UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

ISOMETRIAS NO PLANO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA EDUCAÇÃO BÁSICA COM USO DO GEOGEBRA

LUCIANO DE SOUZA CERQUEIRA

CRUZ DAS ALMAS
2016

ISOMETRIAS NO PLANO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA EDUCAÇÃO BÁSICA COM USO DO GEOGEBRA

LUCIANO DE SOUZA CERQUEIRA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Profº Msc. Renato dos Santos Diniz

CRUZ DAS ALMAS
2016

FICHA CATALOGRÁFICA

C416i

Cerqueira, Luciano de Souza.
Isometrias no plano: uma proposta de atividades para educação básica com o uso do geogebra / Luciano de Souza Cerqueira._ Cruz das Almas, BA, 2016.
56f.; il.

Orientador: Renato dos Santos Diniz.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1.Matemática – Estudo e ensino. 2.Isometria (Matemática) – Geogebra (Programa de computador). 3.Educação básica – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 514.12

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB.

ISOMETRIAS NO PLANO: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA EDUCAÇÃO BÁSICA COM USO DO GEOGEBRA

LUCIANO DE SOUZA CERQUEIRA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Banca Examinadora:

Renato dos Santos Diniz

Prof. Msc. Renato dos Santos Diniz (Orientador)

UFRB - Centro de Formação de Professores

José Olívio da Silva Santana

Prof. Msc. José Olívio da Silva Santana (Membro)

UFRB - Centro de Formação de Professores

Oscar G Ocampo

Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe (Membro)

UFBA - Instituto de Matemática

Cruz das Almas, 05 de agosto de 2016.

À minha família,
aos meus amigos e alunos,
e todas que contribuíram
com muito carinho.

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens."

René Descartes

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade do cumprimento de mais uma etapa importante em minha vida, mesmo depois dos 50 anos, em vista das dificuldades até aqui impostas.

Aos meus filhos, que sempre me tomaram como referência na dedicação aos estudos, assim como pelos incentivos a uma nova formação acadêmica.

À Luciano de Souza Cerqueira Júnior pela ajuda na formatação deste trabalho e também pelas contribuições significativas para finalização desse Curso.

À minha mãe que sempre me ajudou na busca pelo conhecimento, principalmente nos momentos mais difíceis de minha vida.

Aos professores do curso, no qual foram imprescindíveis em minha formação acadêmica e ao desenvolvimento do estudo.

Ao meu orientador Prof Msc. Renato dos Santos Diniz, pelas contribuições, pela orientação, que me levaram a execução e conclusão deste trabalho.

Ao jovem Alielton Almeida dos Santos pela colaboração para que este trabalho fosse concluído.

A todos os colegas do mestrado, que contribuíram diretamente nesta etapa de novos conhecimentos e, também, pelo companheirismo em todos os momentos.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho de alguma forma, e a todos que passaram pela minha vida e colaboraram para a conclusão de mais um projeto. Os meus sinceros agradecimentos.

Luciano de Souza Cerqueira

RESUMO

No presente trabalho é feito um estudo sobre isometrias no plano, tendo em vista sua significância na Geometria Plana, com ênfase na utilização de software educativo nas aulas de Matemática. Durante o desenvolvimento desse estudo realizou-se exposição de algumas aplicações do tema em outras áreas: na Arte, na Música, na Engenharia, entre outras. Também, destaca-se a importância do processo histórico na construção dos conteúdos matemáticos. Trazemos a discussão de algumas ferramentas do Geogebra, as mais relevantes ao desenvolvimento das atividades propostas. Além disso, apresentamos definições, exemplos e proposições a respeito das isometrias: reflexão, translação, rotação e reflexão com deslizamento. Baseado no pressuposto de que o processo de ensino e aprendizagem da matemática deve ser interessante e desafiador aos alunos, foram propostas atividades para serem desenvolvidas na sala de informática, para estudantes do oitavo ano do ensino fundamental da educação básica de ensino, com o auxílio das ferramentas do software Geogebra.

Palavras-chave: Isometria, geometria plana, GeoGebra, Laboratório de Informática.

ABSTRACT

This paper is about an studying of isometries in the plan, considering its importance in Geometry Plane, emphasising on using educational software in mathematics classes. During the development of this study , noticed that some theme applications are present in others areas: art, music, Engineering and others. It was possible to notice how importante is the historical process in the construction of mathematical content. It is also important to discuss about some Geogebra tools, the most relevant to the development of the proposed activities. In addition, we present definitions, examples and proposals regarding the isometries: reflection, translation, rotation and reflection to slip. Based on the pres-supposed that the process of teaching and learning mathematics should be interesting and challenging to students, are proposed activities to be developed in the inform tica room, for students of the eighth grade of elementary school teaching of basic education, with the help of Geogebra software tools.

Keywords: isometry, plane geometry, GeoGebra, Computer Lab.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

Desde que se tem lembrança, o homem deparou-se com situações, do seu cotidiano, que tinham a ver com a simetria: de figuras, de objetos, de fenômenos naturais, de lugares, entre outros. A primeira percepção talvez tenha sido a de se olhar na beira de um lago com águas paradas ou mais adiante no tempo, ao olhar-se diante de um espelho, por exemplo. Nesse sentido, (BOYER, 1996) afirma que Aristóteles, enxergava a circunferência e a esfera no plano, como as mais perfeitas figuras geométricas existentes, referindo-se dessa maneira a simetria entre elas.

Dessa forma, a necessidade de se estabelecer conceitos e regras, fez com que ao passar dos anos, os estudiosos procurassem fazer um estudo mais detalhado das simetrias, chegando então ao conceito de isometrias, que são transformações geométricas que não alteram a região do plano em que o objeto ocupa.

No mundo contemporâneo o estudo de isometrias, além da matemática, está ligado a cultura, em especial a arte e a música, assim como a outras áreas, como a Arquitetura, a Engenharia e a Física, entre outras. Diante desse cenário tão enriquecedor, podemos relacionar diversas situações de nosso cotidiano, onde as isometrias aparecem com maior veemência, tais como:

- Nas telas do artista M.C Escher;

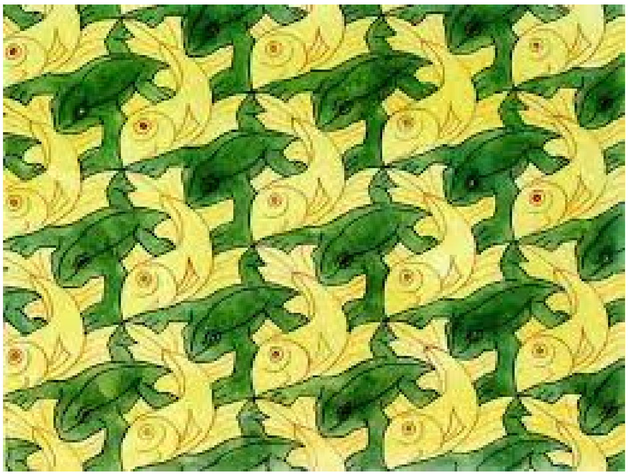


Figura 1: "Pintura de M.C Escher"*disponível em* [17]

- Nas esculturas de Antônio Francisco Lisboa, o Aleijadinho, nas Igrejas mineiras;
- Na Lei da Conservação da Energia em Física;
- No equilíbrio de balanças, utilizando as equações em álgebra;
- Na Engenharia e na Arquitetura: Em diversos monumentos erguidos em Brasília, obras do genial Oscar Niemeyer;

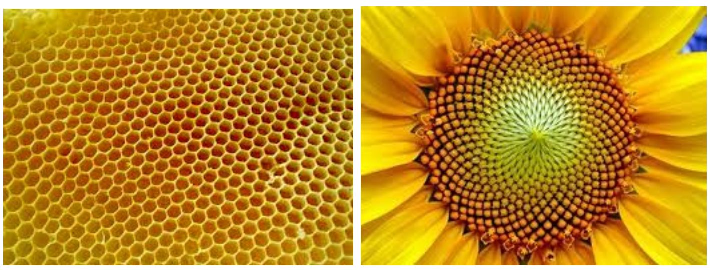
Figura 2: "Catedral de Brasília"*disponível em* [18]

- No estudo da arte indígena, com Vicente do Rego Monteiro;

- Através da arte africana e barroca, no candomblé, por Rubem Valentim nas igrejas baianas;
- Mediante representações artísticas e corporais;
- Na escrita de poesias, cordel, músicas de embolada e côco;

Figura 3: "Cânone do Caranguejo, de J.S.Bach, inserido em uma fita de Moebius."*disponível em* [19]

- Na montagem de sólidos geométricos, como o cubo o tetraedro;
- Na forma simétrica com foram assentadas as cerâmicas na sala de aula.
- Associadas ao significado da perfeição, que pode ser encontrado em vários exemplos de seres vivos: crescimento de plantas, população de abelhas, escamas de peixes, presas de elefantes, flor de girassol, entre outros.



(a) Colmeia de Abelhas *disponível em* [20]

(b) Girassol *disponível em* [20]

- E também em espirais de galáxias.

Figura 4: "Espiral de uma galáxia inserida no retângulo dourado"*disponível em* [20]

Levando-se em conta todos esses aspectos e a motivação em promover aulas que aproximem cada vez mais os diversos conteúdos matemáticos do nosso cotidiano, levou-nos a escolha do tema proposto neste trabalho científico.

Neste trabalho procuraremos estabelecer os principais conceitos de Geometria plana, especificamente aqueles cujos resultados serão aplicados no desenvolvimento do tema Isometrias no Plano.

Dessa forma, no Capítulo 1, faremos uma abordagem histórica sobre a evolução da Geometria e, em particular das isometrias no plano, assim como esse conteúdo da Matemática está relacionado com outras áreas de ensino, principalmente nas Artes. Além disso, procuramos justificar a necessidade do ensino das Isometrias no Ensino Fundamental, da Educação Básica, assim como da importância do ensino de Geometria num mundo cada vez mais globalizado.

Por outro lado, no Capítulo 2, para dar sustentabilidade teórica e manter o rigor científico, procuramos apresentar neste trabalho: conceitos e proposições fundamentais no estudo das isometrias, além de destacar o fato de existirem apenas quatro tipos de Isometrias:

reflexão, translação, rotação e reflexão com deslizamento.

No Capítulo 3, faremos uma breve apresentação do GeoGebra, algumas de suas ferramentas e a abordagem de algumas isometrias com os recursos desse software.

Para finalizar, no Capítulo 4, apresentaremos uma sequência de quatro atividades a serem desenvolvidas em sala de aula ambientada (computadores com software GeoGebra instalados), as quais o leitor verificará os principais resultados obtidos na abordagem teórica, vista no Capítulo 2.

Dessa forma, esperamos propor que ao aplicar essa sequência didática, através do GeoGebra, no final sejam promovidas discussões sobre os conteúdos abordados e sua relevância na formação acadêmica do aluno, bem como na sua vida extra escolar.

CAPÍTULO 1

ISOMETRIAS E O MUNDO À NOSSA VOLTA

NUM mundo cada vez mais globalizado, onde a necessidade de compreensão induz cada vez mais a utilização de situações reais, a Geometria, nesse contexto é a parte da Matemática mais recorrente. Nesse sentido, há uma contradição, pois os conteúdos geométricos, na maioria dos currículos escolares, ficam sempre para o final do ano letivo e, quase sempre trabalhado de maneira bastante sucinta. De fato:

> No Brasil, já fomos mais além: a Geometria está ausente ou quase ausente da sala de aula. Vários trabalhos de pesquisadores brasileiros, entre eles Peres (1991) e Pavanelo (1993), confirmam essa lamentável realidade educacional. E por que essa omissão? São inúmeras as causas, porém, duas delas estão atuando forte e diretamente em sala de aula: a primeira é que muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização de suas práticas pedagógicas.... A segunda causa da omissão geométrica deve-se à exagerada importância que, entre nós, desempenha o livro didático, quer devido à má formação de nossos professores, quer devido à estafante jornada de trabalho a que estão submetidos (LORENZATO, 1995, p.3-4).

Na Geometria, o estudo de isometrias tem despertado o interesse de docente e discentes. Mas, o que é mesmo isometria?

Isometria é uma palavra de origem grega (Isos = igual e metria = medida) na qual representa uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura geométrica, mantém as distâncias entre pontos. Em outras palavras, os segmentos da figura transformada são geometricamente iguais aos da figura original, podendo variar a direção e o sentido. Os ângulos mantêm também a sua amplitude.

Historicamente o termo Isometria foi abordado pela primeira vez pelo geómetra alemão Felix Klein, no seu célebre programa de Erlangen, no ano de 1872. Nele sugeriu que a "simetria"(conceito que, em português, poderia ser mais fielmente traduzido por "isometria") seria o princípio organizador e unificador da geometria, onde na altura utilizava-se o termo "geometrias", no plural. Este foi um princípio mais abrangente do que axiomático. Inicialmente esse programa abriu caminho para investigações sobre grupos relacionados com as "geometrias". Em consequência, estabeleceu-se o termo "transformação geométrica"(aspecto da Nova Matemática, mas muito controverso na prática matemática atual). Este conceito hoje é aplicado, sob várias formas, como um modelo aplicado na resolução de vários problemas do cotidiano.

Uma forma de relacionar os conteúdos matemáticos (em especial Geometria), através das isometrias, é trabalhar com o lúdico. Por exemplo, como já mencionamos antes as artes seriam um desses caminhos.

Nesse sentido, Read enfatiza que:

> [...] a arte é uma dessas coisas que, como o ar e o solo, estão por toda nossa volta, mas que raramente nos detemos para considerar. Pois a arte não é apenas algo que encontramos nos museus e nas galerias de arte, ou em antigas cidades como Florença e Roma. A arte seja lá como a definimos, está presente em tudo o que fazemos para satisfazer nossos sentidos (READ, 2001, p.16).

Quanto a classificação, existem quatro tipos de isometrias no plano: rotações, translações, reflexões e reflexões deslizantes.

Assim, duas figuras são isométricas ou congruentes quando é possível através de um movimento rígido sobrepor uma figura na outra. Em Geometria, no Ensino Fundamental, explora-se a congruência de triângulos de forma insistente, analisando as mais variadas condições que garantem a igualdade entre triângulos. Entretanto, para estudar as Isometrias, no Ensino Fundamental usamos ferramentas matemáticas ainda não acessíveis aos alunos. Então, para o

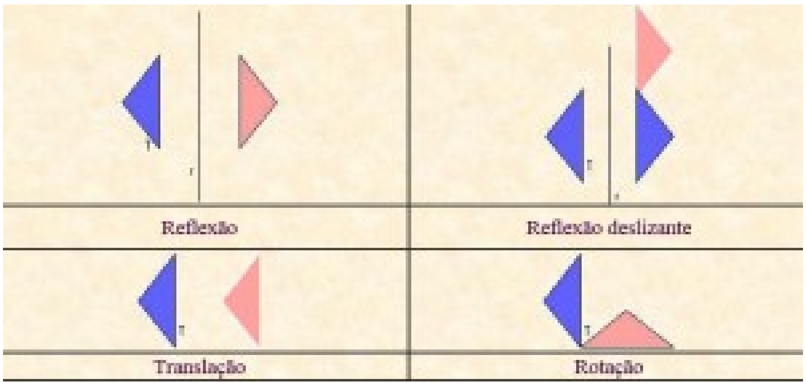


Figura 1.1: "Tipos de Isometria"*disponível em* [20]

professor realizar oficinas, apresentando todas as isometrias no plano, é essencial buscar uma linguagem mais acessível ao aluno, de forma clara e prática. Dessa forma o ensino das Isometrias é justificado por Ripplinger, (2006, p. 25), que afirma:

- Uma razão é matemática: a busca da regularidade, os padrões que se repetem na essência do conhecimento matemático;
- Estar presente no SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica), com questões a serem verificadas no aprendizado dos alunos, relativas ao tema;
- Faz-se presente em outras áreas do conhecimento como Biologia, Arqueologia, Artes, Física, estabelecendo inter-relações dessas áreas com a matemática;
- Dentro da própria disciplina, existem conexões entre conteúdos e poderíamos citar muitos exemplos, um deles nas retas numeradas, os números inteiros;
- Consta nos documentos oficiais, propostas Curriculares como parte integrante do currículo, o conteúdo de Simetria, a ser desenvolvido nas séries finais do Ensino Fundamental;
- É uma das partes da Geometria, onde o belo, a harmonia na matemática pode ser facilmente trabalhada;
- Faz parte dos trabalhos, e consequentemente da cultura de alguns povos, como, por exemplo, os povos indígenas, mais especificamente através do seu artesanato; Esse recorte tem como objetivo verificar se os Livros Didáticos de Matemática do Ensino Funda-

mental recomendados pelo PNLD (Plano Nacional do Livro Didática) trabalham o tema Isometrias de acordo com as orientações dos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais).

A importância do tópico de Isometrias é também reforçada por Neves e Murari, que afirmam:

> Comumente, quando se fala em simetria é razoável pensar, de modo geral, em correspondência de partes dispostas em lados opostos de uma linha ou em torno de um eixo. Entretanto, simetria abarca um conceito muito mais amplo. Ela envolve movimentos, os quais variam e ocorrem periodicamente de forma regular. Tais características levaram a Matemática a estudar e classificar os diferentes movimentos rígidos ou isometrias das figuras simétricas, nas quais se podem encontrar reflexões, rotações, translações, e reflexões deslizantes. (NEVES e MURARI, 2010, p. 2)

Diante dessa importância, no Capítulo seguinte, abordaremos as principais definições e proposições referentes às isometrias, em particular aquelas no plano.

CAPÍTULO 2

ISOMETRIAS NO PLANO

PRECISAMENTE uma figura só pode coincidir com ela mesma, entretanto, se essa figura realizar um deslocamento no plano, sem alterar a sua forma e as suas dimensões, diremos que elas são congruentes. Daí a ideia de isometrias, que são transformações geométricas. São transformações geométricas que não alteram nem a forma e nem as dimensões de uma figura.

Ao longo deste capítulo, constataremos que só existem quatro tipos de isometrias no plano: reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante, as quais constituem a base do presente trabalho.

Ao longo do texto $A, B, C, \cdots$ denotarão pontos; $r, s, t, \cdots$ retas; e $\Theta, \Delta, \Pi, \cdots$ planos. Admitiremos uma unidade fixada de comprimento e a distância do ponto A ao ponto B indicaremos por $d(A, B)$ ou $\overline{AB}$, cumprindo as sentenças: (i) $d(A, B) \geq 0, d(A, B) = 0$ se, e somente se, $A = B$; (ii) $d(A, B) = d(B, A)$ e (iii) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$, para quaisquer pontos $A, B, C \in \Pi$. Observamos que os pontos A, B e C para serem colineares é condição suficiente, e necessária, para que $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$.

Definição 2.1. *Uma transformação geométrica é uma função que faz corresponder a cada ponto do plano, um novo ponto do plano.*

Em particular iremos analisar as transformações geométricas denominadas isometrias, que definiremos na continuação.

Definição 2.2. *Uma isometria entre os planos Π e Π' é uma função $T : \Pi \rightarrow \Pi'$, que preserva a distância. Isto significa que, para quaisquer pontos $X, Y \in \Pi$,, pondo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, temos $d(X', Y') = d(X, Y)$.*

Exemplo 2.1. *O exemplo mais óbvio de isometria é a função identidade $Id : \Pi \rightarrow \Pi$.*

Proposição 2.1. *Toda isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ é uma função injetiva.*

Demonstração. Provemos que $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ é injetiva. Considere dois pontos X e Y, onde $X \neq Y$. Nesse caso, pela definição da distância entre dois pontos, tem-se que $d(X, Y) > 0$. Daí, de acordo com a Definição 2.2, temos que $d(X', Y') = d(X, Y)$, donde $d(X', Y') > 0$, o que implica em $X' \neq Y'$, o que prova que T é injetiva. $\square$

Proposição 2.2. *Toda isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma retas em retas.*

Demonstração. De fato, considere uma reta r contida em Π. Dessa forma, tomemos dois pontos distintos A e B pertencentes a r, façamos ainda $A' = T(A)$, $B' = T(B)$ e chamemos de r' a reta contida no plano Π', que passa por A' e B'. Obviamente se $X \in r$, temos que um dos três pontos ou X, ou A ou B está entre os outros dois. Consideremos que o ponto B está entre os pontos A e X (ver figura 2.1). Daí, $B \in AX$. (Os outros casos são tratados de maneira análoga). Segue-se que $\overline{AX} = \overline{AB} + \overline{BX}$. Se fizermos $X' = T(X)$, chegamos a seguinte igualdade: $\overline{A'X'} = \overline{A'B'} + \overline{B'X'}$ e consequentemente que $B' \in A'X'$. Assim os pontos A', B' e X' são colineares. Isto mostra que $X \in r$, implica que $X' \in r'$. Logo, a restrição de T a r é uma isometria entre r e r'. Como toda isometria entre retas é sobrejetiva(veremos na Proposição 2.4), temos que $T(r) = r'$. $\square$

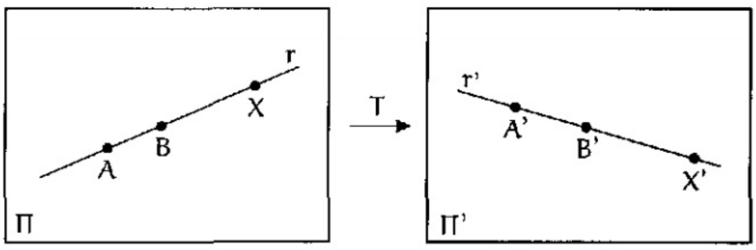


Figura 2.1: Proposição 2.2

Proposição 2.3. *Uma isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Demonstração. Com efeito, sejam duas retas perpendiculares r e s em Π, imaginemos: o ponto A de interseção entre r e s, dois pontos B e C em r, a uma mesma distância de A, e um ponto qualquer D sobre s (ver Figura 2.2). Dessa forma, a isometria T transforma a mediana AD do triângulo isósceles BCD na mediana $A'D'$ do triângulo isósceles $A'C'D'$. Daí $B'D'$ é perpendicular a $A'C'$. Em outras palavras, r' é perpendicular a s', como queríamos mostrar. $\square$

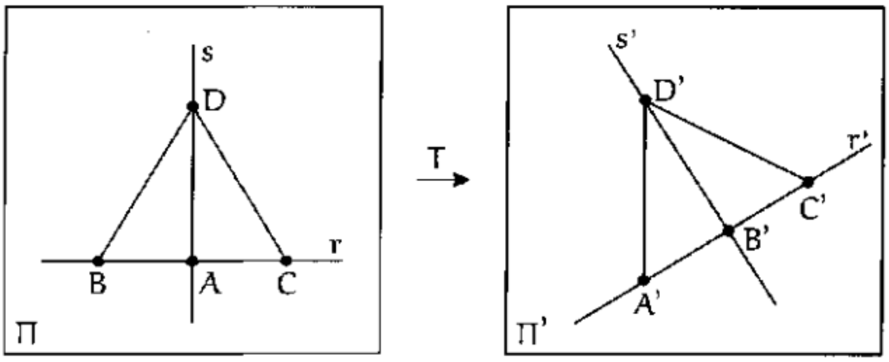


Figura 2.2: Proposição 2.3

Lema 2.1. *Toda isometria $T : r \rightarrow s$ é uma função bijetiva, cuja inversa $T^{-1} : s \rightarrow r$ é ainda uma isometria.*

Ver demonstração em [9], p.2-3.

Proposição 2.4. *Toda isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ é uma função bijetiva, cuja inversa $T^{-1} : \Pi' \rightarrow \Pi$ é ainda uma isometria.*

Demonstração. Já mostramos na Proposição 2.1 que $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ é injetiva. Agora, vamos mostrar que $T : \Pi \rightarrow \Pi'$ é sobrejetiva.
Consideremos X' um ponto arbitrário pertencente a Π'. Nosso objetivo dessa vez é determinar um ponto $X \in \Pi$, de tal forma que $T(X) = X'$. Tracemos uma reta r qualquer, de tal forma que $r \subset \Pi$. Observamos, nesse caso, que a imagem de r por T é uma reta r' no plano Π'. Dessa forma, se $X' \in r'$ então, existe um ponto $X \in r$, tal que $T(X) = X'$. Caso contrário, seja s' a reta perpendicular baixada de X' sobre r'. Agora, seja Y' o ponto de interseção de r' com s'.

Como $Y' \in r'$, temos que existe $Y \in r$, tal que $T(Y) = Y'$. Considere s a reta perpendicular a r passando por Y (ver Figura 2.3). Notamos que a imagem de s dada pela isometria T é perpendicular a r' e contém Y'. Logo $T(s) = s'$. Como $X' \in s'$, existe $X \in s$, tal que $T(X) = X'$, o que prova a sobrejetividade de T.
Como T é injetiva e sobrejetiva, concluímos que T é bijetiva como queríamos demonstrar.
Evidentemente a função $T : \Pi \to \Pi'$ é ainda uma isometria. □

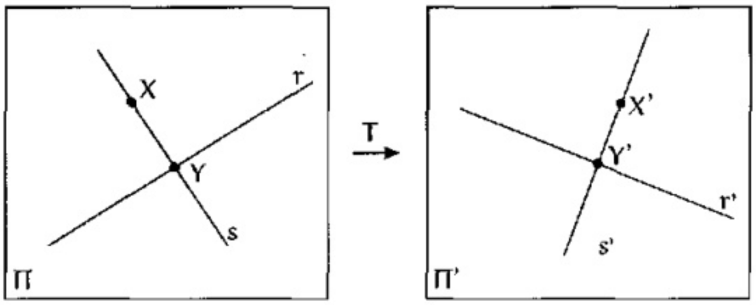


Figura 2.3: Proposição 2.4

Proposição 2.5. *Sejam F, G isometrias do plano Π no plano Π. Então, a composta $F \circ G$ é uma isometria.*

Demonstração. Sejam P e Q elementos arbitrários de Π , assim $d((F \circ G)(P)\ , (F \circ G)(Q)) = d((F(G(P))\ , F(G(Q)))$. Considere: $P' = G(P)$ e $Q' = G(Q)$. Como ambos são elementos de Π e F é uma isometria, então: $d((F \circ G)(P), d(F \circ G)(Q)) = d((F(P'), F(Q')) = d(P', Q') = d(G(P), G(Q))$. Mas, por hipótese G também é uma isometria. Assim, $d((G(P), G(Q)) = d(P, Q)$. Dessa forma, $d((F \circ G)(P), (F \circ G)(Q)) = d(P, Q)$, o que implica que $F \circ G$ é uma isometria. □

Definição 2.3. *A simetria em torno de A é a função $SA : \Pi \to \Pi'$ assim definida: $SA(A) = A$ e, para $X \neq A$, $SA(X) = X'$, onde X' é o simétrico de X relativamente a A. Noutras palavras, A é o ponto médio do segmento de reta XX'.*

Proposição 2.6. *Uma simetria em torno de um ponto é uma isometria.*

Demonstração. Consideremos um ponto A no plano Π. De acordo com a definição 2.3, mostraremos que S_A é uma isometria. Para tanto, bastar notar que dados $X, Y \in \Pi$, os triângulos

AXY e $AX^{'}Y^{'}$ (ver Figura 2.4) são congruentes pelo caso LAL, visto que $\overline{AX} = \overline{AX'}$, $\overline{AY} = \overline{AY'}$ e os ângulos $X\hat{A}Y$ e $X^{'}\hat{A}Y^{'}$ são opostos pelo vértice (opv). Logo $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$, o que prova que S_A é uma isometria. $\square$

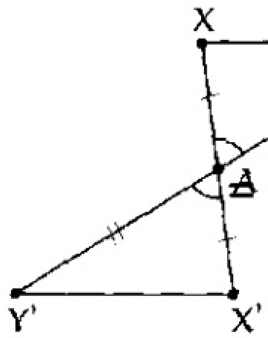


Figura 2.4: Proposição 2.6

2.1 Tipos de Isometria

Vamos agora para abordagem dos quatro tipos de isometrias mencionado no início deste capítulo.

2.1.1 Reflexão em torno de uma reta

Definição 2.4. *Seja r uma reta no plano Π. A reflexão em torno da reta r é a função $R_r : \Pi \to \Pi$, definida por:*

$$R_r(X) = X,$$

para todo seja $X \in r$ e, para $X \notin r$, $R_r(X) = X^{'}$ é tal que a mediatriz do segmento $XX^{'}$ é a reta r. Noutras palavras, seja Y o pé da perpendicular baixada de X sobre r. Então Y é o ponto médio do segmento $XX^{'}$.

Proposição 2.7. *A reflexão $R_r : \Pi \to \Pi$ é uma isometria.*

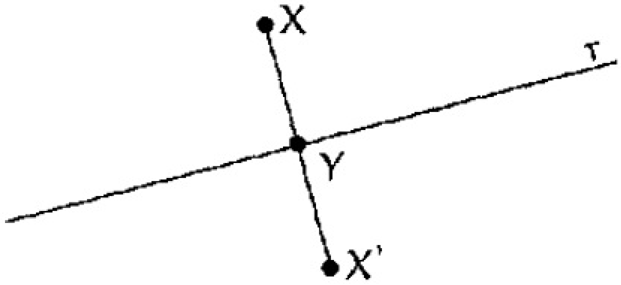


Figura 2.5: Reflexão em torno da reta r

Demonstração. Para mostrar que R_r é uma isometria, consideramos dois casos. Primeiro caso: X e Y estão do mesmo lado da reta r no plano Π, com $R_r(X) = X^{'}$ e $R_r(Y) = Y^{'}$. Sejam A E $A^{'}$ pontos do plano Π, onde $A^{'}$ é o simétrico de A em relação à reta r nesse caso, inicialmente traçamos os segmentos XA e $X^{'}A^{'}$, paralelos a r, com A e $A^{'}$ sobre $YY^{'}$. Os triângulos XAY e $X^{'}A^{'}Y^{'}$, retângulos, tem os catetos com medidas iguais e, consequentemente, com mesmas medidas das suas hipotenusas, ou seja, $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$.

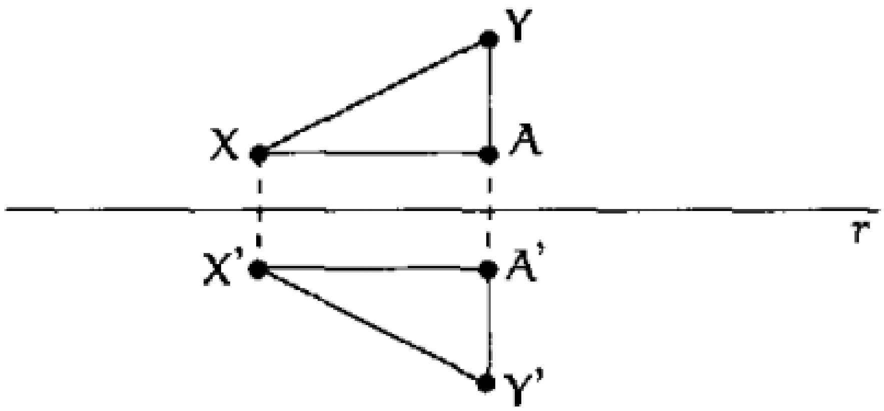


Figura 2.6: Proposição 2.7

Segundo Caso: X e Y estão em lados opostos da reta r. Nesse caso, consideremos A e B os pontos de interseção de XY e $XX^{'}$ com a reta r, respectivamente. Note que X, A e Y são colineares (ver Figura 2.7). Os triângulos retângulos ABX e $ABX^{'}$ tem o cateto AB em comum e $\overline{BX} = \overline{BX'}$. Segue então que suas hipotenusas possuem o mesmo comprimento, ou seja, $\overline{AX} = \overline{AX'}$. De maneira semelhante, $\overline{AY} = \overline{AY'}$. Dessa forma, os triângulos AXX' e AYY' são isósceles. Logo, suas medianas, relativas às bases, são também bissetrizes: $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Temos ainda que $\alpha = \beta'$, pois os mesmos são ângulos opostos pelo vértice.

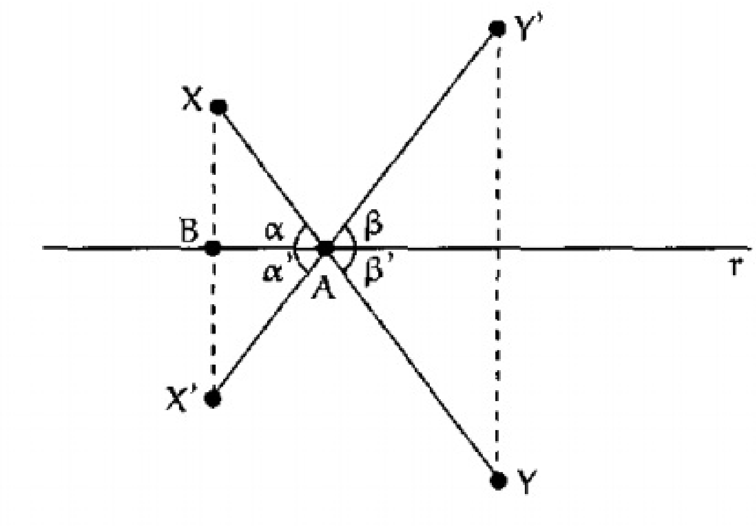


Figura 2.7: Proposição 2.7

Nessas condições, temos: $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$. Mas, $\beta + \beta'$ é o ângulo suplementar de $X\hat{A}Y'$. Segue-se que $\alpha + \alpha'$ também é suplemento de $X\hat{A}Y'$. Logo, X', A e Y' são pontos colineares. Portanto,

$$\overline{X'Y'} = \overline{X'A} + \overline{AY'} = \overline{XA} + \overline{AY} = \overline{XY}.$$

$\square$

Observação 2.1. *Os pontos fixos da reflexão $R_r : \Pi \to \Pi$ são os pontos da reta r. Para todo $x \in \Pi$ tem-se $R_r(R_r(X)) = X$. Logo $R_r \circ R_r =$ identidade, ou seja, $(R_r)^{-1} = R_r$.*

Observação 2.2. *Vale ressaltar, do ponto de vista geométrico, que a reflexão $R_r : \Pi \to \Pi$ transforma o triângulo ABC num triângulo $A'B'C'$, sendo que o sentido de rotação dos vértices $A' \to B' \to C'$ é o oposto do sentido $A \to B \to C$. (Ver figura 2.8)*

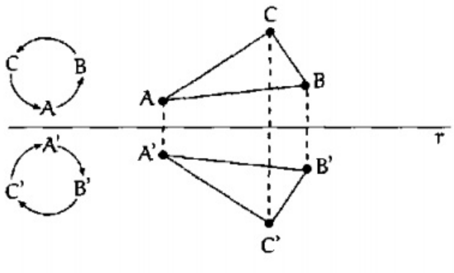


Figura 2.8: Observação 2.2

2.1.2 Translação

Definição 2.5. *Sejam A e B pontos distintos do plano Π. A transformação T_{AB} : $\Pi \to \Pi$ é a função assim definida: dado $X \in \Pi$ sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados.*

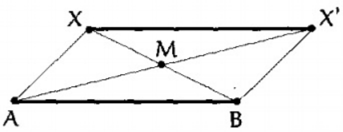


Figura 2.9: Translação

Essa definição de T_{AB} se aplica quando A, B e X não são colineares. Qualquer que seja a posição de X no plano Π, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ fica inteiramente caraterizada pelo fato de que os segmentos de reta AX' e BX tem o mesmo ponto médio M. Assim, se quisermos construir X', geometricamente, a partir de A, B e X tomamos o ponto médio M do segmento BX e prolongamos o segmento AM até X' de modo que $\overline{MX'} = \overline{AM}$ (ver figura 2.10).

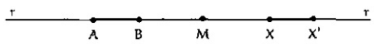


Figura 2.10:

Observação 2.3. *Na definição de T_{AB} é conveniente levar em conta a ordem em que são descritos os pontos A e B. A translação T_{BA} é diferente de T_{AB} , visto que $T_{BA} = (T_{AB})^{-1}$. Nessa situação,* *mencionaremos o segmento de reta orientado AB para significar que o ponto A foi tomado como origem e o ponto B como extremidade. No segmento BA, oposto de AB, B é a origem e A a extremidade.*

Observação 2.4. *Vale ressaltar que a translação T_{AB} não possui pontos fixos. Na realidade, qualquer que seja $X \in \Pi$, $T(X) = X'$, tem-se $d(X, X') = d(A, B)$.*

Proposição 2.8. *A translação $T_{AB} : \Pi \to \Pi$ é uma isometria.*

Demonstração. Tomemos dois pontos arbitrários $X, Y \in \Pi$ e suas imagens $X' = T_{AB}(X)$ e $Y' = T_{AB}(Y)$. Se a reta que contém X e Y é paralela ou igual à reta s que contém AB, então T_{AB}, restrita a r, é a translação $T_{XX'} : r \to r$, logo $d(X', Y') = d(X, Y)$. Por outro lado, se r não for paralela nem igual a s, então XX' e YY' são lados opostos de um paralelogramo e, consequentemente, XY e $X'Y'$ também são. Daí, $d(X', Y') = d(X, Y)$. □

2.1.3 Rotação

Definição 2.6. *Sejam O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = A\hat{O}B$ um ângulo do vértice O. A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha} : \Pi \to \Pi$ definida da seguinte forma: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e para todo ponto $X \neq O$ em Π, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$, é o ponto do plano Π tal que $d(X, O) = d(X', O)$, $X\hat{O}X' = \alpha$ e o "sentido da rotação" de A para B é o mesmo de X para X'.*

Observação 2.5. *A condição $X\hat{O}X' = \alpha$ significa em termos geométricos, que se tomarmos os pontos A e B tais que $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OX} = \overline{OX'}$ então $\overline{AB} = \overline{XX'}$. A exigência de que o sentido de rotação de X para X' seja o mesmo que o sentido de A para B é clara intuitivamente e pode ser formulada em termos precisos dizendo-se que os ângulos $B\hat{O}X$ e $A\hat{O}X'$ tem a mesma bissetriz.*

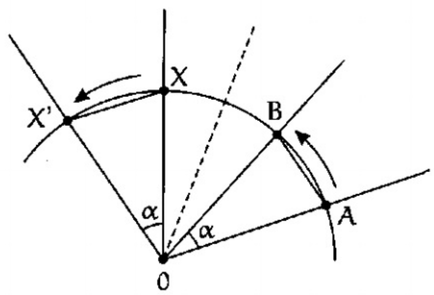


Figura 2.11: Rotação

Proposição 2.9. *A rotação $\rho_{O,\alpha}$: $\Pi \to \Pi$ é uma isometria.*

Demonstração. Dados os pontos $X, Y \in \Pi$, diferentes de O e sejam X' e Y' suas imagens pela rotação $\rho_{O,\alpha}$. Na figura 2.12, observamos os ângulos $X'\hat{O}$ e $X\hat{O}Y'$ tem a mesma bissetriz, segue-se que $X\hat{O}Y = X'\hat{O}Y'$. Mas, por definição, $\overline{OX} = \overline{OX'}$ e $\overline{OY} = \overline{OY'}$. Então, os triângulos XOY e $X'OY'$ são congruentes (caso LAL). Logo, $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$, ou seja, $\rho_{O,\alpha}$ é uma isometria, cujo único ponto fixo é O. □

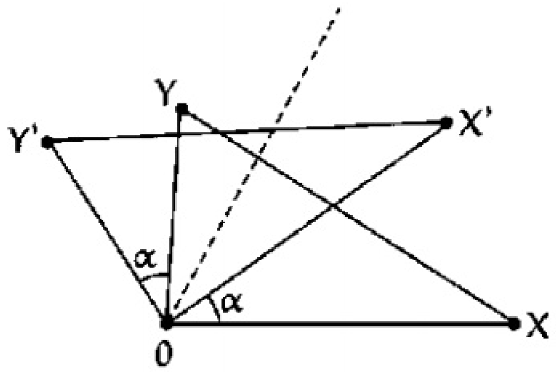


Figura 2.12: Proposição 2.9

Observação 2.6. *Para que a rotação ρ_o, α , de centro O e ângulo $\alpha = A\hat{O}B$, esteja bem definida, torna-se necessária a ordem das semi-retas OA e OB seja levada em conta: OA é a primeira e OB a segunda. Nessa situação, dizemos que $\alpha = A\hat{O}B$ é um ângulo orientado e, considerado diferente do ângulo orientado $-\alpha = B\hat{O}A$. Na realidade, tem-se $\rho_{O,-\alpha} = (\rho_{O,\alpha})^{-1}$, como se percebe facilmente.*

2.1.4 Reflexão com deslizamento

Definição 2.7. *Seja um vetor $\overrightarrow{v}$ não-nulo e r uma reta paralela a $\overrightarrow{v}$ no plano Π.*

A reflexão com deslizamento, determinada pelo vetor $\overrightarrow{v}$ e pela reta r, é a isometria $T = T_v \circ R_r \ : \ \Pi \to \Pi$, obtida fazendo a translação $T_{(v)}$ seguir-se à reflexão R_r . A reflexão com deslizamento, assim como a translação T_v, não possui ponto fixo.

Observação 2.7. *Como o vetor é paralelo a reta r, verifica-se que $T_v \circ R_r = R_r \circ T_v$.*

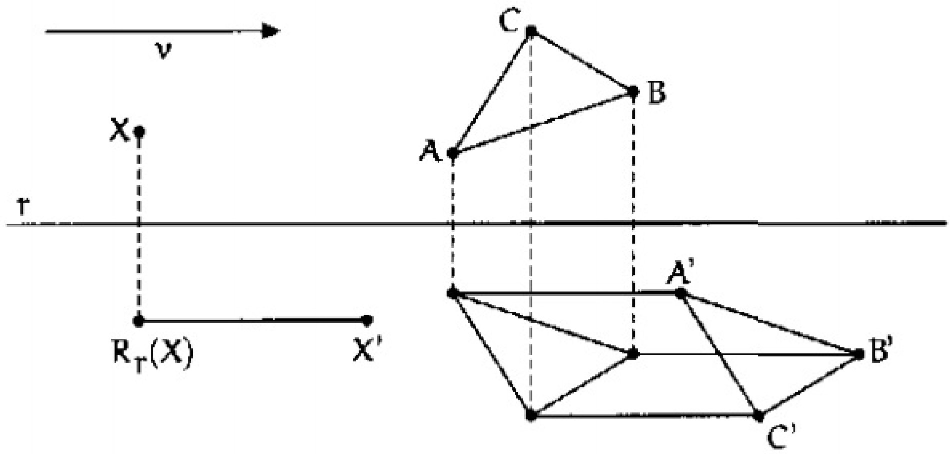


Figura 2.13: Reflexão com deslizamento

Proposição 2.10. *Existem apenas quatro tipos de isometrias $T : \Pi \to \Pi$ do plano Π, além da função identidade, a saber: translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento.*

Nota: Ver a demonstração desta Proposição em [9], $p.26 - 27 - 28 - 29$.

Neste capítulo abordamos os quatro tipos de isometrias no plano e algumas de suas propriedades. As imagens presente neste capítulo estão disponíveis em [9].

No capítulo seguinte abordaremos as isometrias no plano segundo o viés do software GeoGebra.

CAPÍTULO 3

O SOFTWARE GEOGEBRA

É um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única GUI (é um tipo de interface do utilizador que permite a interação com dispositivos digitais através de elementos gráficos como ícones e outros indicadores visuais) . Sua distribuição é livre, em vários idiomas, inclusive em português, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

Foi criado por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula. O projeto foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University.

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos etc., assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser diretamente inseridas. Portanto, o GeoGebra é capaz de lidar com variáveis para números, pontos, vetores, derivar e integrar funções, e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes e pontos extremos de uma função. Dessa forma, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra e ao cálculo. Daí, a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto. A partir da versão 5.0 também

é possível trabalhar com geometria em três dimensões.. Podemos fazer o download deste software no site https://www.geogebra.org/ e encontrar materiais construídos no GeoGebra dos mais diversos assuntos de Matemática nos sites https://tube.geogebra.org/ e http : //www.geogebra.im-uff.mat.br/ .
Apresentaremos agora o software GeoGebra, através da alguns de seus comandos e respectivas ferramentas.

Novo ponto: selecionando esta ferramenta e clicando na janela geométrica, com o botão esquerdo do mouse, cria-se um novo ponto.

Figura 3.1: Novo ponto

Segmento definido por dois pontos: marcando-se dois pontos, determinam-se as extremidades do segmento a ser traçado.

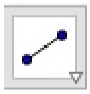


Figura 3.2: Segmento definido por dois pontos

Segmento com dado comprimento a partir de um ponto: marca-se a origem do segmento e digita-se a medida desejada para o mesmo, em uma janela que se abre automaticamente.

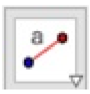


Figura 3.3: Segmento com dado comprimento a partir de um ponto

Reta definida por dois pontos: marcando-se dois pontos, traça-se a reta definida por eles.

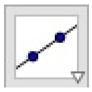


Figura 3.4: Reta definida por dois pontos

Vetor definido por dois pontos: marcando-se dois pontos, que determinam as extremidades do vetor traçado.

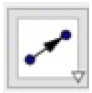


Figura 3.5: Vetor definido por dois pontos

Polígono: para construir um polígono, marca-se ao menos três pontos e clica-se, com o botão esquerdo do mouse, no primeiro ponto novamente (para fechar o polígono).

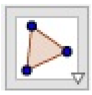


Figura 3.6: Polígono

Polígono regular: é possível construir polígonos regulares usando o comando no qual é necessário digitar o número de lados na janela de álgebra que aparece no centro da tela.

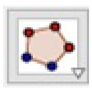


Figura 3.7: Polígono regular

Rotação em torno de um ponto: essa ferramenta desenha um objeto rotacionado em relação a um ponto. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser rotacionado, e, a seguir, clique no ponto que funcionará como centro da rotação. Aparecerá uma janela na qual você especificará a medida do ângulo de rotação, em graus.

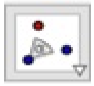


Figura 3.8: Rotação em torno de um ponto

Reflexão com relação a uma reta : essa ferramenta desenha um objeto refletido em relação a uma reta. Clique no objeto a ser refletido, com o botão esquerdo do mouse e, a seguir, clique na reta através da qual ocorrerá a reflexão.

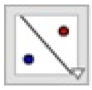


Figura 3.9: Reflexão com relação a uma reta

Translação por um vetor: essa ferramenta desenha um objeto transladado. Clique, com o botão esquerdo do mouse, no objeto a ser transladado e, a seguir, clique no vetor de translação.

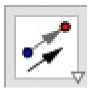


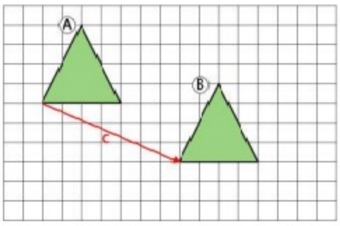
Figura 3.10: Translação por um vetor

Isometrias no plano é um tópico de estudo da Geometria das Transformações e sua abordagem visa propiciar conceituações de congruência e de semelhança, procurando desenvolver a capacidade de perceber se duas figuras têm ou não a mesma forma e o mesmo tamanho independente da posição que elas ocupam no plano.

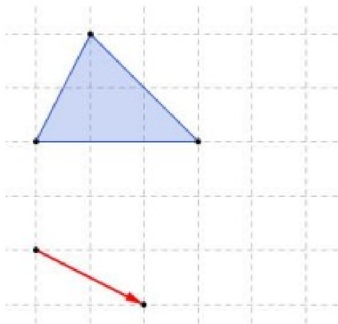
Nesse texto vamos abordar algumas isometrias no GeoGebra.

3.1 Translação

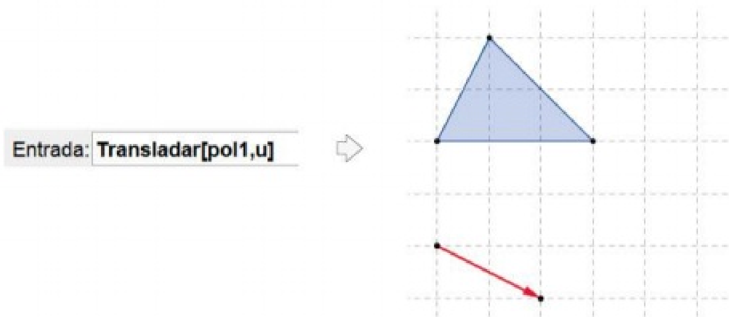
Na translação obtém-se uma imagem da figura original deslocada uma medida c dada, a qual pode ser representada por um vetor.



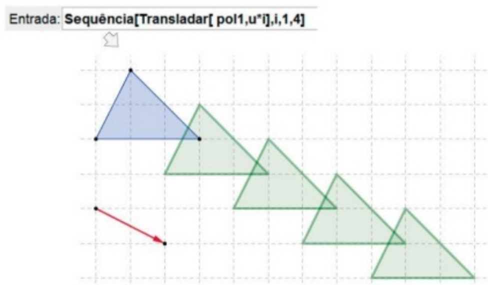
No GeoGebra é possível obter um polígono (pol2) a partir de um polígono (pol1), por exemplo. Inicialmente construímos um polígono (pol1) e um vetor (u).



Clicando em Translação por um Vetor e, em seguida, clicando no polígono e no vetor obtemos a figura transladada. O mesmo resultado pode ser obtido digitando Transladar [,] com os seguintes parâmetros e obtemos outro polígono (pol2) transladado por u.



Utilizando o comando Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>], juntamente com o comando Transladar podemos obter uma sequência de polígonos transladados por múltiplos do vetor u.

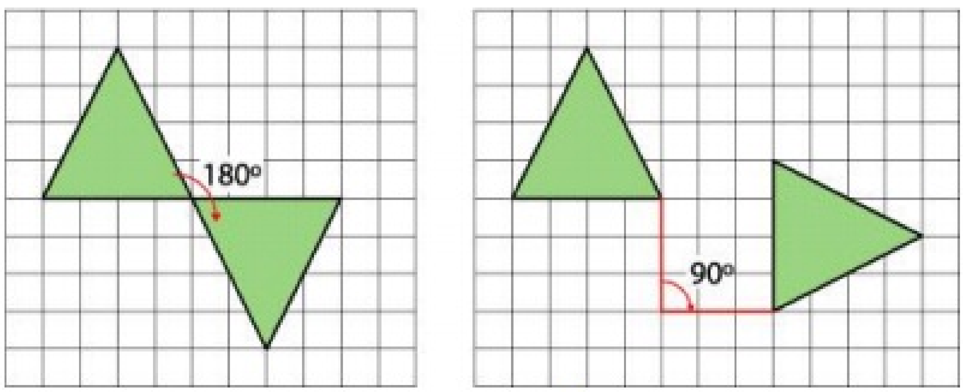


O comando Sequência[<Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>], possibilita criar sequências de números, de pontos, de segmentos, de polígonos, entre outros. O comando deve ser digitado uma expressão em uma variável a sua escolha, por exemplo:

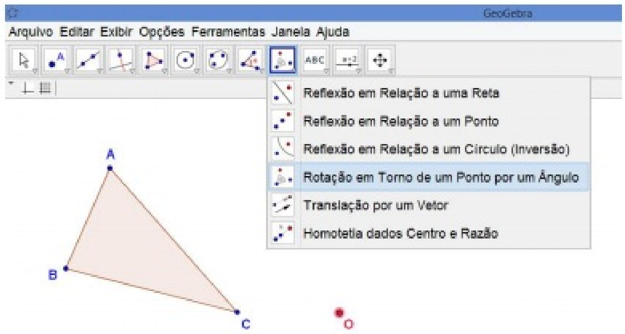
- Para obter os seis primeiros números pares Sequência[2*n, n, 0, 5]
- Para obter dez pontos da função f(x) = 2 ˆ x : Sequência[(n, f(n)), n, 1, 10] Nos comandos acima o *"n"* é a variável do comando e os dois próximos valores determinam os limites mínimo e máximo em que o comando deve ser executado.

3.2 Rotação

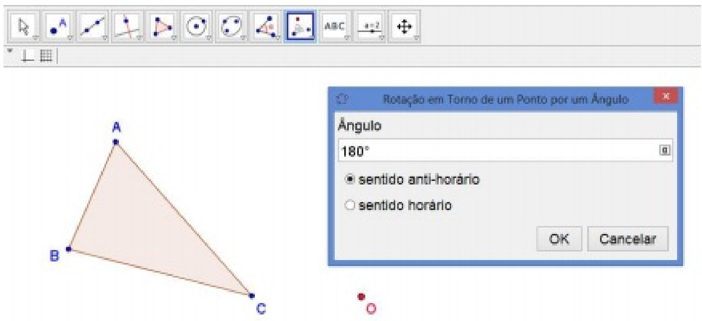
Na de rotação, obtemos a imagem de um objeto por meio de um giro em torno de um ponto fixo, chamado de centro de rotação.



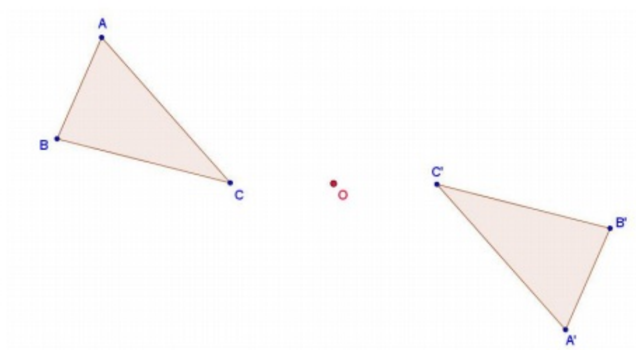
A ferramenta Rotação em torno de um Ponto por um Ângulo permite obter uma figura B girando uma figura A.



Assim, com a ferramenta Rotação em torno de um Ponto por um Ângulo ativa, clica-se na figura e no ponto. O GeoGebra exibe uma caixa com um campo para ser preenchido com a medida do Ângulo. Além disso, há opções para escolha do sentido do giro.



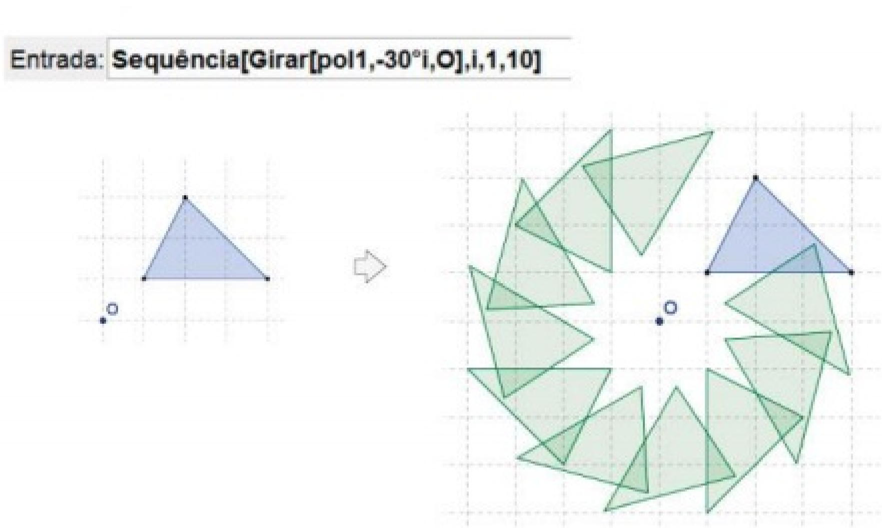
Definida a amplitude do ângulo e o sentido do giro, clica-se em OK para que seja obtida a imagem girada pelo ponto O (centro de rotação).



É possível ainda obter a imagem girada de uma figura digitando-se comandos na Entrada. Para isso, utiliza-se uma das seguintes sintaxes:

- Girar[<Objeto>, <Ângulo>]
- Girar [<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>]

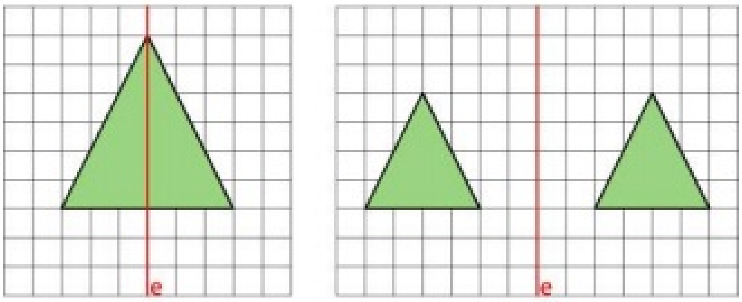
As duas sintaxes acima apresentam diferenças quanto aos resultados obtidos. Na primeira a imagem girada é obtida em relação à origem, ou seja, o ponto (0,0), já que não é especificado o centro de rotação. E na segunda, a imagem girada é obtida em relação a um centro escolhido arbitrariamente.
Da mesma forma que fizemos com o comando Transladar, podemos utilizar o comando Girar [<Objeto>, <Ângulo>, <Ponto>] aninhado ao comando Sequência para obter uma série de polígonos que correspondem a giros de pol1 em torno do ponto O.



3.3 Reflexão

Na reflexão há um segmento passando pela figura ou fora dela que atua como espelho, refletindo a imagem desenhada. Esse segmento recebe o nome de eixo de simetria.

O eixo e divide a figura em duas partes iguais ou congruentes. A figura A e sua simétrica, a figura B, estão a mesma distância do eixo e. No GeoGebra podemos obter imagens refletidas utilizando as ferramentas Reflexão em Relação a uma Reta ou Reflexão em Relação em Relação



a um Ponto. Com uma das ferramentas selecionadas, clica-se na figura a qual deseja-se obter a imagem refletida e clica-se na reta (ou ponto). É possível ainda obter a imagem refletida de uma figura digitando-se comandos na Entrada. Para isso, utiliza-se uma das seguintes sintaxes:

- Reflexão [<Objeto>, <Ponto>]
- Reflexão [<Objeto>, <Reta>]

CAPÍTULO 4

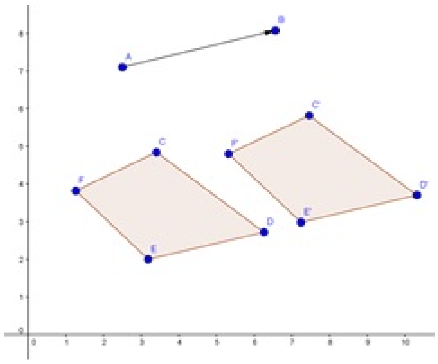
PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA O ENSINO DE ISOMETRIAS COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

A Inserção das TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) no mundo globalizado, em especial na escola, tem proporcionado mudanças significativas na aprendizagem dos nossos educandos, já que é possível a produção e internalização dos conteúdos em tempo real. Dessa forma, entendemos que os recursos computacionais associados aos didáticos-pedagógicos são capazes de proporcionar uma melhor compreensão dos conteúdos matemáticos, em especial, isometrias no plano, já que alguns aspectos como: o pensamento, a dedução, a visualização, a criação e a conclusão estarão sempre presentes na construção do conhecimento, sendo que as atividades desenvolvidas no software Geogebra somar-se-ão as metodologias utilizadas, para um processo de ensino aprendizagem enriquecedor.

A seguir apresentamos quatro atividades com GeoGebra, propostas para o estudo de isometrias no plano, para alunos do oitavo ano do ensino fundamental da educação básica, as quais proporcionarão ao leitor uma breve ideia da potencialidade desse software.

4.1 Atividade 1: Construção de um polígono utilizando a ferramenta translação

Tema: Construção de um polígono utilizando a ferramenta translação



Objetivo: Com esta atividade pretende-se que os alunos construam um polígono qualquer a partir de dois pontos A e B e, em seguida, percebam que numa translação dado um ponto X do plano, a sua imagem $X^{'} = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados.

Público alvo: Alunos do 8° ano do ensino fundamental da educação básica de ensino.

Material utilizado: Computadores com o software GeoGebra instalado.

Tempo previsto: Duas aulas, com duração de 50 minutos cada.

Desenvolvimentos:

Ferramenta	Procedimentos para construção
Vetor	Clique no ponto A e depois no ponto B, obtendo assim o vetor $\overrightarrow{AB}$.
Polígono	Clique na Janela construindo o polígono desejado.
Translação de um vetor	Clique no polígono e, em seguida, no vetor.

Conclusão:

1. Movimente os vértices do polígono original e veja o que acontece com o segundo polígono. O que você observou?

2. Mude o tamanho do vetor, deixando-o primeiramente mais longo e depois num tamanho menor. Descreva a transformação que você observou na figura.

3. Meça o comprimento deste vetor e as distâncias de um polígono até o outro. Que conclusão você chegou?

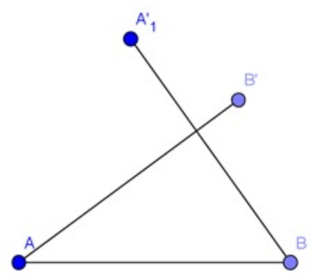
4. Qual é o papel do vetor para efetuar a translação?

5. É possível transladar o polígono de modo a sobrepô-los?

6. A translação da figura é sempre a mesma, isto é, conserva o tamanho e a forma da figura?

4.2 Atividade 2: Construção de um triângulo conhecendo-se um lado e dois ângulos utilizando a ferramenta rotação

Tema: Construção de um triângulo conhecendo-se um lado e dois ângulos utilizando a ferramenta rotação.



Objetivo: Com esta atividade pretende-se que os alunos construam um triângulo conhecendo-se um lado ($4cm$) e dois ângulos de medidas iguais a 34 e 36 graus, respectivamente e, além disso, percebam as relações entre o objeto a ser rotacionado, o centro de rotação e o ângulo de giro, ou seja, que percebam que ao girar o triângulo construído o mesmo não sofre deformações.

Público alvo: Alunos do 8° ano do ensino fundamental da educação básica de ensino.

Material utilizado: Computadores com o software GeoGebra instalado.

Tempo previsto: Duas aulas, com duração de 50 minutos cada.

Desenvolvimentos:

Ferramenta	**Procedimentos para construção**
Segmento com comprimento fixo	Selecione um ponto A e na janela 4, obtendo assim o segmento AB medindo $4cm$.
Rotação em torno de um ponto	Clique no segmento AB e, em seguida, no ponto A. Na janela, coloque um ângulo de 34° (sentido anti-horário).
Rotação em torno de um ponto	Clique no segmento AB e, em seguida, no ponto B. Na janela, coloque um ângulo de 56° (sentido horário).

Conclusão:

1. Como você classifica o triangulo que você construiu?

2. O que aconteceu com o segmento AB quando você utilizou a ferramenta rotação em torno de um ponto pela primeira vez?

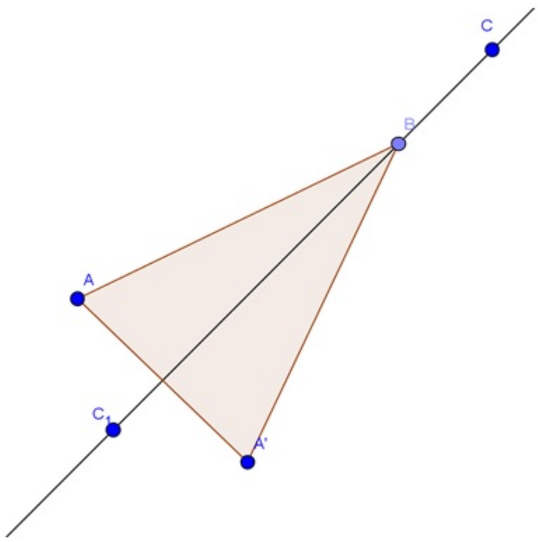
3. O que aconteceu com o segmento AB quando você utilizou a ferramenta rotação em torno de um ponto pela segunda vez?

4. O que ponto B representa na segunda vez em que foi utilizada a ferramenta rotação em torno de um ponto?

5. Quais são os elementos necessários para realizar uma rotação?

4.3 Atividade 3: Construção de um triângulo utilizando a reflexão de um ponto em relação a uma reta

Tema: Construção de um triângulo utilizando a reflexão de um ponto em relação a uma reta.



Objetivo: A partir desta atividade pretende-se que os alunos construam um triângulo qualquer e percebam que dado um ponto A pertencente a uma reta r e para $A^{'}$ não pertencente a r, a reflexão em torno de uma reta, $R_r(A) = A^{'}$, é tal que a mediatriz do segmento $AA^{'}$ é a reta r.

Público alvo: Alunos do 8° ano do ensino fundamental da educação básica de ensino.

Material utilizado: Computadores com o software GeoGebra instalado.

Tempo previsto: Duas aulas, com duração de 50 minutos cada.

Desenvolvimentos:

Ferramenta	Procedimentos para construção
Ponto	Selecione um ponto A.
Reta	Selecione dois pontos quaisquer no plano, exceto o ponto A, obtendo assim a reta s. (esconda os pontos criados na reta s)
Reflexão em relação a uma reta	Clique no ponto A e depois na reta s.
Ponto	Clique sobre a reta s e nomeei o ponto de B.
Polígono	Clique nos pontos A, $A^{'}$ e B, onde $A^{'}$ é um dos pontos criados no segundo procedimento.

Conclusão:

1. Quais as características do triangulo AA'B, você percebeu?

2. Existe alguma relação entre a reta s e o segmento AA'. Qual?

3. Existe relação entre a reta s com o ângulo ABA'? Em caso afirmativo qual?

4.4 Atividade 4: Reflexão com deslizamento

Tema: Reflexão com deslizamento

Objetivo: A partir desta atividade pretende-se que os alunos utilizem o software GeoGebra para definir a quarta isometria, a reflexão com deslizamento.

Público alvo: Alunos do 8° ano do ensino fundamental da educação básica de ensino.

Material utilizado: Computadores com o software GeoGebra instalado.

Tempo previsto: Duas aulas, com duração de 50 minutos cada.

Desenvolvimentos:

1. Construa um vetor $\overrightarrow{AB}$.

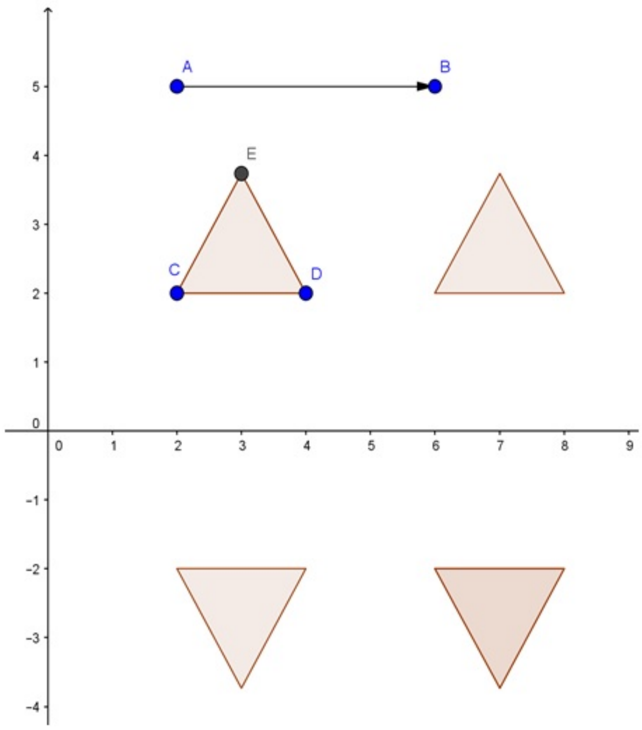
2. Construa um Triangulo acima do eixo OX com a ferramenta Polígono regular.

3. Em seguida com a ferramenta (Translação por um vetor) clique no polígono depois no vetor.

4. Com a ferramenta (Reflexão em relação a uma reta) clique no triângulo transladado e depois no eixo OX.

5. Agora repita os procedimentos 3 e 4, mas na ordem inversa, e verifique o que acontece.

Sugestão: usar a malha e os procedimentos detalhados a seguir.



Ferramenta	**Procedimentos para construção**
Vetor	Clique no ponto A e depois no ponto B.
Polígono Regular	Clique em dois pontos C e D e na Janela digite 3.
Translação de um vetor	Clique no triangulo e, em seguida, no vetor.
Reflexão em relação a uma reta	Clique no triangulo e, em seguida, no eixo OX.
Repita 3 e 4 na ordem inversa. (4 e 3)	

Conclusão:

1. Movimente o ponto B e veja o que acontece com os Triângulos?

2. O que você observou?

Na realização dessas atividades espera-se que o docente tenha como mais uma alternativa do uso do laboratório de informática nas aulas de Matemática, percebendo assim, que uso da informática na escola se faz nosso aliado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como objetivo mostrar a importância da Geometria Plana, em particular: Isometrias no Plano, na contribuição das ciências e no avanço da Matemática. Isso foi possível, quando relacionamos isometrias com aplicações em outras áreas.

Com a construção desse trabalho, observamos a grande relevância do uso de um software educativo no processo de ensino aprendizagem. Nesse caso, o GeoGebra. Assim, foram apresentadas algumas atividade com uso do Software Geogebra, relacionadas ao conteúdo de isometrias no plano, para que o docente possa utilizar as mesmas nas suas aulas de Matemática do oitavo ano do Ensino Fundamental.

Vale ressaltar, também, a importância do processo histórico, em que ocorreu o desenvolvimento da Geometria, sendo hoje de grande valor nos conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Fundamental e na construção do conhecimento do ser humano sobre a história dessa ciência. No capítulo específico que trata de Isometrias no Plano, inspirado na obra Isometrias, do ilustre Elon Lages Lima, destacamos o rigor e a precisão, principalmente nas demonstrações das proposições ali apresentadas, que entendemos que devem ser uma prática nas aulas de matemática.

Reconhecemos que algumas dificuldades poderão ser encontradas na execução desse trabalho no ambiente escolar, tais como: falta de condições apropriadas para utilização do software (falta de computadores ou máquinas obsoletas); professores com baixa formação sobre Novas

TIC; e trabalhar isometrias no plano com alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, devido a falta de domínio de conteúdos básicos da matemática.

Diante do exposto, esperamos que com esse trabalho possamos contribuir para uma aproximação maior entre os conteúdos matemáticos, desenvolvidos em sala de aula, de modo especial Isometrias no Plano, com o nosso cotidiano. E, acreditamos que isso se tornará possível, na medida em que fizermos o uso das TIC, de forma mais presente, no processo ensino aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ANDRADE; R.A. : **Geogebra: Uma ferramenta computacional para o ensino de geometria no ensino fundamental 2**. Vitória da Conquista, 2012.

[2] BACALHAU; Fernando Marques:**Isometrias do Plano e Simetria**. Dissertação de Mestrado em Matemática para Professores (Universidade de Lisboa). Disponível em http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/8852/1/ulfc104259_tm_Fernando _ Bacalhau.pdf. Acesso em 05 de março de 2016.

[3] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] BRASIL/MEC. Parâmetros Curriculares Nacionais: **Matemática**, terceiro e quarto ciclos. Brasília: MEC/SEMTEC, 1998.

[5] BOYER, C. B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[6] http://artenarede.com.br/blog/index.php/2014/08/. Acesso em 22 de fevereiro de 2016.

[7] http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1205/150. Acesso em 02 de março de 2106.

[8] Disponível em <http://www.geogebra.org/about>. Acesso em 18 de maio de 2016.

[9] LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[10] LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?**. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Blumenau, n. 4, p. $3-13$, jan./jun. 1995.

[11] MUNIZ NETO, Antonio Caminha.**Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

[12] NEVES, P. R. V. & MURARI, C. **Grupos de Simetrias e Caleidoscópios**.In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 5. Anais. Canoas ? RS, 2010.

[13] Parâmetros Curriculares Nacionais:**matemática** / Ministério da Educação. Secretária da Educação Fundamental. ? 3 ed. Brasília; 2001.

[14] Read, H. **Educação pela Arte**. Trad. de Ana Maria Rabaça e Luís Filipe Silva Teixeira. Lisboa: Edições Setenta. 2001.

[15] RIPPLINGER, H. M. G. **A Simetria nas Práticas Escolares**. Dissertação de Mestrado (Pós-Graduação em Educação ? UFPR), 2006. Disponível em http://dspace.c3sl.ufpr.br/dspace/bitstream/handle/1884/3951/Grzybowski%20Ripplinger%2c H.M..pdf?sequence=1 . Acesso em: 12 de mar. de 2016.

[16] SILVA, Denylson Prado Ribeiro da. **Cálculo Diferencial de funções polinomiais no Ensino Médio com o uso do GeoGebra: fundamentação teórica e suas aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) ? Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Mossoró ? RN, 2016. Disponível em :http://www.profmat-sbm.org.br/dissertações. Acesso em 30 de maio de 2016.

[17] https://matematicanosmata.blogspot.com.br/2015/10/isometrias-8-e-f-g-h.html. Acesso em 20 de fevereiro de 2016.

[18] https://www.google.com.br/search?q=Catedral+de+Bras%C3%ADlia&sa=X&rlz=1C1PRFC_enB M#imgrc=DGDX_C6Savee-M%3A. Acesso em 22 de fevereiro de 2016.

[19] http://artenarede.com.br/blog/index.php/2014/08/. Acesso em 22 de fevereiro de 2016.

[20] http://artenarede.com.br/blog/index.php/2014/08/. Acesso em 22 de fevereiro de 2016.

ANEXOS

.1 Conceitos Geométricos Básicos

O leitor certamente tem uma ideia intuitiva, a partir da observação do seu cotidiano, do que vem a ser um ponto, uma reta ou um plano. Daí, vamos imaginar essas noções como conhecidas.

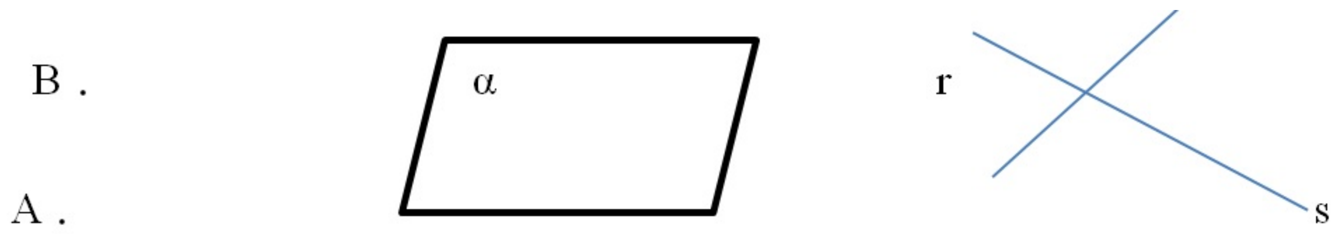


Figura 1: pontos e retas no plano

Na figura 5.1, temos os pontos A e B, o plano α e as retas r e s, nos quais denotaremos os pontos por letras latinas maiúsculas, o plano por letras minúsculas do alfabeto grego e as retas por letras latinas minúsculas.

Definição .1. *(Distância entre dois pontos) Dados os pontos A e B no plano, definimos a distância $d(A,B)$ entre os mesmos como o comprimento $\overline{AB}$ do segmento AB:*

$$d(A,B) = \overline{AB}.$$

.2 Segmento de reta e semirreta

Definição .2. *Segmento de reta é a porção da reta r que fica entre dois pontos diferentes, A e B, que estão sobre essa reta r. Assim teremos o segmento de reta AB, como mostra a figura* 5.2.

Definição .3. *Um ponto M sobre a reta r divide-a em duas semirretas de origem M. Se colocarmos um ponto N sobre a reta r, teremos a semirreta MN de origem M, como ilustra a figura a seguir.*

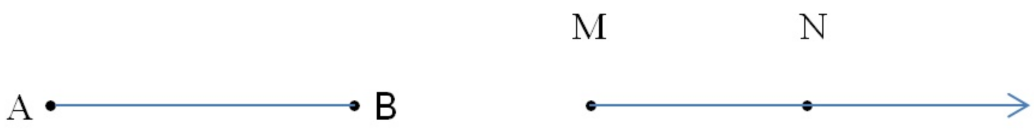


Figura 2: segmento de reta e semirreta

.3 Ponto médio e ponto simétrico

Definição .4. *Numa semireta de origem A existe, para cada número real $d > 0$, um único ponto X tal que $AX = d$. Segue-se que, sobre uma reta r, existem exatamente dois pontos X_0, X_1 situados a uma distância $d > 0$ de um ponto dado $A \in r$: um em cada semireta de origem A. Tem-se*

$$X_0X_1 = X_0A + AX_1 = d + d = 2d$$

*e A chama-se o **ponto médio** do segmento X_0X_1, de acordo com a figura* 5.3.

Definição .5. *Quando A é o ponto médio do segmento de reta X_0X_1, diz-se que X_1 é o simétrico de X_0 relativamente a A. Assim, $d(X_0, A) = d(X_1, A) > 0$.*

.4 Congruência de triângulos

Os casos LAL, ALA e LLL serão definidos como axiomas.

Axioma .1. *(LAL) Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente iguais a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

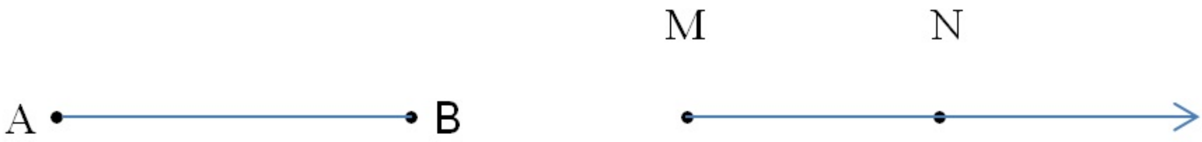


Figura 3: Ponto médio e ponto simétrico

Axioma .2. *(ALA) Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

Axioma .3. *(LLL) Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

Axioma .4. *(LAA_o) Se dois triângulos tem respectivamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.*

.5 Semelhança de Triângulo

A seguir serão descritos os Casos de semelhança LLL, ALA e AA.

Proposição .1. *(LLL) Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano tais que*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\hat{C} = \hat{C}'$.

Proposição .2. *(ALA) Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano tais que*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = K.$$

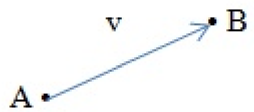
$\hat{B} = \hat{B}'$. Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular,$\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$ e $\dfrac{AC}{A'C'} = K$.

Proposição .3. *(AA) Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano tais que $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$. Então, $ABC \sim A'B'C'$, com a correspondência de vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Em particular,*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}.$$

.6 Vetores

Definição .6. *Um vetor do plano é um conjunto $\overrightarrow{v}$ constituído por todos os segmentos orientados que são equipolentes a um dado segmento de reta orientado, isto é, que tem uma determinada direção, um determinado sentido e um determinado comprimento. Qualquer segmento orientado (A,B) de $\overrightarrow{v}$ e um representante do vetor $\overrightarrow{v}$ e escreve-se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.*



Definição .7. *(Norma ou comprimento de um vetor) ? Norma de um vetor $\overrightarrow{v}$ é a medida do seu complemento e representa-se por $||\overrightarrow{AB}||$. Assim, se $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, temos*

$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Definição .8. *A distância entre dois pontos A e B, é definida a partir da norma de um vetor: $d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}||$. A distância entre dois conjuntos de pontos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ é definida por*

$$d(A,B) = inf d(A,B) = inf d(A,B) : A \in A, B \in B.$$