Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Sobre Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana

Dênis Aparecido da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis

2013

516.2 Silva, Dênis
S586s Sobre Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana/ Dênis Aparecido da Silva - Rio Claro: [s.n.], 2013.
49 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Thaís Fernanda Mendes Monis

1. Área. 2. Perímetro. 3. Desigualdade Isoperimétrica. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Dênis Aparecido da Silva
Sobre Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis
Orientadora

Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Edivaldo Lopes dos Santos
UFSCar/São Carlos (SP)

Rio Claro, 11 de abril de 2013

Dedico esta tese
a minha adorada esposa Cláudia
e aos meus pais Arlindo e Ivaldete.

Agradecimentos

O principal agradecimento dedico ao Pai, pela minha vida e pela paz nos momentos em que me encontrei incapaz de prosseguir.

Agradeço a minha esposa Cláudia Regina Peroggini Silva, por estar sempre ao meu lado, pelo incentivo, compreensão e encorajamento, durante todo este período.

Aos meus pais, Arlindo Dutra da Silva e Ivaldete de Freitas da Silva, que sempre estiveram comigo, ensinando-me, apoiando-me e acreditando em meu potencial.

A todos meus familiares, tios, primos, sogro, sogra, cunhado, cunhadas, sobrinhos e meu querido irmão Danilo Aparecido da Silva, pelo qual tenho grande admiração e que sempre torceu pela minha vitória.

A todos meus amigos que direta ou indiretamente participaram desta conquista, em especial ao Thiago Fanelli Ferraiol pelo seu apoio e exemplo.

Aos meus colegas de mestrado, principalmente ao Anderson, Fabiana, Henrique, Juliana e Mauro pelos momentos de entusiasmo partilhados em conjunto.

Aproveito também para agradecer à minha orientadora Profª. Dra. Thaís Fernanda Mendes Monis, pela disponibilidade e paciência.

Aos demais docentes, Professores da UNESP-Rio Claro, pelo incentivo e dedicação.

A todos os demais ... .

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Cada sonho que você deixa para trás
é um pedaço do seu futuro que deixa de existir.
Steve Jobs (1955-2011)

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns problemas clássicos envolvendo máximos e mínimos na Geometria Euclidiana como, por exemplo, o conhecido Problema de Dido e sua relação com a Desigualdade Isoperimétrica.

Palavras-chave: Área, Perímetro, Desigualdade Isoperimétrica.

Abstract

In this work we study some classical problems envolving maximum and minimum in the Euclidean Geometry. For example, the well known Dido's Problem and its relation with the Isoperimetric Inequality.

Keywords: Area, Perimeter, Isoperimetric Inequality.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O presente trabalho baseia-se no texto *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana*, de Djairo G. de Figueiredo [1]. Nele, o autor trata de alguns problemas elementares cuja formulação e solução são acessíveis aos alunos do Ensino Médio. Dentre esses problemas, estão os seguintes:

Problema 1. Entre todos os triângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?

Problema 2. Entre todos os triângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?

Problema 3. Entre todos os polígonos de n lados e de mesma área, qual deles têm o menor perímetro?

Problema 4. Entre todos os polígonos de n lados e de mesmo perímetro, qual deles têm a maior área?

Problema 5 (O Problema de Dido). Dentre todas as curvas planas fechadas e retificáveis, de um dado comprimento L fixado, qual é aquela que engloba maior área?

Os problemas acima citados são conhecidas questões do Cálculo Variacional e podem ser tratados com as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral. No entanto, uma discussão quase que completa pode ser feita apenas utilizando resultados da Geometria Euclidiana, como é feito em [1]. Nosso objetivo neste trabalho é o de estudar, e de apresentar como uma possibilidade em sala de aula as soluções para os problemas acima conforme essa última perspectiva.

Acreditamos que esse seja um tema relevante no sentido de despertar os alunos para a beleza e a elegância da Geometria Euclidiana.

2 Problemas de Máximo e de Mínimo

2.1 Maximizando a área, minimizando o perímetro dentre os triângulos

Nessa seção, discutiremos os seguintes problemas:

Problema 1. Entre todos os triângulos de mesma área, qual é o de menor perímetro?

Problema 2. Entre todos os triângulos de mesmo perímetro, qual é o de maior área?

A resposta para ambos os problemas acima é a mesma: trata-se do triângulo equilátero. A prova baseia-se na proposição 2.1 abaixo.

Definição 2.1. *Em um lugar geométrico, definimos uma linha através de pontos sucessivos que se deslocam no espaço, porém se esses pontos mudarem de direção, a figura descrita é definida como* ***curva****.*

Proposição 2.1. Dados dois pontos P e Q do mesmo lado de uma reta r em um plano, a curva de menor comprimento ligando P e Q e tocando r é formada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{AQ}$, onde $A \in r$ é tal que os ângulos $\widehat{PAN}$ e $\widehat{NAQ}$ são iguais. Designamos por $\overrightarrow{AN}$ a semirreta ortogonal a r, que tem origem A e que está do mesmo lado dos pontos P e Q (Figura 2.1).

Demonstração. O argumento todo se baseia no fato de que a curva de menor comprimento ligando dois pontos é o segmento de reta com extremidades nesses pontos. Usando isso, vemos:

i) A curva γ de comprimento mínimo toca r em apenas um ponto. De fato, suponha, o contrário, que γ tocassem r em dois pontos, A e A'. Seja M um ponto de γ fora de r tal que ao percorrer a curva de A para M, passa-se por A'. Então a curva γ' obtida a partir de γ pela substituição do trecho AM pelo segmento de reta $\overline{AM}$ tem um comprimento menor que o comprimento de γ.

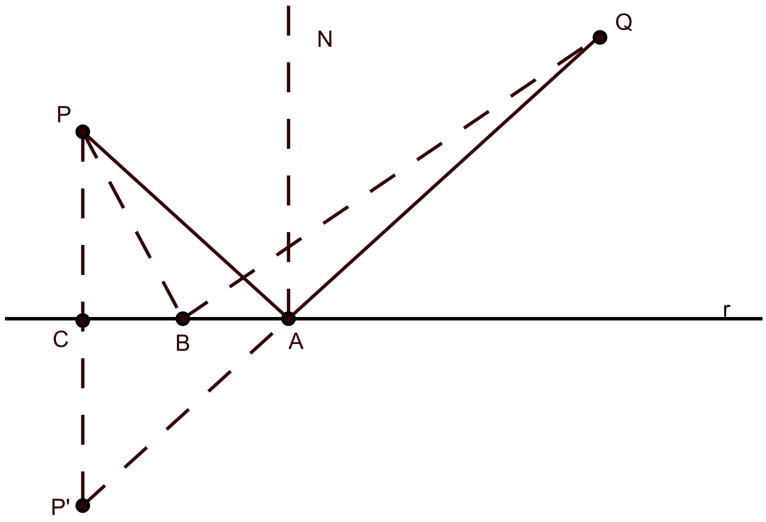

Figura 2.1: Proposição 2.1

ii) A curva γ deve ser formada por dois segmentos de reta. De fato, seja A o ponto onde γ que toca r. Então, necessariamente, o trecho PA da curva é um segmento de reta.

iii) O ponto A é obtido como a intersecção da reta r com o segmento $\overline{P'Q}$ onde P' é o simétrico a P com relação a r, (isto é, o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular a r e o comprimento dos segmentos $\overline{PC}$ e $\overline{CP'}$ são iguais, onde C é a intesecção da reta r com o segmento $\overline{PP'}$). De fato, se o ponto de contato de γ com r fosse um outro ponto B teríamos uma curva de maior comprimento que aquela tocando em A. Para ver isso, observe que os triângulos PCB e $P'CB$ são congruentes, bem como os triângulos PCA e $P'CA$. Então, temos

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \overline{P'A} \\ \overline{PB} &= \overline{P'B} \\ \overline{P'A} + \overline{AQ} &< \overline{P'B} + \overline{BQ} \end{aligned}$$

donde conclui-se que

$$\overline{PA} + \overline{AQ} < \overline{PB} + \overline{BQ}.$$

Finalmente, a igualdade dos ângulos $\widehat{PAN}$ e $\widehat{NAQ}$ é estabelecida pelo seguinte argumento: os triângulos PCA e $P'CA$ são congruentes, logo os ângulos $\widehat{APC}$ e $\widehat{AP'C}$ são iguais. Por outro lado, se considerarmos o teorema das paralelas cortadas por uma transversal, temos que:

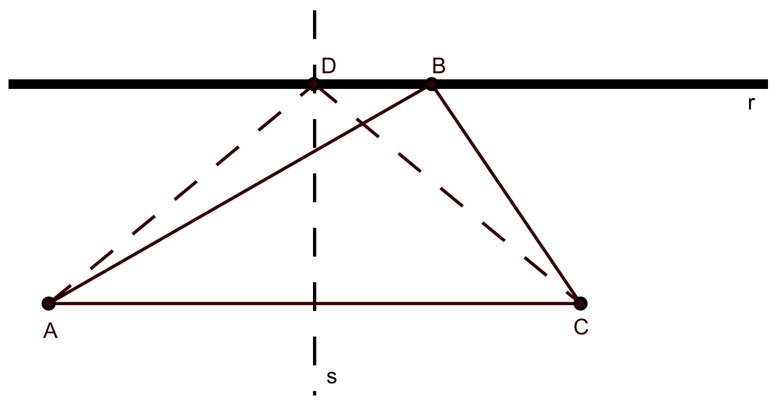

Figura 2.2: Solução do Problema 1

i) os ângulos $\widehat{APC}$ e $\widehat{PAN}$ são congruentes, pois são ângulos alternos internos, e

ii) os ângulos $\widehat{AP'C}$ e $\widehat{NAQ}$ são congruentes, pois são ângulos correspondentes.

□

Demonstraremos agora que a resposta para o **Problema 1** do início da seção é de fato o triângulo equilátero.

Solução do Problema 1. Seja ABC um triângulo com menor perímetro dentre os triângulos com uma dada área fixada. Suponha, o contrário, que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são de comprimentos diferentes. Seja r a reta que passa pelo ponto B e é paralela ao lado $\overline{AC}$ e seja D a intersecção da reta r com a reta s perpendicular a r passando pelo ponto médio de $\overline{AC}$ (Figura 2.2). Pela Proposição 2.1, o triângulo ADC tem perímetro menor que o triângulo ABC. E, por outro lado, esses triângulos possuem mesma área, por terem mesma base e mesma altura. Uma contradição, uma vez que supusemos ser o triângulo ABC um de menor perímetro, fixada a área. Portanto, o triângulo ABC é equilátero. □

Observação 2.2. O que na realidade foi demonstrado acima é que dado um triângulo não equilátero sempre existe um outro que tem menor perímetro e mesma área, nesse caso um triângulo isósceles. Na resolução acima assumimos implicitamente que o problema tem solução. Mais precisamente: entre todos os triângulos de mesma área, existe um que tem o menor perímetro. Isso é razoável de assumir, e de fato verdade, e para uma solução absolutamente rigorosa necessitaria de prova. No entanto, não tratamos da existência neste trabalho. A mesma postura será mantida nos demais problemas. Admitindo que os problemas apresentados admitem solução, o que é razoável, iremos caracterizá-los.

Abaixo, apresentamos uma solução para o **Problema 2**.

Solução do Problema 2. Afirmamos que se trata de um triângulo equilátero. De fato, seja ABC um triângulo com maior área dentre os triângulos com um dado perímetro fixado. Suponha, o contrário, que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são de comprimentos diferentes. Usamos a mesma construção da resolução do **Problema 1**: r é a reta que passa pelo ponto B e é paralela ao lado $\overline{AC}$ e D é a intersecção da reta r com a reta s perpendicular a r passando pelo ponto médio de $\overline{AC}$. Então, existe um ponto D' sobre a reta s e acima de D tal que

$$\overline{AD'} + \overline{D'C} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Logo, os triângulos $AD'C$ e ABC possuem o mesmo perímetro. Ademais, o triângulo $AD'C$ possui área maior que o triângulo ADC. Uma vez que a área de ADC é igual à área de ABC, concluímos que a área do triângulo $AD'C$ é maior que a área de ABC, uma contradição. Logo, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ possuem o mesmo comprimento. Analogamente, demonstra-se que $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ possuem o mesmo comprimento. Portanto, o triângulo ABC é equilátero. $\square$

Faremos agora uma pequena discussão sobre a questão de existência do Problema 2. Algumas técnicas do Cálculo Diferencial serão utilizadas.

Demonstração. Seja o triângulo ABC com lados a, b, e c; sendo s o semiperímetro do triângulo dado por $2s = a + b + c$; e A a área do triângulo dada por $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Considerando o perímetro constante, fixando a base a do triângulo e renomeando o lado c do triângulo como x. Temos que maximizar a função:

$$f(x) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-x)},$$

o que equivale maximizar a função:

$$h(x) = s(s-a)(s-b)(s-x)$$

$$h(x) = s(s-a)(s-(2s-a-x))(s-x)$$

que é o mesmo que maximizar a função:

$$g(x) = (s-b)(s-x)$$

$$g(x) = -x^2 + 2(s-a)x + (as - s^2)$$

O ponto máximo da função é encontrado pela média das raízes, ou seja, $x = \dfrac{2s-a}{2}$ o que equivale a $2x = 2s - a = b - x$, logo $b = x$. Assim o triângulo é isósceles.

Desta forma, suponha um triângulo isósceles de lados x, b e b. Temos $2s = x + 2b$. Temos agora que maximizar a função:

$$f(x) = s(s-x)(s-b)(s-b).$$

Porém, $s - b = \frac{x}{2}$. Logo, iremos maximizar

$$g(x) = (s-x)x^2$$

para $x > 0$.

Façamos a derivada de g para encontrar o ponto crítico para $x > 0$)

$$g'(x) = x(-3x + 2s)$$

Para $x > 0$, temos apenas o ponto crítico: $x = \frac{2s}{3}$. Segue que $x = b$, ou seja, o triângulo é equilátero. $\square$

O lema a seguir, que será usado posteriormente, complementa a Proposição 2.1. Numa linguagem intuitiva, ele essencialmente estabelece o seguinte: referindo-se à Figura 2.1, imagine o ponto B na reta r como sendo móvel; então $\overline{PB} + \overline{BQ}$ aumenta à medida que B se afasta de A.

Lema 2.3. Seja A a solução do problema de minimização estudado na Proposição 2.1. Sejam B e B_1 pontos da reta r tais que B_1 esteja estritamente entre A e B. Então

$$\overline{PB} + \overline{BQ} > \overline{PB_1} + \overline{B_1Q}. \tag{2.1}$$

Demonstração. Como na Proposição 2.1, seja P' o simétrico de P com relação a r. Então, a desigualdade a provar é equivalente a provar que

$$\overline{P'B} + \overline{BQ} > \overline{P'B_1} + \overline{B_1Q}.$$

Observe que B_1 é um ponto do interior do triângulo $P'BQ$. Assim, nosso problema se reduz ao seguinte.

Lema 2.4. Seja D um ponto do triângulo ABC, com $D \neq B$. Então,

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AD} + \overline{DC}.$$

Demonstração. Seja E a intersecção da reta passando por A e D com o segmento $\overline{BC}$. Se D pertence ao lado $\overline{AC}$, a conclusão é imediata, uma vez que, num triângulo, a soma dos comprimentos de quaisquer dois de seus lados é superior ao comprimento do terceiro. Suponha então que D não pertence ao lado $\overline{AC}$. Usaremos sucessivamente o fato supracitado: num triângulo, qualquer de seus lados é menor que a soma dos outros dois. Assim

$$\overline{DE} + \overline{EC} > \overline{DC},$$

o que implica

i) $\overline{AE} + \overline{EC} > \overline{AD} + \overline{DC}$,

uma vez que $\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE}$.

Por outro lado, temos

$$\overline{AB} + \overline{BE} > \overline{AE}.$$

Logo,

ii) $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AE} + \overline{EC}$.

De (i) e (ii), conclui-se que

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AD} + \overline{DC}.$$

□

2.2 Maximizando a área, minimizando o perímetro de polígonos

Nesta seção estendemos os **Problemas 1 e 2** para o caso de polígonos.

Problema 3. Entre todos os polígonos de n lados e de mesma área, qual deles têm o menor perímetro?

Problema 4. Entre todos os polígonos de n lados e de mesmo perímetro, qual deles têm a maior área?

A resposta para ambos os problemas acima é a mesma: trata-se do polígono regular de n lados, que é aquele que tem todos os lados de mesmo comprimento e todos os ângulos internos iguais. Vejamos como prová-lo.

Solução do Problema 3. Suponha, o contrário, que o n-ágono δ, que tem o menor perímetro, possui dois lados, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, de comprimentos diferentes. Seja r a reta paralela a $\overline{AC}$ e que passa por B.

Pela Proposição 2.1, existe B' sobre r tal que

$$\overline{AB'} + \overline{B'C} < \overline{AB} + \overline{BC}$$

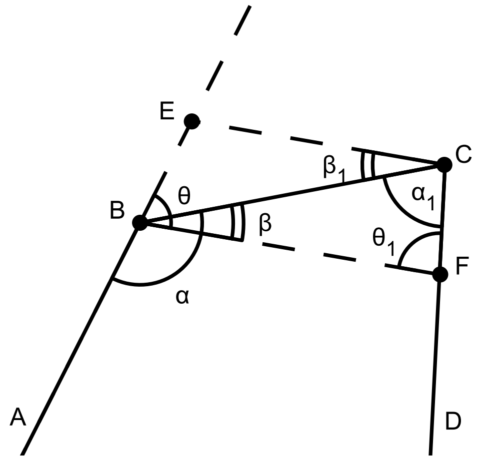

Figura 2.3: Solução do Problema 3

Logo, o polígono obtido substituindo-se os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ por $\overline{AB'}$ e $\overline{B'C}$ tem a mesma área do polígono original δ, mas um perímetro menor, uma contradição. Logo, o polígono δ deve ser equilátero. Provemos agora que δ é equiângulo. Considere três lados consecutivos, $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CD}$, que já sabemos possuírem o mesmo comprimento. Suponha que os ângulos $\widehat{ABC}$ e $\widehat{BCD}$ são diferentes. Para fixar as ideias, suponha que o primeiro ângulo tenha medida α maior que o segundo, com medida α_1. Veja Figura 2.3.

Seja F o ponto sobre $\overline{CD}$ de modo que o ângulo $\widehat{CBF}$, com medida β, seja tal que $2\beta < \alpha - \alpha_1$. Tome E o ponto sobre o prolongamento de AB de modo que $\overline{EC}$ seja paralelo a $\overline{BF}$. Temos, assim, que os ângulos β e β_1 são alternos internos. Portanto, $\beta = \beta_1$. Seja θ a medida do ângulo $\widehat{EBF}$ e θ_1 a medida do ângulo $\widehat{BFC}$. Temos então

$$\alpha + \theta - \beta = \pi$$

e

$$\alpha_1 + \theta_1 + \beta = \pi.$$

Logo,

$$\theta_1 - \theta = \alpha - \alpha_1 - 2\beta$$

o que implica $\theta_1 > \theta$. Isso, mais a Proposição 2.1, implica

$$\overline{BE} + \overline{EF} < \overline{BC} + \overline{CF}. \tag{2.2}$$

(Ver Lema 2.5).

Logo, substituindo a parte $ABCD$ do polígono δ por $AEFD$, obtemos um outro polígono de mesma área e perímetro menor que o de δ, o que é uma contradição.

$\square$

Lema 2.5. Seja $BECF$ um quadrilátero onde os lados $\overline{BF}$ e $\overline{EC}$ são paralelos e os ângulos $\theta = \widehat{EBF}$ e $\theta_1 = \widehat{CFB}$ são tais que $\theta < \theta_1$. Então,

$$\overline{BE} + \overline{EF} < \overline{BC} + \overline{CF}.$$

Demonstração. Seja r a reta que passa pelos pontos E e C. Seja s a reta perpendicular a $\overline{BF}$ e que passa por seu ponto médio. Seja X o ponto de interseção entre as retas r e s. Vemos, da Proposição 2.1, que o ponto $X \in r$ é exatamente aquele para o qual

$$\overline{BX} + \overline{XF} < \overline{BP} + \overline{PF},$$

para todo $P \in r$ tal que $P \neq X$.

Temos duas possibilidades para os pontos E e C:

(i) E e C estão do mesmo lado do plano com respeito a reta s. Nesse caso, temos que E está estritamente entre X e C e, então, o resultado segue imediatamente do Lema 2.3.

(ii) E e C estão em lados opostos do plano com respeito a reta s. Nesse caso, tome C' o simétrico de C em relação à reta s. O fato de o ângulo $\widehat{EBF}$ ser menor que o ângulo $\widehat{CFB}$ implica que E está entre C' e X. Logo, pelo Lema 2.3, temos que

$$\overline{BE} + \overline{EF} < \overline{BC'} + \overline{C'F}.$$

Agora, note que $\overline{BC'} = \overline{CF}$ e que $\overline{C'F} = \overline{BC}$. Fica assim demonstrado o resultado.

□

Solução do Problema 4. Vamos utilizar algumas construções que apareceram na Solução do Problema 3. Seja δ um n-ágono de maior área entre todos os n-ágonos que têm o mesmo perímetro L. Designemos por S a área de δ. Se δ não for regular então existe um n-ágono (regular) $\overline{\delta}$ de área S e perímetro $\overline{L} < L$ (ver **Solução do Problema 3**). Agora, vamos construir a partir de $\overline{\delta}$ um n-ágono δ' de perímetro L e área $S' > S$, contradizendo a natureza do polígono δ. Tome dois lados consecutivos de $\overline{\delta}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

Agora, escolha um ponto B' sobre a reta s perpendicular a AC de modo que

$$\left(\overline{AB'} + \overline{B'C}\right) - \left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = L - \overline{L}$$

(Veja Figura 2.4)

O polígono δ' é então obtido de $\overline{\delta}$ substituindo-se os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ por $\overline{AB'}$ e $\overline{B'C}$. □

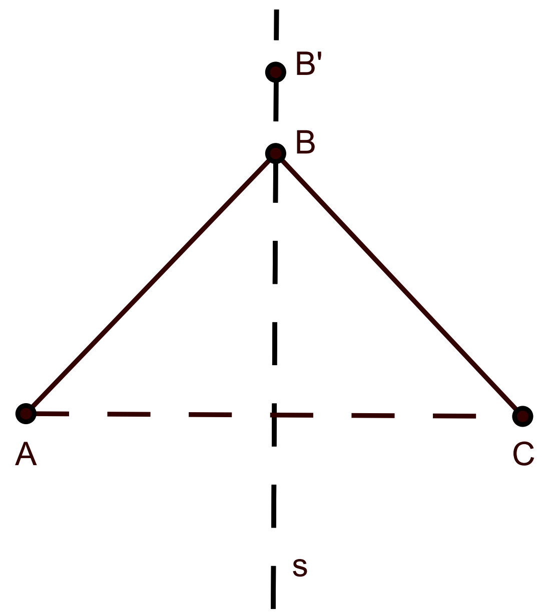

Figura 2.4: Solução do Problema 4

2.3 A Desigualdade Isoperimétrica

Nesta seção, demonstraremos a *desigualdade isoperimétrica para polígonos*, que diz: em um polígono qualquer, de área A e perímetro L, tem-se

$$4\pi A < L^2 \quad \text{(Desigualdade Isoperimétrica)} \tag{2.3}$$

Depois, discutiremos a desigualdade isoperimétrica em sua forma mais geral: dada uma curva plana fechada e retificável, denotando por A a área da região por ela limitada e por L o seu perímetro, tem-se a desigualdade $4\pi A \leq L^2$. Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, tal curva é um círculo. Para tal, será necessário fazermos uma discussão sobre o conceito de área que vai além das discussões presentes em um curso de Geometria Plana do Ensino Médio.

O fato é que a desigualdade isoperimétrica, em sua versão geral, nos fornece a resposta para o **Problema de Dido**:

Problema 5 (O Problema de Dido). Dentre todas as curvas planas fechadas e retificáveis, de um dado comprimento L fixado, qual é aquela que engloba maior área?

2.3.1 Um resultado preliminar

Lema 2.6. *Dados dois polígonos regulares de mesmo perímetro L, aquele que tem maior área é o que possui um maior número de lados.*

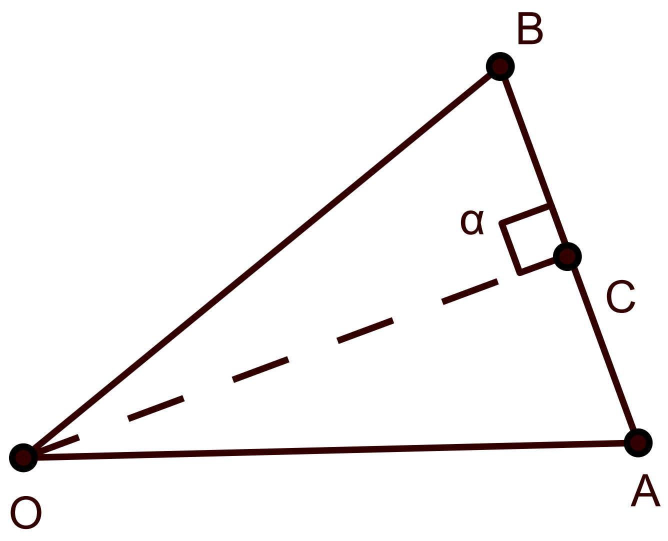

Figura 2.5: Lema 2.6

Demonstração. (i) Vamos inicialmente expressar a área $A(n)$ de um n-ágono regular em termos do perímetro L dado. O n-ágono é a união de n triângulos como o da Figura 2.5, onde O corresponde ao centro do polígono, $\overline{AB}$ é um lado e $\overline{OC}$ é o apótema.

Usamos as notações $l = \overline{AB}$ e $a = \overline{OC}$.

Temos, então

$$L = nl \tag{2.4}$$

$$A(n) = \frac{n}{2} la \tag{2.5}$$

Como o ângulo $\widehat{COA}$ é de $\dfrac{\pi}{n}$ radianos, e o apótema é perpendicular ao lado, obtemos

$$\frac{l}{2} = a \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \tag{2.6}$$

Assim de (2.4), (2.5) e (2.6) obtemos

$$A(n) = \frac{L^2}{4n} \, \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

que reescrevemos na forma

$$A(n) = \frac{L^2}{4\pi} \, \frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}. \tag{2.7}$$

(ii) Para ver o modo como $A(n)$ varia em termos de n, basta estudar a função

$$f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x} \tag{2.8}$$

e ver seu comportamento quando $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, pois isso nos dará informações sobre $A(n)$ para $n > 2$, usando-se $x = \frac{\pi}{n}$. Para tal, faremos uso de resultados do Cálculo Diferencial. Temos que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 0. \tag{2.9}$$

Além disso f é contínua no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ e a derivada satisfaz $f'(x) < 0$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Logo, f é estritamente decrescente em $(0, \frac{\pi}{2})$. Isso nos mostra que $A(n)$ é estritamente crescente. Logo, se $n < m$ e $A(n)$ e $A(m)$ designam, respectivamente, as áreas do n-ágono regular e do m-ágono regular de mesmo perímetro, temos $A(n) < A(m)$. □

Observação 2.7. A demonstração anterior, nos diz algo mais. Ela também nos diz que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$,

$$A(n) < \frac{L^2}{4\pi}, \tag{2.10}$$

onde $A(n)$ denota a área de um n-ágono regular de perímetro L. Isso, unido à solução do **Problema 4**, nos dá a desigualdade isoperimétrica para polígonos:

Teorema 2.1 (Desigualdade Isoperimétrica para polígonos)**.** *Seja P um polígono qualquer de n lados, com área A e perímetro L. Então*

$$4\pi A < L^2.$$

Demonstração. Seja P' o polígono regular de n lados e com perímetro L. Seja $A(n)$ a sua área. Já sabemos que $A \leq A(n)$ e que $4\pi A(n) < L^2$. Logo, $4\pi A < L^2$. □

Observação 2.8. Na demonstração do Lema 2.6, usamos o Cálculo Diferencial para obtermos rapidamente uma ideia do gráfico da função $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg} x}$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Vamos detalhar alguns passos: Usamos o fato que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para concluirmos que $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$. Também, usamos a derivada de f para concluirmos que f é estritamente decrescente em $(0, \frac{\pi}{2})$. Aplicando a regra do quociente, temos:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{tg} x - x \sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
f'(x) < 0 &\Leftrightarrow \\
\operatorname{tg} x - x \sec^2 x < 0 &\Leftrightarrow \\
\operatorname{tg} x < x \sec^2 x &\Leftrightarrow \\
\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} < \frac{x}{\cos^2 x} &\Leftrightarrow \\
\cos x \operatorname{sen} x < x &\Leftrightarrow \\
\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x < x &\Leftrightarrow \\
\operatorname{sen} 2x < 2x &
\end{aligned}
$$

A desigualdade $\operatorname{sen} 2x < 2x$ é satisfeita para todo $x \in (0, \pi/2)$. Na verdade, as funções sen e cos são exatamente caracterizadas como sendo o único par de funções definidas em $\mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes propriedades

1. $\operatorname{sen} 0 = 0$.
2. $\cos 0 = 1$.
3. $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
4. $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
5. $0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ para todo $x \in (0, \pi)$. Ver [2], páginas 150 a 153.

Uma demonstração geométrica de $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Considere um círculo de raio 1 e centro em O. Veja a Figura 2.6. Sejam A e C pontos nesse círculo tais que o ângulo $\widehat{AOC}$ medido em radianos esteja entre 0 e $\pi/2$. Assim $\overline{OA} = \overline{OC} = 1$; e designemos $\overline{CD} = a$ e $\overline{AB} = b$. Obtém-se a medida do ângulo $\widehat{AOC}$ de x radianos, então $a = \operatorname{sen} x$. Ademais, o arco AC no círculo de centro O e raio 1 possui perímetro igual a x. Agora, note que a é menor que $\overline{AC}$ que, por sua vez, é menor que o arco AC. Assim, concluímos que $a = \operatorname{sen} x < x$. Ainda, a área do setor circular OAC é $x/2$ e é menor que a área do triângulo OAB, que é $b/2$. Assim, $x < b$. Note que $b = \operatorname{tg} x$. Então, para todo $x \in (0, \pi/2)$,

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Dessas desigualdades, segue que $1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$, para todo $x \in (0, \pi/2)$. Assim, $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$, para todo $x \in (0, \pi/2)$. Pelo Teorema do Confronto, quando x se aproxima de 0 pela direita, $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se aproxima de 1.

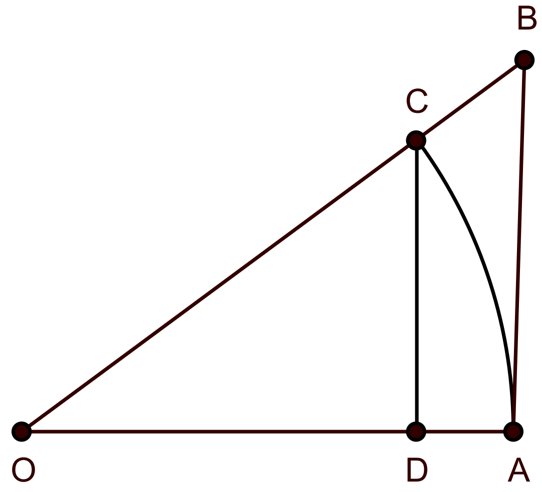

Figura 2.6: Demonstração geométrica

2.3.2 O comprimento de uma curva planar e a área de uma região planar

Um caminho no plano é uma função contínua $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo fechado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ e com valores em $\mathbb{R}^2$. O ponto $\alpha(a) \in \mathbb{R}^2$ é chamado de ponto inicial do caminho e $\alpha(b) \in \mathbb{R}^2$ de ponto final. Quando $\alpha(a) = \alpha(b)$, dizemos que o caminho α é fechado.

Dado um caminho $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ injetivo, cada partição $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ do intervalo $[a,b]$ determina uma poligonal inscrita na imagem de α, cujos vértices são, por definição, os pontos $\alpha(t_0) = \alpha(a)$, $\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k) = \alpha(b)$. O comprimento dessa poligonal é definido por

$$l(\alpha; P) = \sum_{i=1}^{k} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|,$$

onde $\| \ \|$ denota a norma usual de $\mathbb{R}^2$.

Consideramos o conjunto dos números não negativos

$$\{l(\alpha; P) \mid P \text{ é partição de } [a,b]\}$$

Se o conjunto acima for limitado superiormente, diremos que o caminho α é retificável e que seu comprimento é

$$l(\alpha) = \sup\{l(\alpha; P) \mid P \text{ é partição de } [a,b]\}$$

Caso contrário, diremos que o caminho α não é retificável.

Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma caminho fechado, injetivo e retificável. Definimos a área da região limitada por α do seguinte modo: seja $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Considere a poligonal fechada de vértices $\alpha(t_0) = \alpha(a)$, $\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_k) = \alpha(b)$ e denote por

$$A(\alpha; P)$$

a área da região por ela limitada. Consideremos o conjunto

$$\{A(\alpha; P) \mid P \text{ é partição de } [a,b]\},$$

o qual é limitado superiormente. Definimos a área da região limitada por α como sendo o número

$$A(\alpha) = \sup\{A(\alpha; P) \mid P \text{ é partição de } [a,b]\}.$$

Com essas definições, podemos demonstrar o seguinte:

Teorema 2.9 (Desigualdade Isoperimétrica para uma curva fechada, injetiva e retificável qualquer)**.** Dada uma curva fechada, injetiva e retificável $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ qualquer, tem-se

$$4\pi A(\alpha) \leq l(\alpha)^2.$$

Demonstração. Seja $P : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Pelo Teorema 2.1, já sabemos que

$$4\pi A(\alpha; P) < l(\alpha; P)^2.$$

Uma vez que $l(\alpha; P) \leq l(\alpha)$, temos que

$$A(\alpha; P) \leq \frac{l(\alpha)^2}{4\pi},$$

para toda partição P de $[a,b]$. Como $A(\alpha) = \sup\{A(\alpha; P) \mid P \text{ é partição de } [a,b]\}$, segue que

$$A(\alpha) \leq \frac{l(\alpha)^2}{4\pi}$$

e, portanto,

$$4\pi A(\alpha) \leq l(\alpha)^2.$$

□

2.3.3 A Solução do Problema de Dido

O problema de Dido, uma amenidade. Dido, filha de um rei fenício, refugiou-se no norte da África, depois que seu marido foi assassinado. Prometeram a ela a extensão de terra que pudesse cercar com o couro de um boi. Diz a lenda que ela preparou com o couro uma longa e fina correia e cercou com a mesma um terreno circular. Essa é a legendária história da fundação de Cartago. O problema de Dido é o seguinte: "Entre todas as curvas planas fechadas de um dado comprimento L, encontrar aquela que possui a maior área". A desigualdade isoperimétrica dada no Teorema 2.9 implica que o círculo é uma solução mas não garante que essa seja a única. Mostraremos, a seguir, que de fato o círculo é a única solução. Nos basearemos na demonstração devida a Jakob Steiner (1796-1863).

Teorema 2.10. Se γ é uma curva que soluciona o problema de Dido então γ é convexa.

Demonstração. Suponha, por contradição, que γ possua uma reentrância (cavidade) σ entre A e B. Mais precisamente, existem dois pontos A e B em γ de modo que o segmento aberto $\overline{AB}$ está fora da região delimitada por γ. Seja σ' a reflexão do trecho σ da curva com relação ao segmento $\overline{AB}$. A curva $\overline{\gamma}$ obtida a partir de γ substituindo-se o trecho σ por σ' tem o mesmo comprimento que γ, porém possui uma área maior.

Logo, γ é convexa. □

Vejamos agora o **Problema de Dido com parede**. Seja r uma reta do plano e seja X a união de r com um dos semiplanos determinados por r. Consideremos as curvas em X de um dado comprimento e cujos pontos inicial e final estão sobre r. Mostraremos que entre essas curvas, aquelas que englobam maior área são exatamente os semicírculos com base sobre r. E isso será suficiente para solucionar o problema de Dido na forma inicial. De fato, seja γ uma curva que soluciona o problema de Dido. Sejam A e B pontos sobre γ que a dividem em dois arcos γ_1 e γ_2 de igual comprimento. As regiões R_1 e R_2 delimitadas pela reta r, que passa por A e B, e pelos arcos γ_1 e γ_2, respectivamente, devem ter a mesma área pois se, por exemplo, R_1 tivesse maior área que R_2, obteríamos uma curva $\overline{\gamma}$ de mesmo comprimento que γ e englobando maior área. Bastaria tomar $\overline{\gamma} = \gamma_1 \cup \gamma_1'$ onde γ_1' é a reflexão de γ_1 com relação a r. Agora, as curvas γ_1 e γ_2 são soluções do problema de Dido com parede, pois se não fossem, existiria uma curva γ_3 de igual comprimento unindo pontos C e D de r e delimitando com r uma área maior. Seja γ_3' a imagem refletida de γ_3 com relação a reta r. A curva fechada $\gamma_3 \cup \gamma_3'$ teria o mesmo comprimento que γ e delimitaria uma maior área, o que não é possível.

Um semicírculo é caracterizado pela seguinte propriedade:

Proposição 2.11. Considere a figura formada por uma curva convexa γ_1 e pelo segmento $\overline{AB}$, veja a Figura 2.7. Suponha que a seguinte propriedade se verifica: dado qualquer ponto P sobre γ_1, o ângulo $\widehat{APB}$ é reto. Então γ_1 é um semicírculo.

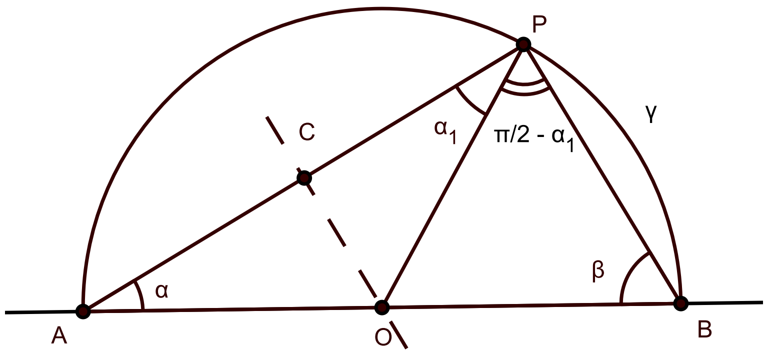

Figura 2.7: Proposição 2.11

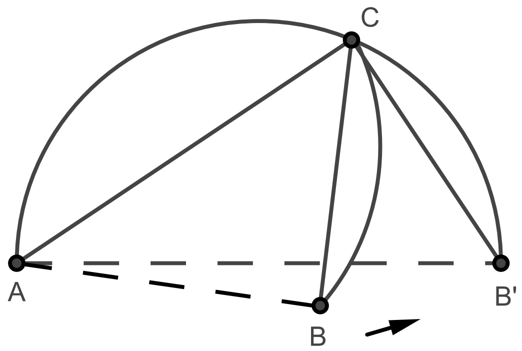

Figura 2.8: Solução do Problema de Dido

Demonstração. Seja O o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Devemos então provar que $\overline{OP} = \overline{OA}$. Para isso, basta mostrar que $\alpha = \alpha_1$. Trace uma reta paralela a $\overline{PB}$ passando por O. Então, a intersecção C dessa reta com $\overline{AP}$ é o ponto médio do segmento $\overline{AP}$. Logo, os triângulos ACO e PCO são congruentes. Logo, $\alpha = \alpha_1$. □

Podemos agora finalizar a demonstração da resolução do problema de Dido.

Seja γ_1 a curva convexa que, entre as curvas convexas de comprimento L, delimita juntamente com a reta r a maior área. Mostraremos que γ_1 é um semicírculo. Pela Proposição 2.11, denotando por A e B os pontos de interseção de γ_1 com a reta r, basta mostrarmos que, para todo ponto $C \in \gamma_1$, $C \neq A$ e $C \neq B$, tem-se que o ângulo $\widehat{ACB}$ é reto.

Suponha, o contrário, que o ângulo $\widehat{ACB}$ seja menor que $\pi/2$ (Ver Figura 2.8). Nesse caso, rotacionamos o segmento $\overline{CB}$, com C fixo, juntamente com a região limitada por

γ_1 e por $\overline{CB}$, no sentido anti-horário de modo a obter o ângulo reto $\widehat{ACB'}$. Temos que a área do triângulo ACB' é maior que a área do triângulo ACB. De fato, a área do triângulo ACB é dada por

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(\widehat{ACB})\overline{ACCB} < \frac{1}{2}\overline{ACCB'},$$

onde $\frac{1}{2}\overline{ACCB'}$ é a área do triângulo ACB'. Assim, obteríamos uma curva de mesmo perímetro que γ_1 englobando área maior, uma contradição. Portanto, o ângulo $\widehat{ACB}$ deve ser reto.

Assim, fica demonstrado que o Problema de Dido com parede é resolvido apenas pelo semicírculo e, consequentemente, o Problema de Dido inicial é resolvido apenas pelo círculo.

Referências

[1] FIGUEIREDO, D. G. de. Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana. *Revista Matemática Universitária*, v. 9/10, p. 69–108, 1989.

[2] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC, 1953.

[3] CASTRUCCI, B. *Fundamentos da Geometria - Estudo Axiomático do Plano Euclidiano*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1978.

[4] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. 10. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

A Apêndice

As referências para este capítulo são os livros [3] e [4].

A.1 Geometria Axiomática

Axioma A.1. Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.

Axioma A.2. Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

Proposição A.3. Duas retas distintas ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.

Demonstração. Sejam m e n duas retas distintas. A interseção destas duas retas não pode conter dois (ou mais) pontos, caso contrário, pelo A.2 elas coincidiriam. Logo, a interseção de m e n é vazia ou contém apenas um ponto. □

Axioma A.4. Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.

Definição A.5. O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado segmento AB. Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento.

Definição A.6. Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C, é chamado de semirreta de origem A contendo o ponto B, e é representado por S_{AB}. O ponto A é então denominado origem da semirreta S_{AB}.

Observe que dois pontos A e B determinam duas semirretas S_{AB} e S_{BA}, as quais contêm o segmento AB.

Proposição A.7. Para as semirretas determinadas por dois pontos A e B tem-se:

a) $S_{AB} \cup S_{BA}$ é a reta determinada pelos dois pontos, A e B.

Figura A.1: Semirreta

Figura A.2: Reta

b) $S_{AB} \cap S_{BA} = AB$.

Demonstração. (a) Seja m a reta determinada por A e B. Como S_{AB} e S_{BA} são constituídas de pontos da reta m, então $S_{AB} \cup S_{BA} \subset m$. Por outro lado, se C é um ponto da reta m então, de acordo com A.4, uma das três possibilidades exclusivas ocorre:

1) C está entre A e B,

2) A está entre B e C,

3) B está entre A e C.

No caso (1), C pertence ao segmento AB; no caso (2), C pertence a S_{BA}; e no caso (3), C pertence a S_{AB}. Portanto, em qualquer caso, C pertence a $S_{AB} \cup S_{BA}$. □

Axioma A.8. Dados dois pontos distintos A e B sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.

Definição A.9. Sejam m uma reta e A um ponto que não pertence a m. O conjunto constituído pelos pontos de m e por todos os pontos B tais que A e B estão em um mesmo lado da reta m é chamado de semiplano determinado por m contendo A, e será representado por P_{mA}.

Axioma A.10. Uma reta m determina exatamente dois semiplanos distintos, cuja intersecção é a reta m.

A.2 Área

A principal função desta seção é contextualizar o leitor com alguns termos utilizados no estudo de áreas.

Uma *região triangular* é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo, Figura A.4 (a).

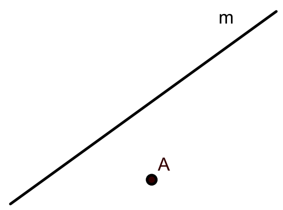

Figura A.3: Ponto e Reta

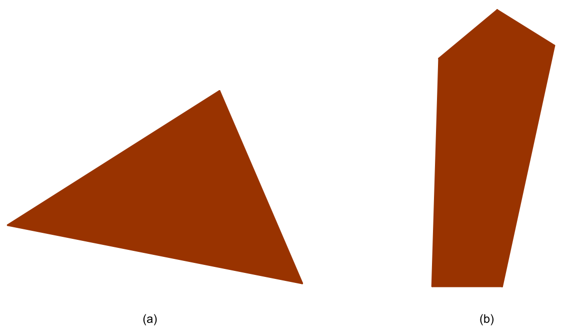

Figura A.4: Regiões poligonais

O triângulo é chamado de fronteira da área triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular, que não pertence a sua fronteira é chamado de interior da região triangular.

Uma *região poligonal* é a união de um número finito de regiões triangulares que, duas a duas, não possuem pontos interiores em comum, conforme Figura A.4 (b).

Um *ponto é interior* a uma região poligonal, se existe alguma região triangular contida na região poligonal e contendo o ponto no seu interior. O *interior* da região poligonal é o conjunto dos pontos que lhe são interiores. A *fronteira* da região poligonal é constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.

A Noção de área de regiões poligonais é introduzida na geometria através dos se-

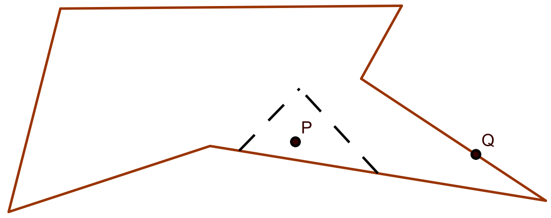

Figura A.5: Ponto no interior de uma região poligonal

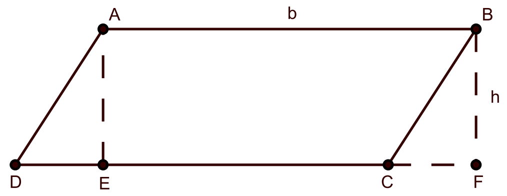

Figura A.6: Área do Paralelogramo

guintes axiomas:

Axioma A.11. A toda região poligonal corresponde a um número maior do que zero. Ela pode ser formada pela união de duas ou mais regiões poligonais que não tenham pontos interiores em comum.

Axioma A.12. Regiões triângulares limitadas por triângulos congruentes têm a mesma região poligonal.

A essas regiões poligonais citadas nos axiomas anteriores, são denotottadas como área da região.

Em geral, utilizamos a expressão "a areá de um polígono...", sendo assim, tomaremos a liberdade para usar essas expressões como "a área de um quadrado" quando queremos dizer realmente a área da região poligonal, cuja fronteira é um quadrado. Assim, o axioma A.12 acima poderia ter sido enunciado como: "triângulos congruentes possuem áreas iguais".

Axioma A.13. Se $ABCD$ é um retângulo, então sua região poligonal, ou seja, sua área é dada pelo produto:

$$\overline{AB} \cdot \overline{BC}.$$

A partir desses axiomas, vamos determinar a área de algumas regiões poligonais simples. Vamos iniciar pelo paralelogramo.

Dado um paralelogramo $ABCD$, designemos por b o comprimento do lado AB, e por h o comprimento de um segmento ligando as retas que contém os segmentos AB a CD e que seja perpendicular a ambas. Chamamos o segmento h de altura do paralelogramo relativamente ao lado AB.

Proposição A.14. A área do paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativo a esse lado.

Demonstração. Para provar que a área do paralelogramo $ABCD$ é $b.h$, trace a partir dos pontos A e B, dois segmentos, AE e BF, perpendiculares à reta que contém CD.

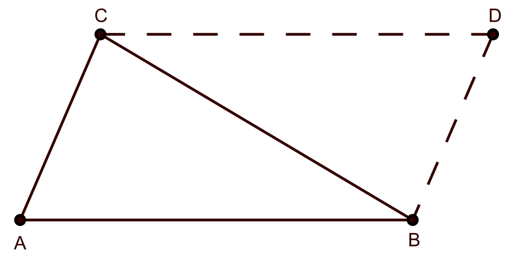

Figura A.7: Área do Triângulo

O quadrilátero $ABFE$ é um retângulo cuja área é $\overline{AB}.\overline{BF}$ a qual, em termos de nossa notação, é exatamente $b.h$. Para concluir a demonstração observe que os triângulos ADE e CBF são congruentes e que

$$\text{Área } (ABCD) = \text{Área } (ABCE) + \text{Área } (ADE) =$$

$$= \text{Área } (ABCE) + \text{Área } (CBF) =$$

$$= \text{Área } (ABFE) = b \cdot h$$

Isso conclui a demonstração. □

Proposição A.15. A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a esse lado.

Demonstração. Dado um triângulo ABC, trace pelo vértice C uma reta paralela ao lado AB, e pelo vértice B uma reta paralela ao lado AC. Essas duas retas se interceptam em um ponto D. O polígono $ABDC$ é um paralelogramo e os dois triângulos ABC e CDB são congruentes. Como Área $(ABDC)$ = Área (ABC) + Área (CDB) e Área (ABC) = Área (CDB), então:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2} \text{ Área } (ABDC).$$

Para finalizar a demonstração, observe que a altura do vértice C do triângulo ABC é exatamente a altura do paralelogramo $ABDC$ relativamente ao lado AB.

□

Proposição A.16. A área de um trapézio é a metade do produto do comprimento de sua altura pela soma dos comprimentos de suas bases.

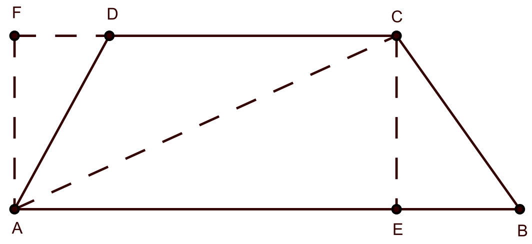

Figura A.8: Área do Trapézio

Demonstração. Seja $ABCD$ um trapézio cujas bases são os lados AB e CD. Trace a diagonal AC para dividir o trapézio em dois triângulos.

Trace as alturas CE do triângulo ACB, e AF do triângulo ACD. Então teremos que $AF = CE$, já que os lados AB e CD são paralelos. Então teremos:

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ACB) + \text{Área}(ACD) = \tag{A.1}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CE} + \frac{1}{2}\overline{DC} \cdot \overline{AF} = \tag{A.2}$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{CE} \tag{A.3}$$

□

Proposição A.17. A área de um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio R é $\dfrac{1}{2}R^2 n\,\mathrm{sen}(360°/n)$.

Demonstração. Seja O o centro do círculo. Ligando-se cada um dos vértices do polígono ao ponto O formam-se n triângulos isósceles cujas bases são os lados do polígono, cujos lados iguais têm comprimento R e cujo ângulo do topo mede $360°/n$. Seja OAB um tal triângulo. Trace a altura do vértice A. Esta altura mede $R\,\mathrm{sen}(360°/n)$ e o lado OB mede R. Logo, a área desse triângulo é $\frac{1}{2}R^2\,\mathrm{sen}(360°/n)$ e a área total do polígono é $\frac{1}{2}nR^2\,\mathrm{sen}(360°/n)$. □

Considerando polígonos inscritos, podemos observar que ao aumentarmos um vértice em um de tais polígonos, aumentamos a sua área. Assim, não existe um polígono inscrito no círculo com área máxima.

Valores aproximados para a área da região limitada por um círculo podem então ser obtidos a partir da fórmula apresentada na Proposição A.17 para a área de um polígono regular inscrito. Na tabela A.1, n é o número de lados do polígono inscrito no círculo de raio 1 e A_n é a sua área.

Se considerarmos um polígono regular inscrito com um grande número de lados, o valor de $\cos(180°/n)$ será extremamente próximo do valor de $\cos 0°$, enquanto que o

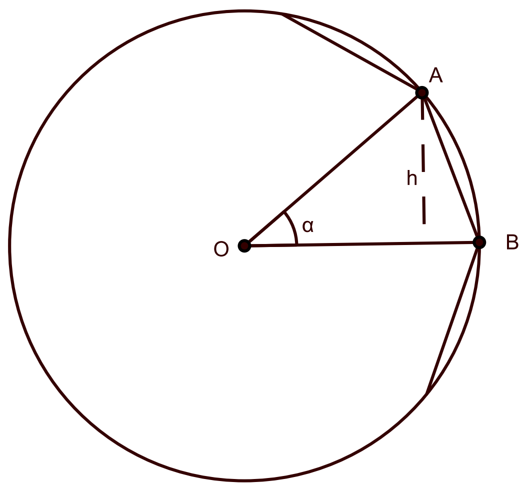

Figura A.9: Área de um Polígono Regular

n	A_n	n	A_n
3	1,299038106	4	2
5	2,377641291	6	2,598076211
8	2,828427125	10	2,938926261
12	3	16	3,061467459
32	3,121445152	64	3,136548491
128	3,140331157	256	3,141277251
512	3,141513801	1024	3,141572940
2048	3,141587725	4096	3,141591422
65536	3,141592649	1048576	3,141592654

Tabela A.1: Áreas de Polígonos Regulares

valor de A_n estará muito próximo do valor da área da região limitada pelo círculo e o valor de p_n será aproximadamente o valor do comprimento do círculo. É, portanto razoável esperar que, para o círculo, duas vezes sua área seja igual a R vezes seu perímetro.

Teorema A.18. A área da região limitada por um círculo é igual a metade do produto do raio pelo comprimento do círculo.

Demonstração. Representamos por p o comprimento do círculo e por A a área da região por ele limitada. Se P é um polígono inscrito no círculo, representemos por $p(P)$ o seu perímetro, por $A(P)$ a sua área e por $L(P)$ o comprimento do maior de seus lados. Tomemos um número positivo a qualquer, e seja P um polígono inscrito tal que

a) $L(P) < a$

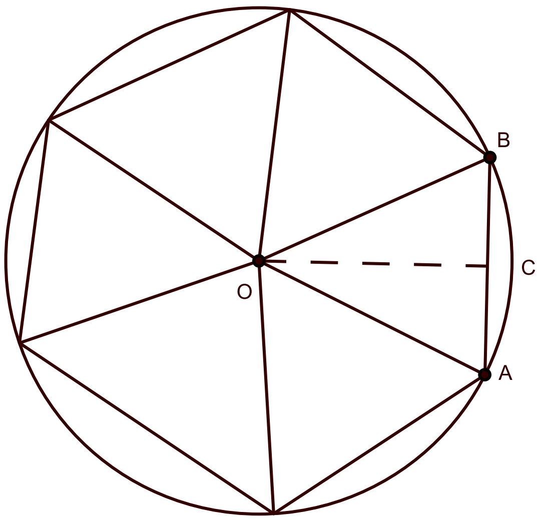

Figura A.10: Área de um Polígono Inscrito

b) $A - A(P) < a.R$

c) $p - p(P) < a$

Para fazer a escolha deste polígono podemos inicialmente escolher três polígonos: P_1, onde se verifica (a), P_2 onde se verifica (b) e P_3, onde se verifica (c). A área e perímetro do círculo permite afirmar que as escolhas de P_2 e P_3 são possíveis. Agora, forme um novo polígono que tenha como vértices os vértices dos três polígonos. Este novo polígono satisfaz as três condições acima. A ele chamaremos de polígono P. A área deste polígono pode ser calculada somando-se as áreas de todos os triângulos com vértice no centro do círculo e tendo como lado um dos lados do polígono P. Seja OAB um destes triângulos. Sua área será

$$\text{Área}(OAB) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{OC}$$

onde OC é a altura do vértice O deste triângulo.

Como $\overline{OA} > \overline{OC} > \overline{OA} - \overline{AC}$, tem-se que

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot (\overline{OA} - \overline{AC}) < \text{Área}(OAB) < \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{OA}$$

Observando que $\overline{OA} = R$ e $\overline{AC} < L(P) < a$, concluímos que

$$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot (R - a) < \text{Área}(OAB) < \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot R$$

Desde que uma desigualdade como esta vale para cada um dos triângulos em que subdividimos o polígono P, podemos somar todas elas para obter

$$\frac{1}{2}p(P) \cdot (R - a) < A(P) < \frac{1}{2}p(P) \cdot R$$

Como o polígono P satisfaz a condição (c), temos que $p - a < p(P)$. Por outro lado, sabemos da definição do perímetro do círculo, que $p(P) < p$. Utilizando essas duas informações na desigualdade acima, obtém-se:

$$\tfrac{1}{2}(p-a)\cdot(R-a) < A(P) < \tfrac{1}{2}\, p\cdot R,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}p\cdot R - \frac{1}{2}(aR + ap - a^2) < A(P) < \frac{1}{2}p\cdot R$$

Desta desigualdade decorre que a área do polígono $A(P)$ difere de $p.R/2$ em menos que $(aR + ap - a^2)/2$. Já que pela escolha do polígono P, $A - A(P) < a.R$, então concluímos que

$$|A - \frac{1}{2}p\cdot R| < a\cdot R + \frac{1}{2}(aR + ap - a^2)$$

Como o valor de a é arbitrário, podendo ser tomado tão pequeno quanto se queira, e o lado esquerdo dessa desigualdade não depende da escolha de a, só podemos concluir que a diferença $A - \frac{1}{2}p.R$ é zero. □

Como o número π é o comprimento de um semicírculo de raio 1, então podemos reescrever o enunciado do Teorema A.18, para o seguinte:

Corolário A.1. *A área de um disco de raio r é πr^2.*