fator $(1 + \alpha)$ de aumento, ou declínio, da população é constante. Um outro modelo para o crescimento populacional pode ser encontrado no texto de Leah Edelstein-Keshet [5] e é uma versão discreta da **equação logística** de crescimento populacional, também conhecida como equação de **Verhulst**:

$$x_n = rx_{n-1}(1 - x_{n-1}) \quad (6)$$

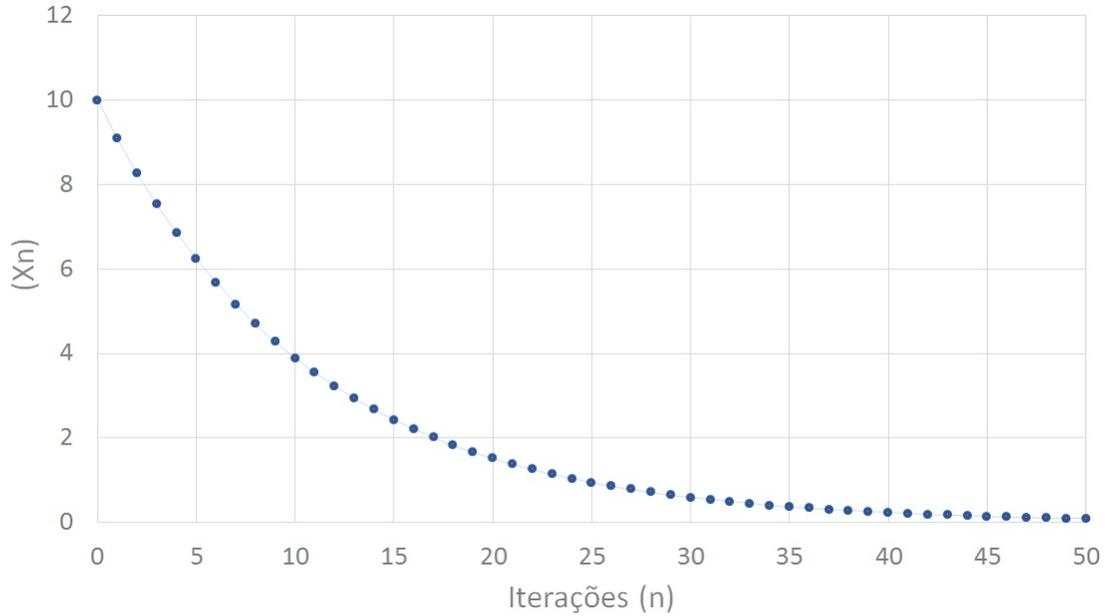


Figura 5: Mapa de $x_n = 0,91x_{n-1}$ para $x_0 = 10$. Observamos uma população decrescente, tendendo a 0.

Nela temos que r representa um fator de aumento ou declínio populacional e x_n o tamanho da população no tempo n , com $n \in \mathbb{N}$. Apesar de o fator r ser constante, observamos que à medida que o tamanho x_n da população aumenta, o fator $(1 - x_n)$ diminui, contribuindo para desacelerar o crescimento. Isso pode ser interpretado como uma forma de descrever a competição dos indivíduos por recursos.

Observe que devemos ter $r > 0$ e $0 < x_n < 1$ caso contrário a população assumiria valores negativos. Além disso, como $0 < x_n < 1$ é interessante entender o valor x_n como a biomassa populacional pois teremos sempre valores decimais.

Na equação logística, (6), se tomarmos $r = 1,5$ teremos $x_n = 1,5x_{n-1}(1 - x_{n-1})$. Assumindo uma população inicial $x_0 = 0,5$ podemos construir o gráfico das primeiras iterações dessa equação, representado na Figura 6. Observe que mesmo $r = 1,5$ representando uma taxa de aumento da população, o caráter de competição faz com que o comportamento da população seja inicialmente decrescente. Além disso, à medida que a população decresce, a taxa de decrescimento, indicada pela inclinação do gráfico diminui. Ao longo do tempo, a órbita parece tender a um valor próximo de 0,34.

Se na equação logística tomarmos $r = 2,8$ e $x_0 = 0,01$, podemos construir o gráfico da Figura 7 contendo o resultado das primeiras 50 iterações da equação correspondente, $x_n = 2,8x_{n-1}(1 - x_{n-1})$, com ponto inicial em $(0; 0,01)$ o valor de x_n parece tender a um valor próximo de 0,64 à medida que n aumenta. Esse gráfico é caracterizado pela oscilação do comportamento de crescimento e decrescimento, novamente remetendo ao caráter de

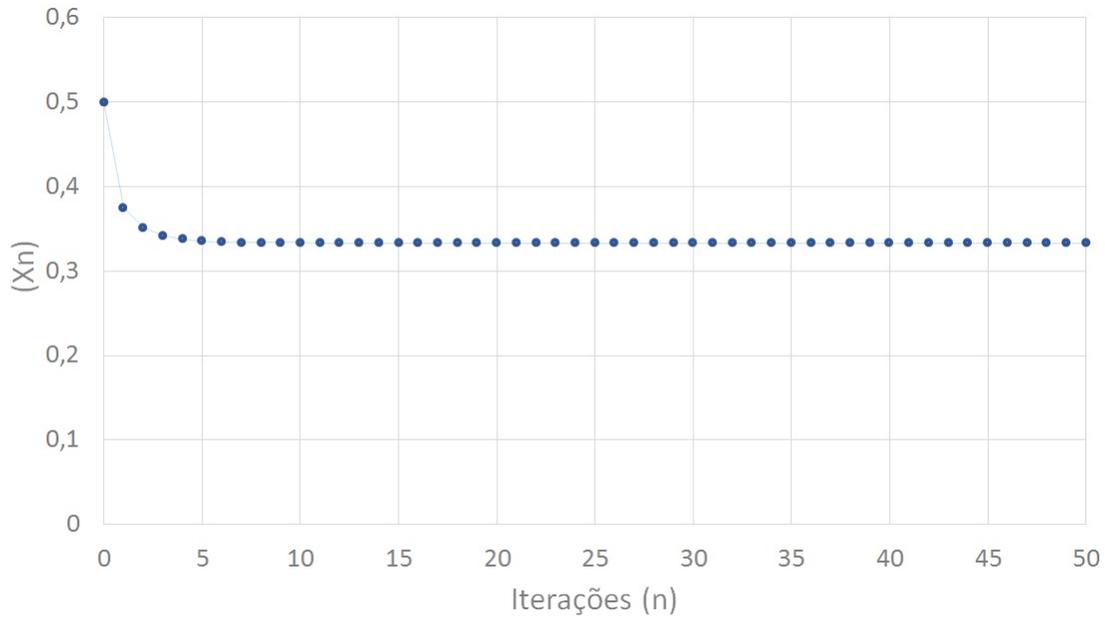


Figura 6: Mapa da equação de Verhulst para $r = 1,5$ e $x_0 = 0,5$

competição por recursos, pois quando a população diminui sobram recursos e ela pode voltar a crescer e vice versa.

Os gráficos das Figuras (5), (6) e (7) parecem se estabilizar, cada um, em um valor. Determinar previamente se a órbita que representa um dado modelo se fixa ou não em um determinado valor é de extrema importância para muitas situações, conforme descreveremos na próxima seção.

2.4 Pontos Fixos de Uma Equação de Diferenças

Há inúmeros motivos pelos quais é importante determinar pontos fixos de uma órbita e classificar sua estabilidade. Na biologia, por exemplo, se o habitat de determinados seres vivos é representado por um sistema dinâmico em que está sendo mensurada a temperatura ou a salinidade, é importante saber se as mesmas atingem um ponto de equilíbrio e se este é, ou não, estável uma vez que, seres vivos costumam conseguir sobreviver em um intervalo pequeno de variação de temperatura e de salinidade e um grande desequilíbrio nas mesmas pode causar a morte dos indivíduos. Nesta seção definimos os principais conceitos relacionados a pontos fixos de uma órbita. Vale ressaltar que tais conceitos serão muito relevantes para desenvolver a teoria da Seção 4.

Se existe um valor x^* tal que, uma vez atingido esse valor, todos os próximos valores de uma dada sequência são iguais a ele, esse valor será denominado ponto fixo da sequência.

Definição 2.7. Um ponto x^* é denominado *ponto fixo*, ou *ponto de equilíbrio* ou,

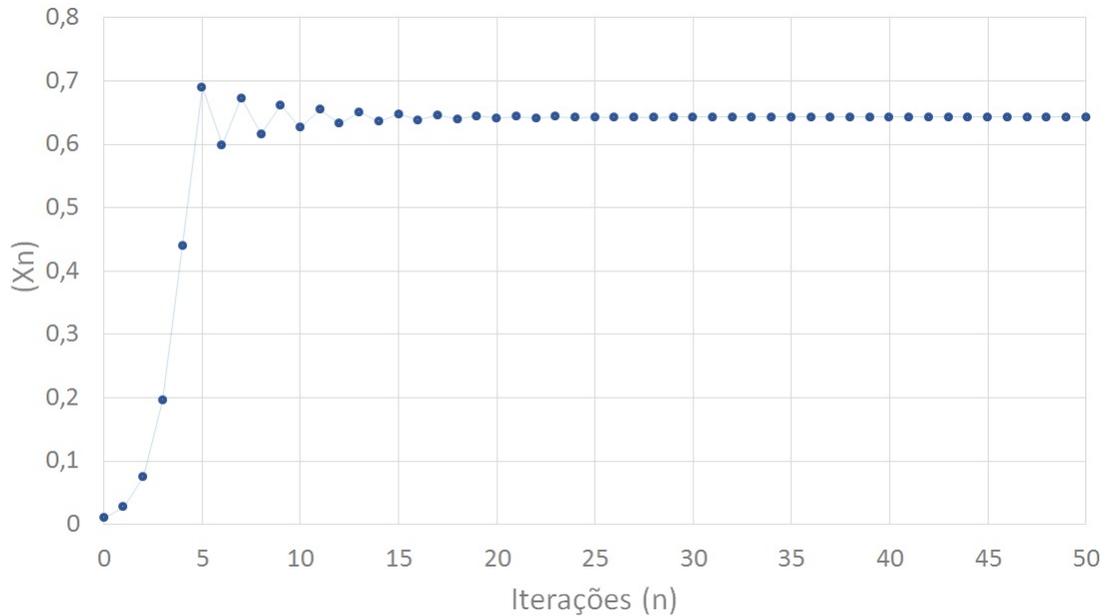


Figura 7: Mapa da equação de Verhulst para $r = 2,8$ e $x_0 = 0,01$

ainda, **estado estacionário** de $x_{n+1} = f(x_n)$ se satisfaz à equação $x^* = f(x^*)$.

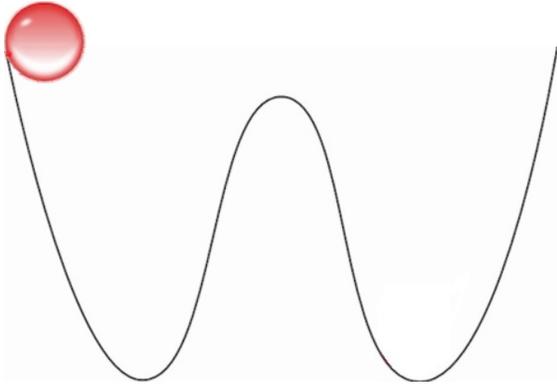
A definição acima não pode ser estendida para uma equação de diferenças de ordem maior que 1 uma vez que em $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$ f é uma função da forma $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, os pontos de entrada e saída pertencem a espaços de dimensões distintas.

Quando determinamos um ponto fixo de um mapa, geralmente estamos também interessados em saber se ele é um ponto fixo estável, ou instável, conforme as seguintes definições:

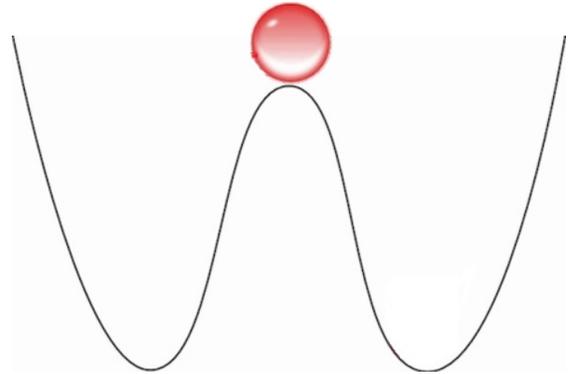
Definição 2.8. Um ponto fixo x^* é denominado **estável** se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|x_0 - x^*| < \delta$ então $|x_n - x^*| < \epsilon; \forall n \in \mathbb{N}$. Um ponto fixo x^* é denominado **instável** se não é estável.

Isso significa que, se tomarmos para x_0 um valor muito próximo de x^* , então as próximas iteradas se manterão próximas de x^* .

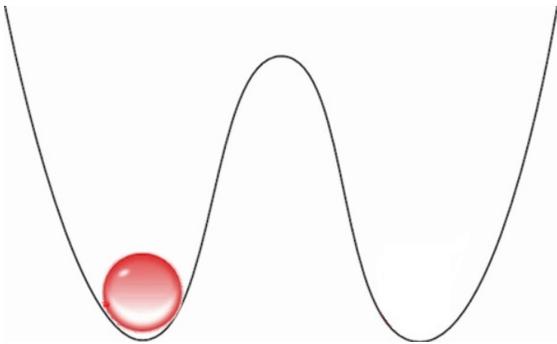
Uma maneira de ilustrar essas definições é pensar em uma esfera lançada do alto de uma colina conforme ilustrado na Figura 8a. Esperamos que com o passar do tempo a bolinha pare num vale ou no pico. Quando ela para em um vale, conforme a Figura 8d temos um estado estacionário estável pois, se movimentarmos a bolinha um pouquinho ela tende a voltar para o mesmo lugar. Contudo, quando para em um pico, conforme Figura 8b, uma pequena perturbação fará com que a bola saia definitivamente daquele local. Logo a bolinha parada no pico configura um estado estacionário instável.



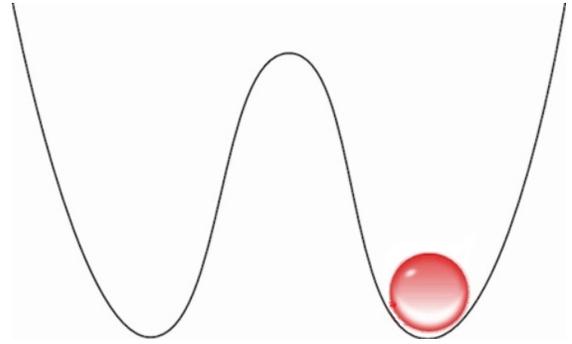
(a) Condição inicial, a bolinha é lançada do alto de uma colina.



(b) Bolinha em um pico representando um equilíbrio instável, qualquer perturbação a afasta desta posição.



(c) Bolinha em um vale representando um equilíbrio estável, caso ela sofra uma pequena perturbação ela retorna exatamente ao mesmo ponto de equilíbrio.



(d) Outro equilíbrio estável, a bolinha também retorna a este ponto após uma pequena perturbação.

Figura 8: Ilustração dos conceitos de equilíbrio estável e instável. A primeira figura representa a condição inicial, as demais figuras ilustram diferentes equilíbrios possíveis para este sistema.

Definição 2.9. Um ponto fixo x^* é denominado **atrator** se existe $R > 0$ tal que, se

$$|x_0 - x^*| < R \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$$

Quando R é qualquer valor positivo dizemos que x^* tem estabilidade assintótica global.

Definição 2.10. Um ponto fixo x^* é denominado **repulsor** se existe $\epsilon > 0$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tais que, se $|x_0 - x^*| < \epsilon$ implica que $|x_n - x^*| > |x_0 - x^*|$ para todo $n \geq N$.

2.4.1 Pontos Fixos de Algumas Equações

Para encontrar os pontos fixos da equação $x_n = 0,9x_{n-1}$, cujo mapa da órbita $O(10)$ está representado na Figura 5, basta tomar $x_n = x_{n-1} = x^*$ obtendo a equação

$$x^* = 0,9x^* \quad \text{cuja solução é} \quad x^* = 0$$

É fácil provar que $x^* = 0$ é ponto fixo estável e atrator pois se

$$|x_n - 0| = \epsilon \quad \Rightarrow \quad |x_{n+1} - 0| = 0,9|x_n - 0| < \epsilon$$

ou seja, se começarmos por um ponto distante ϵ de 0, então os valores das próximas iterações estarão ainda mais próximo de 0. Percebe-se que a suposição de que os pontos do gráfico se aproximam cada vez de 0 está de acordo com os resultados encontrados.

Vamos, agora, determinar os pontos fixos da equação $x_{n+1} = 1,5x_n(1 - x_n)$, cujo mapa da órbita $O(10)$ está representado na Figura 6. Resolvendo, analogamente, uma equação da forma

$$x^* = 1,5x^*(1 - x^*) \quad \text{obém-se as seguintes soluções:} \quad x^* = 0 \quad \text{e} \quad x^* = \frac{1}{3}$$

Analisando a figura é fácil observar o valor $\frac{1}{3}$ como um ponto do qual a órbita se aproxima. Contudo, a órbita não parece se aproximar de 0. Isso não representa nenhum erro pois lembramos que a órbita de uma equação de diferenças depende, dentre outras coisas, de seu valor inicial. Se construirmos o gráfico de $x^* = 1,5x^*(1 - x^*)$ para $x_0 = 0,001$, conforme representado na Figura 9, veremos que 0 é um ponto fixo repulsor, portanto instável. Uma forma de classificar analiticamente os pontos fixos de uma equação de diferenças não-linear será apresentada na Seção 4.

2.5 Formas Fechadas para Equações de Diferenças

Se quisermos saber o n -ésimo termo de uma sequência dada por uma relação recorrente, teremos que calcular os $n - 1$ termos anteriores ou então podemos buscar por uma solução para x_n que dependa somente do valor de n .

Definição 2.11. *Uma **forma fechada** para uma equação de diferenças, também denominada uma **solução analítica**, é uma expressão para x_n que não depende de cada termo anterior, mas apenas do valor do passo n .*

Apesar de tentador, essa busca nem sempre gera bons resultados, pois encontrar uma forma fechada para uma equação de diferenças pode ser uma tarefa extremamente difícil e, em alguns casos, impossível.

Uma classe de equações de diferenças para as quais é sempre possível encontrar uma forma fechada é a das **equações de diferenças lineares homogêneas com coeficientes**

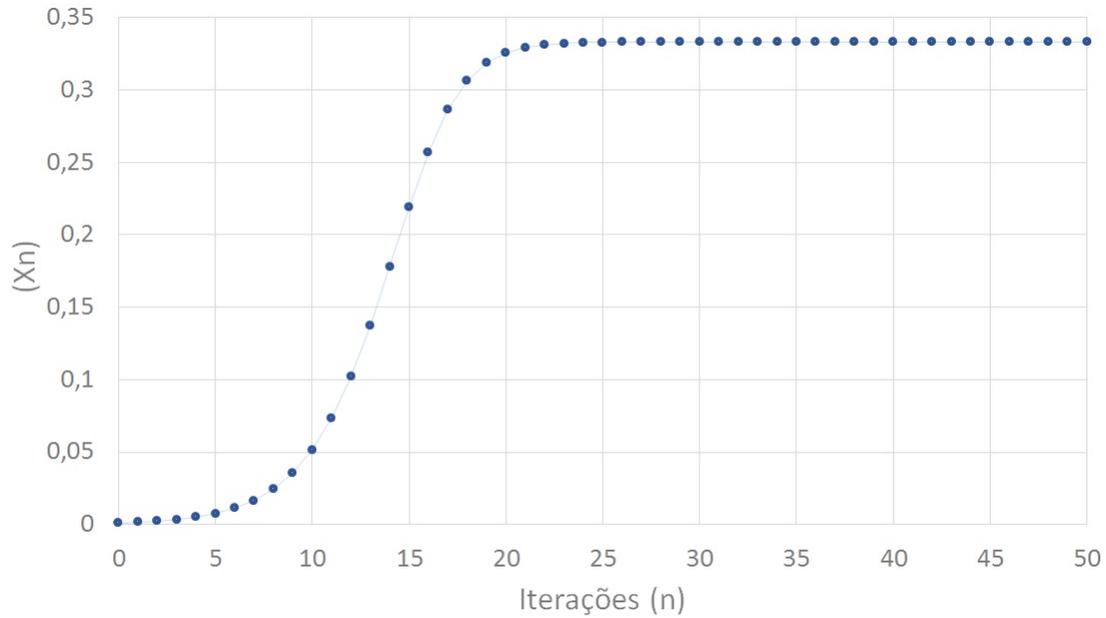


Figura 9: Mapa da equação de Verhulst para $r = 1,5$ e $x_0 = 0,001$

constantes [1], ou seja, equações da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \dots + c_k x_{n-k}, \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Vamos começar pelo caso mais simples de equações de diferenças lineares homogêneas com coeficientes constantes, que é uma equação com a forma

$$x_n = \lambda x_{n-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Neste caso, quão grande será o valor de x_n após n iterações?

Expressando cada termo em função dos anteriores chegaremos a uma expressão para x_n

$$\begin{aligned} x_n &= \lambda x_{n-1} \\ &= \lambda [\lambda x_{n-2}] \\ &= \lambda [\lambda (\lambda x_{n-3})] \\ &\dots \\ &= \lambda^n x_0 \end{aligned}$$

Ou seja, podemos escrever uma fórmula direta para x_n para todo n

$$x_n = \lambda^n x_0$$

Podemos dizer que x_n representa uma função exponencial com domínio $D = \mathbb{N}$, portanto o valor de λ determinará o comportamento do sistema. Ou seja, dada uma equação da forma $x_n = \lambda x_{n-1}$ temos que, se

$$\begin{aligned} |\lambda| > 1 & \quad \text{então} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |x_n| = \infty \\ |\lambda| < 1 & \quad \text{então} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} |x_n| = 0 \\ \lambda = 1 & \quad \text{então} \quad x_n = x_0 \quad \forall n \\ \lambda = 0 & \quad \text{então} \quad x_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

Note que os dois últimos casos descrevem sequências constantes.

Podemos sumarizar a informação descrita acima no seguinte teorema.

Teorema 2.1. *Para $\lambda \neq 1$, o único ponto fixo de $x_n = \lambda x_{n-1}$ é $x^* = 0$.*

Demonstração: Um ponto fixo de $x_n = \lambda x_{n-1}$ é um ponto x^* que satisfaz

$$x^* = \lambda x^*$$

portanto

$$x^*(1 - \lambda) = 0$$

o que implica que

$$\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad x^* = 0$$

Na condição $\lambda = 1$ todos os pontos seriam fixos, contudo esse caso não nos interessa muito, pois trata-se de uma sequência constante. Para $\lambda \neq 1$ o único ponto fixo dessa equação é $x^* = 0$. \square

Quanto à estabilidade desta equação de diferenças temos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Se $|\lambda| < 1$ então $x^* = 0$ é ponto fixo estável e atrator e se $|\lambda| > 1$ então $x^* = 0$ é ponto fixo instável e repulsor.*

Demonstração: Seja $|\lambda| < 1$; dado $\epsilon > 0$, se tomarmos $\delta = \epsilon$, então, se $|x_0 - 0| < \delta$ ou seja, se $|x_0| < \delta$ então

$$|x_n - 0| = |\lambda^n x_0 - 0| = |\lambda^n| |x_0| < |\lambda^n| \delta < \epsilon$$

sendo, portanto $x^* = 0$ ponto fixo estável.

O fato de $x^* = 0$ ser atrator decorre da propriedade anterior.

Por outro lado, se $|\lambda| > 1$ então, para algum n teríamos $|x_n - 0| > \epsilon$ e portanto, $x^* = 0$ é instável. Assim, pela propriedade anterior, teríamos $x^* = 0$ repulsor. \square

Tentaremos generalizar a procura de uma solução analítica para uma equação da forma (7)

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

Como tentativa inicial, vamos supor que essa equação tenha uma solução com o mesmo formato da solução da equação de primeira ordem, ou seja, da forma

$$x_n = a \lambda^n \quad \text{com} \quad a \neq 0.$$

Portanto é verdade que

$$a \lambda^n = c_1 a \lambda^{n-1} + c_2 a \lambda^{n-2} + \cdots + c_k a \lambda^{n-k}$$

e, conseqüentemente,

$$a \lambda^{n-k} (\lambda^k - c_1 \lambda^{k-1} - c_2 \lambda^{k-2} - \cdots - c_{k-1} \lambda - c_k) = 0$$

Desta forma, uma das seguintes expressões precisa ser verdadeira

$$a \lambda^{n-k} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^k - c_1 \lambda^{k-1} - c_2 \lambda^{k-2} - \cdots - c_{k-1} \lambda - c_k = 0$$

O que corresponde a $\lambda = 0$ ou λ é raiz de

$$P(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x - c_k$$

Com base no resultado anterior podemos definir o polinômio característico de uma equação de diferenças

Definição 2.12. *O polinômio*

$$P(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x - c_k$$

associado à equação de diferenças

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$$

*é denominado o **polinômio característico** dessa equação. Da mesma forma,*

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_{k-1} x - c_k = 0$$

é denominada equação característica da equação de diferenças.

Dessa forma, o problema original de encontrar a forma fechada para a equação de diferenças, ficou reduzido à encontrar raízes para um polinômio de ordem k e montar uma solução, mais geral possível, para a equação de diferenças dada.

A fim de determinar o formato dessa solução geral começaremos provando um teorema que diz que qualquer combinação linear de soluções de (7) também é solução dessa equação.

Teorema 2.3. *Se as sequências $\tilde{x}_n = \tilde{C}\tilde{\lambda}^n$ e $\hat{x}_n = \hat{C}\hat{\lambda}^n$ são soluções da equação de diferenças*

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k}$$

então a combinação linear dessas soluções

$$x_n = A\tilde{x}_n + B\hat{x}_n$$

também é solução da equação, para quaisquer constantes A e B .

Demonstração: Para demonstrar esse teorema, vamos substituir a combinação linear que é a candidata à solução, $x_n = A\tilde{x}_n + B\hat{x}_n$, na equação de diferenças. Dessa forma obtemos

$$x_n = c_1(A\tilde{x}_{n-1} + B\hat{x}_{n-1}) + c_2(A\tilde{x}_{n-2} + B\hat{x}_{n-2}) + \cdots + c_k(A\tilde{x}_{n-k} + B\hat{x}_{n-k})$$

agrupando adequadamente os termos e usando a hipótese de que \tilde{x}_n e \hat{x}_n são soluções da equação obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= A(\tilde{x}_n + c_1\tilde{x}_{n-1} + c_2\tilde{x}_{n-2} + \cdots + c_k\tilde{x}_{n-k}) \\ &\quad + B(\hat{x}_n + c_1\hat{x}_{n-1} + c_2\hat{x}_{n-2} + \cdots + c_k\hat{x}_{n-k}) \\ &= A0 + B0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo, $x_n = A\tilde{x}_n + B\hat{x}_n$ é solução da equação de diferenças. □

Pelo teorema, qualquer combinação linear de soluções é também solução. Recorrendo à citação de Rodney Biezuner, [2], segundo o qual “Intuitivamente, um espaço vetorial é um conjunto de elementos, que chamamos vetores, com os quais podemos efetuar combinações lineares, isto é, somas de elementos e multiplicação de elementos por números, que chamamos escalares.” Temos uma noção intuitiva de que o conjunto de todas as soluções de uma equação de diferenças é um espaço vetorial.

De fato, encontramos no trabalho de Rafael Luis, [6], a prova de que tal conjunto é um espaço vetorial de dimensão k . A forma geral das soluções é dada pelos teoremas abaixo que encontram-se demonstrados no Apêndice B.

Teorema 2.4. *Se o polinômio característico da equação de diferenças (7) tiver k raízes, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, todas distintas, então a solução geral dessa equação terá a forma*

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_k\lambda_k^n$$

sendo C_1, C_2, \dots, C_k constantes quaisquer.

Teorema 2.5. Se λ_i é uma raiz de multiplicidade m_i do polinômio característico então,

$$\lambda_i^n, n \lambda_i^n, n^2 \lambda_i^n, \dots, n^{m_i-1} \lambda_i^n$$

são soluções de (7).

Teorema 2.6. Sejam

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \quad \text{com} \quad r \leq k$$

raízes distintas do polinômio característico (7), cujas multiplicidades são, respectivamente, m_1, m_2, \dots, m_r , então a solução geral de (7) pode ser dada por

$$x_n = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{m_i-1} C_{i,j} n^j \lambda_i^n$$

Para um caso geral as constantes C_1, C_2, \dots, C_k são arbitrárias. Se forem dadas k condições iniciais as constantes $C_{i,j}$ poderão ser determinadas, conforme exemplificaremos na próxima subseção.

2.5.1 Solução Geral para a Sequência de Fibonacci

Com base na teoria apresentada na seção anterior podemos determinar uma forma fechada para a equação do problema dos coelhos de Fibonacci, que foi apresentada na primeira parte desta seção 2.

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_n &= x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Temos que sua equação característica é

$$x^2 - x - 1 = 0$$

cujas raízes são

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dessa forma, o número de coelhos na n -ésima geração pode ser expresso por

$$x_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Observe que como conhecemos duas condições iniciais, $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$ podemos determinar as constantes C_1 e C_2 obtendo

$$C_1 = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) \quad \text{e} \quad C_2 = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right)$$

Podemos assim escrever a forma fechada para a relação de recorrência de Fibonacci

$$x_n = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{10} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

3 Sistemas de Equações de Diferenças

3.1 Introdução

Analogamente ao que foi desenvolvido na seção anterior, o processo de se resolver um sistema linear de k equações de diferenças de primeira ordem com k variáveis passa pela etapa de encontrar as raízes de um polinômio de grau k .

A afirmação é verdadeira porque, conforme consta no Apêndice A, um sistema dessa forma pode ser reduzido a uma equação linear de ordem k de uma única variável.

Vamos desenvolver o processo explicitado no apêndice para um sistema de ordem três, $k = 3$.

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = a_{11} x_n^{(1)} + a_{12} x_n^{(2)} + a_{13} x_n^{(3)} \\ x_{n+1}^{(2)} = a_{21} x_n^{(1)} + a_{22} x_n^{(2)} + a_{23} x_n^{(3)} \\ x_{n+1}^{(3)} = a_{31} x_n^{(1)} + a_{32} x_n^{(2)} + a_{33} x_n^{(3)} \end{cases} \quad (8)$$

Aplicando o primeiro passo do processo no sistema, avançamos a primeira equação do sistema duas iterações.

$$x_{n+3}^{(1)} = a_{11} x_{n+2}^{(1)} + a_{12} x_{n+2}^{(2)} + a_{13} x_{n+2}^{(3)} \quad (9)$$

Depois todas as equações uma iteração.

$$x_{n+2}^{(1)} = a_{11} x_{n+1}^{(1)} + a_{12} x_{n+1}^{(2)} + a_{13} x_{n+1}^{(3)} \quad (10)$$

$$x_{n+2}^{(2)} = a_{21} x_{n+1}^{(1)} + a_{22} x_{n+1}^{(2)} + a_{23} x_{n+1}^{(3)} \quad (11)$$

$$x_{n+2}^{(3)} = a_{31} x_{n+1}^{(1)} + a_{32} x_{n+1}^{(2)} + a_{33} x_{n+1}^{(3)} \quad (12)$$

Substituindo as equações (11) e (12) em (9) temos

$$\begin{aligned}
x_{n+3}^{(1)} &= a_{11} x_{n+2}^{(1)} \\
&+ a_{12} \left(a_{21} x_{n+1}^{(1)} + a_{22} x_{n+1}^{(2)} + a_{23} x_{n+1}^{(3)} \right) \\
&+ a_{13} \left(a_{31} x_{n+1}^{(1)} + a_{32} x_{n+1}^{(2)} + a_{33} x_{n+1}^{(3)} \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

Após algumas reordenações obteremos

$$\begin{aligned}
x_{n+3}^{(1)} &= a_{11} x_{n+2}^{(1)} + a_{12} a_{21} x_{n+1}^{(1)} + a_{13} a_{31} x_{n+1}^{(1)} \\
&+ a_{12} a_{22} x_{n+1}^{(2)} + a_{13} a_{32} x_{n+1}^{(2)} \\
&+ a_{12} a_{23} x_{n+1}^{(3)} + a_{13} a_{33} x_{n+1}^{(3)}
\end{aligned} \tag{14}$$

Isolando os termos $a_{12}x_{n+1}^{(2)}$ e $a_{13}x_{n+1}^{(3)}$ da equação (10) e substituindo na equação (14), obtemos

$$\begin{aligned}
x_{n+3}^{(1)} &= a_{11} x_{n+2}^{(1)} + a_{12} a_{21} x_{n+1}^{(1)} + a_{13} a_{31} x_{n+1}^{(1)} + a_{13} a_{32} x_{n+1}^{(2)} + a_{12} a_{23} x_{n+1}^{(3)} \\
&+ a_{22} \left(x_{n+2}^{(1)} - a_{11} x_{n+1}^{(1)} - a_{13} x_{n+1}^{(3)} \right) \\
&+ a_{33} \left(x_{n+2}^{(1)} - a_{11} x_{n+1}^{(1)} - a_{12} x_{n+1}^{(2)} \right)
\end{aligned}$$

Ao aplicar o segundo passo do método de solução, substituímos nesta última equação a segunda e terceira equações do sistema original (8)

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^{(2)} &= a_{21} x_n^{(1)} + a_{22} x_n^{(2)} + a_{23} x_n^{(3)} \\
x_{n+1}^{(3)} &= a_{31} x_n^{(1)} + a_{32} x_n^{(2)} + a_{33} x_n^{(3)}
\end{aligned}$$

Após algumas reordenações obtemos

$$\begin{aligned}
x_{n+3}^{(1)} &= (a_{11} + a_{22} + a_{33}) x_{n+2}^{(1)} \\
&+ (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22} + a_{13} a_{31} - a_{11} a_{33}) x_{n+1}^{(1)} \\
&+ (a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}) x_n^{(1)} \\
&+ (a_{23} a_{32} - a_{22} a_{33}) (a_{12} x_n^{(2)} + a_{13} x_n^{(3)})
\end{aligned}$$

Da primeira equação do sistema obtemos a expressão $a_{12} x_n^{(2)} + a_{13} x_n^{(3)} = x_{n+1}^{(1)} - a_{11} x_n^{(1)}$

a qual substituiremos no sistema e simplificaremos, obtendo

$$\begin{aligned} x_{n+3}^{(1)} &= (a_{11} + a_{22} + a_{33})x_{n+2}^{(1)} \\ &+ (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} + a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33} + a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33})x_{n+1}^{(1)} \\ &+ (a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{11})x_n^{(1)} \end{aligned}$$

Temos, agora uma equação de terceira ordem na variável $x_n^{(1)}$ para a qual poderíamos encontrar uma solução geral pelo método descrito na seção anterior. Depois, através de um processo análogo, poderíamos encontrar uma equação de ordem k na variável $x_n^{(2)}$ e resolvê-la e proceder da mesma forma com relação às outras variáveis.

Contudo, gostaríamos de representar uma solução para o sistema (8) na forma vetorial. Para isso, vamos explicitar o formato matricial da solução de um sistema de primeira ordem de k equações e k variáveis, como o que se segue.

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = a_{11}x_n^{(1)} + a_{12}x_n^{(2)} + \dots + a_{1k}x_n^{(k)} \\ x_{n+1}^{(2)} = a_{21}x_n^{(1)} + a_{22}x_n^{(2)} + \dots + a_{2k}x_n^{(k)} \\ x_{n+1}^{(k)} = a_{k1}x_n^{(1)} + a_{k2}x_n^{(2)} + \dots + a_{kk}x_n^{(k)} \end{cases} \quad (15)$$

Suponha que as soluções de $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$, ..., $x_n^{(k)}$ sejam, respectivamente, da forma

$$x_n^{(1)} = A_1\lambda^n, \quad x_n^{(2)} = A_2\lambda^n, \quad \dots, \quad x_n^{(k)} = A_k\lambda^n$$

ou seja, que a solução do sistema seja um vetor da forma

$$V = \lambda^n \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}$$

Então devemos ter

$$\begin{cases} A_1\lambda^{n+1} = a_{11}A_1\lambda^n + a_{12}A_2\lambda^n + \dots + a_{1k}A_k\lambda^n \\ A_2\lambda^{n+1} = a_{21}A_1\lambda^n + a_{22}A_2\lambda^n + \dots + a_{2k}A_k\lambda^n \\ \vdots \\ A_k\lambda^{n+1} = a_{k1}A_1\lambda^n + a_{k2}A_2\lambda^n + \dots + a_{kk}A_k\lambda^n \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \lambda^{n+1} \\ A_2 \lambda^{n+1} \\ \vdots \\ A_k \lambda^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ & & \ddots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \lambda^n \\ A_2 \lambda^n \\ \vdots \\ A_k \lambda^n \end{bmatrix}$$

Denotando o vetor e a matriz por

$$V = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ & & \ddots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

Podemos reescrever esse sistema de forma mais sucinta como

$$\lambda^{n+1}V = \lambda^n AV$$

Dividindo a equação por λ^n obtemos

$$AV = \lambda V$$

$$AV - \lambda V = 0$$

$$[A - \lambda I_k]V = 0$$

Encontrar a solução, V , da equação equivale a encontrar um autovetor associado à matriz A conforme a definição

Definição 3.1. Um vetor não nulo $V \in \mathbb{R}^n$ é denominado autovetor da matriz A se existe um valor constante λ tal que $AV = \lambda V$. O escalar λ é denominado autovalor de A associado a V .

Além disso as condições para a existência desse autovetor são dadas em

Teorema 3.1. Uma solução do sistema $[A - \lambda I_k]V = 0$ é a solução trivial $V = 0$. Uma solução não trivial existe se, e somente se,

$$\det[A - \lambda I_k] = 0$$

Definição 3.2. Dada a matriz quadrada A de ordem k , o determinante $\det[A - \lambda I]$ é um polinômio de ordem k na variável λ denominado **polinômio característico de A** e $\det[A - \lambda I_k] = 0$ é denominada a **equação característica de A** .

Logo para cada raiz λ_i de $P(\lambda) = \det[A - \lambda I]$ o vetor

$$V_i = \lambda_i^n \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}$$

é solução desse sistema.

Sabe-se que o conjunto de todos os autovetores associados à solução de um sistema possível e indeterminado é um espaço vetorial. Logo, qualquer combinação linear de soluções de (8) é, também, solução de (8).

Definição 3.3. Dizemos que um vetor V^* representa um ponto fixo do sistema $X_{n+1} = AX_n$ se $V^* = AV^*$.

Teorema 3.2. Se o sistema da forma $X_{n+1} = AX_n$, com

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

não possuir autovalor igual a 1, então seu único ponto fixo, ou vetor fixo, é $x^* = 0$.

A estabilidade do ponto, ou vetor, fixo de um sistema de equações de diferenças é análoga à estabilidade do ponto fixo de uma única equação de diferenças.

Definição 3.4. Um vetor V^* representa um ponto fixo **estável** do sistema de equações de diferenças (15) se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $\|V_0 - V^*\| < \delta$ então $\|V_n - V^*\| < \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.1.1 Autovalores de um Sistema Linear 2×2

Considere seguinte sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n \end{cases}$$

Esse sistema tem solução não trivial se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

ou seja

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}) = 0$$

Usando a notação $\beta = a_{11} + a_{22}$, $\gamma = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}$ devemos determinar as raízes de:

$$\lambda^2 - \beta\lambda + \gamma = 0$$

cujo resultado, conforme foi feito na seção anterior, pode ser dado por

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma}}{2}$$

De forma análoga ao que foi feito na seção anterior podemos analisar a estabilidade desse ponto fixo a partir dos autovalores da matriz associada ao sistema.

Apresentaremos aqui um resumo dessa análise para sistemas 2×2 que pode ser encontrada de forma mais aprofundada no artigo de Rafael Luís [6] e que está apresentada no seguinte teorema:

Teorema 3.3. *Considere o sistema*

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n \end{cases}$$

Temos as seguintes possibilidades para os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz associada ao sistema, para o caso em que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, com as respectivas consequências:

- *Se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$ então $(0,0)$ é um ponto fixo atrator, portanto estável.*
- *Se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| > 1$ então $(0,0)$ é denominado ponto de sela pois a solução associada ao valor λ_1 tende a 0 e a solução associada ao valor λ_2 tende ao infinito.*
- *Se $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| > 1$ então $(0,0)$ é um ponto fixo repulsor e, portanto, instável.*

Os casos em que $|\lambda_1| = 1$ ou $|\lambda_2| = 1$ devem ser estudados caso a caso e exigem uma abordagem mais detalhada que pode ser encontrada em [6].

4 Equações de Diferenças Não-Lineares

4.1 Introdução

É relativamente pequeno o número de casos de relações de recorrência não-lineares que possui solução analítica. Embora nem sempre seja o caso, muitas vezes é mais fácil encontrar os pontos fixos de uma relação de recorrência não-linear do que encontrar sua solução geral. Portanto, neste trabalho, nosso foco será determinar o comportamento do

mapa de uma equação de diferenças não-linear, principalmente próximo dos pontos fixos devido à já citada importância desses pontos e de sua estabilidade.

A teoria seguinte será desenvolvida apenas para equações não-lineares de primeira ordem, ou seja, da forma $x_{n+1} = f(x_n)$, mas pode ser adaptada para equações de ordem maior.

Expressando uma equação de diferenças por $x_{n+1} = f(x_n)$ podemos representar um ponto fixo x^* como um ponto que satisfaz uma das seguintes e equivalentes relações.

$$x^* = f(x^*) \quad (17)$$

$$x_{n+1} = x_n = x^* \quad (18)$$

Supondo conhecido um determinado ponto fixo x^* de uma equação de diferenças, vamos explorar sua estabilidade a partir da seguinte série de passos.

Dado algum valor x_n próximo de x^* , estamos interessados em determinar se as próximas iterações se aproximam ou se afastam de x^* . Para responder a essa questão vamos começar com um valor de x_n próximo do ponto fixo x^* .

$$x_n = x^* + x'_n \quad (19)$$

onde x'_n é uma pequena quantidade denominada **perturbação** do estado estacionário x^* . Devemos determinar se x'_n gera uma mudança grande ou pequena nos resultados das próximas iterações. Combinando as equações (17), (18) e (19) teremos que

$$x'_{n+1} = x_{n+1} - x^* = f(x_n) - x^* = f(x^* + x'_n) - x^* \quad (20)$$

A expressão (20) ainda não é uma relação da qual podemos obter informações sobre x'_{n+1} diretamente, porque mantém um caráter recursivo entre x'_{n+1} e x'_n . Assumindo que $f(x)$ seja diferenciável em x^* , utilizando expansão em série de Taylor, podemos fazer uma aproximação linear para $f(x_n)$ para valores de x_n próximos de x^* .

$$f(x^* + x'_n) \approx f(x^*) + f'(x^*)x'_n \quad (21)$$

Lembramos que essa expressão só é válida para valores de x_n próximos de x^* , ou seja, foi possível usar essa aproximação apenas porque x'_n é muito pequeno. Por (21), (17) e (20) teremos que

$$x'_{n+1} \approx f(x^*) + f'(x^*)x'_n - x^* = x^* + f'(x^*)x'_n - x^* = f'(x^*)x'_n$$

Portanto,

$$x'_{n+1} \approx f'(x^*)x'_n \quad (22)$$

Note que a expressão acima serve para calcular, aproximadamente, o acréscimo, ou

decrécimo de x_{n+1} em relação a x^* , denominado por x'_{n+1} . Da seção anterior sabemos que se $|f'(x^*)| < 1$ então a órbita desse mapa é decrescente e, nesse caso, teremos que a distância entre x_{n+1} e x^* fica cada vez menor ou seja x^* é um ponto de equilíbrio estável. Por outro lado, se $|f'(x^*)| > 1$ então a órbita desse mapa é crescente, a distância entre x_{n+1} e x^* fica cada vez maior e x^* é um ponto de equilíbrio instável. Tal informação está resumida no teorema abaixo, cuja demonstração já foi realizada pelos passos anteriores.

Teorema 4.1. *Um ponto fixo x^* de $x_{n+1} = f(x_n)$ é um estado estacionário estável se, e somente se, $|f'(x^*)| < 1$.*

Vamos aplicar esse teorema na classificação dos pontos fixos das equações de diferenças dos exemplos seguintes.

4.1.1 Classificação dos Pontos Fixos de Uma Equação Não-Linear

Vamos ilustrar o processo de determinar pontos fixos e classificá-los relativamente à sua estabilidade usando o seguinte exemplo extraído da obra [5], de Leah Keshet.

Considere a seguinte equação de diferenças não-linear

$$x_{n+1} = \frac{kx_n}{b + x_n}, \quad b > 0, \quad k > 0, \quad k \neq b. \quad (23)$$

Olhando com um pouco de atenção para nossa equação de diferenças observaremos que, se o valor de x_0 for nulo, todos os demais valores também serão. Então já sabemos que esse é um estado estacionário. Mas vamos aos cálculos para tentar encontrar todos os estados estacionários.

Para calcular os valores de estado estacionário resolveremos a equação

$$x^* = \frac{kx^*}{b + x^*}$$

de onde temos que,

$$x^*(b + x^*) = kx^* \quad \Rightarrow \quad x^*(x^* + b - k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0 \quad e \quad x_2^* = k - b$$

onde denotamos por x_1^* e x_2^* os valores encontrados para x^* .

Falta agora classificar $x_1^* = 0$ e $x_2^* = k - b$ quanto à estabilidade. Como foi mencionado, um pequeno desvio x'_n no estado estacionário deve satisfazer

$$x'_{n+1} = f'(x^*)x'_n$$

onde temos que

$$f'(x) = \frac{kb}{(b + x)^2}.$$

Portanto

$$f'(x^*) = \frac{kb}{(b+x^*)^2}$$

Substituindo $x_1^* = 0$ teremos

$$f'(0) = \frac{kb}{(b+0)^2} = \frac{k}{b}$$

Pelo Teorema 4.1, o estado estacionário $x^* = 0$ é estável se, e somente se

$$|bk^{-1}| < 1$$

Como b e k são constantes positivas, isso implica que $b > k$. Assim, o estado estacionário, $x_1^* = 0$ é estável se, e somente se, $b > k$.

Substituindo $x_2^* = k - b$ teremos

$$f'(k-b) = \frac{kb}{(b+k-b)^2}$$

$$f'(k-b) = \frac{b}{k}$$

Pelo teorema 4.1, o estado estacionário é estável se, e somente se

$$\left| \frac{b}{k} \right| < 1$$

Como b e k são constantes positivas, isso implica que $k > b$. Assim, o estado estacionário não trivial, $x_2^* = k - b$, é estável se, e somente se, $k > b$.

4.1.2 Classificação dos Pontos Fixos da Equação Logística

Considere a equação não-linear (6) apresentada na Subseção (2.3) usada para descrever o modelo de Verhulst. Determinaremos seus pontos estacionários e os caracterizaremos relativamente à estabilidade.

A referida equação e as condições para que descreva um problema concreto são

$$x_{n+1} = r x_n(1 - x_n), \quad r > 0, \quad 0 < x_0 < 1.$$

Para descobrir todos os pontos estacionários resolvemos a equação que provém da relação $x^* = f(x^*)$ ou seja, da relação

$$x^* = r x^*(1 - x^*)$$

que podemos reescrever como

$$r(x^*)^2 - (r-1)x^* = 0.$$

Temos uma equação do segundo grau em x^* cujas raízes são

$$x_1^* = 0 \quad \text{e} \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$$

Considerando uma pequena perturbação x'_n dada a algum dos pontos fixos x^* teremos que:

$$x'_{n+1} \approx f'(x^*)x'_n$$

Em que x'_{n+1} e x'_n são as perturbações ou acréscimos sofridos por x_{n+1} e x_n , respectivamente, em relação à x^* .

A derivada de $f(x) = rx(1-x)$ pode ser dada por

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(rx(1-x)) = r(1-2x).$$

Substituindo o ponto fixo x_1^* teremos $f'(0) = r$. Sabemos que $x_1^* = 0$ é estável se, e somente se $|r| < 1$. Como $r > 0$, x_1^* é estável se, e somente se, $0 < r < 1$.

Tomando, por sua vez $x_2^* = 1 - \frac{1}{r}$ teremos

$$f'\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r.$$

Sabemos que x_2^* é estável se, e somente se, $|2 - r| < 1$, ou seja, se $1 < r < 3$.

O caso em que $r = 1$ pode ser analisado diretamente. Primeiro observamos que se $r = 1$ então $x^* = 0$. Se tomarmos para x_n um valor bem próximo de 0, tal que $x_n = \epsilon$ com $0 < \epsilon < 1$ então $x_{n+1} = \epsilon(1 - \epsilon)$. Como $1 - \epsilon < 1$ então x_{n+1} está mais próximo de 0. Portanto se $r = 1$ $x^* = 0$ é um ponto fixo estável.

4.1.3 Órbitas Periódicas e Caóticas da Equação Logística

Determinamos quais são e como se classificam os pontos fixos no caso de termos $0 < r < 3$, mas o que acontece se $r > 3$?

Analisando alguns gráficos teremos embasamento para fazer algumas suposições. Considere a Figura 10 que representa o gráfico de $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ para $x_0 = 0,001$ e $r = 3,1$. Observamos que a partir de um certo número de iterações os valores de x_n passam a alternar próximos aos valores fixos, 0,56 e 0,76.

Já na Figura 11, que representa o gráfico da mesma equação para $x_0 = 0,001$ e $r = 3,45$. Observamos que a partir de um certo número de iterações os valores de x_n passam a alternar entre quatro valores fixos próximos de, 0,42, 0,84, 0,46, 0,86.

Por sua vez, o gráfico esboçado na Figura 12, que representa a equação para $x_0 = 0,001$ e $r = 3,8$, parece não apresentar nenhuma regularidade.

Foi possível ver que, tomando para r valores maiores que 3, após um certo número de

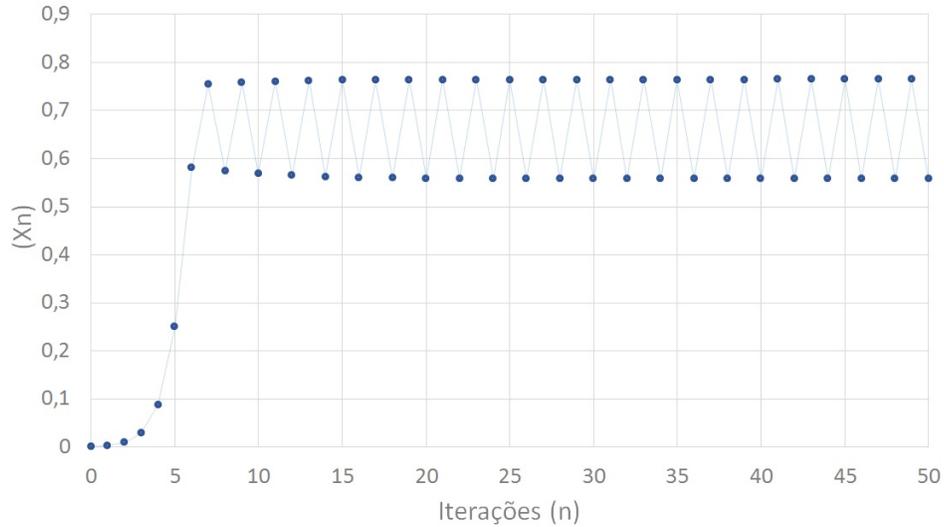


Figura 10: Gráfico de $x_{n+1} = 3,1x_n(1 - x_n)$ com ponto inicial em $(0; 0,001)$. A órbita oscila entre valores próximos de 0,56 e 0,76.

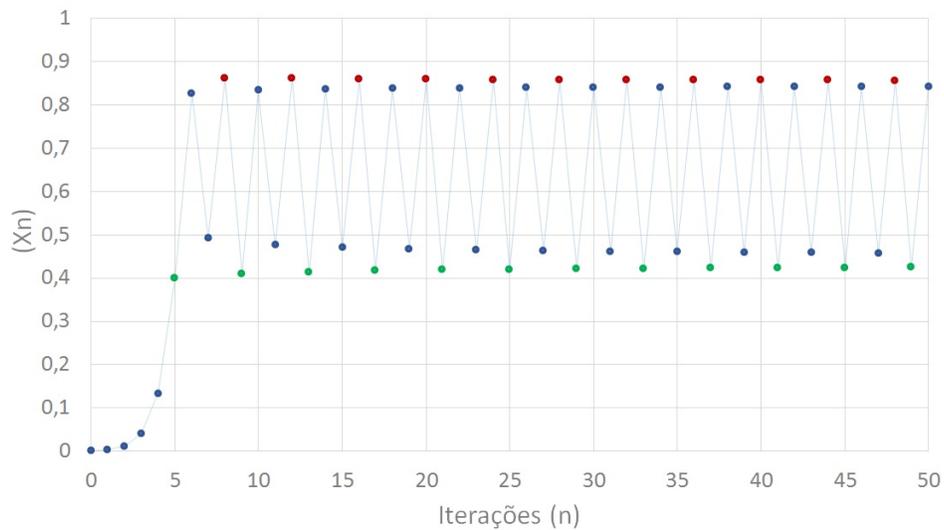


Figura 11: Gráfico de $x_{n+1} = 3,45x_n(1 - x_n)$ com ponto inicial em $(0; 0,001)$. A órbita oscila próximo dos valores 0,42, 0,84, 0,46, 0,86

iterações a densidade populacional alterna entre dois ou mais valores fixos da órbita ou não apresenta regularidade.

Vamos primeiramente, descrever um método pelo qual podemos encontrar os valores dos parâmetros de uma equação para os quais a órbita torna-se periódica.

De acordo com Devaney, [3], se a partir de uma certa quantidade de iterações a órbita passar a alternar entre dois pontos x_1^* e x_2^* , tais pontos poderão ser determinados pela

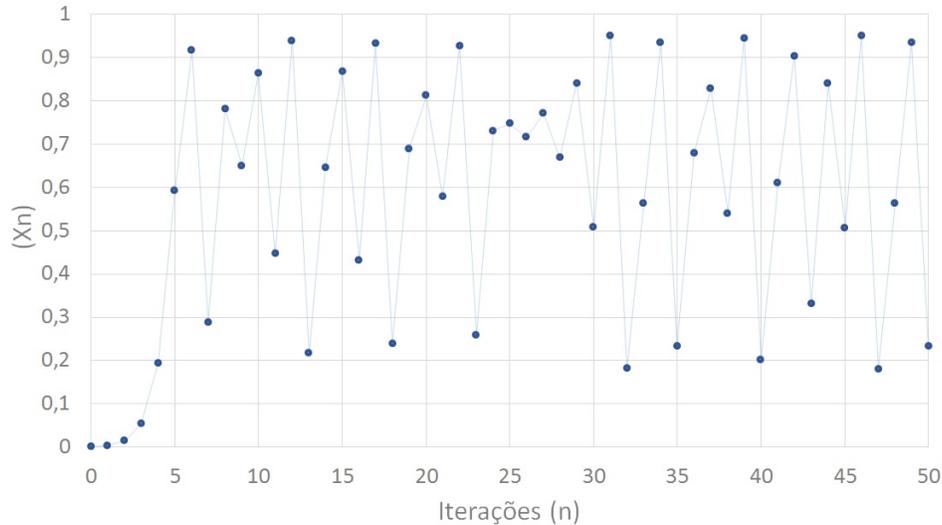


Figura 12: Gráfico de $x_{n+1} = 3,8x_n(1 - x_n)$ começando em $(0; 0,001)$. Apresenta comportamento irregular após a oitava iteração.

resolução da seguinte equação

$$f(f(x^*)) = x^*$$

De fato, se a cada duas iterações voltamos a um mesmo ponto, então a cada iteração da função composta $g(x) = f(f(x))$ voltaremos a um mesmo ponto, algum dos dois pontos da órbita. Mais geralmente, pontos de uma órbita que a partir de algumas iterações passa a percorrer, ordenadamente, uma sequência fixa de k valores distintos, podem ser determinados pela resolução da equação:

$$f^k(x^*) = x^*$$

em que, f^k indica k composições da função f consigo mesma.

Vamos determinar os valores de r para os quais as iteradas da equação logística alternam entre dois valores, ou seja, têm um órbita de período 2. Primeiramente, vamos determinar a composição $x_{n+1} = f(f(x_n))$, que resulta em

$$x_{n+1} = r[r x_n(1 - x_n)][1 - r x_n(1 - x_n)]$$

ou de forma mais simples, em

$$x_{n+1} = r^2 x_n(1 - x_n)[1 - r x_n(1 - x_n)].$$

Tome, agora $x_{n+1} = x_n = x^*$. Teremos a equação

$$x^* = r^2 x^*(1 - x^*)[1 - r x^*(1 - x^*)]$$

que equivale ao polinômio de terceiro grau em x^*

$$(x^*)^3 - 2(x^*)^2 + \left(1 + \frac{1}{r}\right)x^* + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r}\right) = 0.$$

Para facilitar o cálculo das raízes da equação acima vamos fatorá-la:

$$\left[x^* - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\right] \left[(x^*)^2 - \left(1 + \frac{1}{r}\right)x^* + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\right] = 0$$

Logo devemos ter

$$\left[x^* - \left(1 - \frac{1}{r}\right)\right] = 0 \quad \text{ou} \quad \left[(x^*)^2 - \left(1 + \frac{1}{r}\right)x^* + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\right] = 0$$

Assim, as raízes dessa equação são

$$x_1^* = \left(1 - \frac{1}{r}\right), \quad x_2^* = \frac{r+1 + \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}, \quad x_3^* = \frac{r+1 - \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}$$

O ponto x_1^* já era conhecido como ponto fixo da equação, pois um ponto fixo também satisfaz a equação $f(f(x^*)) = x^*$. Os pontos x_2^* e x_3^* só existem quando $r < -1$, que não interessa para a descrição de uma população real, e $r > 3$, ou seja, quando x_1^* deixa de ser estável.

Um estudo mais aprofundado pode ser feito a partir da obra [3], de Devaney, que, em resumo, diz que, considerando-se uma população cuja densidade é descrita pela equação logística, se $0 < r < 3$ então a densidade x_n apresenta um único ponto fixo estável. A partir de $r = 3$ a população perde a estabilidade, passando a alternar entre duas densidades populacionais, até que r atinja o valor $r = 1 + \sqrt{6}$ no qual passamos a observar uma órbita de período 4. Aumentando sucessivamente o valor de r observaremos órbitas de período 8, 16, etc. Para $r > 3$, acréscimos cada vez menores no valor de r são suficientes para que o número de períodos aumente e quando esse parâmetro atinge um valor próximo de $r = 3,569$ nota-se que as órbitas passam a comportar-se de forma completamente aleatória e a esse fenômeno denominamos **caos**. As variações dos valores de r e os correspondentes números de períodos são representados na Figura 13.

4.2 Sistemas de Equações de Diferenças Não-Lineares

Nesta seção veremos como criar um sistema de equações de diferenças lineares que aproxima os acréscimos dados a um ponto fixo de um sistema de equações de diferenças não-lineares dado. Veremos também como é possível classificar a estabilidade do ponto fixo analisando os autovalores da matriz associada a esse sistema linear.

Inicialmente, vamos desenvolver a teoria para um sistema de equações 2×2 que poderá

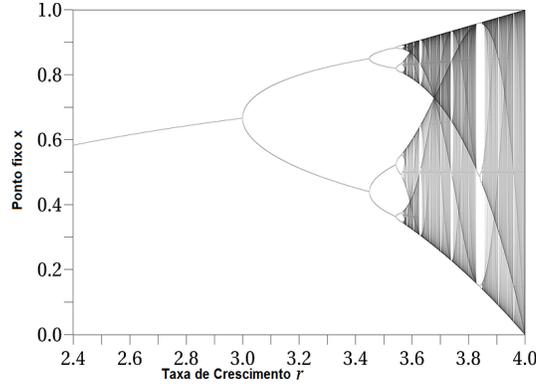


Figura 13: Diagrama de bifurcação da equação logística ilustrando a variação dos períodos com relação a r . Fonte: slideplayer.com.br/slide/51555/

ser generalizada para um sistema de qualquer ordem. Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \quad (24)$$

Dizemos que (x^*, y^*) é um ponto de equilíbrio do sistema (24) se

$$\begin{cases} x^* = f(x^*, y^*) \\ y^* = g(x^*, y^*) \end{cases} \quad (25)$$

Como anteriormente, considere pequenos desvios x'_n e y'_n , dados a x^* e y^* , respectivamente de forma que:

$$x_n = x^* + x'_n \quad (26)$$

$$y_n = y^* + y'_n. \quad (27)$$

Considerando a próxima iteração da equação (26), após alguns ajustes, teremos que

$$x'_{n+1} = x_{n+1} - x^*$$

e por (24) temos que

$$x'_{n+1} = f(x_n, y_n) - x^*$$

usando novamente (26) chegamos a

$$x'_{n+1} = f(x^* + x'_n, y^* + y'_n) - x^* \quad (28)$$

usando expansão em série de Taylor para várias variáveis

$$f(x^* + x'_n, y^* + y'_n) \approx f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)x'_n + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)y'_n$$

a equação (28) torna-se

$$x'_{n+1} \approx f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)x'_n + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)y'_n - x^*$$

e usando (25), após algumas simplificações temos

$$x'_{n+1} \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)x'_n + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)y'_n.$$

Fazendo os cálculos análogos para y'_{n+1} teremos que

$$y'_{n+1} \approx \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)x'_n + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)y'_n.$$

Para facilitar a notação, considere a matriz

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix}$$

Considere, também o vetor X'_n das variações das variáveis,

$$X'_n = \begin{bmatrix} x'_n \\ y'_n \end{bmatrix}$$

Analogamente ao que foi feito para uma variável, podemos expressar o sistema das equações das perturbações X'_n como:

$$X'_{n+1} \approx J(x^*, y^*)X'_n$$

Nosso problema fica reduzido a estudar um sistema de equações lineares que rege o comportamento das perturbações dadas ao ponto fixo.

Definição 4.1. *A matriz*

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

é denominada **matriz Jacobiana** do sistema

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

Encontramos no trabalho de Rafael Luis, [6], uma condição para a estabilidade de um ponto fixo de um sistema de equações de diferenças não-lineares que está resumida no seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores associados à matriz Jacobiana $J(x^*, y^*)$ do sistema (24) no ponto fixo (x^*, y^*) . Uma condição necessária e suficiente para que (x^*, y^*) seja estável é que λ_1 e λ_2 possuam módulo menor que a unidade.*

Para ilustrar o que foi visto nessa seção vamos usar o seguinte exemplo de sistema não-linear que modela o tamanho das populações duas espécies, uma espécie presa e a outra predadora.

4.3 Modelo Predador Presa

Denote as populações da presa e do predador, respectivamente, por x_n e y_n , no instante n e considere constantes positivas α , γ e θ . Ao modelar matematicamente a interação das espécies, considera-se que na ausência do predador, $y_n = 0$, a população de presas aumentará, sem nenhum tipo de obstáculo, a uma taxa proporcional à população atual, ou seja, com um termo da forma αx_n . Por outro lado, considera-se que a carência de presas, $x_n = 0$, acarretará a extinção da população de predadores, devido à falta de alimento, situação descrita por um termo da forma $-\beta y_n$. Considera-se também que o número de encontros entre as duas espécies é proporcional ao produto das populações de cada espécie, ou seja, $x_n y_n$. Estes encontros tendem a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas. Assim, um termo da forma $\gamma x_n y_n$ contribui para o crescimento da população de predadores e um termo da forma $-\theta x_n y_n$ contribui para o decréscimo da população de presas. Um modelo que satisfaz essas condições é descrito pelas seguintes equações de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1 + \alpha) - \gamma x_n y_n \\ y_{n+1} = y_n(1 - \beta) + \theta x_n y_n \end{cases} \quad (29)$$

Estudando os pontos fixos desse sistema vemos que um ponto de equilíbrio trivial é o ponto $X_1^* = (0, 0)$. Seja $X^* = (x^*, y^*)$ outro possível ponto de equilíbrio tal que $x^* \neq 0$ e $y^* \neq 0$. Então devemos ter

$$x^* = x^*(1 + \alpha) - \gamma x^* y^*$$

$$y^* = y^*(1 - \beta) + \theta x^* y^*$$

Fazendo algumas simplificações obtemos o outro ponto fixo que é

$$X_2^* = \left(\frac{\beta}{\theta}, \frac{\alpha}{\gamma} \right)$$

Vamos classificar esses pontos relativamente a sua estabilidade. A matriz Jacobiana do sistema (29) é

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha - \gamma y & -\gamma x \\ \theta y & 1 - \beta + \theta x \end{bmatrix}$$

Considerando o ponto fixo X_1^* . A matriz Jacobiana do sistema é

$$J(X_1^*) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & 0 \\ 0 & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

Os autovalores associados à matriz são as raízes do polinômio

$$P(x) = \det \begin{bmatrix} 1 + \alpha - x & 0 \\ 0 & 1 - \beta - x \end{bmatrix}$$

ou seja, são as raízes de $P(x) = (1 + \alpha - x)(1 - \beta - x)$. Logo os autovalores são

$$\lambda_1 = 1 + \alpha,$$

$$\lambda_2 = 1 - \beta.$$

Como nitidamente temos $|\lambda_1| > 1$ pois $\alpha > 0$, pelo teorema (4.2) temos que $(0,0)$ é ponto de equilíbrio instável.

Considerando, agora, o ponto fixo X_2^* , a matriz Jacobiana do sistema avaliada nesse ponto é

$$J(X_2^*) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\gamma\beta}{\theta} \\ \frac{\theta\alpha}{\gamma} & 1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores associados à matriz são as raízes do polinômio

$$P(x) = \det \begin{bmatrix} 1 - x & -\frac{\gamma\beta}{\theta} \\ \frac{\theta\alpha}{\gamma} & 1 - x \end{bmatrix}$$

ou seja, são as raízes de $P(x) = (1 - x)^2 + \alpha\beta$. Logo os autovalores são os números complexos

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{\alpha\beta} i,$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{\alpha\beta} i$$

Como nitidamente temos $|\lambda_1| = \sqrt{1 + \alpha\beta} > 1$, pois $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, pelo teorema (4.2) temos que X_2^* também é ponto de equilíbrio instável.

5 Aplicações à Epidemiologia

5.1 Introdução

Aplicaremos a teoria vista até aqui a modelos epidemiológicos que podem ser expressos por sistemas de equações de diferenças não-lineares. Em modelos matemáticos epidemiológicos a população é dividida em classes que refletem o estado em que os indivíduos se encontram no desenvolvimento da doença, como por exemplo, suscetíveis (S), infectados (I), recuperados (R). As características da doença determinam o tipo de modelo a ser escolhido. Nos modelos SI, não há recuperação dos indivíduos. Os suscetíveis passam à classe dos infectados pelo contato com indivíduos já infectados. Nos modelos SIS, os indivíduos infectados recuperam-se, mas não adquirem imunidade e, portanto, voltam à classe dos suscetíveis. Já nos modelos SIR, os infectados recuperam-se e adquirem imunidade à doença passando assim, para a classe dos recuperados.

Vamos nos restringir a analisar modelos espacialmente homogêneos que são modelos que satisfazem as seguintes hipóteses:

- Todos os indivíduos nascem suscetíveis, ou seja, a doença não pode ser transmitida da mãe para o feto.
- A população se mantém constante no período da infecção, isto é, a taxa de mortalidade é igual à taxa de natalidade.
- A doença se espalha num ambiente fechado, sem emigração ou imigração.
- A interação entre dois indivíduos ocorre de forma homogênea, ou seja, quaisquer dois indivíduos têm sempre a mesma probabilidade de se encontrar e, além disso, indivíduos suscetíveis têm a mesma probabilidade de se contaminar.

5.2 O Modelo SI

Um modelo discreto do tipo SI onde S_n e I_n representam, respectivamente, a população de indivíduos suscetíveis e a população de infectados no tempo n tem a seguinte forma

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T - \frac{\lambda S_n I_n}{T} - \mu S_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\lambda S_n I_n}{T} - \mu I_n \end{cases}$$

Em que usamos a seguinte notação:

T população total,

S_n número de suscetíveis no tempo n ,

I_n número de infectados no tempo n ,

μ taxa de natalidade e mortalidade, $0 < \mu < 1$,

λ taxa de transição, que é proporcional ao contato entre os indivíduos.

O termo $\frac{\lambda S_n I_n}{T}$ representa a transferência de indivíduos da classe de suscetíveis para a dos infectados.

Os pontos de equilíbrio desse sistema, denotados por (S^*, I^*) , deve m satisfazer as seguinte condições $S_n = S_{n+1} = S^*$ e $I_n = I_{n+1} = I^*$. Substituindo na equação do sistema, resulta que

$$\begin{cases} \mu T - \frac{\lambda S^* I^*}{T} - \mu S^* = 0 \\ \frac{\lambda S^* I^*}{T} - \mu I^* = 0 \end{cases}$$

As soluções das equações são

$$X_1^* = (S_1^*, I_1^*) = (T, 0) \quad \text{ou} \quad X_2^* = (S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu T}{\lambda}, T - \frac{\mu T}{\lambda} \right)$$

ou seja, se o número de infectados for nulo, $I^* = 0$, então o número de suscetíveis deve ser a população total, $S^* = T$, temos assim que $X_1 = (T, 0)$ é um ponto de equilíbrio. Se $S^* = \frac{\mu T}{\lambda}$ então $I^* = T - \frac{\mu T}{\lambda}$ e, portanto,

$$X_2 = \left(\frac{\mu T}{\lambda}, T - \frac{\mu T}{\lambda} \right)$$

é o outro ponto de equilíbrio.

Podemos dizer que os pontos de equilíbrio refletem duas situações. A primeira corresponde a um equilíbrio livre da doença, descrito pelo ponto

$$X_1^* = (T, 0)$$

e a segunda a um equilíbrio endêmico, descrito agora pelo ponto

$$X_2^* = \left(\frac{\mu T}{\lambda}, T - \frac{\mu T}{\lambda} \right)$$

A seguir veremos duas aplicações para o modelo SI, no primeiro caso ele será usado para modelar a transmissão da leptospirose entre uma população de ratos e, no segundo caso, faremos o estudo de uma constante de propagação de doenças denominada reprodutividade basal.

5.2.1 Modelo de Dispersão da Leptospirose

Esse exemplo tem como base o trabalho [8] e apresenta um modelo matemático discreto para a dispersão da leptospirose em uma população de roedores. A leptospirose é uma enfermidade causada por uma bactéria do gênero *Leptospira*, que pode ser transmitida de animal para animal e também para o homem. A infecção humana ocorre na maioria das vezes, de maneira indireta, através do contato com água ou solo úmido contaminado e a subsequente penetração da leptospira na pele e mucosas, intactas ou não e manifesta-se sobre a forma da leptospirose com quadro clínico que pode variar desde os casos assintomáticos e até formas graves e fatais. Os roedores desenvolvem o papel de principal reservatório da doença, liberando as bactérias vivas em grande quantidade no meio ambiente, contaminando a água, os solos e os alimentos. Uma vez que adquirem a doença, eles carregam as bactérias da leptospira nos rins pelo resto a vida, liberando-as continuamente no meio ambiente. Além disso, o fato de a doença não causar danos aos roedores indica que a mortalidade devido à doença pode ser desprezada. Com base nessas considerações é razoável descrever essa doença por um modelo SI de equações.

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T - \frac{\lambda S_n I_n}{T} - \mu S_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\lambda S_n I_n}{T} - \mu I_n \end{cases} \quad (30)$$

Queremos assegurar que os valores de S_n e I_n sejam positivos e satisfaçam $S_n + I_n = T$, para quaisquer condições iniciais $S_0 > 0$ e $I_0 > 0$. Faremos, portanto, algumas restrições sobre os parâmetros μ e λ . Tomando $n = 0$ na segunda equação de (30) teremos que

$$I_1 = I_0 + \frac{\lambda S_0 I_0}{T} - \mu I_0$$

Fazendo $S_0 = T - I_0$, após alguma simplificações obtemos

$$I_1 = -\frac{\lambda I_0^2}{T} + (1 - \mu + \lambda)I_0 \quad (31)$$

que pode ser visto como o polinômio de segundo grau

$$I_1(x) = -\frac{\lambda x^2}{T} + (1 - \mu + \lambda)x$$

avaliado em $x = I_0$ ou seja $I_1 = I_1(I_0)$. Assim a parábola I_1 deve satisfazer $0 \leq I_1 \leq T$ sempre que $0 < I_0 < T$. Observe que $I_1(0) = 0$ e $I_1(T) = T(1 - \mu)$. Sabemos que tal polinômio assume seu valor máximo em

$$I_0^* = \frac{T}{2\lambda}(1 - \mu + \lambda)$$

que é a abscissa do vértice da parábola, e que esse valor é dado por

$$I_1^* = \frac{T}{4\lambda}(1 - \mu + \lambda)^2$$

que é a ordenada do vértice. Assim, para encontrar uma condição necessária e suficiente que garanta que $0 \leq I_1(I_0) \leq T$ sempre que $0 < I_0 < T$ analisaremos duas situações possíveis.

Na primeira situação supomos que o ponto de máximo I_0^* está posicionado no gráfico de $I_1(I_0)$, depois de T ou é o próprio T , conforme Figura 14. Nesse caso o maior valor que poderá ser assumido pela função será $I_1 = T(1 - \mu)$ e para garantir que $0 \leq I_1 \leq T$, ou seja, que $0 \leq T(1 - \mu) \leq T$ basta garantir que $0 < \mu \leq 1$.

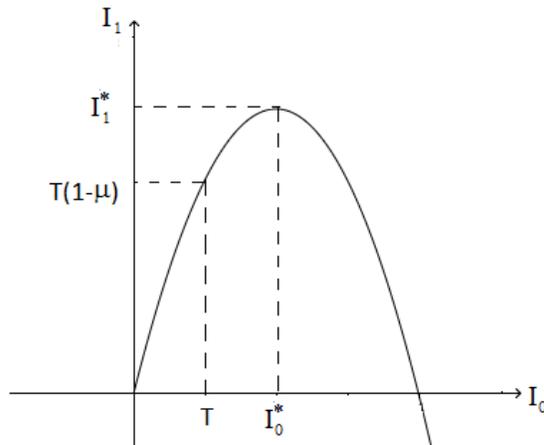


Figura 14: Gráfico de I_1 no caso em que $I_0^* \geq T$.

Se, numa segunda situação, tivermos I_0^* antes de T ou seja, $I_0^* < T$, conforme Figura 15, então o valor máximo de I_1 será $I_1 = \frac{T}{4\lambda}(1 - \mu + \lambda)^2$ e para garantir que

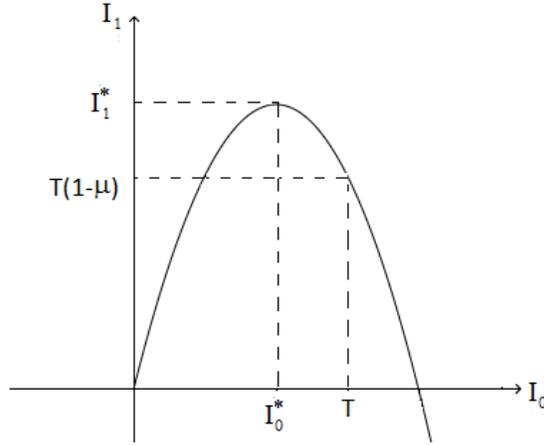


Figura 15: Gráfico de I_1 no caso em que $I_0^* < T$.

$0 \leq I_1 \leq T$ devemos fazer

$$0 \leq \frac{T}{4\lambda}(1 - \mu + \lambda)^2 \leq T \quad \Rightarrow \quad 0 \leq (1 - \mu + \lambda)^2 \leq 4\lambda \quad \Rightarrow$$

$$0 \leq 1 - \mu + \lambda \leq 2\sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad (1 - \sqrt{\lambda})^2 \leq \mu \leq 1 + \lambda$$

Como, por hipótese, $0 \leq \mu \leq 1$ devemos ter

$$(1 - \sqrt{\lambda})^2 \leq \mu \leq 1$$

Portanto, as soluções do sistema (30) são biologicamente viáveis se, e somente se,

$$0 < \mu \leq 1, \quad \lambda \leq 1 \quad \text{ou} \quad (1 - \sqrt{\lambda})^2 \leq \mu \leq 1, \quad \lambda > 1. \quad (32)$$

As condições de viabilidade (32) estão representadas na Figura 16

O interesse agora é explorar a estabilidade das soluções de equilíbrio do sistema. Vimos anteriormente que os pontos de equilíbrio do sistema são:

Equilíbrio livre da doença:

$$X_1^* = (T, 0)$$

Equilíbrio endêmico:

$$X_2^* = \left(\frac{\mu T}{\lambda}, T - \frac{\mu T}{\lambda} \right)$$

É importante observar que o equilíbrio endêmico é biologicamente viável para $\lambda > \mu$, caso contrário a ordenada do ponto assumiria valores negativos.

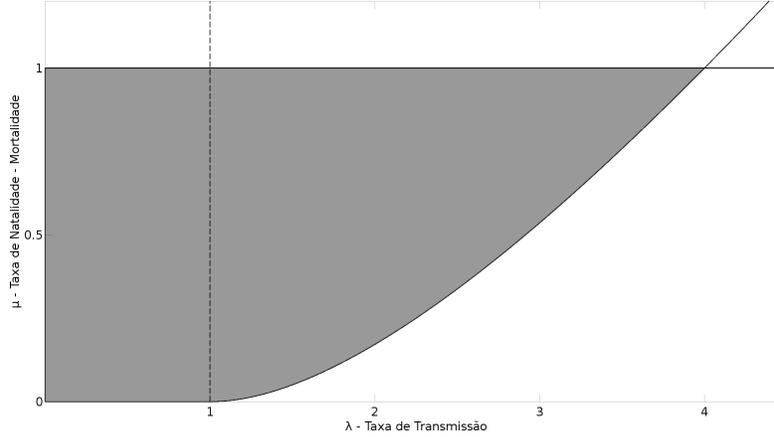


Figura 16: Região do plano em que as soluções são biologicamente viáveis.

A condição para que X_1^* seja estável é que o módulo de cada autovalor da matriz Jacobiana nesse ponto seja menor que a unidade. A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio X_1^* é:

$$J(X_1^*) = \begin{bmatrix} 1 - \mu & -\lambda \\ 0 & 1 + \lambda - \mu \end{bmatrix}$$

Os autovalores são as raízes da equação característica dada por $\det(J(X_1^*) - xI) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \mu - x & -\lambda \\ 0 & 1 + \lambda - \mu - x \end{bmatrix} = 0$$

então

$$(1 - \mu - x)(1 + \lambda - \mu - x) = 0$$

Portanto os autovalores são $x_1 = 1 - \mu$ e $x_2 = 1 + \lambda - \mu$. O ponto de equilíbrio $(T,0)$ é estável se, e somente se, $|x_1| < 1$ e $|x_2| < 1$.

$$|1 - \mu| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - \mu < 1 \Rightarrow 0 < \mu < 2$$

$$|1 + \lambda - \mu| < 1 \Rightarrow -1 < 1 + \lambda - \mu < 1 \Rightarrow \lambda < \mu < 2 + \lambda$$

A interseção entre as condições $0 < \mu < 2$ e $\lambda < \mu < 2 + \lambda$ nos dá que o ponto de equilíbrio X_1^* é estável se, e somente se,

$$\lambda < \mu < 2$$

No entanto, como estamos interessados somente em soluções positivas esta condição fica restrita a

$$\lambda < \mu < 1. \tag{33}$$

A região de estabilidade de X_1^* está esboçada na Figura 17

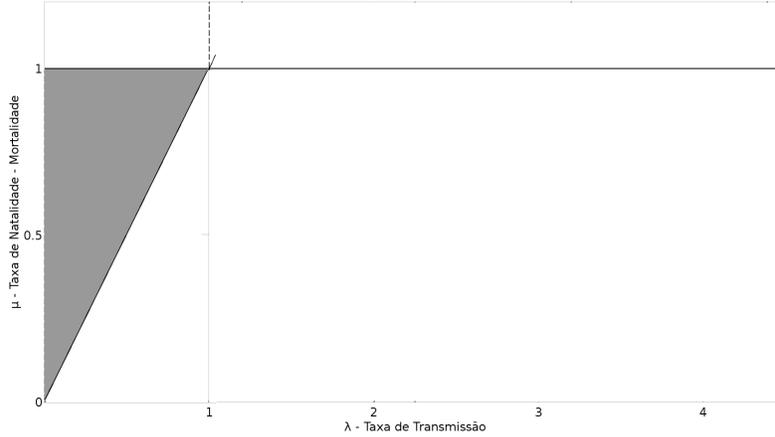


Figura 17: Região do plano em que X_1^* é estável.

Analogamente, o ponto X_2^* é estável se, e somente se, o módulo dos autovalores da matriz Jacobiana nesse ponto forem menores que a unidade. A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio em consideração é:

$$J(X_2^*) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -\mu \\ \lambda - \mu & 1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são as raízes da equação característica dada por

$$\det(J(X_2^*) - xI) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda - x & -\mu \\ \lambda - \mu & 1 - x \end{vmatrix} = 0$$

De onde obtemos, $x^2 + (\lambda - 2)x + (1 - \lambda + \mu\lambda - \mu^2) = 0$.

Portanto os autovalores são $x_1 = 1 - \mu$ e $x_2 = 1 + \mu - \lambda$.

O ponto de equilíbrio X_2^* é estável se, e somente se, $|1 - \mu| < 1$ e $|1 + \mu - \lambda| < 1$

$$|1 - \mu| < 1 \Rightarrow -1 < 1 - \mu < 1 \Rightarrow 0 < \mu < 2 \Rightarrow 0 < \mu \leq 1 \text{ conforme definição.}$$

$$|1 + \mu - \lambda| < 1 \Rightarrow -1 < 1 + \mu - \lambda < 1 \Rightarrow -2 + \lambda < \mu < \lambda$$

A interseção entre as condições acima nos dá que o ponto X_2^* é estável se, e somente se,

$$\lambda - 2 < \mu < \lambda \quad \text{e} \quad 0 < \mu \leq 1 \quad (34)$$

Esta condição está esboçada na Figura 18

A região biologicamente viável em que X_1^* ou X_2^* é estável resulta da interseção das

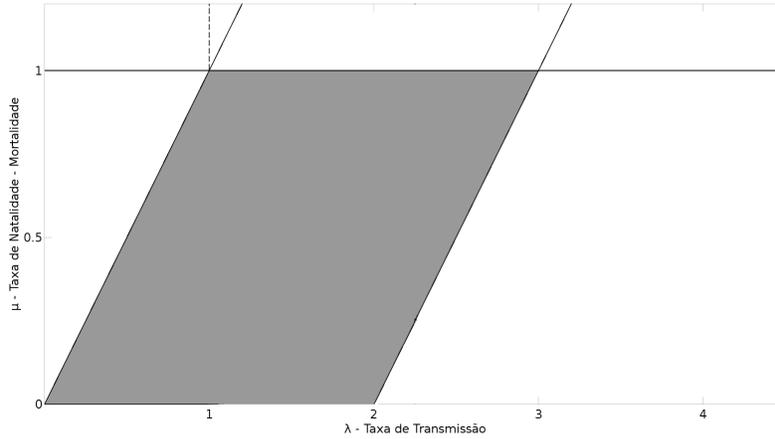


Figura 18: Região do plano em que X_2^* é estável.

condições (32) com as condições (33) e (34)

$$(1 - \sqrt{\lambda})^2 < \mu < \lambda, \quad \text{para } \lambda \leq \frac{9}{4} \quad \text{e} \quad \lambda - 2 < \mu < \lambda, \quad \text{para } \lambda > \frac{9}{4}$$

Esta região está representada na Figura 19

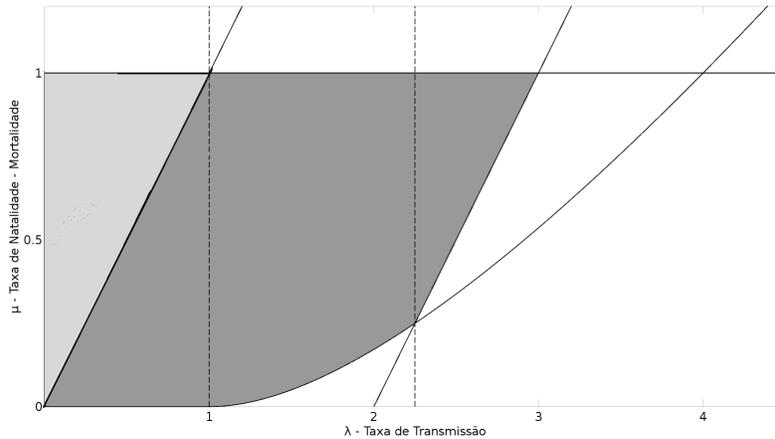


Figura 19: Região do plano em que as soluções são biologicamente viáveis e um ou outro ponto fixo é estável.

5.3 Reprodutividade Basal para um Modelo SI

Esse exemplo baseia-se no trabalho de Mehran Sabeti, [7], e determina condições de estabilidade para os pontos de equilíbrio do modelo SI baseando-se em uma importante constante da epidemiologia, denominada reprodutividade basal. O número de **reprodutividade basal** que é indicado por R_0 é definido como o número esperado de novas infecções de um indivíduo infectado numa população totalmente susceptível ao longo de

todo o tempo de duração do período infeccioso. Para mais informações consulte, também, o trabalho de Diekmann, [4]. O valor de R_0 é importante, por exemplo, para se calcular a porcentagem mínima da população que deve ser vacinada de forma que certa doença seja erradicada.

Em um sistema em que a taxa de contato entre indivíduos infectados e indivíduos sãos é λ , a taxa de mortalidade dos infectados é μ , e, caso exista, a taxa de recuperação da doença é β , a reprodutividade basal pode ser dada por

$$R_0 = \frac{\lambda}{\mu + \beta}$$

Caso a doença seja incurável, a reprodutividade basal pode ser dada por

$$R_0 = \frac{\lambda}{\mu}$$

Considere que a transmissão de uma doença em uma população possa ser descrita pelo modelo SI, ou seja, que satisfaça o sistema:

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T - \frac{\lambda S_n I_n}{T} - \mu S_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\lambda S_n I_n}{T} - \mu I_n \end{cases}$$

Vimos anteriormente que os pontos de equilíbrio do sistema são:

Equilíbrio livre da doença

$$(S_1^*, I_1^*) = (T, 0)$$

Equilíbrio endêmico

$$(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{\mu T}{\lambda}, T - \frac{\mu T}{\lambda} \right)$$

ou

$$(S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{T}{R_0}, \frac{T(R_0 - 1)}{R_0} \right)$$

Observamos que (S_2^*, I_2^*) só representa um ponto de equilíbrio quando $R_0 > 1$ pois, caso contrário, teríamos um valor negativo para a população. Se $R_0 < 1$ apenas $(T, 0)$ representa um ponto de equilíbrio.

Pelo Teorema (3.3) sabemos que um ponto de equilíbrio do sistema é estável se todos os autovalores da matriz Jacobiana nesse ponto possuem valor em módulo menor que 1. Considerando

$$f(S, I) = S + \mu T - \frac{\lambda SI}{T} - \mu S \quad \text{e} \quad g(S, I) = I + \frac{\lambda SI}{T} - \mu I$$

então, a matriz Jacobiana do sistema será

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda I}{T} - \mu & -\frac{\lambda S}{T} \\ \frac{\lambda I}{T} & 1 + \frac{\lambda S}{T} - \mu \end{bmatrix}$$

Com isso podemos escrever a seguinte proposição

Proposição 5.1. *O ponto de equilíbrio $X_1^* = (T,0)$ será estável se $R_0 < 1$ e será instável se $R_0 > 1$.*

Demonstração: A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio $X_1^* = (T,0)$ é:

$$J(X_1^*) = \begin{bmatrix} 1 - \mu & -\lambda \\ 0 & 1 + \lambda - \mu \end{bmatrix}$$

Os autovalores são as raízes da equação característica dada por $\det(J(X_1^*) - xI) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \mu - x & -\lambda \\ 0 & 1 + \lambda - \mu - x \end{bmatrix} = 0$$

então

$$(1 - \mu - x)(1 + \lambda - \mu - x) = 0$$

Portanto os autovalores são $x_1 = 1 - \mu$ e $x_2 = 1 + \lambda - \mu$. O ponto de equilíbrio $(T,0)$ é estável se $|x_1| < 1$ e $|x_2| < 1$. Por definição $0 < \mu < 1$, logo $0 < 1 - \mu < 1$, portanto $x_1 < 1$.

Analisando esses resultados concluímos que se $R_0 = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ teremos $\lambda - \mu < 0$ e assim $1 + \lambda - \mu < 1$ ou seja, $x_2 < 1$. Por outro lado, se $R_0 = \frac{\lambda}{\mu} > 1$ então x_1 permanece menor que 1 mas teremos $\lambda - \mu > 0$ logo $1 + \lambda - \mu > 1$ ou seja, $x_2 > 1$. E o ponto $(T,0)$ será instável. \square

Proposição 5.2. *Se $R_0 > 1$ então o ponto de equilíbrio*

$$X_2^* = \left(\frac{T}{R_0}, \frac{T(R_0 - 1)}{R_0} \right)$$

será estável.

Demonstração: A matriz Jacobiana avaliada no ponto de equilíbrio em consideração é:

$$J(X_2^*) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -\mu \\ \lambda - \mu & 1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são as raízes da equação característica dada por

$$\det(J(X_2^*) - xI) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda - x & -\mu \\ \lambda - \mu & 1 - x \end{vmatrix} = 0$$

De onde obtemos, $x^2 + (\lambda - 2)x + (1 - \lambda + \mu\lambda - \mu^2) = 0$. Portanto os autovalores são $x_1 = 1 - \mu$ e $x_2 = 1 + \mu - \lambda$.

Por definição, $0 < \mu < 1$, logo $0 < 1 - \mu < 1$ e, portanto, $x_1 < 1$.

Se $R_0 = \frac{\lambda}{\mu} > 1$ então $\mu < \lambda \Rightarrow \mu - \lambda < 0$. Logo $x_2 = 1 + \mu - \lambda < 1$, o que caracteriza o ponto de equilíbrio como estável. \square

Os dados obtidos na análise do sistema SI podem ser resumidos na seguinte tabela

R_0	$X_1^*(T,0)$	$X_2^*\left(\frac{T}{R_0}, \frac{T(R_0 - 1)}{R_0}\right)$
$R_0 < 1$	Ponto de equilíbrio estável	Não é ponto de equilíbrio
$R_0 > 1$	Ponto de equilíbrio instável	Ponto de equilíbrio estável

5.4 O Modelo SIS e a Reprodutividade Basal

No modelo SIS um indivíduo pode infectar-se e posteriormente recuperar-se da doença, sendo que a recuperação não irá conferir imunidade ao indivíduo. Em outras palavras, um indivíduo da classe suscetíveis (S) pode passar para a classe dos infectados (I) e pode, posteriormente, voltar à classe dos suscetíveis, caso se recupere. Denotaremos o número total de indivíduos por T e consideraremos a taxa de natalidade igual à taxa de mortalidade, as quais serão denotadas por μ , como a taxa de mortalidade deve estar entre 0 e 1, a taxa de natalidade estará restrita à mesma condição. Denotaremos ainda o número de indivíduos suscetíveis e de infectados no tempo n por S_n e I_n , respectivamente, sendo que a taxa de transmissão, e de recuperação da doença serão representadas por λ e β , respectivamente. Podemos descrever o modelo SIS pelo sistema de equações

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \mu T - \frac{\lambda S_n I_n}{T} - \mu S_n + \beta I_n \\ I_{n+1} = I_n + \frac{\lambda S_n I_n}{T} - \mu I_n - \beta I_n \end{cases}$$

A fim de encontrar os pontos de equilíbrio do sistema tomaremos $S_{n+1} = S_n = S^*$ e $I_{n+1} = I_n = I^*$ nas equações do sistema, obtendo

$$\begin{cases} S^* = S^* + \mu T - \frac{\lambda S^* I^*}{T} - \mu S^* + \beta I^* \\ I^* = I^* + \frac{\lambda S^* I^*}{T} - \mu I^* - \beta I^* \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio determinados pela resolução do sistema são

$$X_1^* = (S_1^*, I_1^*) = (T, 0) \quad \text{ou} \quad X_2^* = (S_2^*, I_2^*) = \left(\frac{T}{\lambda} (\beta + \mu), T - \frac{T}{\lambda} (\beta + \mu) \right)$$

ou seja, se o número de infectados for nulo, $I^* = 0$, então o número de suscetíveis deve ser a população total, $S^* = T$, temos assim que $X_1^* = (S_1^*, I_1^*)$ é um ponto de equilíbrio. Se $S^* = \frac{T}{\lambda} (\beta + \mu)$ então $I^* = T - \frac{T}{\lambda} (\beta + \mu)$ e, portanto, $X_2^* = (S_2^*, I_2^*)$ é o outro ponto de equilíbrio. Podemos dizer que os pontos de equilíbrio refletem duas situações, a primeira corresponde a um equilíbrio livre da doença, descrito pelo ponto X_1^* e a segunda a um equilíbrio endêmico, descrito agora pelo ponto X_2^* .

Vamos agora classificar os pontos de equilíbrio, relativamente à sua estabilidade, tomando como referência os valores da reprodutividade basal. Como o modelo SIS assume a possibilidade de recuperação da doença, a reprodutividade basal é representada por

$$R_0 = \frac{\lambda}{\mu + \beta}$$

Para a classificação dos pontos de equilíbrio, precisamos determinar a matriz Jacobiana $J(S, I)$ do sistema. Considerando

$$f(S, I) = S + \mu T - \frac{\lambda SI}{T} - \mu S + \beta I$$

$$G(S, I) = I + \frac{\lambda SI}{T} - \mu I - \beta I$$

temos

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda I}{T} - \mu & -\frac{\lambda S}{T} + \beta \\ \frac{\lambda I}{T} & 1 + \frac{\lambda I}{T} - \beta - \mu \end{bmatrix}$$

Lembramos que um ponto de equilíbrio é estável se, e somente se, os autovalores da matriz Jacobiana associada ao sistema nesse ponto de equilíbrio são, em módulo, menores que 1. Sendo assim, podemos considerar a seguinte proposição.

Proposição 5.3. *O ponto de equilíbrio livre da doença, $(T, 0)$, será estável se $R_0 < 1$ e*

será instável se $R_0 > 1$.

Demonstração: O polinômio característico da matriz Jacobiana no ponto $(T,0)$ é dado por

$$\det[J(T,0) - xI] = \begin{vmatrix} 1 - \mu - x & -\lambda + \beta \\ 0 & 1 - \beta - \mu - x \end{vmatrix} = 0$$

Suas raízes, que são os autovalores da matriz, são

$$x_1 = 1 - \mu$$

$$x_2 = 1 + \lambda - \beta - \mu$$

Uma condição suficiente e necessária para garantir a estabilidade de $(T,0)$ é

$$|x_1| < 1 \quad \text{e} \quad |x_2| < 1$$

Como a taxa de natalidade e mortalidade satisfaz $0 < \mu < 1$ e $x_1 = 1 - \mu$, conclui-se, imediatamente, que $x_1 < 1$, para qualquer valor de R_0 . Se

$$R_0 = \frac{\lambda}{\beta + \mu} < 1$$

então

$$\lambda - \beta - \mu < 0$$

e, portanto,

$$x_2 = 1 + \lambda - \beta - \mu < 1.$$

□

Proposição 5.4. Se $R_0 > 1$ e $0 < \lambda < 2$ então o ponto de equilíbrio endêmico,

$$(x_2^*, y_2^*) = \left(\frac{T}{\lambda}(\beta + \mu), T - \frac{T}{\lambda}(\beta + \mu) \right)$$

será estável.

Demonstração: O polinômio característico da matriz Jacobiana no ponto (x_2^*, y_2^*) é dado por

$$P(x) = \det[J(x_2^*, y_2^*) - xI] = \begin{vmatrix} 1 - \lambda + \beta - x & -\mu \\ \lambda - \mu - \beta & 1 - x \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$P(x) = x^2 + (\lambda - 2 - \beta)x + 1 - \lambda + \beta - \mu^2 + \mu\lambda - \mu\beta \quad (35)$$

O critério de Jury para polinômios, que consta no Apêndice C, aplicado a um polinômio de grau 2 nos dá o seguinte teorema que irá nos auxiliar a encontrar nosso resultado.

Teorema 5.1. *O módulo das raízes de um polinômio da forma $P(x) = x^2 + a_1x + a_2$ é menor que um se, e somente se, $1 + a_1 + a_2 > 0$, $1 - a_1 + a_2 > 0$ e $1 - a_2 > 0$*

Para o polinômio (35) temos que $a_1 = \lambda - 2 - \beta$ e $a_2 = 1 - \lambda + \beta - \mu^2 + \mu\lambda - \mu\beta$. Substituindo a_1 e a_2 no primeiro membro da primeira desigualdade obtemos

$$\mu(\lambda - \mu - \beta)$$

que é positiva, pois $R_0 > 1 \Rightarrow \lambda - \mu - \beta > 0$. Substituindo a_1 e a_2 no primeiro membro da segunda desigualdade encontramos

$$4 - 2\lambda + 2\beta + \mu(\lambda - \mu - \beta) > 0$$

que é positiva pois $R_0 > 1 \Rightarrow \lambda - \mu - \beta > 0$ e $\lambda < 2$. E, finalmente, para provar a terceira desigualdade temos

$$1 + a_1 = \lambda - \beta - \mu(\lambda - \mu - \beta)$$

Sabemos que $R_0 > 1 \Rightarrow \lambda > \mu + \beta$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $1 - \mu$ e lembrando que $0 < 1 - \mu < 1$ temos

$$\lambda(1 - \mu) > (\mu + \beta)(1 - \mu) = \mu - \mu^2 + \beta - \beta\mu = \mu + \beta - \mu(\mu + \beta) > \beta - \mu(\mu + \beta)$$

Logo

$$\lambda - \lambda\mu > \beta - \mu^2 - \mu\beta$$

e portanto

$$\lambda - \beta - \mu(\lambda - \mu - \beta) > 0$$

□

6 Equações de Diferenças no Ensino Médio

6.1 Introdução

Nesta seção vamos apresentar a teoria abordada nas seções anteriores usando uma linguagem apropriada para alunos do Ensino Médio. Em seguida, vamos sugerir planos de aula que poderão servir de base para professores que queiram abordar o assunto em sala de aula.

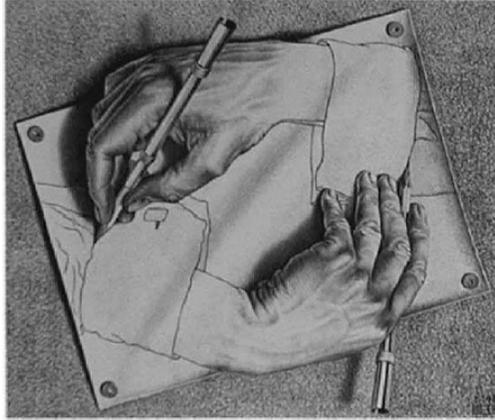


Figura 20: Drawing Hands - Escher.

Fonte: www.wikiart.org/en/m-c-escher/drawing-hands

É muito importante saber lidar com *equações de diferenças*, uma vez que elas podem ser usadas para descrever modelos das mais diversas áreas do conhecimento. Além disso é justificável estudar essas equações durante o Ensino Médio, uma vez que seu estudo não necessita de ferramentas de nível Superior como derivação ou integração.

Uma **equação de diferenças** ou **recursiva** é uma equação em que, cada termo é definido em função de um ou mais termos anteriores.

A Figura 20 ilustra como a recursividade pode ser simbolizada na arte, como nesse trabalho de Escher, em que o artista brinca com a ideia de uma mão construindo a outra em uma relação de interdependência.

Os modelos matemáticos aplicados ao crescimento populacional, como ilustra a Figura 21, podem ser naturalmente descritos com o uso de recursividade conforme exemplificaremos nesse texto.



Figura 21: Equações de diferenças podem ser usadas para descrever a dinâmica de populações. *Fonte: www.canstockphoto.com.br/global-pessoas-passeio-mundo-populacao-3628546.html*

Um exemplo de como a recursividade também é encontrada na matemática está na

definição do fatorial de um número natural.

$$n! = n(n - 1)!$$

$$0! = 1$$

Nesta expressão vemos que para calcular o fatorial de um número precisamos calcular antes o fatorial dos números anteriores a ele e isso se repete recursivamente até que alcancemos o número zero. Por exemplo, aplicando essa regra para um caso particular, $n = 5$, teremos

$$5! = 5 \times 4!$$

$$4! = 4 \times 3!$$

$$3! = 3 \times 2!$$

$$2! = 2 \times 1!$$

$$1! = 1 \times 0!$$

$$0! = 1$$

Portanto

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

6.2 Equação de Fibonacci

Uma equação de diferenças muito famosa é a que descreve o problema proposto por **Fibonacci** em 1202 sobre uma população de coelhos. Suponha que cada casal de coelhos pode reproduzir-se após dois meses de vida e, a partir daí, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de cada mês?

Observe a tabela abaixo que mostra, para cada mês, o número de coelhos recém-nascidos e o número total de coelhos. Destacamos, como exemplo, que como no mês 2 há dois casais, cada um deles, independentemente de ser recém-nascido ou não, vai gerar um novo casal no mês 4, ou seja, após dois meses: Reforçamos que isso ocorre porque cada casal recém-nascido gera um novo casal após dois meses e os casais com mais de dois meses de vida geram um novo casal em cada mês seguinte. Dessa forma o número de casais na geração 4 é igual à soma dos casais que existiam no mês 3 com os casais recém-nascidos que vieram do mês 2.

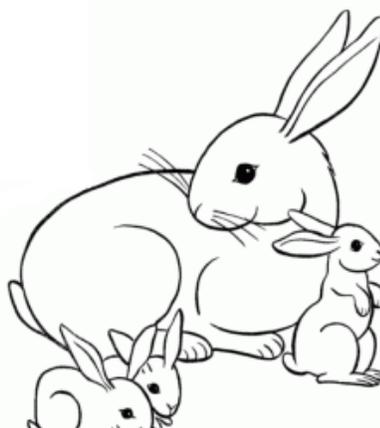


Figura 22: A população de coelhos pode ser descrita pela sequência de Fibonacci. *Fonte: www.desenhosecolorir.com.br/coelhos*

Ou seja, $x_4 = x_3 + x_2$, $x_4 = 2 + 1$, $x_4 = 3$.

Ordem da geração	0	1	2	3	4
Nascidos nessa geração	1	0	1	1	2
Total de casais de coelhos	1	1	2	3	5

Figura 23: O número de casais em um mês é igual ao número de casais que nascem após dois meses.

Os números de casais de coelhos ao longo dos meses formam a denominada *sequência de Fibonacci*.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 35\dots \quad (36)$$

Podemos observar uma lei de formação associada à sequência dada por

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_1 &= 1 \\ x_n &= x_{n-1} + x_{n-2} \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Em que x_n representa o número de casais no coelhos no mês n . Se quisermos determinar o valor do termo de posição n de uma equação de diferenças é necessário calcular, primeiramente, os $n - 1$ termos anteriores.

Denotaremos por **iteração** ao processo de se calcular um termo qualquer a partir do uso da equação de diferenças e dos termos anteriores necessários. Por exemplo, se quisermos determinar o termo x_4 que é o 5º termo da equação de Fibonacci, lembrando que os termos x_0 e x_1 já são conhecidos, deveremos fazer as três seguintes iterações

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + x_0 = 1 + 1 = 2 \\ x_3 &= x_2 + x_1 = 2 + 1 = 3 \\ x_4 &= x_3 + x_2 = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

O conjunto dos pontos (n, x_n) gerados pelas iterações é denominado **mapa** da equação de diferenças. Por exemplo, o mapa da relação $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ em que $x_0 = x_1 = 1$ é o conjunto

$$\{(0,1), (1,1), (2,1), (3,2), (4,3), (5,5), (6,8), \dots\}$$

É um tanto natural que queiramos representar esses pontos em um gráfico a fim de observar se nossa sequência é crescente, decrescente ou se apresenta qualquer outro comportamento interessante.

Ressaltamos que há poucas décadas, a tarefa de se calcular muitas iterações de uma equação de diferenças era bastante difícil, visto que o processo era realizado manualmente.

Atualmente o processo de se calcular vários pontos do mapa de uma equação de diferenças, bem como gerar seu gráfico pode ser executado em segundos, ou até frações de segundos, por um computador simples a partir do momento em que este já tenha sido programado para fazê-lo. Nesse trabalho vamos usar essas planilhas para gerar tais gráficos.

Vamos ilustrar esse processo pelo estudo de alguns modelos de sistemas da biologia descritos por equações de diferenças, para os quais construiremos e analisaremos os gráficos.

6.3 Modelo Populacional de Malthus

Em 1798 **Thomas Malthus** propôs um modelo segundo o qual uma população cresce em um determinado instante proporcionalmente à população total naquele instante.

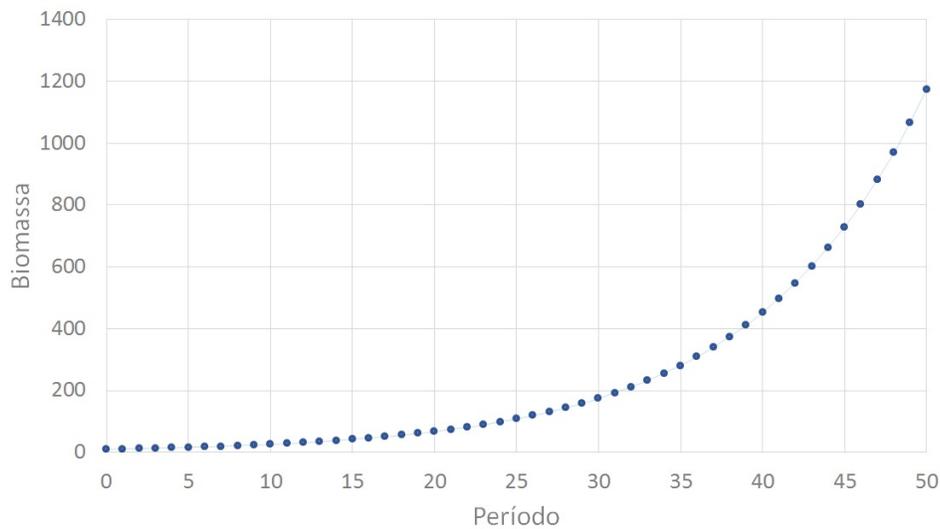


Figura 24: Mapa de $x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n$ para uma taxa de 10% e uma população inicial $P_0 = 10$. Temos uma órbita crescente cujos valores parecem ser ilimitados.

A seguinte equação de diferenças descreve o modelo proposto por Malthus para o caso em que o tempo varia em períodos constantes:

$$x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n \quad (38)$$

em que n representa o número de períodos decorridos, x_n , o tamanho da população no período n e α , a taxa de crescimento por unidade de tempo.

Observamos que x_n pode ser expressa em número de indivíduos ou biomassa, que nada mais é que a massa biológica da população, que pode ser dada em gramas, quilos, toneladas, etc. Muitas vezes é mais fácil tratar x_n como biomassa, como no caso em que x_n é expressa por quantidades decimais.

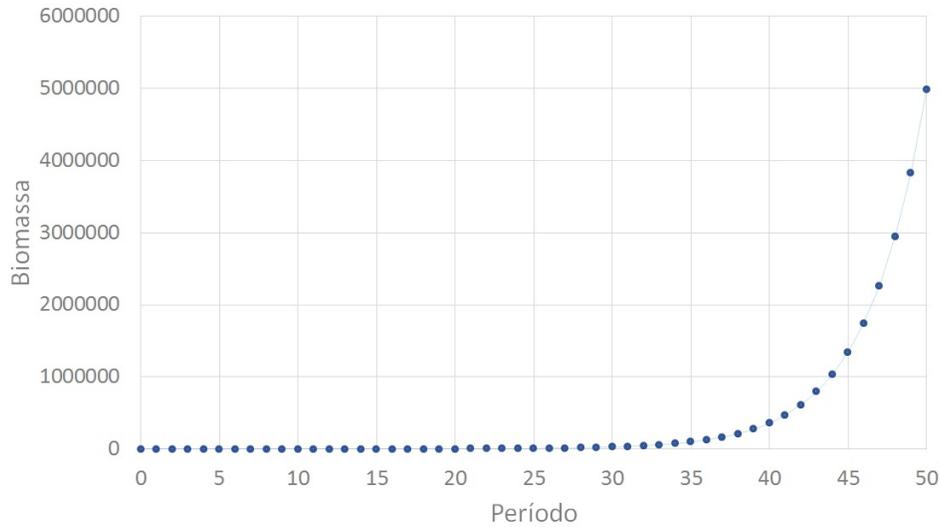


Figura 25: Mapa de $x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n$ para uma taxa de crescimento ao período é de 30% e uma população inicial seja $P_0 = 10$ indivíduos. Vemos uma órbita crescente cujos valores parecerem ilimitados.

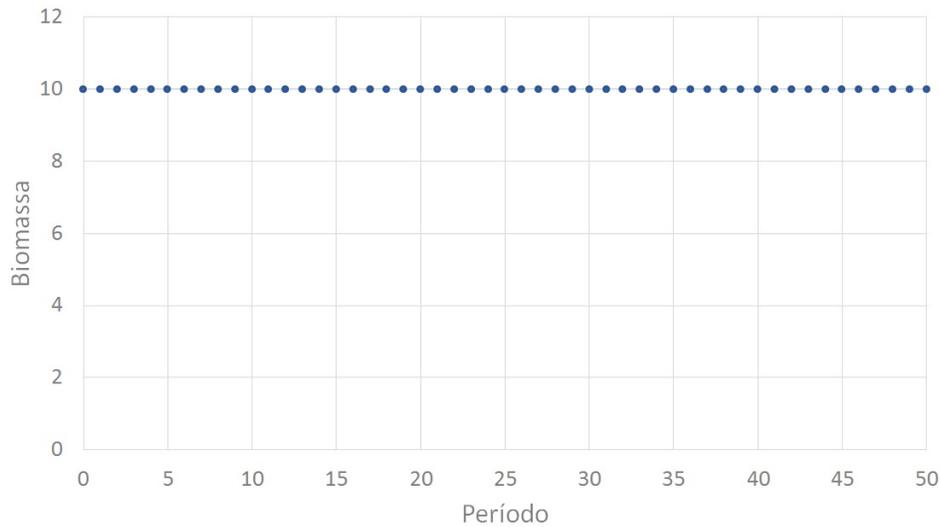


Figura 26: Para $\alpha = 0$ em $x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n$ gráfico é constante, como não poderia deixar de ser, dado que a taxa de crescimento é nula.

O modelo de Malthus admite algumas hipóteses como uma disponibilidade ilimitada de recursos e que não há competição entre indivíduos da espécie.

Observe que, inicialmente, não fizemos nenhuma restrição em relação ao valor da taxa de crescimento α e em relação ao valor da população inicial x_0 .

A seguir vamos propor diferentes valores para α e x_0 e analisar os gráficos dos mapas

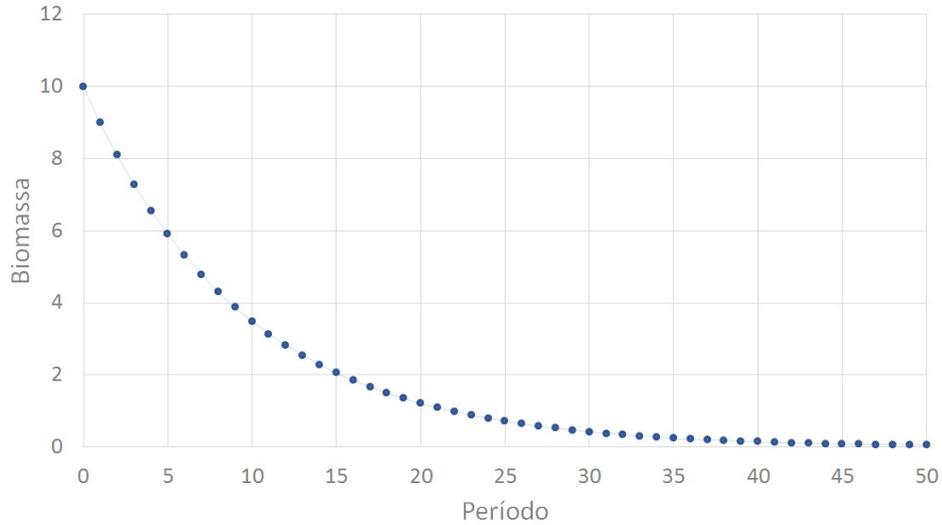


Figura 27: $\alpha = -10\%$ em $x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n$ indica uma taxa de decrescimento. Observamos uma órbita decrescente que se aproximam cada vez mais de 0.

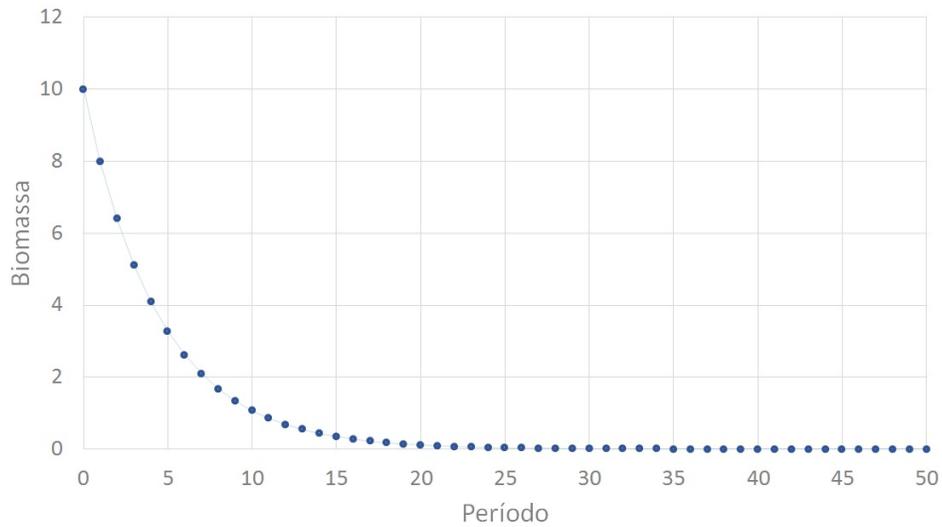


Figura 28: $\alpha = -20\%$ em $x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n$ indica uma taxa de decrescimento. Observamos uma órbita decrescente que se aproximam cada vez mais de 0.

correspondentes.

Suponha, por exemplo, que na equação (38) tenhamos uma taxa de crescimento ao período de 10%, ou seja $\alpha = 0,1$ e que a população inicial seja $P_0 = 10$, que vamos supor ser sua biomassa. Teremos o gráfico da forma $n \times x_n$ para os pontos gerados pelas 50 primeiras iterações dessa equação representado na Figura 24. Podemos observar uma

população que parece crescer cada vez mais rápido e que parece ser ilimitada.

Suponha, agora, que na equação (38) tenhamos $\alpha = 0,3$ ou seja, a taxa de crescimento ao período é de 30% e que a população inicial seja $P_0 = 10$ indivíduos. Teremos o gráfico da forma $n \times x_n$ para os pontos gerados pelas 50 primeiras iterações dessa equação representado na Figura 25. Podemos observar uma população que parece crescer cada vez mais rápido e que parece ser ilimitada. Vemos também que a velocidade de crescimento é bem maior que no exemplo anterior, pois enquanto na Figura 24 para o período $n = 40$ a biomassa é pouco maior que 400, na Figura 25 para o mesmo período a biomassa populacional já é maior que 300.000. Observe que estamos considerando que os recursos para subsistência dessa população são suficientemente grandes para todos os valores que a população assume nesse exemplo.

Suponha, agora, que tenhamos $\alpha = 0$ ou seja, a taxa de crescimento ao período é nula e que a população inicial seja $P_0 = 10$. Teremos o gráfico da forma $n \times x_n$ para os pontos gerados pelas 50 primeiras iterações representado na Figura 26. Observamos que o tamanho da biomassa mantém-se constante e igual a 10, o que condiz com o fato de a taxa de crescimento ser nula.

Suponha agora que $\alpha = -0,1$ ou seja, temos uma taxa de decrescimento ao período de 10% e que a população inicial seja $P_0 = 10$. Teremos o gráfico da forma $n \times x_n$ para os pontos gerados pelas 50 primeiras iterações representado na Figura 27. Observamos uma população decrescente cuja biomassa tende a zero.

Suponha agora que $\alpha = -0,2$ ou seja, temos uma taxa de decrescimento ao período de 20% e que a população inicial seja $P_0 = 10$. Teremos o gráfico da forma $n \times x_n$ para os pontos gerados pelas 50 primeiras iterações representado na Figura 28. Observamos uma órbita decrescente cujos valores tendem a zero mais rápido que no caso anterior.

Pelos dois últimos exemplos concluímos que se uma população é descrita pelo modelo de Malthus e ela apresenta uma taxa de crescimento negativa ela tende a extinguir-se com passar do tempo, mas nunca efetivamente se extingue, ou seja $x_n \neq 0 \forall n$.

6.4 Modelo Populacional de Verhulst

Como dissemos, o modelo proposto por Malthus não leva em consideração o caráter finito do ambiente, ou seja considera os recursos como ilimitados. Uma outra equação para o crescimento populacional denominada **equação logística**, ou **equação de Verhulst** é a seguinte.

$$x_{n+1} = (1 + \alpha)x_n - \beta x_n^2$$

onde x_n indica o número de indivíduos ou a biomassa da população no período n , α indica uma taxa de natalidade populacional e β a taxa de decrescimento da população devido à competição entre os indivíduos. Observe que a constante β é multiplicada pelo quadrado do tamanho da população no tempo n , o qual indica o encontro ou a interação entre esses indivíduos.

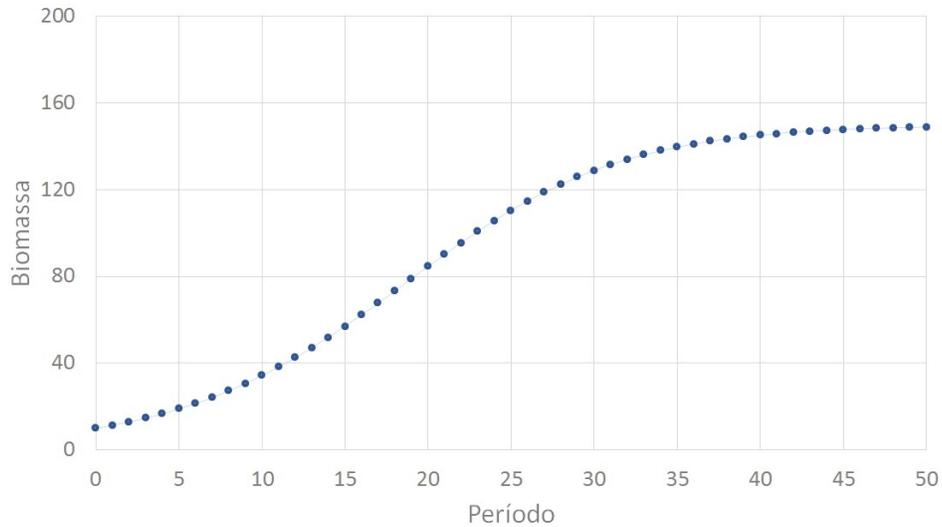


Figura 29: Solução da equação de Verhulst com os parâmetros $\alpha = 0,15$, $\beta = 0,001$ e condição inicial $x_0 = 10$.

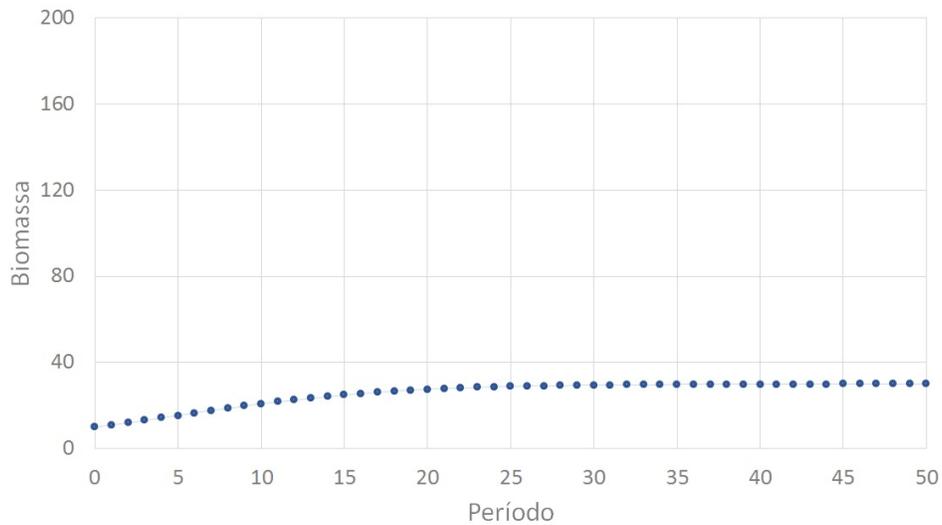


Figura 30: Solução da equação de Verhulst com os parâmetros $\alpha = 0,15$ e $\beta = 0,005$ e condição inicial $x_0 = 10$.

Podemos trabalhar com os alunos apresentando várias soluções particulares para a equação de Verhulst. Na Figura 29 vemos o mapa da equação de Verhulst com os parâmetros $\alpha = 0,15$ e $\beta = 0,001$ e condição inicial $x_0 = 10$. Com esses valores a órbita começa crescendo lentamente, passa por um período de crescimento mais rápido e depois diminui a taxa de crescimento. Quando o tempo cresce muito a órbita tende ao valor 150.

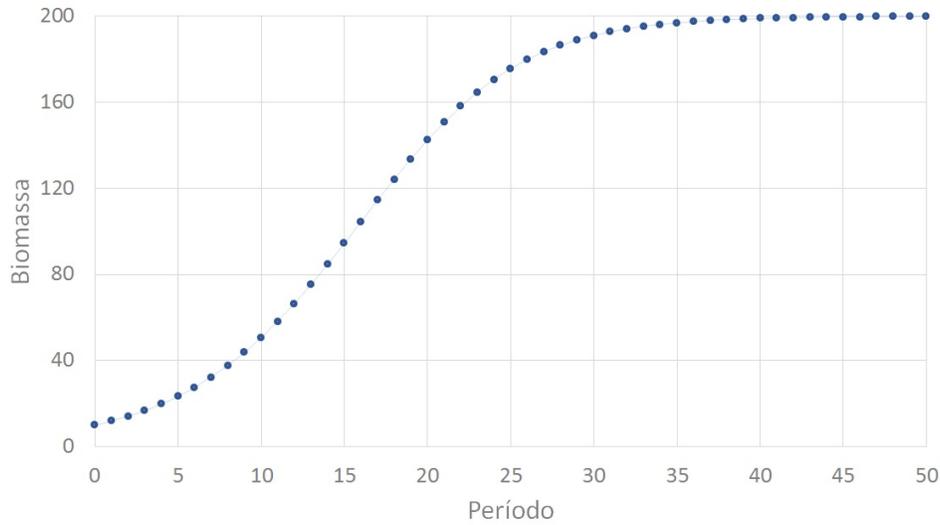


Figura 31: Solução da equação de Verhulst com os parâmetros $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,001$ e condição inicial $x_0 = 10$.

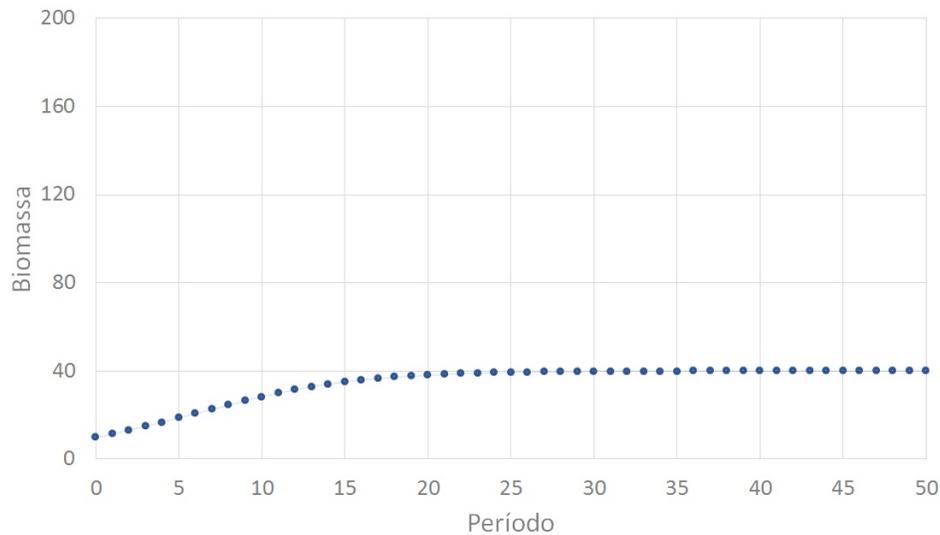


Figura 32: Solução da equação de Verhulst com os parâmetros $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,005$ e condição inicial $x_0 = 10$.

Considerando agora os parâmetros $\alpha = 0,15$ e $\beta = 0,005$ com a mesma condição inicial $x_0 = 10$ obtemos a solução apresentada na Figura 30. Neste caso a órbita começa com uma taxa de crescimento menor do que no caso anterior, que podemos supor ser devido ao aumento da taxa de competição, e se estabiliza em um valor também menor, igual a 30.

Mantendo a população inicial em $x_0 = 10$, tomando a taxa de crescimento como $\alpha = 0,2$

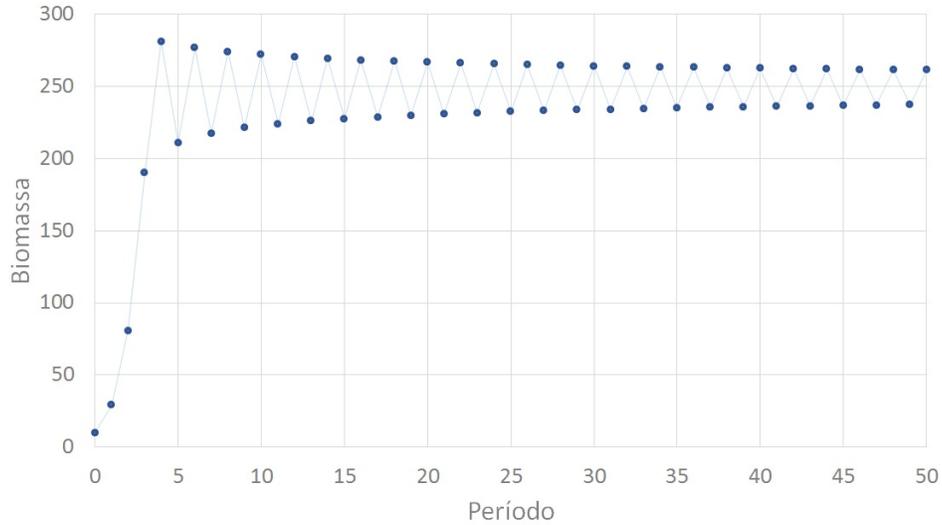


Figura 33: Solução da equação de Verhulst com os parâmetros $\alpha = 2$, $\beta = 0,008$ e condição inicial $x_0 = 10$.

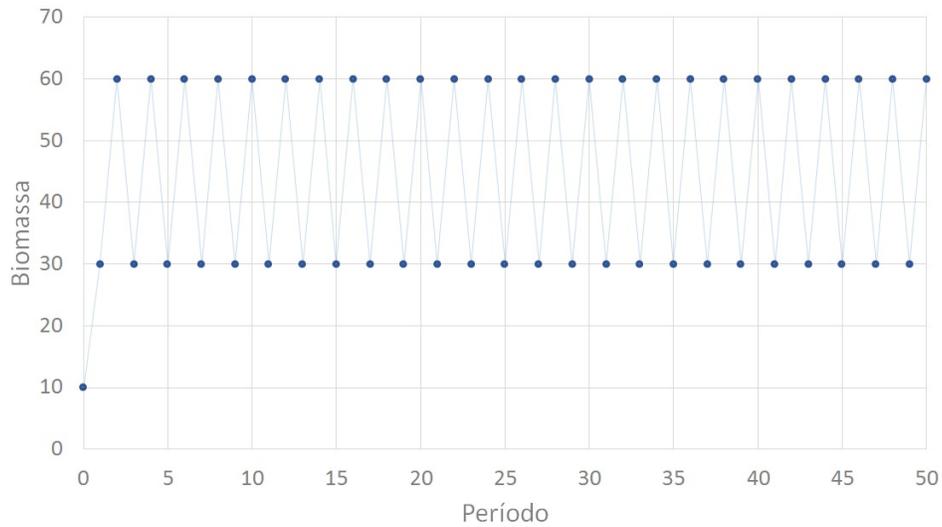


Figura 34: Solução da equação de Verhulst com os parâmetros $\alpha = 2,5$, $\beta = 0,05$ e condição inicial $x_0 = 10$.

e a taxa de competição como $\beta = 0,001$ podemos construir o gráfico representado na Figura 31. Observamos que a taxa de crescimento da população, dada pela inclinação do gráfico, começa elevada e diminui com o passar do tempo, de maneira que o gráfico se aproxima de 200.

Mantendo a população inicial em $x_0 = 10$ e a taxa de crescimento como $\alpha = 0,2$ e

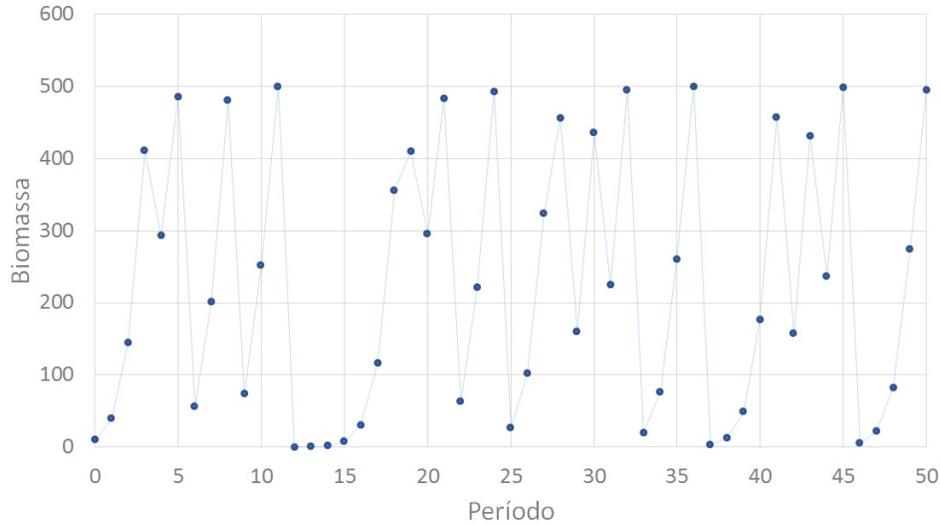


Figura 35: Solução da equação de Verhulst com os parâmetros $\alpha = 3$, $\beta = 0,008$ e condição inicial $x_0 = 10$.

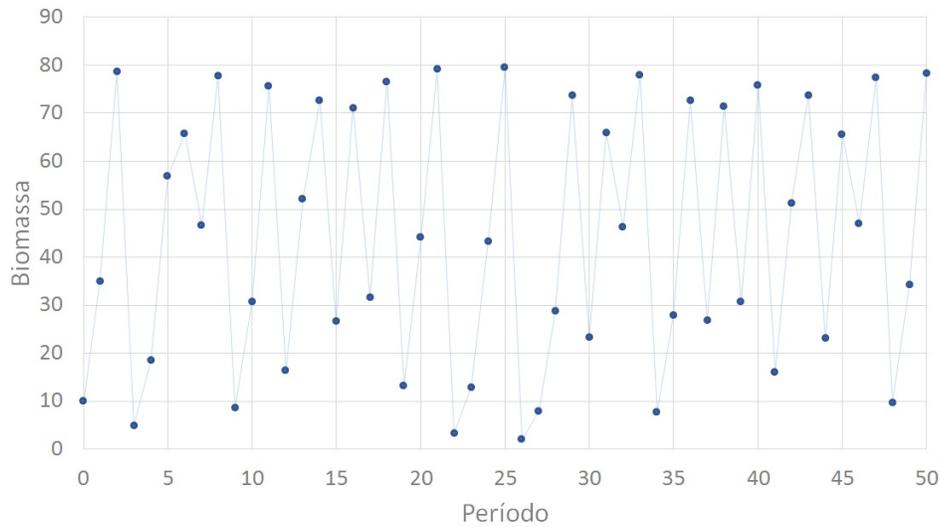


Figura 36: Solução da equação de Verhulst com os parâmetros $\alpha = 3$, $\beta = 0,05$ e condição inicial $x_0 = 10$.

aumentando a taxa de competição para $\beta = 0,005$ podemos construir o gráfico representado na Figura 32. Observe que a taxa de crescimento inicial é menor que no exemplo anterior, uma vez que a taxa de competitividade é maior. Esse gráfico cresce cada vez mais lentamente e à medida que o tempo aumenta os valores da biomassa populacional se aproximam de 40.

Se tomarmos uma taxa de crescimento populacional $\alpha = 2$, uma taxa de competitividade igual a $\beta = 0,008$ mantendo a população inicial como $x_0 = 10$ observaremos um comportamento bastante curioso representado na Figura 33 em que as órbitas, a partir do período $n = 5$ passa a oscilar em torno de um valor fixo. Além disso à medida que o tempo passa os valores das órbitas parecem tender a esse valor que está próximo de 250.

Tão curioso quanto o exemplo anterior é o que notamos quando, a partir dos valores $\alpha = 2,5$, $\beta = 0,05$ e $x_0 = 10$ construímos o gráfico representado na Figura 34. A partir do período $n = 2$ os valores da órbita oscilam indefinidamente entre os valores 30 e 60.

Se por sua vez assumirmos para a taxa de crescimento o valor $\alpha = 3$ e para a taxa de competitividade o valor $\beta = 0,008$ teremos o gráfico representado na Figura 35, que tem um comportamento dito caótico pois não apresenta nenhum padrão e não possibilita que façamos suposições sobre os valores que a população assume a medida em que o tempo aumenta.

Comportamento semelhante pode ser observado no gráfico da Figura 36, em que assumimos ter $\alpha = 3$, $\beta = 0,05$ e $x_0 = 10$. O comportamento desse gráfico é completamente aleatório não se aproximando de nenhum valor fixo a medida que o tempo passa.

Nos gráficos das Figuras 29, 30, 31, 32 notamos que, à medida que a população cresce, a taxa de crescimento populacional, representada pela inclinação do gráfico, diminui. Isso é garantido pelo caráter de competitividade considerado nesse modelo. Podemos entender que, quanto mais indivíduos existem mais eles vão competir pelos recursos necessários à sua sobrevivência e menor será a tendência de essa população continuar crescendo.

Percebemos que à medida em que variamos o valor das constantes os gráficos podem crescer, decrescer, oscilar, permanecer constantes, etc. Observamos mais possibilidades de comportamento para as equações do modelo de Verhulst do que para as equações do modelo de Malthus. Dentre outros motivos, isso deve-se ao fato de que na equação de Verhulst a variável interage com ela mesma o que é representado pelo termo βx_n^2 , de grau 2.

Outro comportamento bastante interessante que podemos trabalhar com os alunos em ambos os modelos é que alguns gráficos parecem se aproximar de um valor constante à medida que os valores de n aumentam. Se um dado modelo evolui para um certo comportamento característico, diremos que este comportamento é um **atrator**; sob uma análise gráfica isso equivale a dizer que, a partir de um certo valor de x_n , os resultados das próximas iterações ficarão cada vez mais próximos de um valor fixo, ao qual denominaremos **ponto atrator** da equação de diferenças.

Diremos que um certo ponto é **repulsor** se a partir de um determinado valor de x_n todos os próximos valores da variável ficarem cada vez mais distantes de desse ponto.

Há inúmeros motivos pelos quais é importante determinar pontos atratores e repulsores. Por exemplo, se uma espécie animal representa uma praga e se o tamanho de sua população é modelada por uma equação de diferenças gostaríamos de saber em quais condições o tamanho dessa população se aproximaria um número muito pequeno ou de zero.

6.5 Plano de Aula

6.5.1 Estudo de Equações de Diferenças Através de Análise Gráfica

Nessa aula estudaremos as equações denominadas *relações de recorrências* ou *equações de diferenças* observando o comportamento de seus gráficos.

Tema Estudo de Equações de Diferenças Baseado na Análise Gráfica.

Objetivos Apresentar as Equações de Diferenças como ferramenta em modelagem matemática. Construir computacionalmente os gráficos de suas soluções e analisá-los a fim de estudar seu comportamento, por exemplo, determinando e classificando seus pontos de equilíbrio.

Conteúdos Construção e análise de gráficos com uso de recursos computacionais.

Pré-requisitos Saber posicionar pontos no plano cartesiano e ter uma noção intuitiva de crescimento, decrescimento e assíntotas.

Duração 3 horas

Recursos Computadores com programas para cálculos com operações básicas, construção de tabelas e gráficos, como o Excel. Projetor de slides.

Metodologia Apresentação dos conceitos de Equações de Diferenças e dos métodos para a construção de tabelas e gráficos. Construção e análise conjunta com os alunos das tabelas e gráficos de algumas equações de diferenças de modelos específicos.

Avaliação Os alunos levarão para casa a proposta de gerar gráficos de uma equação que descreve um modelo específico e tirar conclusões sobre a existência de pontos fixos para cada valor de parâmetro sugerido.

6.5.2 Exercício 1

1. Considere que uma população representada pelo modelo malthusiano tenha, inicialmente $x_0 = 20$ indivíduos e cuja taxa de crescimento seja $r = 1,9$ por período. Quantos indivíduos haverá nessa população após 30 períodos completos?

Solução: Para resolver esse problema vamos inserir os dados $x_0 = 20$ e $r = 1,2$ em duas células de um programa de planilhas, como o Excel, inserir a fórmula da relação de recorrências e fazer as 30 compilação necessárias.

2. Construa o gráfico $n \times x_n$ dos pontos determinados anteriormente e determine se esse gráfico é crescente ou decrescente, se o crescimento ou decrescimento é rápido ou lento, porque ele apresenta esse comportamento e o que podemos esperar para o tamanho dessa população caso as condições do sistema não se alterarem e a taxa de crescimento da população permanecer a mesma.

3. Você saberia dizer um tipo de ser vivo cujo crescimento populacional seja descrito por esse modelo? Explique o porque de sua escolha.

Algumas sugestões: Grama no jardim de uma casa, ratos em uma cidade higienizada, ratos e uma grande cidade com pouco saneamento básico, pernilongos em locais com acúmulo de água, bactérias em um tubo de ensaio com muita matéria para consumo. Observe que não há uma resposta fechada mas uma série de conclusões que podem levar um biólogo a usar, ou não, esse modelo para descrever uma população.

6.5.3 Exercício 2

Repita todos os procedimentos realizados no exercício anterior, agora mudando os parâmetros para $x_0 = 1$ e $r = 1,2$; $x_0 = 100$ e $r = 1,2$; $x_0 = 20$ e $r = 0,8$; $x_0 = 20$ e $r = 1$.

6.5.4 Exercício 3

1. Suponha que comecemos com uma população de biomassa $x_0 = 0,01$ e que a taxa de crescimento da população seja $r = 1,2$. Quantos indivíduos haverá nessa população após 30 períodos completos?

Solução: Para resolver esse problema vamos inserir os dados $x_0 = 0,01$ e $r = 1,2$ em duas células de um programa de planilhas, como o Excel, inserir a fórmula da relação de recorrências e fazer as 30 compilação necessárias.

2. Construa o gráfico $n \times x_n$ dos pontos determinados anteriormente e determine se esse gráfico é crescente ou decrescente, se o crescimento ou decrescimento é rápido ou lento, porque ele apresenta esse comportamento e o que podemos esperar para o tamanho dessa população caso as condições do sistema não se alterarem e a taxa de crescimento da população permanecer a mesma.

Esse gráfico parece se estabilizar em algum ponto?

3. Você saberia dizer um tipo de ser vivo cujo crescimento populacional seja descrito por esse modelo? Explique o porque de sua escolha.

Algumas sugestões: Grama no jardim de uma casa, ratos em uma cidade higienizada, ratos e uma grande cidade com pouco saneamento básico, pernilongos em locais com acúmulo de água, bactérias em um tubo de ensaio com muita matéria para consumo, a população de pessoas de um país. Reforçamos que não há uma resposta fechada mas uma série de conclusões que podem levar um biólogo a usar, ou não, esse modelo para descrever uma população.

6.5.5 Exercício 4

Repita todos os procedimentos realizados no exercício anterior, agora mudando os parâmetros para $x_0 = 0,01$ e $r = 0,06$; $x_0 = 0,01$ e $r = 1$; $x_0 = 0,3$ e $r = 0,8$; $x_0 = 0,3$ e $r = 3$.

7 Conclusões

Neste trabalho exploramos os sistemas dinâmicos discretos e suas aplicações à modelagem de fenômenos biológicos como base para uma proposta de atividades extra curriculares, em Matemática Aplicada, para alunos do Ensino Médio. Também apresentamos sugestões detalhadas de modo que um professor interessado seja capaz de propor essas atividades diretamente em uma sala de aula e avaliar o nível de compreensão alcançado pelos alunos.

Acreditamos na relevância e utilidade dessas atividades para que os alunos percebam a importância da Matemática na modelagem de sistemas concretos e aprendam a analisar o comportamento desses sistemas a partir das informações que podem ser extraídas dos gráficos das equações desses sistemas. Também vemos nesse processo uma oportunidade de despertar em alunos e professores a vontade de utilizar ferramentas gráficas para auxiliar o estudo e a compreensão de assuntos que já são abordados em sala de aula e de outros novos assuntos.

A Equação Linear Equivalente a Um Sistema

O estudo de sistemas linear com k variáveis k equações de diferenças de primeira ordem pode ser reduzido ao estudo de uma equação de diferenças de ordem k em uma única variável. Essa seção mostra como o sistema pode ser transformado na equação de ordem k .

Para ilustrar esse processo, considere o seguinte sistema nas variáveis $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k$

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = a_{11}x_n^1 + a_{12}x_n^2 + \dots + a_{1k}x_n^k \\ x_{n+1}^2 = a_{21}x_n^1 + a_{22}x_n^2 + \dots + a_{2k}x_n^k \\ \vdots \\ x_{n+1}^k = a_{k1}x_n^1 + a_{k2}x_n^2 + \dots + a_{kk}x_n^k \end{cases}$$

Para encontrar a equação equivalente basta seguir os seguintes passos. Avance $k - 1$ iterações na equação do sistema cuja variável será preservada. Para explicar nosso algoritmo vamos escolher a primeira equação do sistema obtendo

$$x_{n+k}^1 = a_{11}x_{n+k-1}^1 + a_{12}x_{n+k-1}^2 + \dots + a_{1k}x_{n+k-1}^k \quad (39)$$

O primeiro passo é avançar $k - 2$ iterações em todas as equações do sistema dado,

obtendo, a partir da segunda equação do novo sistema, expressões para x_{n+k-1}^2 , x_{n+k-1}^3 , \dots , x_{n+k-1}^k , respectivamente, conforme consta abaixo:

$$x_{n+k-1}^1 = a_{11}x_{n+k-2}^1 + a_{12}x_{n+k-2}^2 + \dots + a_{1k}x_{n+k-2}^k \quad (40)$$

$$x_{n+k-1}^2 = a_{21}x_{n+k-2}^1 + a_{22}x_{n+k-2}^2 + \dots + a_{2k}x_{n+k-2}^k \quad (41)$$

\dots

$$x_{n+k-1}^k = a_{k1}x_{n+k-2}^1 + a_{k2}x_{n+k-2}^2 + \dots + a_{kk}x_{n+k-2}^k \quad (42)$$

Na equação (39) proveniente da primeira equação do sistema avançada $k - 1$ iterações substitua os termos x_{n+k-1}^2 , até x_{n+k-1}^k pelas expressões equivalentes dadas por (41), \dots , (42), obtendo uma equação da forma

$$x_{n+k}^1 = A_1x_{n+k-1}^1 + A_2x_{n+k-2}^2 + \dots + A_kx_{n+k-2}^k, \quad (43)$$

em que A_1, A_2, \dots, A_k são constantes reais.

A partir da equação (40) é possível obter $k - 1$ equações equivalentes. A primeira isolando x_{n+k-2}^2 , a segunda isolando x_{n+k-2}^3 e assim por diante, até isolar x_{n+k-2}^k . As equações obtidas devem ser substituídas na equação (43) obtendo uma equação da forma

$$x_{n+k}^1 = B_1x_{n+k-1}^1 + B_2x_{n+k-2}^1 + B_3x_{n+k-2}^2 + \dots + B_{k+1}x_{n+k-2}^k \quad (44)$$

O segundo passo é avançar todas as equações do sistema original $k - 3$ iterações obtendo a partir da segunda equação desse novo sistema expressões para x_{n+k-2}^2 , x_{n+k-2}^3 , \dots , x_{n+k-2}^k respectivamente. Substitua essas expressões na equação (44) obtendo uma equação da forma

$$x_{n+k}^1 = C_1x_{n+k-1}^1 + C_2x_{n+k-2}^1 + C_3x_{n+k-3}^2 + \dots + C_{k+1}x_{n+k-3}^k \quad (45)$$

Da primeira equação desse último sistema em que se avançou $k - 3$ iterações podemos obter $k - 1$ equações equivalentes. A primeira isolando x_{n+k-3}^2 , a segunda isolando-se x_{n+k-3}^3 e assim por diante até isolar x_{n+k-3}^k . Obtenha essas equações e substitua na equação (45) obtendo uma equação da forma

$$x_{n+k}^1 = D_1x_{n+k-1}^1 + D_2x_{n+k-2}^1 + D_3x_{n+k-3}^1 + D_4x_{n+k-3}^2 + \dots + D_{k+2}x_{n+k-3}^k \quad (46)$$

Repetindo o processo descrito no segundo passo até obter um total de $k - 1$ passos. Ao final do passo $k - 1$ teremos uma equação na forma

$$\begin{aligned} x_{n+k}^1 &= W_1x_{n+k-1}^1 + W_2x_{n+k-2}^1 + \dots + W_kx_n^1 \\ &+ Y \left(W_{k+1}x_n^2 + W_{k+2}x_n^3 \dots + W_{2K-1}x_n^k \right) \end{aligned} \quad (47)$$

Para finalizar o processo é preciso observar que a expressão $(W_{k+1}x_n^2 + W_{k+2}x_n^3 \cdots + W_{2K-1}x_n^k)$ equivale à $a_{12}x_n^2 + \cdots + a_{1k}x_n^k$, e usando a primeira equação do sistema original podemos substituí-la por $x_{n+1}^1 - a_{11}x_n^1$. gerando uma equação da forma

$$x_{n+k}^1 = Z_1x_{n+k-1}^1 + Z_2x_{n+k-2}^1 + \cdots + Z_kx_n^1 \quad (48)$$

que depende apenas da variável x_n^1 e suas iteradas.

B Solução Geral de Uma Equação de Diferenças Linear de Ordem k

Para detalhar o processo pelo qual se determina a solução geral para uma equação de diferenças linear com coeficientes constantes da forma

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + \cdots + c_kx_{n-k} \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (49)$$

vamos utilizar algumas definições e teoremas que podem ser encontrados no trabalho de Rafael Luis, [6].

Definição B.1. Diz-se que as funções $f_1(n), f_2(n), \dots, f_k(n)$ são **linearmente independentes** para $n \geq n_0$ sempre que para todos os $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, se $\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i f_i(n) = 0$ então $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$. Se existir $\alpha_i \neq 0$ tal que $\sum_{i=1}^{i=k} \alpha_i f_i(n) = 0$ então as funções são ditas **linearmente dependentes**.

Definição B.2. Diz-se que o conjunto $\{x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação (49) se $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k$ são k soluções linearmente independentes dessa equação.

Definição B.3. Seja $\{x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k\}$ um conjunto fundamental de soluções da equação (49). A solução geral dessa equação é dada por

$$x_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_n^i$$

para constantes arbitrárias $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Qualquer solução da equação (49) pode ser obtida a partir da solução geral, escolhendo-se, adequadamente, as constantes α_i

Exemplo B.1. Mostre que o conjunto $\{1, n, 3^n\}$ é um conjunto linearmente independente.

Solução Queremos mostrar que se $\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 3^n = 0 \quad \forall n$ então $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Uma vez que a equação deve ser válida para todo n pode-se substituir n por $n + 1$ e $n + 2$ obtendo-se o sistema

$$\begin{cases} 1\alpha_1 + n\alpha_2 + 3^n\alpha_3 = 0 \\ 1\alpha_1 + (n + 1)\alpha_2 + 3^{(n+1)}\alpha_3 = 0 \\ 1\alpha_1 + (n + 2)\alpha_2 + 3^{(n+2)}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ é solução desse sistema. Além disso, a matriz que caracteriza esse sistema é

$$K = \begin{bmatrix} 1 & n & 3^n \\ 1 & (n + 1) & 3^{(n+1)} \\ 1 & (n + 2) & 3^{(n+2)} \end{bmatrix}$$

cujos determinante é $|K| = 4 \cdot 3^n$. Como $|K| \neq 0 \forall n$ então a única solução de (49) é, de fato, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

A matriz K desse exemplo é denominada matriz de Casorati conforme definiremos a seguir.

Definição B.4. Sejam $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k$, k soluções da equação (49). A matriz de Casorati $K(n)$ de dimensão $k \times k$ da sequência de soluções é dada por

$$K(n) = \begin{bmatrix} x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^k \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^k \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ x_{n+k-1}^1 & x_{n+k-1}^2 & \dots & x_{n+k-1}^k \end{bmatrix}$$

Definição B.5. Ao valor do determinante de $K(n)$ denomina-se **casoratiano** da sequência de soluções e representa-se por $C(n)$.

O teorema seguinte é uma particularização da fórmula de Abel para equações lineares com coeficientes constantes e homogêneas.

Teorema B.1. Dada a equação de diferenças (49), cuja sequência de soluções é $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k$ então para todo $n \geq n_0$ é satisfeita a relação $C(n + 1) = c_k (-1)^{k-1} C(n)$.

Demonstração: Vamos fazer a prova para o caso em que $k = 3$, que poderá ser generalizada para um caso qualquer.

Para esse caso têm-se e, substituindo n por $n + 1$ temos

$$C(n + 1) = \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \\ x_{n+3}^1 & x_{n+3}^2 & x_{n+3}^3 \end{vmatrix}$$

De (49) temos $x_{n+3} = c_1 x_{n+2} + c_2 x_{n+1} + c_3 x_n$

Substituindo para cada uma das soluções particulares a terceira linha de $C(n+1)$

teremos

$$C(n+1) = \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \\ c_1x_{n+2}^1 + c_2x_{n+1}^1 + c_3x_n^1 & c_1x_{n+2}^2 + c_2x_{n+1}^2 + c_3x_n^2 & c_1x_{n+2}^3 + c_2x_{n+1}^3 + c_3x_n^3 \end{vmatrix}$$

Pelas propriedades de determinantes

$$\begin{aligned} C(n+1) &= \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \\ c_3x_n^1 & c_3x_n^2 & c_3x_n^3 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \\ c_2x_{n+1}^1 & c_2x_{n+1}^2 & c_2x_{n+1}^3 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \\ c_1x_{n+2}^1 & c_1x_{n+2}^2 & c_1x_{n+2}^3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ainda pelas propriedades de determinantes vemos que os dois últimos determinantes são nulos, pois cada um possui uma linha múltipla da outra. Logo

$$C(n+1) = c_3 \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^3 \\ x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \end{vmatrix}$$

$$C(n+1) = c_3(-1)^2 C(n)$$

A potência $(-1)^2$ aparece porque a matriz no último determinante provém da matriz de $C(n)$ a partir de 2 trocas de linhas.

No caso de uma matriz $k \times k$, a matriz em que cada linha aparece na posição anterior e a primeira linha aparece no lugar da última, provém de pelo menos $k - 1$ trocas de linhas. De onde teremos que

$$C(n+1) = c_k(-1)^{(k-1)} C(n) \tag{50}$$

□

Teorema B.2. *Sejam $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k$ soluções linearmente independentes de (49) e seja $C(n)$ o seu respectivo casoratiano. Então para $n > n_0$*

$$C(n) = C_k(-1)^{(k-1)(n-n_0)} C(n_0)$$

Demonstração: A equação (50) equivale às equações

$$C(n) = c_k(-1)^{(k-1)}C(n-1)$$

$$C(n) = c_k(-1)^{(k-1)}c_k(-1)^{(k-1)}C(n-2) = (c_k(-1)^{(k-1)})^2C(n-2)$$

$$C(n) = c_k(-1)^{(k-1)}c_k(-1)^{(k-1)}c_k(-1)^{(k-1)}C(n-3) = (c_k(-1)^{(k-1)})^3C(n-3)$$

que pode ser generalizado por indução como

$$C(n) = (c_k(-1)^{(k-1)})^l C(n-l)$$

para $l \in \mathbb{N}$ e $l < n$. Tome $n-l = n_0$ então

$$C(n) = c_k^{(n-n_0)}(-1)^{(n-n_0)(k-1)}C(n_0)$$

□

Lema B.1. *Suponha que $c_k \neq 0$. Então $C(n) \neq 0 \forall n \geq n_0$ se, e somente se, $C(n_0) \neq 0$.*

Lema B.2. *O conjunto de soluções $\{x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k\}$ de (49) é um conjunto fundamental de soluções se, e somente se, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, $C(n_0) \neq 0$.*

Teorema B.3. *Se as raízes da equação característica $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são todas distintas, então o conjunto $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$ é um conjunto fundamental de soluções de (49)*

Demonstração: Pelo lema (B.2) sabe-se que se $C(0) \neq 0$ então $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$ é um conjunto fundamental de soluções, onde $C(n)$ é o casoratiano do conjunto de soluções de (49). Temos que

$$C(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$$

A última igualdade deve-se ao fato de a matriz desse determinante ser uma matriz conhecida como Matriz de Vandermonde, cujo resultado do determinante é conhecido.

Como, por hipótese, $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$ então $C(0) \neq 0$ e o conjunto $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$ é um conjunto fundamental de soluções.

□

Vamos, agora, determinar um conjunto fundamental de soluções para o caso em que

alguma raiz da equação característica apresenta multiplicidade maior que 1. Para isso vamos precisar fazer algumas definições.

Definição B.6. Chama-se **operador deslocamento** da sequência (x_n) e representa-se por E ao operador que satisfaz

$$Ex_n = x_{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

Definição B.7. Denominaremos **operador de diferença anterior** da sequência (x_n) e representaremos por Δ ao operador que satisfaz

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, n \in \mathbb{N}$$

Definição B.8. Denominaremos **operador identidade** da sequência (x_n) e representaremos por I ao operador que satisfaz

$$Ix_n = x_n, n \in \mathbb{N}$$

Por convenção $E^0 = \Delta^0 = I$

Teorema B.4. Se E é o operador deslocamento da sequência (x_n) , então,

$$E^k x_n = x_{n+k}, k \in \mathbb{N}$$

A demonstração desse teorema é feita por indução em k .

Teorema B.5. Os operadores E e $(I + \Delta)$ são equivalentes.

Demonstração: Por definição, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ logo, $x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$. Também por definição,

$$Ex_n = x_{n+1} = x_n + \Delta x_n = (I + \Delta)x_n$$

□ Escrevendo a equação de diferenças (49) na sua forma equivalente

$$x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \cdots + c_k x_n = 0$$

e usando o operador de deslocamento, E , a equação assume a forma

$$(E^k + c_1 E^{k-1} + c_2 E^{k-2} + \cdots + c_{k-1} E + c_k)x_n = 0$$

Denotando-se por $P(E)$ o operador polinomial

$$P(E) = E^k + c_1 E^{k-1} + c_2 E^{k-2} + \cdots + c_{k-1} E + c_k \quad (51)$$

escreveremos a equação de diferenças como

$$P(E)x_n = 0$$

Teorema B.6. *Seja $P(E)$ o operador polinomial definido em (51) e $g(n)$ uma função de argumento discreto. Então*

$$P(E)(b^n g(n)) = b^n P(bE)g(n)$$

Demonstração: É fácil ver que $E(x_n y_n) = x_{n+1} y_{n+1} = E x_n E y_n$, assim

$$\begin{aligned} P(E)(b^n g(n)) &= a_0 E^k b^n g(n) + a_1 E^{k-1} b^n g(n) + \cdots + a_k b^n g(n) \\ &= a_0 b^{n+k} E^k g(n) + a_1 b^{n+k-1} E^{k-1} g(n) + \cdots + a_k b^n g(n) \\ &= b^n (a_0 b^k E^k g(n) + a_1 b^{k-1} E^{k-1} g(n) + \cdots + a_k g(n)) \\ &= b^n P(bE) g(n) \end{aligned}$$

□

Teorema B.7. *Seja $P(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k$ um polinômio de grau k , com coeficientes reais e $k \in \mathbb{N}$.*

Então $\Delta^k(P(n)) = a_0 k!$ e $\Delta^{k+i}(P(n)) = 0$ para $i \geq 1$.

Demonstração: O operador de diferença aplicado em $P(n)$ resulta em

$$\begin{aligned} \Delta P(n) &= P(n+1) - P(n) \\ &= \left(a_0 (n+1)^k + a_1 (n+1)^{k-1} + \cdots + a_{k-1} (n+1) + a_k \right) \\ &\quad - \left(a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k \right) \end{aligned}$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned} (n+1)^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^{k-i} \\ &= \binom{k}{0} n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1} n + 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(n+1)^{k-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} n^{k-1-i} \\ &= \binom{k-1}{0} n^{k-1} + \binom{k-1}{1} n^{k-2} + \binom{k-1}{2} n^{k-3} + \dots + \binom{k-1}{k-2} n + 1\end{aligned}$$

Por substituição obtém-se

$$\Delta P(n) = a_0 k n^{k-1} + q_1(n),$$

onde $q_1(n)$ é um polinômio em n de grau $k-2$, com coeficientes reais.

A segunda diferença do polinômio exprime-se como

$$\begin{aligned}\Delta^2 P(n) &= \Delta(\Delta P(n)) \\ &= \Delta(a_0 k n^{k-1} + q_1(n)) \\ &= a_0 k [(n+1)^{k-1} - n^{k-1}] + q_1(n+1) - q_1(n)\end{aligned}$$

Como $(n+1)^{k-1} - n^{k-1} = (k-1)n^{k-2} + r$ onde r é um polinômio de grau $k-3$ e $q_1(n+1) - q_1(n)$ é um polinômio de grau $k-3$ resulta que

$$\Delta^2 P(n) = a_0 k(k-1) + q_2(n)$$

onde $q_2(n)$ é um polinômio em n de grau $k-3$, com coeficientes reais.

Aplicando k vezes esse processo obtém-se

$$\Delta^k P(n) = a_0 k!$$

e

$$\Delta^{k+i} P(n) = 0 \text{ para } i \geq 1$$

□ Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_k$ as raízes da equação característica de (49) podemos reescrever a

equação de diferenças como

$$(E - \lambda_1)(E - \lambda_2) \dots (E - \lambda_k)x_n = 0$$

De forma que, se as raízes distintas são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, cujas multiplicidades são, respectivamente, m_1, m_2, \dots, m_r então reescreveremos a equação de diferenças, agora como

$$(E - \lambda_1)^{m_1}(E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} x_n = 0 \tag{52}$$

Assim, as soluções de

$$(E - \lambda_i)^{m_i} x_n = 0 \quad (53)$$

também são soluções da equação (52). Para se determinar a soluções de (52) tem-se de encontrar um conjunto fundamental de soluções da equação (53) para $1 \leq i \leq r$. Podemos fazê-lo aplicando se os seguintes teoremas:

Teorema B.8. *O conjunto $G_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \dots, n^{m_i}\lambda_i^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (53).*

Demonstração: Inicialmente provaremos que $n^q\lambda_i^n, 0 \leq q \leq m_i - 1$ é solução de (53). Pelo teorema (B.6) sabe-se que

$$\begin{aligned} (E - \lambda_i)^{m-i}(n^q\lambda_i^n) &= \lambda_i^n(\lambda_i E - \lambda_i)^{m_i} n^q \\ &= \lambda_i^{n+m_i}(E - I)^{m_i} n^q \\ &= \lambda_i^{n+m_i} \Delta^{m_i} n^q \\ &= 0 \end{aligned}$$

uma vez que $m_i > q$, conforme teoremas (B.5) e (B.7). Como $\lambda_i \neq 0$, então o conjunto G_i é linearmente independente se o conjunto $\{1, n, n^2, \dots, n^{m_i-1}\}$ for linearmente independente. Seja $n \geq n_0$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_i}$ constantes não nulas. Da relação $\alpha_1 1 + \alpha_2 n + \dots + \alpha_{m_i} n^{m_i-1}$ sai que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m_i} = 0$, pelo que o conjunto $\{1, n, n^2, \dots, n^{m_i-1}\}$ é linearmente independente e, portanto, G_i é um conjunto fundamental de soluções. \square Já se sabe

como determinar a solução de (53) . Para calcular a solução geral de (52) também se tem de encontrar um conjunto fundamental de soluções, o que será feito a partir do seguinte teorema.

Teorema B.9. *O conjunto $G = \cup_{i=1}^r G_i$ é um conjunto fundamental de soluções da equação (52).*

Demonstração: Tem-se que o conjunto G é dado por

$$\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_r^n, n\lambda_1^n, n\lambda_2^n, \dots, n\lambda_k^n, n^2\lambda_1^n, n^2\lambda_2^n, \dots, n^2\lambda_k^n, \dots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, n^{m_2-1}\lambda_2^n, \dots, n^{m_r-1}\lambda_k^n\}$$

É necessário provar que para cada $i, 1 \leq i \leq r$ a expressão $n^q\lambda_i^n, 0 \leq q \leq m_i - 1$ é solução da equação (52). Seja $i = 1$ (para os outros valores de i é análogo). Substituindo a expressão $n^q\lambda_1^n$ na equação (52) vem

$$(E - \lambda_1)^{m_1}(E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} n^q \lambda_1^n$$

e pela comutatividade dos fatores e usando que $m_1 > q$, temos que

$$\begin{aligned} (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} (E - \lambda_1)^{m_1} n^q \lambda_1^n &= \\ (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} \lambda_1^n (E \lambda_1 - \lambda_1)^{m_1} n^q &= \\ (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} \lambda_1^{n+m_1} \Delta^{m_1} n^q &= 0 \end{aligned}$$

Em relação à independência linear basta ver que da relação

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^n (\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,2}n^2 + \dots + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1}) = 0 \quad (54)$$

sai que $\alpha_{i,j} = 0$, $1 \leq i \leq r$, $0 \leq j \leq m_i - 1$ □

Corolário B.1. *A solução geral da equação (52) é*

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^n (\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,2}n^2 + \dots + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1}) \quad (55)$$

onde $\alpha_{i,j}$ são constantes quaisquer.

Demonstração: Usando a definição (B.3) e o teorema (B.8) temos que

$$\lambda_i (\alpha_{1,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1})$$

é solução geral de (53) e, conseqüentemente, uma solução de (52). Novamente, usando a definição (B.3) vem que

$$\lambda_i (\alpha_{1,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1})$$

é a solução geral de (49). □

C Critério de Jury

O critério de Jury, [7], permite determinar se todas as raízes de um polinômio da forma

$$P(n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n > 0$$

estão dentro do círculo unitário.

Inicialmente montamos a seguinte tabela:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
 b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 & \\
 c_{n-2} & c_{n-3} & c_{n-4} & \dots & c_0 & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\
 y_1 & y_0 & & & & & \\
 z_0 & & & & & &
 \end{array}$$

em que os coeficientes são dados por

$$b_i = a_{i+1} - k_0 a_{n-1-i} \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$c_i = b_{i+1} - k_1 b_{n-2-i} \quad i = 0, \dots, n-2$$

$$d_i = c_{i+1} - k_2 c_{n-3-i} \quad i = 0, \dots, n-3$$

com

$$k_0 = \frac{a_0}{a_n}, \quad k_1 = \frac{b_0}{b_{n-1}}, \quad k_2 = \frac{c_0}{c_{n-2}}$$

e assim por diante.

A condição necessária e suficiente para que as raízes estejam no interior do círculo unitário é que todos os coeficientes da primeira coluna da tabela sejam positivos. Além disso, o número de elementos com coeficientes negativos na primeira coluna indica o número de raízes fora do círculo unitário.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades e me suprir em todas as minhas necessidades.

A minha mãe, com suas orações e seu apoio, acreditando sempre nos meus sonhos acadêmicos e dando forças para que eu continuasse meus estudos.

Ao meu pai e meus familiares, pelo apoio e compreensão e por que souberam entender minhas ausências. Ao meu marido que me deu todo o apoio para vencer as dificuldades que surgiram nesses dois anos de estudo compartilhando comigo a alegria de cada avanço.

Ao meu orientador, Telles Timóteo da Silva, pelas orientações que me levaram à apresentação desta dissertação.

Ao meu co-orientador, Luis Alberto D'Afonseca pelo incentivo e intenso apoio traduzido, não somente na forma de horas de estudo, muitas das quais em fins de semana, mas também na tolerância até às dúvidas mais simples que me surgiram no árduo processo de conclusão desse trabalho.

Ao amigo Willian Carlos Leal, que me ajudou a alavancar este trabalho e me encorajou quando tudo parecia tão difícil de se realizar.

Ao professor Gastão de Almeida Braga, cujas as palavras de incentivo ecoam em minha mente desde que tive o prazer de ser sua aluna.

Aos amigos que conquistei durante minha graduação e o presente mestrado e que contribuíram direta e indiretamente para realização deste sonho.

Referências

- [1] D. Y. ANGEL, M. M. M. MACUFA, AND M. T. KOGA, *Notas de Aula*, Unicamp, 2007. Campinas.
- [2] R. BIEZUNER, *Álgebra Linear I - Notas de Aula*, UFMG, 2008. Belo Horizonte.
- [3] R. L. DEVANEY, *A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, WESTVIEW, 1992. Boston.
- [4] O. DIEKMANN, *Einführung in die Mathematische Epidemiologie: Introduction to Mathematical Epidemiology: The Basic Reproductive Number*, WILEY, 2011. Princeton.
- [5] L. EDELSTEIN-KESHET, *Mathematical Models in Biology*, Random House, 1988. Nova York.
- [6] R. D. G. LUÍS, *Equações de Diferenças e Aplicações*, Universidade de Madeira, 2006. Funchal.
- [7] S. MEHRAN, *Modelo Epidêmico Discreto SIR com Estrutura Etária e Aplicação de Vacinação em Pulsos e Constante*, Dissertação, UFPE, 2011. Recife.
- [8] L. RODRIGUES, D. MISTRO, AND S. CENTENARO, *Um Modelo Matemático Discreto para a Dispersão da Leptospirose em uma População de Ratos*, TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, v. 9, p. 155-164, 2008.

- [9] R. TAVONI AND R. Z. G. D. OLIVEIRA, *Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - Uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais*, Dissertação, UNESP, 2013. Rio Claro.