
Um estudo sobre três problemas clássicos da
geometria euclidiana

Rafael Martins Gusmai

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Rafael Martins Gusmai

Um estudo sobre três problemas clássicos da geometria euclidiana

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Helton Hideraldo Biscaro

USP – São Carlos
Junho de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G136u Gusmai, Rafael Martins
Um estudo sobre três problemas clássicos da
geometria euclidiana / Rafael Martins Gusmai;
orientador Helton Hideraldo Biscaro. - São Carlos
- SP, 2016.
96 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Construções geométricas. 2. Números
construtivos. 3. Extensão de corpos. I. Biscaro,
Helton Hideraldo, orient. II. Título.

Rafael Martins Gusmai

A study of three classic problems of euclidean geometry

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Program in Mathematics Professional Master. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Helton Hideraldo Biscaro

USP – São Carlos
June 2016

Dedico este trabalho a minha esposa Vanessa, a minha mãe Doracy e toda minha família que sempre estiveram ao meu lado dando-me forças para continuar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido a oportunidade de estar sempre nessa infindável busca de conhecimento, proporcionando paciência e sabedoria para seguir em frente. A todos os professores e gestores da EMEF Prof^a Wanda Ovídio Gonçalves, que se esforçaram para que eu pudesse comparecer nas aulas do mestrado e me auxiliaram diante das dificuldades. Aos professores e mestres que contribuíram para minha formação e ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT.

“A mente que se abre para uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.”
(Albert Einstein)

RESUMO

GUSMAI, R. M.. **Um estudo sobre três problemas clássicos da geometria euclidiana**. 2016. 96 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Este trabalho aborda os três problemas clássicos de geometria da Grécia antiga trazendo as principais histórias e conceitos necessários para compreensão dos mesmos. Construções geométricas com régua não graduada e compasso, números construtivos, corpos, números complexos e polinômios são alguns dos assuntos que antecedem o tratamento dos problemas. As construções são exibidas usando as relações existentes nas operações aritméticas, dá opções de como se representar geometricamente as quatro operações básicas e a extração de raízes quadradas, mostrando que todo problema modelado nessas condições pode ser solucionado através dos instrumentos euclidianos. Essa exibição vem ao encontro dos números construtivos, trazendo à tona quais os principais pensamentos sobre construções com régua e compasso, deixando claro a definição de construções geométricas para os gregos. São apresentados também propriedades da álgebra abstrata envolvendo conjuntos numéricos que possuem características de corpo, dentre eles os números complexos. Além disso, tratamos dos polinômios, os quais são fundamentais na demonstração das impossibilidades clássicas. Por fim, esta pesquisa deixará claro a integração de todos os conteúdos citados acima e de que forma toda teoria pode ser organizada na realização das demonstrações da impossibilidade da duplicação do cubo, trisseção do ângulo e quadratura do círculo, frizando a mobilização dos matemáticos ao longo da história para tentar explicar tais problemas, acarretando um alto desenvolvimento da Matemática.

Palavras-chave: Construções geométricas, Números construtivos, Extensão de corpos.

ABSTRACT

GUSMAI, R. M.. **Um estudo sobre três problemas clássicos da geometria euclidiana.** 2016. 96 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

This work addresses the three classic problems ancient Greek geometry bringing the main stories and concepts needed to understand them. Geometric constructions with non-graded ruler and compass, building numbers, bodies, complex numbers and polynomials are some of the issues that precede the statements of problems. The buildings are displayed using the relationships in arithmetic operations, the options of how to represent geometrically the four basic operations and extraction of square roots, shows that every problem can be modeled in such conditions solucionas through Euclidean tools. This view comes against constructive rising numbers which the main thoughts of constructions with ruler and compass, making clear the definition of geometric constructions for the Greeks. It also present properties of abstract algebra involving numerical sets that have body characteristics, including complex numbers, also explains the importance of polynomials in the statement of classical impossibilities building the definition of degree of extension. Finally this research will clarify the integration of all the contents mentioned above and how every theory can be organized in the realization of doubling the cube demonstrations, angle trisection and squaring the circle, plus the mobilization of mathematicians throughout history for trying to explain such problems causing a high development of mathematics

Key-words: Geometric constructions, constructive numbers, bodies Extension.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação gráfica da tabela 1	28
Figura 2 – Representação gráfica da tabela 2	28
Figura 3 – Representação gráfica da tabela 3	29
Figura 4 – Representação gráfica da tabela 4	30
Figura 5 – Representação gráfica da tabela 5	31
Figura 6 – Representação gráfica da tabela 6	31
Figura 7 – Duplicação do cubo. Adaptado de Menezes (2014)	33
Figura 8 – Espiral áurea	35
Figura 9 – Espiral de Arquimedes	36
Figura 10 – Área do círculo pelo método de exaustão	43
Figura 11 – Adição e subtração de duas grandezas $AC = a + b$ e $AD = a - b$. Adaptado de Costa (2013)	50
Figura 12 – Multiplicação de duas grandezas $DE = ab$	50
Figura 13 – Razão entre duas grandezas $DE = \frac{a}{b}$	51
Figura 14 – Raiz quadrada de uma grandeza $BD = \sqrt{a}$. Adaptado de Costa (2013)	51
Figura 15 – Máquina de Platão. Adaptado de Carvalho (2010)	52
Figura 16 – Máquina de Platão ajustada ao problema de duplicação do cubo. Adaptado de Carvalho (2010)	52
Figura 17 – Trissetriz de Hípias. Adaptado de Carvalho (2010)	53
Figura 18 – Trissetriz de Hípias onde $\widehat{MJ} = \frac{1}{3}\widehat{J}$. Adaptado de Carvalho (2010)	54
Figura 19 – Construção do segmento $t = \pi$	55
Figura 20 – Representação do número complexo $z = a + bi$ no plano	62
Figura 21 – Representação da soma dos números complexos $z_1 + z_2$ no plano	63
Figura 22 – Representação do módulo do número complexo z	64
Figura 23 – Évariste Galois	79
Figura 24 – Ponto Médio	87
Figura 25 – Trissecção do ângulo $\theta = \frac{\pi}{3}$	89

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Duplicação do cubo (a)	28
Tabela 2 – Duplicação do cubo (b)	28
Tabela 3 – Trissecção do ângulo	29
Tabela 4 – Quadratura do círculo	30
Tabela 5 – Números construtivos (a)	30
Tabela 6 – Números construtivos (b)	30

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Contribuições	22
2	REVISÃO SISTEMÁTICA	25
2.1	Metodologia	25
2.1.1	<i>Quais fontes foram pesquisadas na realização dos estudos primários?</i>	25
2.1.2	<i>Que dados foram extraídos nos estudos primários?</i>	26
2.1.3	<i>Quais foram os critérios de inclusão e exclusão ?</i>	26
2.1.4	<i>Questões a serem respondidas</i>	26
2.1.5	<i>Aplicação</i>	27
2.2	Condução da revisão sistemática	27
2.2.1	<i>Resultados obtidos</i>	27
2.2.2	<i>O problema da duplicação do cubo</i>	27
2.2.3	<i>O problema da trisseccção do ângulo</i>	29
2.2.4	<i>O problema da quadratura do círculo</i>	29
2.2.5	<i>Números construtivos</i>	30
2.3	Análise detalhada das bibliografias	31
2.4	Conclusão da Revisão	44
3	HISTÓRIAS E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	47
3.1	Como tudo começou	47
3.2	Conceitos Envolvidos	49
3.3	Algumas soluções por Nêusis	51
4	CONCEITOS DE ÁLGEBRA	57
4.1	Anel, Corpo e Homomorfismo	57
4.2	Números complexos	61
4.3	Equações	67
4.3.1	<i>Equações de 1º grau</i>	67
4.3.2	<i>Equação quadrática</i>	67
4.3.3	<i>Equações cúbicas</i>	68
4.3.4	<i>Equações de quarto grau</i>	70
4.4	Equações polinomiais	72
4.4.1	<i>Função polinomial</i>	73

4.4.2	<i>Igualdade</i>	73
4.4.3	<i>Operações</i>	75
4.4.4	<i>Grau</i>	77
4.4.5	<i>Irreduzibilidade</i>	77
4.5	Teorema fundamental da álgebra	78
5	EXTENSÃO DE CORPOS E OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS	79
5.1	Extensões e equações polinomiais	80
5.2	Extensões Simples	83
5.3	Polinômio Minimal	83
5.4	Grau de uma extensão simples	84
5.5	Construções Geométrica	86
5.6	Provando as impossibilidades clássicas	88
6	CONCLUSÃO	91
	REFERÊNCIAS	93

INTRODUÇÃO

Desde épocas mais remotas até nossos dias, a Matemática vem se mostrando uma ciência fascinante para todos que buscam aprimorar seus conhecimentos, por sua utilidade, beleza, forma de explicar o mundo com inúmeras aplicações e por ser fundamental para o pleno desenvolvimento das pessoas. A todo momento, em todos os lugares, estamos rodeados por números e formas, que muitas vezes nem nos damos conta de sua existência, mas, as utilizamos naturalmente. Uma ciência que traz consigo vasta simbologia, capaz de explicar fenômenos altamente complicados, dando possibilidade para o ser humano planejar e tomar decisões com maior segurança. Nos séculos V e IV a.C, houve um período bastante produtivo na Grécia antiga no que diz respeito à Matemática, em especial à geometria, mostrando-se extremamente importante para o desenvolvimento da humanidade.

A geometria plana, que é a principal área da matemática desenvolvida pelos gregos, possui três problemas que não tem solução. São eles: duplicação do cubo, trissecção do ângulo e quadratura do círculo. A fim de tentar responder porque tais problemas não tem solução, foram coletadas informações e posteriormente sintetizadas neste trabalho ao longo de seis capítulos, denominados: Introdução, Revisão sistemática, Histórias e descobertas, Conceitos de álgebra, Extensão de corpos e Conclusão. Em todos eles constam reflexões acerca dos principais acontecimentos e conceitos responsáveis por dar origem às impossibilidades clássicas da geometria grega.

Antes de iniciar a construção do trabalho, foi necessário ter uma visão geral do tema. No capítulo Revisão sistemática, temos os procedimentos adotados no levantamento do referencial teórico, que mostrou como o assunto é abordado atualmente, quais as metodologias adotadas e as conclusões dos autores. Apoiando-se em outros métodos e descobertas, foi possível traçar um percurso próprio, que seja eficiente para mostrar a verdadeira importância em estudar os três problemas clássicos.

Histórias e descobertas é outro capítulo que faz parte desse percurso traçado. Carrega

a função de contextualizar os acontecimentos e conceitos envolvidos. Sua importância está principalmente em dar motivação para essa busca de conhecimento, apresentando fatos históricos, destacando os grandes matemáticos da época, necessidades a serem superadas, costumes e hábitos. Assim, é possível entender com maior significado o surgimento dessas ideias matemáticas.

Ao expor ideias que surgiram de necessidades cotidianas, naturalmente aparecem fórmulas e conceitos matemáticos. São formalizadas algumas definições no capítulo que trata de álgebra, visando demonstrar a não solução usando somente régua e compasso dos três problemas clássicos, evidenciando o vasto campo da matemática que norteia o tema. A compreensão de certos conceitos torna-se fundamental. Veremos que a álgebra exerce um grande papel na explicação de conceitos geométricos, e o quanto as diversas áreas do conhecimento estão interligadas.

No capítulo intitulado Extensão de corpos, temos o ponto central de uma das descobertas do matemático Évariste Galois. Essa teoria foi usada pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1848) foi quem apresentou em 1837, pela primeira vez, a impossibilidade das construções dos problemas clássicos, resolvendo assim, uma discussão que perdurava por mais de 20 séculos.

O objetivo desse trabalho é mostrar a relevância do tema para o ensino de Matemática hoje, pois sabemos o quanto essa disciplina está se mostrando desafiadora para alunos e professores. Espera-se que o mesmo venha trazer alternativas que auxiliem no processo de construção do conhecimento, contribuindo de forma positiva na realização dos desafios enfrentados dentro e fora da sala de aula.

Todos os gráficos apresentados no capítulo revisão sistemática foram plotados no programa *Wolfram Mathematica 9*, Tive o cuidado de construir cada uma das demais figuras expostas ao longo do texto no programa *GeoGebra*, onde, em vários casos, são apresentadas adaptações de figuras constantes em publicações de outros autores.

1.1 Contribuições

A presente dissertação traz como contribuição os fatores de relevância no estudo dos três problemas clássicos da geometria euclidiana no que diz respeito ao ensino de matemática atualmente. Faz uma síntese histórica das tentativas de resolução dos três problemas evidenciando uma vasta gama de conhecimentos matemáticos desenvolvidos em busca de tais tentativas. Usando explicações envolvendo álgebra de polinômios, teoria de corpos e a relação entre teoria de corpos e as construções geométricas, foi possível construir as demonstrações das impossibilidades clássicas.

Fazer um estudo aprofundado sobre as impossibilidades clássicas implica conhecer diversos outros assuntos ligados à matemática. É imprescindível entender o quanto as diversas áreas se relacionam, para conseguirmos obter argumentos concretos acerca de um determinado

objeto de estudo.

REVISÃO SISTEMÁTICA

A importância da Revisão sistemática está em nos guiar até as referências bibliográficas relevantes para o desenvolvimento do tema, os três problemas clássicos, possibilitando analisar metodologias e estratégias seguidas por outros autores. Conhecer a fundo parte do que já foi publicado é um diferencial relevante para qualquer pesquisador, uma vez que, jamais poderão ser desconsideradas descobertas científicas aceitas no mundo acadêmico.

Essa revisão tem por objetivo verificar qual a relevância dos problemas clássicos para o ensino de Matemática. Entendendo a funcionalidade dos problemas, seus primeiros questionamentos e sua aplicabilidade, conseguiremos construir argumentações que expressem esse fascínio existente. Todos os métodos apresentados na estruturação e condução da revisão sistemática encontram-se em maiores detalhes nas referências ([KITCHENHAM, 2004](#)) ([BIOLCHINI *et al.*, 2005](#)) ([BERTOLLI, 2010](#)) ([FERRARI; MALDONADO, 2007](#)).

2.1 Metodologia

2.1.1 *Quais fontes foram pesquisadas na realização dos estudos primários?*

Os sites de busca Google Acadêmico e Scielo, lançando nas máquinas de busca a seguinte frase: os três problemas clássicos de geometria da Grécia antiga. Com isso surgiram dados iniciais pertinentes, que possibilitaram coletar informações ligadas diretamente ao tema da presente revisão, dando origem aos estudos primários. Será visto, logo mais, o quão importante serão esses resultados para desenvolver as próximas etapas.

2.1.2 Que dados foram extraídos nos estudos primários?

Para os estudos primários foram extraídos apenas palavras chaves, após uma breve análise dos resultados exibidos na seção 2.1.1, percebe-se a forte ligação que esses dados têm com o tema pesquisado, com a intenção de facilitar a visualização dessas informações, temos a lista de 1 a 4 logo a seguir:

1. O problema da duplicação do cubo.
2. A trisseção do ângulo.
3. A quadratura do círculo.
4. Números construtivos.

2.1.3 Quais foram os critérios de inclusão e exclusão ?

Prioritariamente, as datas de publicação, estabelecendo o período, 2010 até 2015, em seguida foi avaliado o tipo de documento, pois só será incluído aqueles que se enquadrem como sendo, livros científicos, artigos científicos publicados em jornais e revistas ou apresentados em congressos, dissertações de mestrado ou doutorado, trabalhos de conclusão de curso pertencentes ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) nos idiomas, inglês e português, que estejam relacionados ao tema: os três problemas clássicos de geometria da Grécia antiga. Foi possível sintetizar três critérios.

1. Data; ter data de publicação mínima à 2010.
2. Tipo; ser livro, artigo científico, trabalho de conclusão de curso do PROFMAT, dissertação de mestrado ou doutorado.
3. Tema; estar relacionado ao tema, os três problemas clássicos de geometria da Grécia antiga.

Observe que a aplicação de 1 e 2 ocorre quase que de forma imediata, enquanto que o critério de número 3 depende de uma verificação minuciosa do resultado encontrado, para só assim ter certeza de sua inclusão ou exclusão.

2.1.4 Questões a serem respondidas

Quais são os problemas clássicos de geometria da Grécia antiga, e de que forma influenciaram o desenvolvimento da matemática atual?

Qual ou quais matemáticos provaram, ou estão envolvidos na prova da impossibilidade de tais problemas, e de que forma isso foi feito?

Por que esses problemas perduraram por tanto tempo, com tantos gênios que surgiram ao longo da história?

Existem dúvidas e interesse em tais demonstrações nos dias atuais?

2.1.5 Aplicação

O conteúdo dessa revisão servirá como auxiliador para futuras pesquisas realizadas sobre o tema, ou próximos a ele. Pois apresenta o que já foi publicado nos últimos 5 anos, destacando quais os principais sujeitos envolvidos, comentando sobre as definições, axiomas, demonstrações e, principalmente, as conclusões de outros pesquisadores.

2.2 Condução da revisão sistemática

Nos estudos primários foram lançados nos sites de busca Google Acadêmico e Scielo a seguinte frase: os três problemas clássicos de geometria da Grécia antiga. Seleccionadas as palavras-chaves numeradas na seção 2.1.2, tais frases foram lançadas nas máquinas de busca, sempre com a configuração de frases exatas, e, em seguida, foram feitos os registros dos resultados encontrados, e, dentro deles, quais foram incluídos ou excluídos, e o motivo de tal decisão pautada nos critérios estabelecidos na seção 2.1.3.

2.2.1 Resultados obtidos

Apresentam-se em 4 etapas, O problema da duplicação do cubo, A trissecção do ângulo, A quadratura do círculo e Números construtivos.

2.2.2 O problema da duplicação do cubo

Ao pesquisar nas máquinas de busca, **o problema da duplicação do cubo**, o Google Acadêmico encontrou 26 itens, onde 8 deles foram incluídos, já o Scielo não retornou nenhuma resposta. Será considerado números de 1 até 26 nesse caso, onde, 1 representa o 1º resultado, 2 representará o 2º, 3 o 3º, e assim por diante, ao incluir por exemplo o número 8 na linha 2 (Tipo) da tabela 1, significa que o oitavo resultado foi excluído pelo critério 2 (Tipo), e assim seguirá com todos eles. Logo na sequência, apresento um gráfico de setor 1 que indicará os resultados em porcentagem.

O resultado 5 foi colocado no critério 2 (Tipo), contudo poderá verificar que existe algum erro, indicando a mensagem **bad request (Invalid hostname)**.

Para *doubling the volume of a cube* o número de resultados foi menor, 8 ao todo, onde 2 deles foram considerados, ver tabela 2, Scielo não apresentou resultados. A fim de complementar as informações foi elaborado o gráfico 2.

Tabela 1 – Duplicação do cubo (a)

8 Resultados Incluídos	
3 - 7 - 9 - 11 - 13 - 14 - 19 - 21	
18 Resultados Excluídos	Critérios
1 - 2 - 6 - 12	1 (Data)
8 - 5	2 (Tipo)
4 - 10 - 15 - 16 - 17 - 18 - 20 - 22 - 23 - 24 - 25 - 26	3 (Tema)

Figura 1 – Representação gráfica da tabela 1

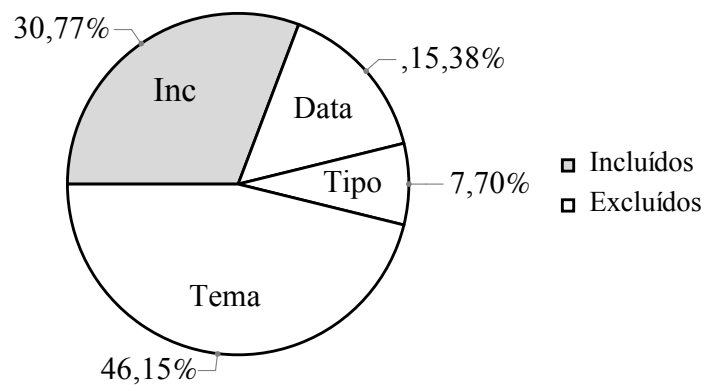
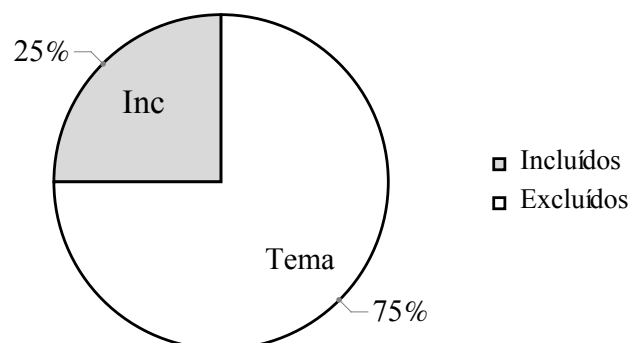


Tabela 2 – Duplicação do cubo (b)

2 Resultados Incluídos	
1 - 3	
6 Resultados Excluídos	Critérios
	1 (Data)
	2 (Tipo)
2 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8	3 (Tema)

Figura 2 – Representação gráfica da tabela 2



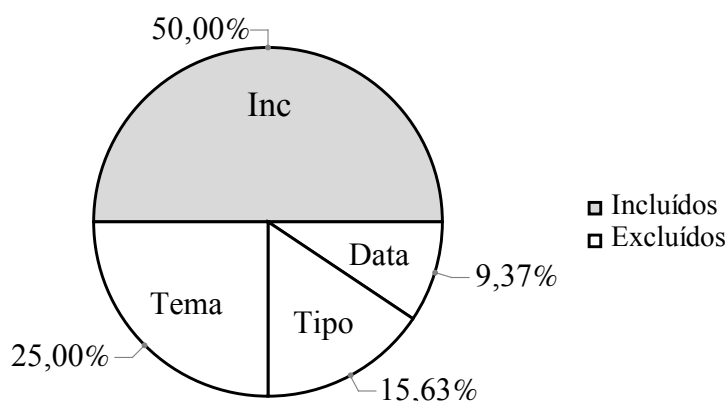
2.2.3 O problema da trissecção do ângulo

Os resultados pertinentes à **trissecção do ângulo** no Google Acadêmico são 32 ao todo, dos quais 16 passaram pelos critérios estabelecidos. Assim como feito até então, nomeando os itens com números de 1 a 32, e informando quais foram ou não incluídos como descrito na tabela 3, e nas informações complementares no gráfico 3. O Scielo novamente não apresentou resultados.

Tabela 3 – Trissecção do ângulo

16 Resultados Incluídos	
1 - 6 - 7 - 8 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 15 - 18 - 20 - 21 - 23 - 25 - 29	
16 Resultados Excluídos	Critérios
2 - 9 - 24	1 (Data)
3 - 4 - 16 - 17 - 19	2 (Tipo)
5 - 22 - 26 - 27 - 28 - 30 - 31 - 32	3 (Tema)

Figura 3 – Representação gráfica da tabela 3



Observando que o resultado número 18 já havia sido analisado anteriormente, 4 e 17 apresentam erro, sendo estes respectivamente, (**Not found**) e **Bad Request (Invalide Hostname)**. Seguindo o mesmo processo para *Trisecting an arbitrary angle* nenhum dos sites retornaram algum resultado.

2.2.4 O problema da quadratura do círculo

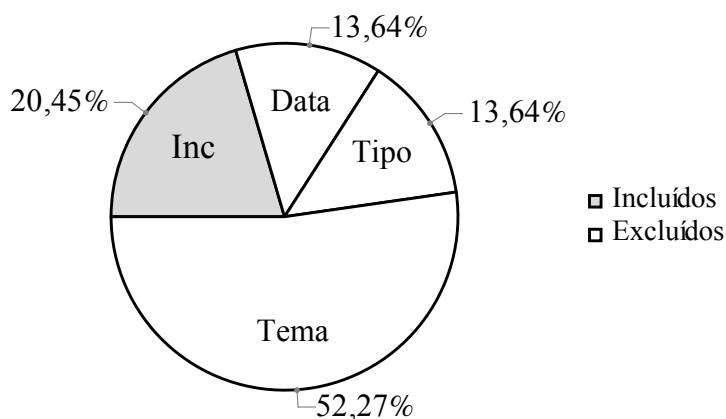
Agora, para o **problema da quadratura do círculo**, no Google Acadêmico surgiram 44 resultados e 16 foram considerados, o Scielo novamente não apresentou resultados, continuando a justificar de acordo com os critérios tais escolhas, sabendo que agora os itens variaram de 1 até 44, veja tabela 4 e posteriormente o gráfico 4.

Os resultados 20 e 31, já haviam sido incluídos anteriormente. Para frase em inglês *The problem of squaring the circle*, não foi encontrado nenhuma resposta.

Tabela 4 – Quadratura do círculo

9 Resultados Incluídos	
5 - 8 - 16 - 20 - 21 - 23 - 25 - 26 - 31	
35 Resultados Excluídos	Critérios
3 - 6 - 15 - 33 - 34 - 35	1 (Data)
1 - 17 - 24 - 27 - 40 - 42	2 (Tipo)
2 - 4 - 7 - 9 - 10 - 11 - 12 - 13 - 14 - 18 - 19 - 22 - 28 - 29 - 30 32 - 36 - 37 - 38 - 39 - 41 - 43 - 44	3 (Tema)

Figura 4 – Representação gráfica da tabela 4



2.2.5 Números construtivos

Apenas o Google Acadêmico retornou alguns resultados para **números construtivos** surgiram 22, onde 13 deles foram incluídos, veja tabela 5 e gráfico 5.

Tabela 5 – Números construtivos (a)

13 Resultados Incluídos	
1 - 2 - 5 - 6 - 7 - 10 - 11 - 13 - 14 - 17 - 18 - 20 - 21	
9 Resultados Excluídos	Critérios
15 - 21	1 (Data)
3 - 4 - 8 - 9 - 12 - 16 - 19	2 (Tipo)
	3 (Tema)

Esta etapa será finalizada com a pesquisa de *The Constructible numbers*. Observe a tabela 6 e o gráfico 6, apenas o Google Acadêmico exibiu resultados, 19 no total.

Tabela 6 – Números construtivos (b)

3 Resultados Incluídos	
3 - 4 - 14	
16 Resultados Excluídos	Critérios
15	1 (Data)
1 - 2 - 11 - 12	2 (Tipo)
5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 13 - 16 - 17 - 18 - 19	3 (Tema)

Figura 5 – Representação gráfica da tabela 5

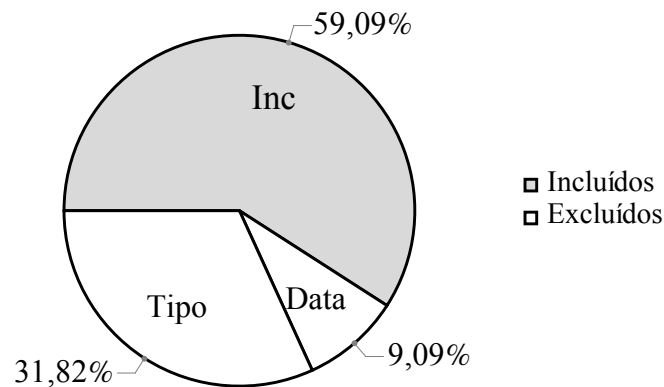
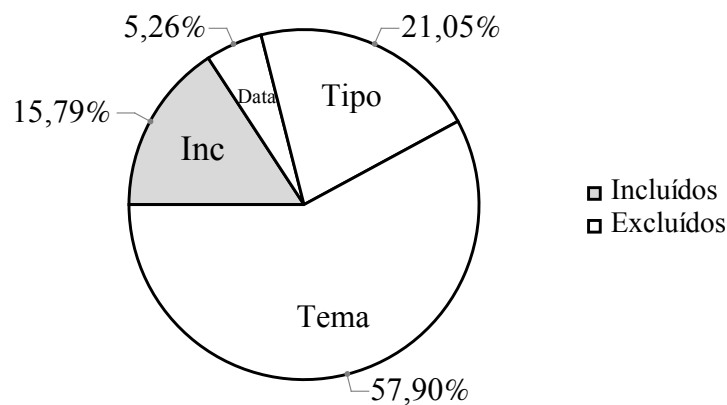


Figura 6 – Representação gráfica da tabela 6



2.3 Análise detalhada das bibliografias

De acordo com Ribeiro (2012), as tecnologias fazem parte de nossa realidade e devem ser usadas dentro da sala de aula. A matemática assume boa parte dessa responsabilidade, inovando as formas de ensino-aprendizagem. Contribuir diretamente para o desenvolvimento das capacidades dos alunos respeitando suas individualidades não é tarefa fácil. As tecnologias usadas adequadamente podem auxiliar o processo de construção do conhecimento, porém, o ensino repleto de informações, não garante a promoção da aprendizagem.

Nesta dissertação a autora aborda tipos variados de curvas e suas propriedades visando a educação básica. Assuntos como cônicas, cicloides e os problemas clássicos, são mostrados com vista a um novo olhar que desafia os professores propondo-lhes adaptações no seu modo de trabalho.

Sua ideia é a utilização de um ambiente de geometria dinâmica que permite operar diretamente sobre os objetos matemáticos. Assim, o aluno poderá manipular pontos, retas, círculos, coeficientes de equações, curvas e gráficos, realizando descobertas significativas, dentro de contextos previamente propostos pelo professor, que atuará na função de mediador desse processo de construção do conhecimento por parte do aluno.

Conclui que a integração de programas matemáticos nas rotinas escolares quando usados corretamente favorece a superação de diversas dificuldades. Dessa maneira, procedimentos automatizados que demandam muito tempo podem ser substituídos por ações de maior importância, como o desenvolvimento de ideias e pensamentos.

Menezes (2014) apresenta informações que revelam a inadequada formação docente, refletida pelo mal desempenho dos alunos no desenvolvimento das atividades escolares, vestibulares, concursos públicos e pela dificuldade de ingresso no mercado de trabalho. Aponta que, dentre as disciplinas, matemática se mostra como a grande vilã. Na atualidade, o professor deve adaptar-se aos novos moldes educacionais, principalmente em relação a matemática que deve ser relacionada à realidade, pois o aluno não é mais visto como aquele que simplesmente recebe as informações, devendo a todo momento ser considerado seus conhecimentos prévios. Essa reflexão nos indica a necessidade da formação continuada dos docentes, para assim conseguir reverter a situação da educação atual.

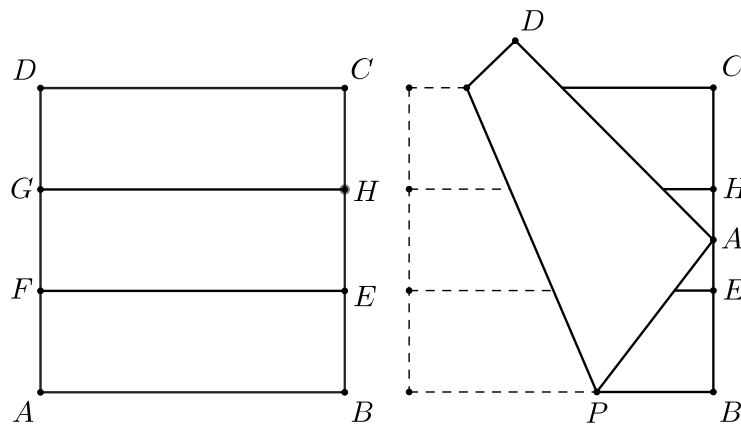
O autor propõe recursos diferenciados para o ensino de Geometria Euclidiana. Usando dobraduras de papel desenvolve o trabalho em três etapas: descrição axiomática, teoremas e resolução de problemas. A primeira dobradura baseia-se na formulação de sete axiomas fundamentais para desenvolver com propriedade construções como, retas concorrentes, unicidade da reta passando por dois pontos, ponto médio, ângulos opostos pelo vértice, retas perpendiculares, soma dos ângulos internos de um triângulo, entre outras. Na etapa teoremas, explica-se provando formalmente as dobras utilizadas nas construções. Finaliza com a resolução de problemas, apresentando o teorema de Pitágoras, trissecção do lado de um quadrado e duplicação do cubo, segue descrição deste último com mais detalhes.

Inicialmente, a solução é dada trissectando um dos lados do quadrado $ABCD$, observe na Figura 7, ao traçar seguimentos paralelos aos lados encontramos os pontos H e E , por último desloca-se o ponto A até o ponto médio de BC , nessas dobras constam as medidas aproximadas das arestas, com volume original e após a duplicação.

Dessa forma, o autor conclui que as expectativas de aprendizagem no que diz respeito ao ensino de matemática poderão ser alcançadas somente se os professores inovarem suas práticas. Porém, a evolução educacional só prosseguirá mediante a formação docente continuada, capaz de indicar caminhos alternativos que contribua para o bom desenvolvimento dos alunos.

A dissertação apresentada por Freitas (2014) traz os três problemas clássicos mostrando o envolvimento da teoria de extensão de corpos na demonstração de suas impossibilidades usando somente régua não graduada e compasso. Define pontos e retas construtivos, colocando-os sobre um conjunto de pares ordenados em um sistema de coordenadas cartesianas, dessa forma, são feitas várias demonstrações relacionadas a essas construções, retas perpendiculares, paralelas, ponto médio, trapézios e triângulos, considera tais conhecimentos fundamentais para um estudo inicial de geometria, mostrando a incrível ligação existente entre álgebra e geometria, com breve aprofundamento em corpos, subcorpos, extensão, grau de uma extensão, números algébricos

Figura 7 – Duplicação do cubo. Adaptado de Menezes (2014)



e transcendentos, em particular nesse caso o π , analisa o corpo dos números construtivos observando a importância dos racionais \mathbb{Q} . Através da geometria analítica que trabalha em um sistema de coordenadas cartesianas (X, Y) , com a reta escrita como $y = ax + b$ e a circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ demonstra que suas intersecções originam equações de 1º ou 2º grau, afirmando que o grau de extensão dos números construtivos são potências de 2, informação essa fundamental para demonstrar a impossibilidade dos três problemas clássicos.

A dissertação também apresenta soluções desenvolvidas pelos gregos com instrumentos diferenciados dos Euclidianos, relatando acontecimentos históricos que os levaram a desenvolver essas descobertas. Destaca, como possível motivo responsável por despertar a curiosidade dos gregos nos problemas clássicos, o fato de conseguirem duplicar a área do quadrado, o que pode ter influência em problemas envolvendo duplicação. Do mesmo modo, dominavam estratégias relacionadas à divisão de ângulos em $2n$ partes, e quadrar polígonos de n lados. Essas informações podem servir de justificativa para fascinação na trisseção de ângulos e quadraturas de círculos.

Ainda explica uma maneira para duplicação do cubo usando origami. As dobras consistem em achar duas meias proporcionais para modelar o problema. Destaca Hipócrates de Quios (viveu em torno de 430 a.C) como o primeiro matemático que utilizou esse pensamento para atacar o problema.

A autora não deixa dúvidas do quanto é importante usar formas variadas de estratégias ao desenvolver o trabalho em sala de aula. E que um assunto usado como eixo temático obrigatoriamente nos remete ao aprofundamento de outros temas que muitas vezes não se esperava encontrar. Neste trabalho, partiu-se de um problema naturalmente geométrico, originando o surgimento da álgebra, usada para tornar as demonstrações ainda mais concretas.

De acordo com Costa (2013), ensinar Matemática é um desafio presente na sociedade atual, com barreiras que precisam ser superadas. O autor comenta que tal acontecimento se

dá pelo fato de grande parte dos professores terem sido educados em uma escola totalmente tradicional, refletindo no modo de trabalho que se mantém resistente e conservador.

Em sua pesquisa, trata os números construtivos e suas propriedades para alunos do 2º e 3º ano do ensino médio frisando três questionamentos:

1. $\sqrt[3]{2}$ é construtível?
2. $\sqrt{\pi}$ é construtível?
3. $\cos 3\alpha$ é construtível $\implies \cos \alpha$ é construtível?

Adota como metodologia o uso da régua e do compasso, programa de geometria dinâmica, contextualização com a história da matemática em exercícios e aplicações. Para o autor, é papel do professor orientar corretamente seus alunos nas atividades escolares usando essas múltiplas estratégias de ensino, tornando a Matemática atrativa e estimulante. O que facilitará no desenvolvimento dos conhecimentos básicos de geometria essenciais em estudos futuros.

Dessa maneira, mostra o quanto é fundamental estudar números construtivos no ensino médio, e que o mesmo deve fazer parte dos planos de ensino sempre sendo trabalhados com atenção especial.

Lima (2014) apresenta a problemática de como as cônicas são trabalhadas atualmente. Nota-se que certos conceitos estão sendo esquecidos com o passar do tempo. Abordagens superficiais em livros didáticos de forma mecânica e sem nenhuma contextualização concreta com a realidade acaba refletindo no trabalho dos professores, que se mantêm estáticos, como o antigo modelo tradicional de ensino.

Como alternativa, o autor destaca as Tecnologias Digitais de Informação (TDI) como proposta inovadora para o trabalho em sala de aula. Porém, afirma que a implementação tecnológica deve ser bem planejada, esboçando com clareza os objetivos que almejam ser alcançados. Uma maneira está em propor sequências didáticas estruturadas envolvendo elementos históricos, tecnológicos e práticos.

São elaboradas explicações práticas em um ambiente dinâmico exclusivo para geometria analítica plana e espacial. Relaciona as seções cônicas ao problema de duplicação do cubo com fatos relevantes sobre sua origem. Mostra as principais descobertas de alguns matemáticos e como as mesmas foram pensadas até se transformar nas propriedades que utilizamos hoje.

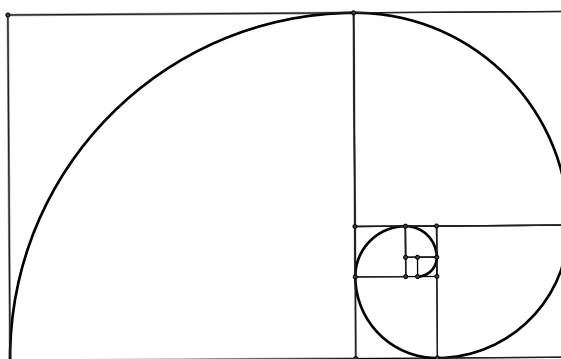
Assim, deixa claro a necessidade de implementação das (TDI) e de reflexão por partes dos professores sobre suas práticas de ensino. Evidencia que o ensino de Matemática e outras áreas do conhecimento não deve permanecer inerte, precisando de inovações que combata a falta de interesse e os altos índices de evasão.

Lopes (2014) afirma em sua dissertação a existência de uma precária utilização de construções geométricas nos currículos da educação básica brasileira, o que prejudica a formação

dos futuros professores. O bom entendimento das definições, conceitos, demonstrações e resolução de problemas encontra-se diretamente ligado a uma boa visualização geométrica, que se dará por meio da realização de procedimentos e métodos.

Com critérios de construção para polígonos regulares no programa GeoGebra define o conjunto dos números construtivos, partindo para álgebra abordando anéis, domínio de integridade e corpos provando quais sólidos não são construtivos expondo demonstrações pertinentes. Destaca a espiral áurea exibida na Figura 8, e explica sua importância para construção do pentágono regular. O autor faz referência aos polígonos regulares construtivos e a teoria de Galois com objetivo de descobrir aqueles que podem ser construídos com régua e compasso. Afirma que conhecimentos algébricos são diferenciais importantes para provar formalmente as conjecturas realizadas.

Figura 8 – Espiral áurea



Lugli (2014) acredita poder motivar alunos do ensino médio com aspectos distintos de construções geométrica, afirma que alguns problemas tornam-se mais simples quando analisados do ponto de vista algébrico. Perceber a viabilidade em usar álgebra ou geometria em situações problemas é uma excelente qualidade a ser desenvolvida por estudantes de Matemática.

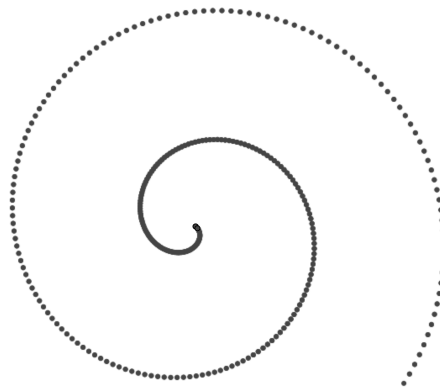
Elaborou um título curioso **Não precisamos de régua, sim de álgebra e compasso**, assim, verifica quais pontos são construtivos no plano cartesiano, demonstra que todo problema cuja solução se restringe as quatro operações e extração de raízes quadradas possui solução geométrica. Define e prova propriedades relacionadas aos números construtivos e as impossibilidades clássica. Para duplicação do cubo e trissecção do ângulo usa o método de pesquisa das raízes racionais de um polinômio, nesse caso $x^3 - 2 = 0$ e $8x^3 - 6x - 1 = 0$ respectivamente.

Dessa forma, mostra o quanto é importante um olhar global em qualquer área de estudo, e que situações aparentemente simples acabam exigindo vasto conhecimento.

A dissertação apresentada por Silva (2014) esclarece o quanto é importante o estudo da geometria plana. Utiliza um dos problemas clássicos, a trissecção do ângulo. Acredita que a apresentação de registros históricos e o uso de recursos computacionais reforça o lado pedagógico no que diz respeito o ensino de Matemática.

O autor adota como recurso metodológico o programa GeoGebra destacando a facilidade que o mesmo apresenta na manipulação de seus objetos. Encontra soluções por aproximação para o problema da trissecção explicando como e quais ferramentas do programa foi utilizada na sua obtenção. Dá grande enfoque para espiral de Arquimedes exibida na Figura 9, pois sua construção está relacionada a resolução aproximada do problema. Expõe o teorema de Morley, que faz referência ao encontro das trissetrizes dos ângulos internos de triângulos, paralelogramos e polígonos regulares. Construção impossível de ser feita com exatidão, já que possui a necessidade de se obter trissecções de ângulos.

Figura 9 – Espiral de Arquimedes



O autor finaliza fazendo uma crítica sobre os problemas de geometria, cuja solução privilegia de forma insuficiente os conteúdos genuinamente geométricos em detrimento de aplicações exaustivas de cálculos e desenvolvimentos algébricos.

Ao verificar a pesquisa de Peixoto (2013), percebe-se sua preocupação com o ensino de geometria analítica. Destaca algumas considerações tiradas da disciplina MA23 (Geometria Analítica) do próprio PROFMAT frisando que tais considerações são fundamentais para os estudantes.

Seu principal conteúdo de estudo é a parábola, inicialmente em um modelo bem próximo daquele visto por alunos do ensino médio. Faz aplicações utilizando sua propriedade refletora e os elementos que a compõe. Com imagens de objetos comuns que estão ao nosso redor, como lanternas, faróis e antenas, por exemplo, consegue construir a contextualização do espelho parabólico, com o objetivo de levar compreensão acerca da importância de suas propriedades. Finaliza com a apresentação das cônicas, parábola e elipse, em coordenadas polares explicando a relação entre os coeficientes das equações com o auxílio do GeoGebra.

Dias (2014) inicia sua pesquisa com um questionamento. Como a disciplina História da Matemática é trabalhada nas atividades curriculares da atual escola brasileira? O autor faz um levantamento em algumas escolas de educação básica, a fim de tentar descobrir como os professores utilizam a disciplina e qual o seu grau de importância. Neste trabalho, temos acesso

aos resultados encontrados, onde verifica-se que os currículos escolares não dão destaque para fatos históricos pertinentes ao desenvolvimento da matemáticos. Conclui que essa postura afeta de forma negativa o ensino de Matemática.

Com conteúdos como a quadratura de polígonos a partir do triângulo, explica como se iniciou a geometria na Babilônia. O envolvimento de alguns matemáticos nessas descobertas através dos tempos abrem portas para nomes como Arquimedes, Apolônio e Euclides. A necessidade natural da geometria no Egito Antigo, na Grécia, no Império Romano até os dias atuais acabam servindo de motivação usada pelo autor para dar ênfase a evolução da Matemática.

Juca (2011) apresenta propostas de ensino em um ambiente virtual de aprendizagem, esse é o grande propósito por trás da tese de doutorado elaborada pelo autor. Explica sua preocupação em compreender como os alunos aprendem Matemática realizando um experimento em uma plataforma conhecida como Telemeios. Nele ministra aulas de geometria plana para alunos da educação básica, e explica quais os principais desafios a serem superados para que os professores sejam capazes de ministrar aulas significativas.

Dentre esses desafios, temos a formação docente continuada, pois é necessário que o professor domine as ferramentas tecnológicas para que não seja mais uma dificuldade. Fala também sobre a necessidade de programas com suporte para símbolos matemáticos, que seja de fácil digitação, destacando que os atuais editores de texto não otimizam a exposição de fórmulas.

Dessa maneira, apresenta como conclusão o fato de que o ensino à distância é uma proposta inovadora com um grande rol de possibilidades, mas que acarreta em inúmeras mudanças nos sistemas educacionais, levando os professores a repensarem suas práticas pedagógicas adaptando-se a novas linguagens que vão muito além de aulas expositivas e tradicionais.

Pereira (2013b) traz áreas de figuras planas em sua principal problemática mostrando ideias de como construir esse conhecimento na educação básica. Inicia discutindo as regiões circulares com a exposição de fatos históricos e justificativas para o surgimento do número π . Fala sobre um matemático chamado Hípias de Elis, responsável pela criação de uma curva que ficou conhecida como quadratriz ou trissetriz. Tal curva foi usada por outros matemáticos para obter aproximações da trisseção de ângulos e da quadratura de círculos, destacando o uso do conceito de limites em sua construção. Define o conjunto dos números construtivos explicando a transcendência do número π , curiosidades a respeito do símbolo, números racionais que se aproximam de 3,14159... deixando claro a ordem cronológica dos acontecimentos.

Portanto, afirma que métodos diferenciados de aproximação aliados a narrativas históricas podem servir de motivação para os alunos. E que conhecê-las propicia ao professor maneiras mais ricas de abordagens pedagógicas no decorrer das aulas.

Vitor (2013) traz uma proposta que tenta quebrar a ideia de distanciamento entre álgebra e geometria formalizada pelos alunos. Orienta sobre as várias possibilidades encontradas no GeoGebra, por exemplo, a realização de construções geométricas em um modelo de aula que

promova a investigação e o pensamento, e que tal aula pode ser incluída em uma plataforma online em que alunos e professores poderão acessar. Para o autor, os benefícios são mais do que evidentes pela mobilidade que o programa dá aos objetos, ao passo de ser mostrar bastante intuitivo.

Com a utilização de sequências didáticas faz referência a uma parcela considerável da geometria analítica. Levanta questionamentos pertinentes sobre como surgiu determinados conceitos e quais fenômenos estão envolvidos em suas aplicações. Uma forma apresentada pelo autor a fim de propiciar a diminuição desse distanciamento entre álgebra e geometria é o estudo das secções cônicas. Sequência de atividades nos programas de geometria dinâmica, promovida de maneira contextualizada trará uma maior compreensão dos conhecimentos por parte dos alunos.

Lima (2013) levanta três questionamentos: a utilização das tecnologias podem trazer dificuldades para o ensino? será possível incorporar novos recursos as práticas pedagógicas? os alunos e professores estão preparados para interpretar os resultados dos computadores e calculadoras? esses são os eixos norteadores de sua pesquisa.

Ao refletir sobre esses questionamentos, autor afirma que a condução de uma boa prática pedagógica requer do educador disponibilidade para que possa explorar a fundo as potencialidades de uma determinada ferramenta tecnológica. Desenvolve estudos sobre aproximações de raízes quadradas e cúbicas, números irracionais, técnicas de aproximação, dentre elas temos a $\sqrt{\pi}$, número fundamental na quadratura do círculo. Salientando que para uma abordagem concreta sobre esses conteúdos é necessário pleno domínio dos meios que o professor se dispor a usar.

Deixa claro que as mudanças estão ocorrendo e que é possível sim inovar metodologias de ensino. Porém, não basta simplesmente incorporar um meio as atividades curriculares por sua utilidade diária, e sim desenvolver maneiras de promover para nossos alunos uma compreensão de mundo atualizada, o que exigirá grande preparação dos professores.

Fazer com que alunos do 3º ano do ensino médio entenda a autenticidade dos números complexos \mathbb{C} . Essa é a proposta que Pereira (2013a) apresenta logo após detectar essa dificuldade. Destaca que tal situação precisa ser superada pois envolve conceitos de extrema importância para qualquer estudante de Matemática.

Especificando estruturas algébricas através das operação de adição e multiplicação fechada em um conjunto não vazio, define operação binária, grupos, domínio de integridade e corpos. Posteriormente constrói o conjunto dos números complexos \mathbb{C} em sua forma algébrica, trigonométrica, matricial, e a transformação de Möbius.

As explicações e atividades especificadas levaram o autor a concluir que o não entendimento das unidades imaginárias nas aulas de Matemática só será minimizada através de uma exposição detalhada, e que a omissão de informações deixa aberturas que acarretam em

incertezas no processo de ensino-aprendizagem.

Junior (2013) destaca em sua dissertação que a maioria dos livros didáticos aborda conteúdos de geometria em seus últimos capítulos, o que acaba acarretando em um estudo superficial do conteúdo. Por isso, optou por desenvolver uma proposta que trabalhe construções geométricas durante todo o ano letivo e não apenas no final.

Em sua obra construções geométricas por régua e compasso e números construtivos, foca na promoção da aprendizagem dos conhecimentos de reta perpendicular, bissetriz, mediatriz, ponto médio, pontos notáveis em triângulos e outras situações. Contém também uma breve história dos três problemas clássicos, definição de números construtivos e pontos no plano utilizando as equações da reta e circunferência, tudo modelado através de atividades que poderão ser aplicadas em sala de aula.

O autor conclui que, ao introduzir novas metodologias na resolução de atividades no ensino fundamental, os alunos obterão uma visão matemática diferenciada. Desse modo, os estudantes serão capazes de prosseguir suas carreiras acadêmicas nas mais variadas áreas das ciências exatas.

Biazzi (2014) dá ênfase ao matemático Évariste Galois, que desenvolveu importantes teorias sobre a resolução de equações algébricas e trabalhos que o qualificaram como precursor da álgebra moderna, onde se insere o principal objeto de estudo levantado pelo autor.

Explora em sua metodologia estruturas algébricas, polinômios, suas propriedades e aplicações, relacionando esses conteúdos as construções geométricas. Segundo o autor tal material pode ser adaptado para o ensino médio e uma parcela para o fundamental. Também apoia o uso dos laboratórios de informática contidos nas escolas como um diferencial importante do processo.

Sugere como tema central a impossibilidade dos três problemas clássicos em algumas aulas de Matemática do ensino médio, além de outras formas de exposição presente no decorrer da pesquisa. O autor percebe a riqueza em tais abordagens como solução do processo de construção do conhecimento, capaz de motivar o aluno a entender verdadeiramente certos conteúdos, para que consiga aplicá-los em situações problemas.

As autoras Schubring e Roque (2014) elaboram suas ideias tendo por base um artigo publicado em 1936 por Arthur Donald Steele, que procura responder questões acerca do tratamento de construções geométrica com o uso de régua e compasso pelos gregos. Afirma que outros métodos de resolução com instrumentos, além dos clássicos, eram usados na época, porém queria-se sempre que possível simplifica-las.

Essas resoluções deram origem a três tipos de problemas: planos (uso de apenas régua e compasso) sólidos (resolvidos com a utilização de cônicas) e lineares (curvas construídas com movimentos, espirais, quadratriz, conchoides e cissoide). As restrições a régua e compasso via de regra eram seguida pelos geômetras da época mas havia também aceitação usando certos

ajustamentos nas construções, o problema é que sempre carregava pequenos erros em suas respostas.

Finalizam dizendo que os alunos devem entender que os problemas clássicos não foram resolvidos usando os procedimentos exatos de construções geométricas, mas que várias aproximações suficientemente razoáveis foram encontradas pelos matemáticos ao longo do tempo.

Precioso e Pedroso (2011) trazem em seu artigo ideias interessantes sobre números construtivos. Usando ótimos exemplos de construções geométricas conseguem exibir o seguimento que represente a media da expressão 2.1, explicando de forma clara todos os procedimentos adotados.

$$\sqrt{6} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{3}} + 5} \quad (2.1)$$

Fazem um paralelo a teoria de extensão de corpos justificando o conceito de números construtivos, enfatizando a demonstração do teorema 2.3.1.

Teorema 2.3.1. Se uma equação cúbica de coeficientes racionais não tem raiz racional, então nenhuma de suas raízes são construtíveis partindo do corpo F_0

Em seguida utilizam o teorema 2.3.1 para provar a impossibilidade dos problemas clássicos e a construção do heptágono regular, modelando ambos os problemas a polinômios.

No decorrer do desenvolvimento da pesquisa, os autores também explicam números algébricos e transcendentos, e o critério de irreduzibilidade para polinômios, atribuído ao matemático Eisenstein exibido no teorema 2.3.2.

Teorema 2.3.2. Seja $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ um polinômio não constante de coeficientes inteiros e p um primo tal que:

1. p não divide a_n
2. p divide a_0, a_1, \dots, a_{n-1}
3. p^2 divide a_0

Então $f(x)$ é irreduzível sobre \mathbb{Q} .

O teorema acaba sendo mais uma ferramenta para justificar as impossibilidades clássicas, destacando que o polinômio $x^3 - 2 = 0$ descreve o problema da duplicação do cubo, e que o mesmo é irreduzível de grau 3 com raízes não construtíveis, como exposto nos teoremas acima. Mostra que com raciocínio análogo é possível provar a impossibilidade da trissecção, e comenta sobre a relação da transcendência de $\sqrt{\pi}$ com a impossibilidade da quadratura do

círculo. Finaliza o desenvolvimento da pesquisa apresentando alguns tipos de solução por *nêusis* (ajustamento) e explica a construção do polígono regular de 15 lados.

Concluem que o uso da régua e do compasso pensado em conjunto com teorias algébricas modernas é um conhecimento fundamental para qualquer professor de Matemática, causando reflexos positivos em sua prática na sala de aula e automaticamente promovendo um ensino de maior qualidade.

Barbosa (2013) realiza uma aproximação entre aritmética e geometria usando o problema da trisseção do ângulo. Fez a análise de uma carta escrita por Rene Descartes onde dizia ter solucionado três tipos distintos de equações cúbicas, $x^3 = \pm a \pm bx$, $x^3 = \pm a \pm x^2$ e $x^3 = \pm a \pm bx \pm bx^2$ e que esta terceira equação poderá nos levar a solução da trisseção de ângulos. Foi a partir dessas informações que o autor elaborou seu artigo.

Desenvolve textos que analisam a interação entre aritmética e geometria onde conta sobre um curioso instrumento usado por Descartes auxiliando-o em suas conclusões batizado de mesolábio, o mesmo permitia a construção de certas curvas fundamentais em suas descobertas. Além disso é apresentado uma série de exemplos relacionando elementos aritméticos a sua representação geométrica a fim de não deixar dúvidas a cerca da conexão existente entre as áreas.

Nascimento e Feitosa (2010) responde: como os gregos entendiam o conceito de número? Tal pergunta foi usada como ponto de motivação pelos autores na elaboração da pesquisa. Inicia-se com um texto sobre a história de Évariste Galois, destacando acontecimentos pertinentes aos momentos históricos até sua trágica morte aos vinte anos de idade em um duelo. Apresentam problemas sobre equações polinomiais que podem ser resolvidas por radicais e suas respectivas resoluções. Termina enunciando os três problemas clássicos apresentando de forma simples as principais ideias usadas na demonstração.

Chegam à conclusão do quanto é importante aprofundar os estudos em Matemática, com o objetivo mostrar que problemas relativamente simples carregam pensamentos extremamente sofisticados em suas soluções.

Souza e Alitolef (2011) também escrevem sobre Évariste Galois contando trechos de sua história, destacando a incrível habilidade em matemática do jovem, e a dificuldade dos examinadores da época em compreender descobertas matemáticas que iriam além de tudo que já havia sido publicado. Galois foi reprovado duas vezes no exame de admissão em uma famosa escola da França, École Polytechnique, pois não conseguia cumprir as formalidades exigidas.

Comenta sobre a posição política assumida por ele logo após a morte de seu pai, um seguidor fiel das teorias de Napoleão Bonaparte. Tinha como principal área de estudo as equações algébricas. Conseguiu aos 18 anos de idade fazer publicações no principal jornal científico da França. Sua pesquisa originou a brilhante teoria dos grupos, pena que um dos grandes matemáticos daquele tempo, Cauchy, não deu grande importância aos seus registros. Quase concorreu em um concurso de ciência muito conhecido, mas por ironia do destino, Fourier, que

recebeu o seu artigo morreu antes de colocá-lo para publicação e a obra se perdeu novamente. Era um tanto temperamental, afrontou grandes intelectuais e autoridades, foi preso, e morreu de forma trágica ao participar de um duelo, de sorte que antes de sua morte escreveu três cartas, sendo que em uma delas continha os teoremas e demonstrações de sua teoria.

Junior e co-autores (2013) trazem uma abordagem metodológica para o estudo das cônicas mostrando que as propriedades algébricas se relacionam de forma natural com as geométricas. Conta algumas histórias que possivelmente podem ter originado os problemas clássicos.

Utilizam como metodologia a elaboração de atividades curriculares que podem ser aplicadas em oficinas, e novamente adota-se o GeoGebra para auxiliar na realização dessa tarefa. São expostas construções geométricas, cônicas como sendo lugares geométricos, e algumas aplicações.

Os autores percebem que os programas de geometria dinâmica são ótimas ferramentas na aplicação de aulas bem preparadas com objetivos claros, mas que o mesmo cobra boa preparação por parte do professor, exigindo-o domínio não só do conteúdo, mas também uma ótima manipulação do programa.

O artigo escrito por Vacari (2011) fala sobre o método de exaustão, usada na realização do cálculo de áreas em figuras curvas aproximando-as de regiões poligonais. Segundo o autor esse método originou antigos problemas sobre áreas, volumes e comprimentos de arcos.

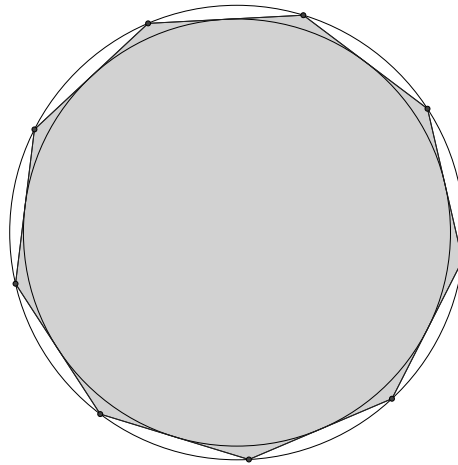
Em sua metodologia retrata a história da matemática frisando a descoberta dos incomensuráveis. Apresenta resoluções de problemas voltados a encontrar áreas de círculos, e os resolve fazendo comparações entre as áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos, observe tal exemplificação na Figura 10. Faz o seguinte questionamento: quem desenvolveu o método de exaustão? E conclui atribuindo tal feito a Eudoxo (408-355 a.C) astrônomo, matemático e filósofo de origem grega. Afirma que o mesmo fez contribuições importantíssimas a respeito dos incomensuráveis, amenizando a crise existente na escola pitagórica.

O artigo cujo título é "Construções geométricas com régua e compasso - Números construtíveis" foi escrito pelos autores Novais, Felix e Santos (2014). Nele consta a problemática existente na incorporação de construções geométricas nos currículos de Matemática.

Para os autores as construções geométricas nas aulas de Matemática estão caindo em desuso, a fim de reverter essa situação usam como estratégia o significado dos números construtivos por apresentarem facilidade na relação entre pensamentos algébricos e geométricos. Acreditam que com moldes de aulas bem planejadas, como as que estão contidas no seu artigo, é possível incluir construções geométricas aos novos currículos.

O artigo escrito por Veras (2010) usa a quadratura do círculo objetivando aproximar a lógica formal da retórica, com seus conhecimentos científicos, aos métodos de exaustão realizados por Eudoxo, já citado por Vacari (2011) e a dupla redução ao absurdo com o desenvolvimento da

Figura 10 – Área do círculo pelo método de exaustão



integração, realizada por Newton e Leibniz.

A metodologia utilizada pelo autor traz argumentos que expressão a importância em estudar técnicas de argumentação nas aulas de Matemática e como as mesmas podem contribuir para construção dos conhecimentos mencionados. Usando estratégias relacionadas à retórica, elabora uma narrativa que contextualiza o centro de sua pesquisa. Dessa maneira, mostra o quanto é importante fazer com que alunos se apropriem de alguns elementos que fazem parte dessa técnica.

Verbytska (2014), em sua dissertação de mestrado, apresenta uma proposta que demonstra a funcionalidade da matemática no cotidiano, destacando sua utilidade na explicação de fenômenos Físicos e Químicos. Também procura oferecer formas de trabalho alternativas para o ensino das ciências exatas dos currículos escolares atuais.

Com o estudo de funções quadráticas, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas cria excelentes exemplos contextualizados. Apresenta uma sequência didática envolvendo estudos na construção civil. Além de aplicações e curiosidades surpreendentes sobre o número de ouro sempre dando ênfase aos modelos matemáticos que descrevem os problemas. Por fim, conclui que o ensino significativo só ocorrerá efetivamente através de aulas contextualizadas, que sejam capazes de fazer sentido aos alunos.

Através de uma análise apoiada em diversas teorias educacionais, Voskoglou e Kosyvas (2012) tentam responder em seu artigo *Analyzing students' difficulties in understanding real numbers*: porque alunos apresentam dificuldades na compreensão dos números reais \mathbb{R} ? Articulando argumentos, provoca reflexões nos professores, incentivando-os a descobrir quais os motivos dificultadores na aprendizagem dos conjuntos numéricos.

Afirmam que uma possível maneira de vencer essas dificuldades é apresentar as necessidades enfrentadas pela sociedade ao longo da história, entendendo o real pensamento que forçou a humanidade descobrir de novos conjuntos.

Martins (2013) apresenta o estudo da geometria analítica na educação básica mostrando o quanto é importante para o aluno desenvolver a habilidade de fazer relações entre equações algébricas e construções geométricas. Dá exemplos de que até mesmo no ensino fundamental, ao estudar sistemas lineares com duas variáveis, pode-se iniciar uma abordagem que seja diferenciada, apresentando uma reflexão aprofundada sobre o significado das soluções encontradas nos exercícios.

Dentre várias situações apresentadas pelo autor, fica evidente sua preocupação com a contextualização nas aulas de Matemática. Utilizando aplicações envolvendo leis da Física, órbitas de corpos celestes, outras ligadas a dispositivos odontológicos, criação e transformação de coordenadas, classificação das cônicas usando ferramentas da álgebra linear e os próprios elementos que as caracterizam, abre um leque de possibilidades que contribuirá no processo de ensino-aprendizagem.

Conclui que uma abordagem completa de alta qualidade sobre o assunto está diretamente ligada à não omissão de informações, cabendo ao professor elaborar meios diferenciados que expliquem os conteúdos elencados como fundamentais para o desenvolvimento do educando.

Fermino (2013), ao escrever sua dissertação, busca respostas para a construtibilidade dos números reais \mathbb{R} baseado nas construções fundamentais no plano com compasso e régua não graduada. Essa foi a motivação que o levou a falar sobre a impossibilidade dos três problemas clássicos e a construção de polígonos regulares.

Explora aspectos conceituais e técnicos que complementam o tema, como por exemplo, a construtibilidade geométrica e conceitos de álgebra. O autor apresenta todas as ferramentas suficientes para realizar o fechamento de seu trabalho, que acontece com a prova das impossibilidades clássicas e a elaboração de critérios para a construção do n -ângulo regular.

O autor conclui que a álgebra pode sim ser motivada pela geometria, pois partindo de problemas geométricos podemos caminhar até descobertas ligadas à álgebra abstrata. Completa dizendo que uma compreensão profunda do conteúdo por parte do professor implica em um ensino de Matemática com maior qualidade.

2.4 Conclusão da Revisão

A revisão foi escrita objetivando responder qual a relevância existente no estudo dos três problemas para o ensino de Matemática e se existem dúvidas e interesse em tais demonstrações nos dias atuais. Como se vê, fica evidente que muito se pesquisou sobre o tema, indicando sua importância para o desenvolvimento de teorias matemáticas ao longo dos tempos.

Percebe-se que a matemática foi construída aos poucos. Isso é evidenciado pelos esforços dos matemáticos em solucionar conjecturas que foram surgindo, algumas por necessidade humana, outras por pura curiosidade. Para os gregos era um tanto contraditório conseguir

duplicar a área de um quadrado e não o volume de um cubo, ou fazer a bissecção e não a trisseção de ângulos e quadrar certos polígonos regulares e não um círculo. Existem histórias sobre esses problemas que talvez não sejam verdadeiras, mas o grande fato é que os mesmos desafiaram sábios a pensar durante séculos, o que acabou gerando teses que, mesmo quando não provadas matematicamente, serviram de abertura para aquelas em que realmente foram demonstradas como válidas, passando a fazer parte dos conteúdos estudados atualmente.

Observar-se, ao analisar as referências, que os problemas foram demonstrados usando extensão de corpos, o que nos remete a Évariste Galois, porém ele mesmo não estava interessado em responder tais problemas, mas sim provar que equações de 5º grau ou mais não podiam ser resolvida por radicais, ou seja, representando a variável em função dos coeficiente da equação através de operações aritméticas. Embora Galois tenha sido o grande precursor atribui-se ao matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1848) como o primeiro a expor tal prova.

Tais problemas resistiram por um longo período por falta de uma base matemática consistente, a teoria de extensão de corpos trouxe uma nova estruturação até então desconhecida. Só tempos depois essas descobertas foram associadas aos problemas clássicos pelo fato do amadurecimento não acontecer de forma instantânea. Conceitos que hoje parecem óbvios tiveram que ser trabalhados e lapidados até atingir a simplicidade em que se apresentam.

Não há dúvidas acerca de que é impossível resolver os problemas clássicos usando régua não graduada e compasso. Porém, o assunto chama atenção por sua simplicidade e beleza, além de carregar uma considerável bagagem conceitual. As bibliografias apontam para um problema existente no ensino de matemática onde, por várias vezes, surge a necessidade de mudança nas estratégias utilizadas, em parte deles sugere-se como solução dois fatores: maior contextualização dos conteúdos e o uso das novas tecnologias digitais.

O primeiro aspecto pode ser sanado através de um maior aprofundamento dos conteúdos excluindo-se a ideia de que existe separação entre as áreas da Matemática e suas aplicações. Já o segundo diz respeito a evolução tecnológica obrigando os sistemas educacionais, currículos e professores a adaptar-se ao mundo moderno.

Portanto, além de obter respostas sobre os questionamentos mencionados e indicar caminhos permitindo coletar bibliografias relevantes sobre o tema, a revisão sistemática mostra claramente a importância dos três problemas clássicos para o ensino de Matemática. Assim, verifica-se o quanto é imprescindível que professores utilizem esse tema na educação básica pois percebe-se a existência de uma grande quantidade de conceitos matemáticos por trás dos três problemas. Ter clareza a respeito de como esses conceitos podem contribuir para o desenvolvimento lógico matemático é fundamental para que os estudantes se desenvolvam plenamente.

HISTÓRIAS E CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Este capítulo traz curiosidades históricas de possíveis acontecimentos que deram origem aos três problemas clássicos. Faz uma exposição de conceitos importantes que relacionam operações aritméticas e construções geométricas. Finaliza mostrando algumas soluções por aproximação dos três problemas. Um maior aprofundamento das informações apresentadas poderá ser encontrado nas referências (EVES, 2011) (SCHUBRING; ROQUE, 2014) (PRECIOSO; PEDROSO, 2011) (BARBOSA, 2013) (RIBEIRO, 2012) (WAGNER, 2007) (FERMINO, 2013) (FREITAS, 2014) (COSTA, 2013) (DIAS, 2014) (CARVALHO, 2010) (JUNIOR, 2013) organizadas no final do trabalho.

3.1 Como tudo começou

Cada um dos três problemas clássicos da Grécia antiga traz consigo suas particularidades, começaremos falando da duplicação do cubo, também conhecido como problema de Delos, fundamenta-se em construir um cubo cujo volume é o dobro de um outro existente. Delos foi o nome dado à uma das ilhas situadas no arquipélago de Mar Egeu. Historicamente começou a ser ocupada pelos Jônios a cerca de 1 000 a.C. que possuíam conhecimentos da escola jônica fundada por Tales de Mileto. Tais conhecimentos davam prioridade a uma geometria do ponto de vista demonstrativo. Foram os Jônios que iniciaram os cultos ao Deus Apolo, segundo a mitologia Apolo nasceu naquela região, por isso a ilha também é conhecida como santuário de Apolo. Diz a lenda que uma peste assolava os Atenenses, então os sábios da época (aproximadamente 429 a.C) procuraram o oráculo do Deus Apolo, onde o mesmo informou um jeito para solucionar aquela situação dizendo que deveriam duplicar o volume do altar que era utilizado no santuário. Seu formato era cúbico, ingenuamente simplesmente dobraram o tamanho das arestas para o novo altar, e o volume ficou 8 vezes maior em relação ao inicial, após isso a peste ficou mais

forte dificultando ainda mais a vida dos Atenenses. Sabemos hoje que a medida da aresta inicial deveria ser multiplicada por $\sqrt[3]{2}$.

Nascia em Atenas ou próximo daquela região um matemático que apresentou uma solução por aproximação da duplicação do cubo. Platão, aproximadamente 427 a.C foi um grande estudioso, que andava por diversas regiões em busca de conhecimento, retornou para sua cidade natal em 387 a.C fundando sua famosa academia, uma instituição pautada na investigação científica e filosófica. Grande parte dos trabalhos matemáticos importantes do século IV a.C foram feitos por amigos ou discípulos de Platão, tinha convicção de que os estudos da matemática refinavam o treinamento espiritual, o lema de sua academia dizia: "Que aqui não adentrem aqueles que não versados em geometria".

Também temos uma versão envolvendo um antigo rei grego, conhecido como Rei Minos. Após a morte de seu filho, Glauco, o rei, ordenou que dobrasse o volume do túmulo onde o mesmo estava enterrado, um poeta ao descrever a ordem do rei pediu que dobra-se as dimensões do túmulo mantendo-se sua forma original, tal erro matemático despertou a curiosidade dos geômetras em dobrar o volume de sólidos mantendo-se sua forma.

Os Gregos antigos eram mestres na resolução de problemas com a utilização de régua não graduada e compasso, os chamados instrumentos Euclidianos. Solucionar um problema com régua e compasso significa ser capaz apenas de traçar uma reta de comprimento qualquer por dois pontos já conhecidos e, traçar uma circunferência conhecendo-se dois pontos, o centro, e um pertencente a circunferência. O que impressiona é a quantidade de construções geométricas desenvolvidas com exata precisão, retas paralelas, perpendiculares, divisão de um segmentos em n partes iguais, divisão de um ângulo qualquer em $2n$ partes iguais, porém o problemas citados acima, duplicação do cubo, ficou conhecido como uma impossibilidade clássica. Seguindo tais regras, não foi possível na época encontrar a medida da nova aresta.

Dentre tantas construções, tiveram várias tentativas para encontrar uma solução para outro problema clássico, a trissecção do ângulo. Nada mais é do que dividir um ângulo qualquer em 3 partes iguais, o problema pode ter surgido após a descoberta de métodos relacionados a divisão de segmentos ou a bissecção de ângulos, o que deve de certa forma ser a grande surpresa, pois, como não será possível fazer algo aparentemente tão simples? Tal problema também poderá estar relacionado a construção do polígono regular de 9 lados, onde os ângulos internos são dados por

$$\alpha = \frac{(n-2)180}{n} \text{ que para } n = 9 \text{ teremos } \alpha = \frac{(9-2)180}{9} = 7 \cdot 20$$

Como os gregos já tinham conhecimento sobre a construção do ângulo de 60° através do triângulo equilátero, talvez possam ter tentado fazer a trissecção do ângulo de 60° para obter o de 20° , e assim construir o polígono de 9 lados.

Por fim o terceiro problema diz respeito a quadratura de um círculo, ou seja, construir um quadrado cuja área é equivalente a de um círculo dado. Existiu um matemático (cerca de

499 a.C) chamado Anaxágoras que a história faz ligações do problema ao seu nome, porém suas contribuições são desconhecidas. Anaxágoras deixou um sucessor, Hipócrates, que teve sucesso em quadrar certas luas. Ao que parece foi esse o caminho seguido por ele, pois percebeu que as mesmas eram formadas por arcos de circunferências.

O nome mais forte é de Hípias de Elis, matemático, historiador, ótimo orador, além de artesão, dominava geometria, astronomia, música e filosofia (aproximadamente 425 a.C) responsável por mudanças fundamentais na matemática grega no final do século V a.C. Destacou-se por contar vantagens sobre grandes quantias de dinheiro que ganhou através de seu trabalho intelectual, por conhecer pessoas influentes e ter um vasto conhecimento. Se tornou embaixador de Elis, tendo oportunidade de conhecer outras cidades como Atenas e Esparta, criou o ensino mnemotécnica, a arte da memorização, inventou a curva chamada quadratriz, que resolveria tanto o problema da quadratura como a trisseção, destacando que tais soluções não seguem as regras dos instrumentos Euclidianos, tratando-se de métodos por aproximação.

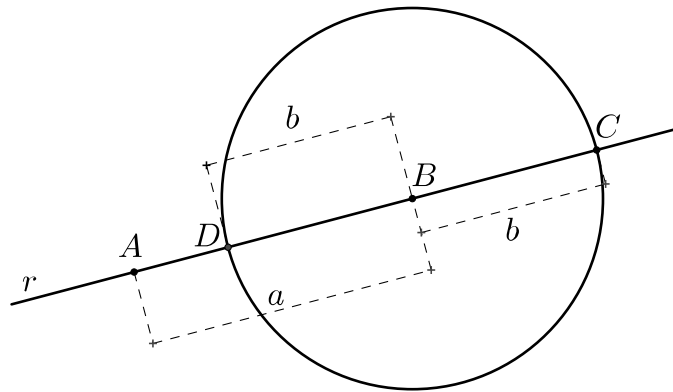
3.2 Conceitos Envolvidos

A busca por soluções dos problemas clássicos serviram de motivação para o desenvolvimento de diversos conceitos. Destaque para os pontos construtivos, que são aqueles possíveis de serem obtidos com um número finito de operações usando régua e compasso, ou seja, são dados por intersecções de duas retas, duas circunferências, ou uma reta e uma circunferência. Ao imaginarmos que tais construções são realizadas no plano sobre um sistema de eixos perpendiculares OXY de origem no ponto O , cujas coordenadas são $(0,0)$, vemos que tais coordenadas podem ser representada em uma reta, e que cada ponto dessa reta está associado a um único número real \mathbb{R} . Esses números serão chamados construtivos, as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas estão bem definidas nesse conjunto. Isso poderá ser visto em maiores detalhes nas representações a seguir.

Considere dois segmentos de medidas a e b respectivamente onde $a \geq b$. Sobre uma reta r marque o segmento $AB = a$, observe na Figura 11. Com o compasso centrado em B construa uma circunferência de raio b e marque os pontos C e D de intersecção da circunferência com a reta r , de modo que o ponto $C \notin AB$. Observe que $AC = AB + BC = a + b$ e $AD = AB - DB = a - b$. Essas construções realizadas em r representam as operações de adição e subtração entre duas grandezas a e b .

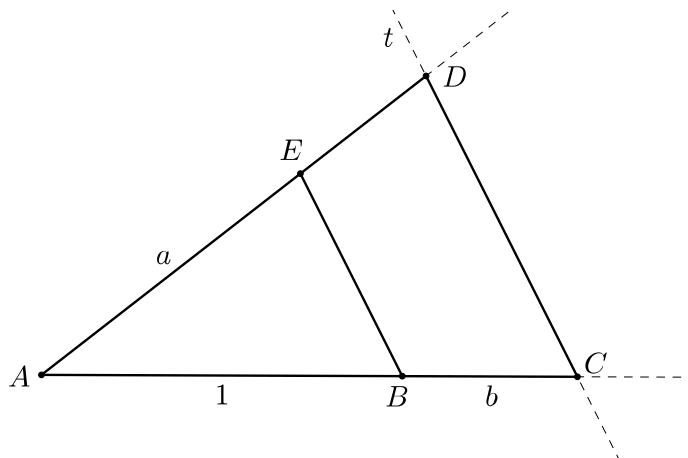
Ao construirmos duas semirretas não colineares com origem no ponto A , veja Figura 12, podemos marcar sobre uma delas outros dois pontos, sejam eles B e C , com $AB = 1$ e $BC = b$. Na outra semirreta marque o ponto E onde $AE = a$ e construa uma reta t paralela a BE passando pelo ponto C . Prolongue a semirreta AE até encontrar o ponto D de intersecção com a reta t . No triângulo $\triangle ACD$ os segmentos BE e CD são paralelos, o que nos permite dizer pelo teorema de Tales que $\frac{1}{a} = \frac{b}{DE}$ e $DE = ab$. Tal construção representa geometricamente o produto de duas

Figura 11 – Adição e subtração de duas grandezas $AC = a + b$ e $AD = a - b$. Adaptado de Costa (2013)



grandezas a e b .

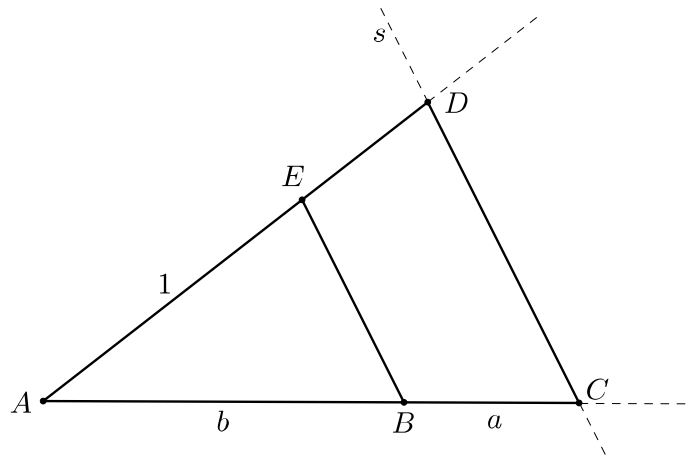
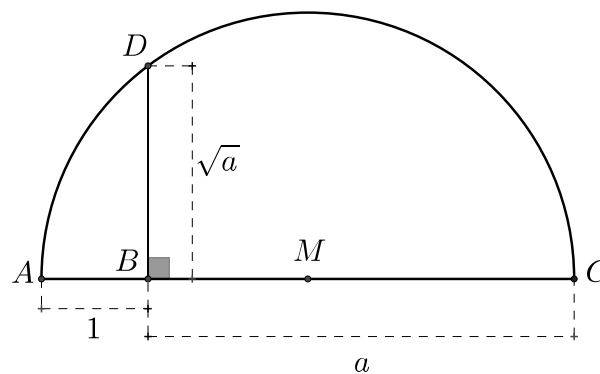
Figura 12 – Multiplicação de duas grandezas $DE = ab$



Com a construção de um triângulo $\triangle ABE$, onde $AB = b$ e $AE = 1$, acompanhe na Figura 13, é possível prolongar o lado AB até que consigamos marcar sobre ele o ponto C de tal forma que $BC = a$. Trace uma reta s paralela ao segmento BE passando pelo ponto C . Prolongue também o lado AE até encontrarmos o ponto D correspondente a intersecção de s com o prolongamento do lado AE . Novamente pelo teorema de Tales temos que $\frac{1}{b} = \frac{ED}{a}$ e $ED = \frac{a}{b}$. Como se vê, conseguimos representar geometricamente a razão entre duas grandezas a e b .

É possível através de construções geométricas fazer a extração de raízes quadradas. Inicialmente construa um segmento $AB = 1$, veja na Figura 14. Posteriormente na mesma reta que contém AB , trace a partir de B um segmento $BC = a$, marque o ponto M , médio de AC , e construa o semicírculo AC . Faça um segmento BD perpendicular a AM , onde o ponto D é dado pela intersecção do segmento com o semicírculo. Pela semelhança entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle CBD$, temos que $\frac{1}{BD} = \frac{BD}{a} \implies BD^2 = a \implies BD = \sqrt{a}$

Importante observar que qualquer situação problema em números reais \mathbb{R} , em que a solução esteja baseada nas quatro operações e em extração de raízes quadradas, poderá ser

Figura 13 – Razão entre duas grandezas $DE = \frac{a}{b}$ Figura 14 – Raiz quadrada de uma grandeza $BD = \sqrt{a}$. Adaptado de Costa (2013)

resolvida através de construções geométricas. Portanto tal solução estará sendo representada por um número dito construtivo.

3.3 Algumas soluções por Nêusis

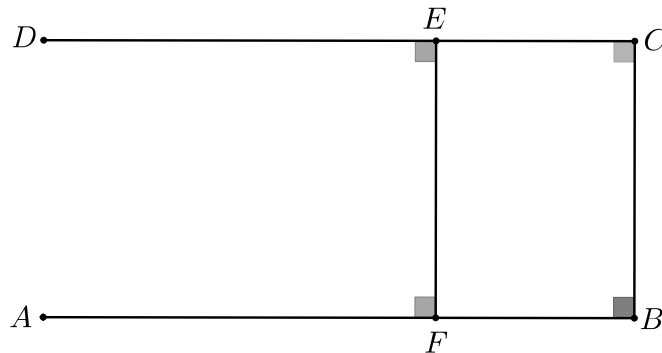
Os três problemas clássicos da matemática grega resistiram a genialidade de vários matemáticos ao longo dos tempos. Apresentamos aqui três soluções por Nêusis, cada uma relacionado a um dos problemas, que nada mais é do que um tipo de solução por ajustamento, o que acarretará em uma aproximação da resposta correta. Hipócrates de Quios, viveu em torno de 430 a.C elaborou a solução do problema Deliano usando duas meias proporcionais x e y entre 1 e 2, Observe as equações abaixo:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$$

De onde podemos tirar que $x^2 = y$, ao multiplicarmos ambos os lados da igualdade por x , temos $x^3 = xy$, da relação inicial $xy = 2$, o que nos leva a concluir que $x^3 = 2$ assegurando a ligação entre as meias proporcionais e o problema de duplicação do cubo.

Será exibida uma solução desenvolvida por Platão que ficou conhecida como a Máquina de Platão. Observe na Figura 15 a construção, os segmentos AB e DC são paralelos, já o segmentos BC e EF , são paralelos entre si e ambos perpendiculares a AB e DC . Veremos que a grande facilidade em encontrar as meias proporcionais está no fato do segmento EF ser capaz de se deslocar horizontalmente sem que os pontos E e F saiam da reta que os contém.

Figura 15 – Máquina de Platão. Adaptado de Carvalho (2010)

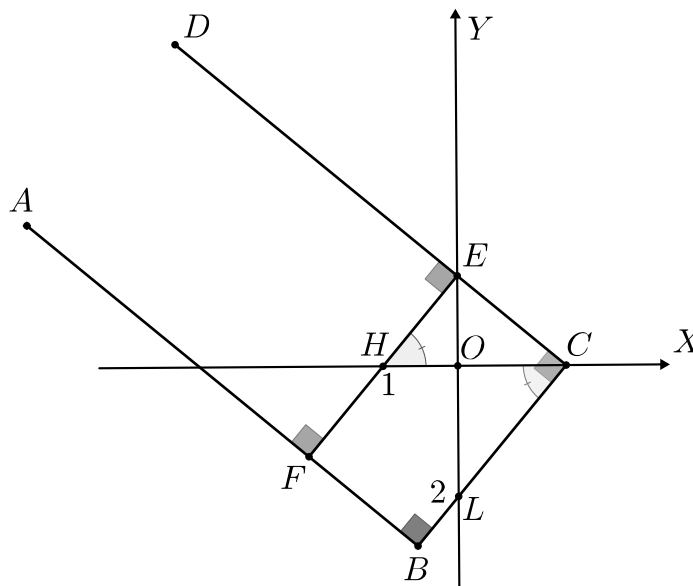


Ao ajustarmos a máquina em um sistema de eixos ortogonais OXY como na Figura 16 de tal forma que o ponto E fique sobre o eixo Y , o ponto C sobre o eixo X , e simultaneamente $OH = a$ e $OL = b$. As meias proporcionais entre a e b serão as medidas dos segmentos OE e OC , ou seja, teremos $\frac{a}{OE} = \frac{OE}{OC} = \frac{OC}{b}$. O problema de estudo trata-se de uma caso particular para $a = 1$ e $b = 2$. Veja

$$\frac{1}{OE} = \frac{OE}{OC} = \frac{OC}{2}$$

Observe da relação anterior que $OE^2 = OC$ e $OE \cdot OC = 2$, portanto $OE \cdot OE^2 = 2 \implies OE^3 = 2 \implies OE = \sqrt[3]{2}$ representando o valor da aresta do cubo após a duplicação do volume.

Figura 16 – Máquina de Platão ajustada ao problema de duplicação do cubo. Adaptado de Carvalho (2010)

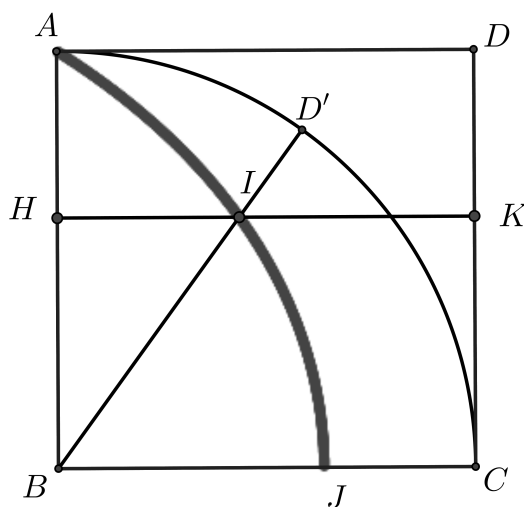


Como justificativa do seu funcionamento, veja que os triângulos $\triangle OHE$ e $\triangle OCL$ são semelhantes, os ângulos $\angle EOH$ e $\angle COL$ são opostos pelo vértice e $\angle EHC$ e $\angle HCL$ são alternos internos, o que garante a igualdade $\frac{OH}{OE} = \frac{OC}{OL}$, temos por construção que o triângulo EHC é retângulo no ponto E , e que EO , é a altura baixada de E relativa a hipotenusa HC , portanto os triângulos $\triangle EHO$ e $\triangle EOC$ também são semelhantes, garantindo que $\frac{HO}{OE} = \frac{OE}{OC}$, e consequentemente.

$$\frac{HO}{OE} = \frac{OE}{OC} = \frac{OC}{OL} \implies \frac{a}{OE} = \frac{OE}{OC} = \frac{OC}{b}$$

A respeito da trisseccção do ângulo temos uma solução atribuída a um matemático chamado Hípias de Elis. Ele foi um dos primeiros a solucionar o problema usando um tipo de curva que ficou conhecida como trissetriz ou quadratriz, ganhou esse segundo nome pois a mesma também auxilia na resolução da quadratura do círculo, curva essa impossível de ser obtida usando apenas régua e compasso, para produzir a trissetriz devemos considerar um quadrado $ABCD$, Figura 17, e no seu interior um arco correspondente a um quarto de circunferência iniciando em A e terminando em C . Sobre esse mesmo arco um ponto D' , capaz de mover-se pelo arco \widehat{AC} , possibilitando a construção do segmento BD' . Também é possível termos o segmento HK , paralelo ao lado AD , onde os pontos H e K , estão sobre os lados do quadrado e movimentam-se verticalmente. Considere I o ponto de intersecção de HK e BD' , ao deslizar o ponto D' sobre o arco a partir de A , e simultaneamente descer o segmento HK a partir de AD , ambos na mesma velocidade, fazendo que D' e HK chegue ao mesmo tempo sobre o lado BC , automaticamente teremos um rasto provocado pelo ponto I , esse rasto é a chamada trissetriz de Hípias.

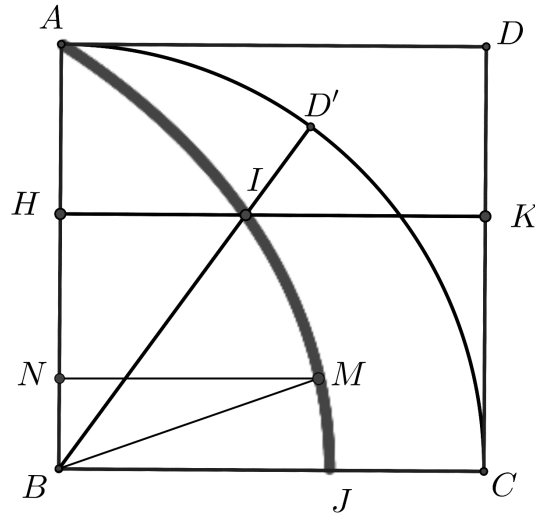
Figura 17 – Trissetriz de Hípias. Adaptado de Carvalho (2010)



Para fazer a trisseccção do ângulo $\angle D'BC$, acompanhe na Figura 18, basta dividir o segmento BH em três partes iguais, construção essa possível com os instrumentos Euclidianos, em seguida fazer um segmento NM paralelo a BC onde N encontra-se dividindo BH na razão 2

para 1. Como o tempo gasto para H chegar até N é o dobro do tempo necessário para N chegar em B , teremos as relações entre os arcos $\widehat{IM} = 2\widehat{MJ}$, e conseqüentemente $\widehat{MJ} = \frac{1}{3}\widehat{IJ}$.

Figura 18 – Trissetriz de Hípias onde $\widehat{MJ} = \frac{1}{3}\widehat{IJ}$. Adaptado de Carvalho (2010)



Assim como dito anteriormente é possível encontrar a solução para quadratura do círculo usando a trissetriz de Hípias, porém agora denominada quadratriz. A área de um quadrado de lado x é equivalente a x^2 , já πr^2 corresponde a área de um círculo de raio r . Portanto a solução da quadratura depende de $x^2 = \pi r^2 \implies x = r\sqrt{\pi}$ resumindo o problema ao encontro de um segmento cuja medida é $\sqrt{\pi}$.

Considerando ainda na Figura 18, pela movimentação constante de D' e HK , existe uma proporcionalidade entre o ângulo $\theta = \angle IBJ$ e o lado $x = HB$. Podemos escrever uma constante de proporcionalidade

$$k = \frac{x}{\theta}$$

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$ teremos $x = a$ onde a é a medida do lado do quadrado, e

$$k = \frac{a}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2a}{\pi}$$

. Como $k = \frac{x}{\theta} \implies \theta = \frac{x}{k} = \frac{x}{\left(\frac{2a}{\pi}\right)} = \frac{x\pi}{2a}$ e por conseqüência $x = \frac{2a\theta}{\pi}$.

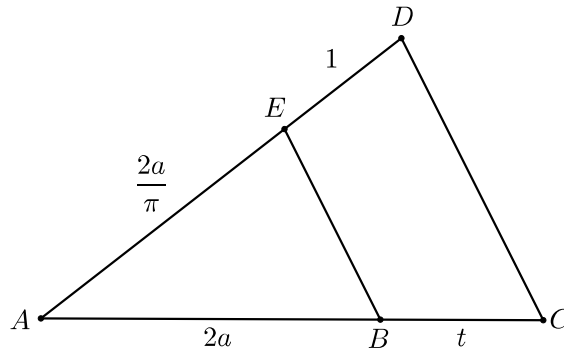
$$\text{Temos também } \sin \theta = \frac{x}{BI} \implies BI = \frac{x}{\sin \theta} \implies BI = \frac{2a\theta}{\pi \sin \theta}$$

Ao fazermos $\lim_{\theta \rightarrow 0} BI = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2a\theta}{\pi \sin \theta}$ e observando que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$ resultado proveniente do cálculo diferencial.

$$\text{Concluimos que } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2a\theta}{\pi \sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2a}{\pi} \frac{\theta}{\sin \theta} = \frac{2a}{\pi}$$

Isso mostra que para θ tendendo a zero o valor do segmento $BJ = \frac{2a}{\pi}$. Usando construção semelhante a da Figura 13 será possível construirmos um segmento de media π . Observe na Figura 19 onde temos as medias AE, ED e AB faltando apenas $BC = t$.

Figura 19 – Construção do segmento $t = \pi$



Pela proporção entre os segmentos $\frac{(\frac{2a}{\pi})}{2a} = \frac{1}{t} \implies \frac{1}{\pi} = \frac{1}{t} \implies \pi = t$, do mesmo modo, se é possível termos um segmento de media π , usando construção semelhante a Figura 14, encontraremos $\sqrt{\pi}$ solucionando assim o problema.

Tais estratégias de solução para os três problemas clássicos além de apresentarem números consideravelmente próximos dos valores reais também foram responsáveis ao desenvolvimento de várias ideias matemáticas importantes para os dias atuais. Mais adiante veremos muitos outros conceitos que podem ser abordados tendo como tema central esses problemas.

CONCEITOS DE ÁLGEBRA

Nesse capítulo será abordado conceitos algébricos essenciais para o desenvolvimento da principal ferramenta que utilizaremos na prova das impossibilidades clássicas. O grande objetivo está em entender como surgiram os números complexos usando como exemplo as soluções por radicais, além de perceber tal conjunto como sendo um corpo. Deixar claro o envolvimento dos polinômios com as descobertas dos conjuntos numéricos e como os mesmos podem ser operados usando adição e multiplicação. Todos os conceitos aqui apresentados podem ser aprofundados nas referências (FERMINO, 2013) (BIAZZI, 2014) (JUNIOR, 2013) (PEREIRA, 2013a) (IEZZI, 2005) (LIMA, 2012) (HEFEZ, 2014) lembrando que serão de grande valia para o bom entendimento das próximas demonstrações.

4.1 Anel, Corpo e Homomorfismo

Antes de iniciarmos, precisaremos rever algumas propriedades algébricas fundamentais necessárias para classificarmos o que chamamos de estruturas algébricas, que são conjuntos numéricos não vazios onde seus elementos satisfazem certas propriedades relacionadas as operações de adição e multiplicação. Dessa maneira saberemos as possibilidades e limitações existentes em um dado conjunto numérico operando seus elementos em total exatidão. Observe a descrição de A1, A2, A3 e A4 logo abaixo, todas envolvendo operações binárias em relação a adição.

(A1) Associatividade: $\forall a, b, c, \in A, (a + b) + c = a + (b + c)$

(A2) Comutatividade: $\forall a, b, \in A, a + b = b + a$

(A3) Elemento neutro: $\exists 0 \in A$ tal que $\forall x \in A, x + 0 = 0 + x = x$

(A4) Elemento simétrico: $\forall x \in A, \exists -x \in A$, tal que $x + (-x) = -x + x = 0$

As próximas propriedades, $M1$, $M2$ e $M3$, envolvem a multiplicação entre dois elementos quaisquer dentro de um conjunto não vazio A .

$$(M1) \text{ Associatividade: } \forall a, b, c \in A, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(M2) \text{ Comutatividade: } \forall a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a$$

$$(M3) \text{ Elemento neutro: } \exists 1 \in A \text{ tal que } \forall y \in A, y \cdot 1 = 1 \cdot y = y$$

Teremos também a distributividade da multiplicação em relação a adição, a propriedade D envolve as duas operações simultaneamente.

$$(D) \text{ Distributividade: } \forall a, b, c \in A, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Divisores por zero, $D0$, descreve o comportamento do elemento neutro da adição sobre a operação de multiplicação.

$$(D0) \text{ Divisores por zero: } \forall a, b \in A, a \cdot b = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Ter conhecimento das propriedades mencionadas acima e saber identificar a validade ou não das mesmas é fundamental na identificação da primeira estrutura algébrica aqui apresentada. Veja a definição de Anel.

Definição 4.1.1 (Anel). Se um conjunto A for fechado em relação as operações de adição (+) e multiplicação (\cdot), chamamos a terna $(A, +, \cdot)$ um anel se as propriedades, $A1$, $A2$, $A3$, $A4$, $M1$ e D forem verdadeira.

Se ao aplicarmos as operações de adição ou multiplicação entre dois elementos quaisquer de um determinado conjunto A observarmos que o resultado encontrado continua sendo um elemento pertencente a A . Diremos que A é fechado em relação as operações de adição e multiplicação.

Agora que sabemos identificar se um conjunto possui características de Anel, podemos ir um pouco mais adiante e reconhecer Anéis comutativos, com unidade e sem divisores por zero. A especificação matemática dos três tipos encontra-se nas próximas definições.

Definição 4.1.2 (Anel comutativo). Seja $(A, +, \cdot)$ um anel, se $M2$ é verdadeira, o mesmo será chamado anel comutativo.

Definição 4.1.3 (Anel com unidade). Seja $(A, +, \cdot)$ um anel, se $M3$ é verdadeira, o mesmo é chamado anel com unidade.

Definição 4.1.4 (Anel sem divisores por zero). Seja $(A, +, \cdot)$ um anel, se $D0$ é verdadeira, o mesmo é chamado anel sem divisores por zero.

Se em um conjunto qualquer identificarmos a validade das definições 4.1.2, 4.1.3 e 4.1.4, poderemos classificar tal conjunto como sendo um domínio de integridade.

Definição 4.1.5 (Domínio de Integridade). Seja $(A, +, \cdot)$ um anel, se $M2$, $M3$ e $D0$ for verdadeira, o mesmo será chamado domínio de integridade.

A fim de complementar as propriedades acima, temos as demonstrações que provam a unicidade dos elementos neutros, aditivo e multiplicativo e também a unicidade do elemento simétrico.

Demonstração. O elemento neutro da adição é único. De fato, sendo α e α' os elementos neutros aditivos, ao selecionarmos um elemento qualquer $x \in A$, temos $x + \alpha = x$ pois α é elemento neutro. Do mesmo modo $x + \alpha' = x$, α' também é elemento neutro. Com isso podemos concluir que $x + \alpha = x + \alpha' \implies \alpha = \alpha'$. Como conhecemos α é simbolizado pelo número zero. \square

Demonstração. O elemento neutro da multiplicação é único. De fato, considere um elemento $x \in A$, e os elementos $e, e' \in A$, onde e, e' são elementos neutros multiplicativos de x , então $x \cdot e = x$, do mesmo modo $x \cdot e' = x$ portanto $x \cdot e = x \cdot e' \implies e = e'$. Como conhecemos o elemento neutro multiplicativo é representado pelo número 1. \square

Demonstração. O elemento simétrico da adição é único. De fato, sendo $a, a' \in A$ são elementos simétricos de um outro elemento qualquer $x \in A$, podemos dizer que $a + x = 0$ e $a' + x = 0$ mostrando que $a + x = a' + x \implies a = a'$. Simbolizamos o simétrico de um elemento a usando o símbolo $-a$. A operação $a + (-b)$ é simplesmente representada por $a - b$. \square

A próxima propriedade faz parte da operação de multiplicação, e será importante para definirmos mais um conceito fundamental em anéis. Identificar a validade dessa propriedade nos permitirá classificar os conjuntos exatamente como será necessário para o tratamento das próximas situações que serão apresentadas. Veremos agora quando um Anel assume características de corpo.

(M4) Elemento Inverso: $\forall x \in A, x \neq 0, \exists y \in A$ tal que, $x \cdot y = 1$

Definição 4.1.6 (Corpo). Seja $(A, +, \cdot)$ um domínio de integridade, se $\forall x \in A, M4$ for verdadeira, então a estrutura algébrica $(A, +, \cdot)$ será chamada de corpo

Enquadram-se como sendo corpo o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$, reais \mathbb{R} e complexos $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. A propriedade M4, existência de elemento inverso caracteriza os números racionais \mathbb{Q} como o menor corpo existente. Complementando a propriedade M4 será demonstrado que existindo o elemento inverso, esse é único.

Demonstração. Sejam $b, b' \in A$ elementos inversos de um dado elemento $x \in A$, pela definição dada aos elementos invertíveis temos, $a \cdot b = 1$ e $a \cdot b' = 1$ portanto $a \cdot b = a \cdot b' \implies b = b'$. O inverso de um elemento x é representado pelo símbolo x^{-1} . \square

Em muitos casos, há a necessidade de se levar em consideração conjuntos menores, pois nem sempre precisamos de todos os elementos do conjunto, ou seja, subconjuntos que possuem propriedades de anéis ou corpos e que estão contidos dentro de outros conjuntos também classificados como anéis ou corpos. A esses subconjuntos damos o nome de subanéis e subcorpos. Observe as duas definições a seguir:

Definição 4.1.7 (Subanéis). Seja $(A, +, \cdot)$ um anel e B um subconjunto de A tal que $B \neq \emptyset$ e B é fechado em relação as operações de adição $(+)$ e multiplicação (\cdot) . Se a terna $(B, +, \cdot)$ for um anel então também poderemos chama-la um subanel do conjunto A .

Definição 4.1.8 (Subcorpo). Seja $(A, +, \cdot)$ um corpo e B um subconjunto de A tal que $B \neq \emptyset$ e B é um subanel do conjunto A . Se $\forall x \in A, x^{-1} \in A$, a terna $(B, +, \cdot)$ definirá um subcorpo de A .

Existem funções relacionando anéis e corpos que são chamadas de homomorfismos. Um homomorfismo é uma função f que relaciona elementos de dois conjuntos A e B onde os mesmos possuem características de anéis ou corpos além de obedecerem duas propriedades básicas. A primeira diz que adicionar de dois elementos do domínio e aplicar a função f é equivalente a aplicar a função f em cada elemento separadamente para só então adiciona-los. A segunda segue à mesma estratégia da primeira, porém ao invés de usar adição usa-se multiplicação. Tal relação esta exemplificada na próxima definição.

Definição 4.1.9 (Homomorfismos). Sejam A e B dois anéis, uma função $f : A \longrightarrow B$ será chamada homomorfismo de A em B , se as condições a seguir forem satisfeita

$$(a) f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in A$$

$$(b) f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in A$$

Sabemos que f é uma função que pode ser injetiva, quando tal fato ocorrer teremos um homomorfismo injetor ou monomorfismo, e se f for uma função bijetiva o homomorfismo bijetivo também é conhecido como isomorfismo.

Lema 1. Dado $a \in \mathbb{C}$ a aplicação

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_a : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C} \\ p = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i a^i \end{array} \right.$$

É um homomorfismo de anéis chamado homomorfismo de valoração. Notação: $p(a) := \phi_a(p)$

Lembrando que $\mathbb{C}[X]$ é o conjunto dos polinômios com variável x e coeficientes $a_i \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Suponha por absurdo que a aplicação ϕ_a não seja um homomorfismo de anéis. Como homomorfismo por definição já é uma aplicação, então $\mathbb{C}[X]$ e \mathbb{C} não possuem características de anel, contradição observe a seção 4.2 \square

4.2 Números complexos

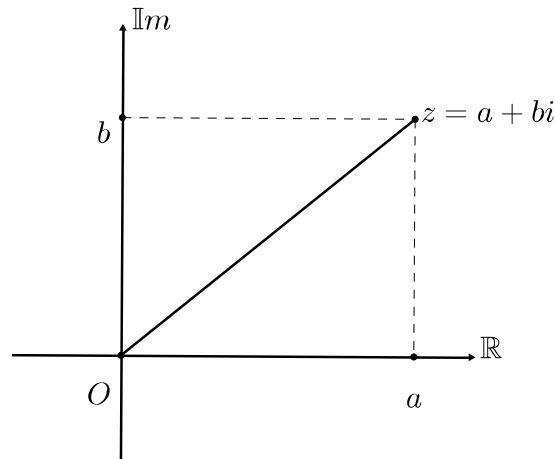
Na resolução de equações dentro do conjunto dos números naturais \mathbb{N} , como por exemplo $x + 4 = 9 \implies x = 5$, não teremos problema algum em ver significado para raiz encontrada, pois $x \in \mathbb{N}$. Já para equações do tipo $x + 8 = 7 \implies x = -1$ onde $x \notin \mathbb{N}$, a raiz desta equação não faz sentido para os naturais \mathbb{N} , mas faz total sentido para os números inteiros \mathbb{Z} . Do mesmo modo que $3y = 12 \implies y = 4, y \in \mathbb{Z}$, já no caso $4y = 6 \implies y = \frac{3}{2}$ onde $y \notin \mathbb{Z}$, teremos $y \in \mathbb{Q}$, e no caso de equações como $x^2 = 7$ onde $x = \sqrt{7}$ fará sentido para reais \mathbb{R} . Pelo mesmo motivo surgiram os números complexo \mathbb{C} . Ao nos depararmos com raízes de índice par com radicando menor do que 0, por exemplo $\sqrt{-4}$, só pode ser explicada no conjunto dos números complexos \mathbb{C} . A teoria dos grupos de Galois explica formas para maior entendimento de pensamentos nesse caminho. Aqui não será demonstrado, mas entenderemos o envolvimento do teorema fundamental da álgebra com o fato do não aparecimento de outros conjuntos além dos complexos \mathbb{C} .

Basicamente, essa maneira de pensar em outros conjuntos apareceram da necessidade de se resolver equações. Entenderemos melhor essa necessidade estudando métodos de resolução por radicais e as principais características dos números \mathbb{C} relacionadas as raízes de polinômios.

Falar de números reais \mathbb{R} está associado a pensar em uma reta marcada com um ponto inicial representando o número 0, e a partir daí ser possível representar todos os demais nessa mesma reta. Agora ao falarmos dos complexos \mathbb{C} precisamos pensar se seria possível a existência de valores além da reta. A resposta é positiva pois temos os pontos representados em um plano que contenha a reta real \mathbb{R} . Mas como operar adição (+) e multiplicação (\cdot) envolvendo pontos de um plano? Para tal resposta acompanhe as próximas definições:

Definição 4.2.1. Um número complexo \mathbb{C} é um número da forma $z = a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ sendo $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$ chamadas de partes real e imaginária de z respectivamente. O valor $i = \sqrt{-1}$ chama-se unidade imaginária.

Ao considerarmos um sistema de eixos ortogonais OXY podemos representar infinitos pontos por pares ordenados (x, y) . Do mesmo modo é possível construir um outro sistema de eixos ortogonais onde os eixos sejam representados respectivamente pela reta real \mathbb{R} e pelo eixo imaginário \mathbb{Im} , nesse último representaremos a parte imaginária do complexo z . Veja o complexo $z = a + bi$ representado na Figura 20.

Figura 20 – Representação do número complexo $z = a + bi$ no plano

Se é possível representar cada número complexo \mathbb{C} em um plano então existe uma relação entre os complexos \mathbb{C} e os pontos de \mathbb{R}^2 , lembrando que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Portanto podemos pensar nos números complexos como sendo vetores onde o par ordenado (a, b) representa as componentes do vetor.

Para realizarmos a soma de dois vetores basta somarmos suas componentes de forma correspondente. Do mesmo modo ocorrerá com os números complexos \mathbb{C} , adicionaremos as partes reais e em seguida as imaginárias.

Exemplo 4.2.1. Considere os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ teremos a soma $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$

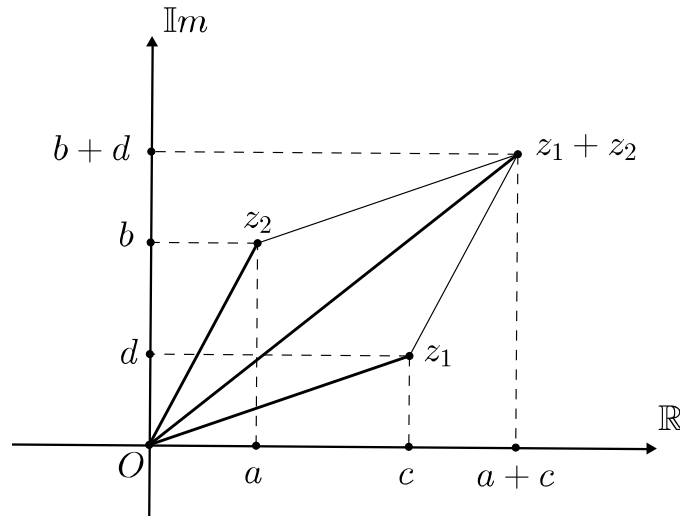
Logo em seguida na Figura 21 temos uma representação gráfica da soma de dois números complexos \mathbb{C} . Quando estamos trabalhando com vetores a mesma é chamada de regra do paralelogramo.

Para realização do produto $z_1 \cdot z_2$ temos que distribuir a parte real e imaginária de z_1 para ambas as partes de z_2 .

Exemplo 4.2.2. Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ então $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$ observando que $i^2 = -1$ teremos $z_1 \cdot z_2 = ac - bd + i(ad + bc)$

Tal produto definido dessa forma mantém o funcionamento das operações em reais \mathbb{R} dando significado para o número $\sqrt{-1}$. O produto dos pares ordenados $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$. Como $(0, 1)$ é a unidade imaginária i e $(-1, 0)$ representa o número real puro -1 temos a equivalência nas equações

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = i \cdot i = i^2 = (-1, 0) = -1$$

Figura 21 – Representação da soma dos números complexos $z_1 + z_2$ no plano

Vetores possuem módulo direção e sentido e para calcular o módulo de um vetor temos que elevar cada uma de suas componentes ao quadrado somar e extrair a raiz quadrada da soma. Assim como os vetores os números complexos \mathbb{C} também possuem módulo.

Definição 4.2.2. O módulo de um número complexo $z = a + bi$ será representado por $|z|$ ou ρ e define-se por $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Podemos também representar um números \mathbb{C} em sua forma trigonométrica ou polar. Acompanhe na Figura 22, o diferencial está em destacarmos a funcionalidade do ângulo θ existente entre o semi eixo positivo real \mathbb{R} e o segmento formado pela origem O e o ponto onde localiza-se o complexo z .

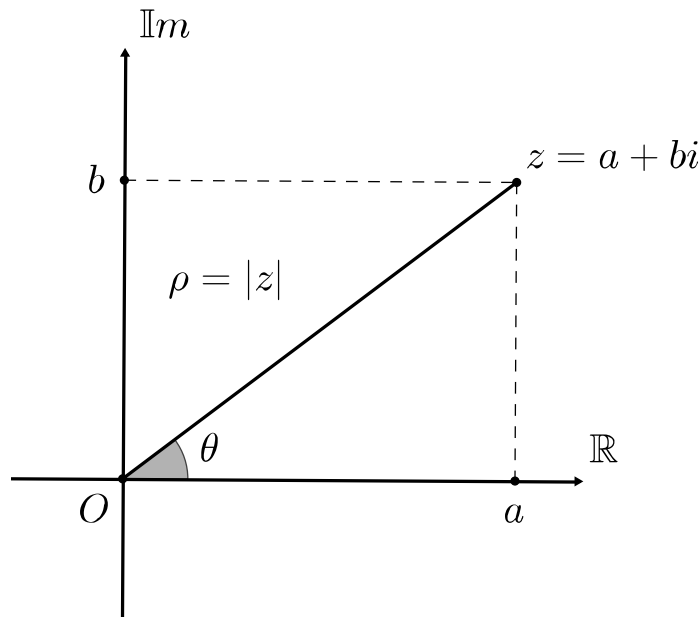
Podemos escrever usando relações trigonométricas como $\cos \theta = \frac{a}{\rho} \implies a = \rho \cos \theta$ e $\sin \theta = \frac{b}{\rho} \implies b = \rho \sin \theta$. Portanto $z = a + bi = \rho \cos \theta + i\rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$

A próxima definição sistematiza como operar com números complexos \mathbb{C} percebendo-os como pares ordenados.

Definição 4.2.3. Dados dois números complexos \mathbb{C} onde seus pares ordenados são representados respectivamente por $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$. A adição e a multiplicação desses pares será dada por:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \end{aligned}$$

Além das já citadas acima temos a definição do conjugado de um números complexo z que pode ser obtido multiplicando a parte imaginária por -1 . Veremos mais adiante sua importância na determinação do elemento inverso de um complexo.

Figura 22 – Representação do módulo do número complexo z 

Definição 4.2.4. O conjugado do número complexo $z = a + bi$ será denotado por $\bar{z} = a - bi$

Veremos a seguir que o conjunto dos números complexos \mathbb{C} possui características de corpo ao definirmos $(+)$ e (\cdot) como em 4.2.3. Para tal verificação precisaremos analisar as propriedades de adição e multiplicação formuladas no início do capítulo especificadas como $A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, D, D0$ e $M4$. Devemos também considerar a partir de agora nas demonstrações de todas as propriedades $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, onde $z_1 = (a + bi)$, $z_2 = (c + di)$ e $z_3 = (e + fi)$.

Demonstração. A1 associatividade: Provar que $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = [a + c + i(b + d)] + (e + fi) \\ &= a + c + e + i(b + d + f) = a + c + e + ib + id + if \\ &= a + ib + c + id + e + if = (a + ib + c + id) + e + if \\ &= [(a + ib) + (c + id)] + (e + if) = (z_1 + z_2) + z_3 \end{aligned}$$

□

Demonstração. A2 Comutatividade: Provar que $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) = a + c + i(b + d) \\ &= a + c + ib + id = c + id + a + ib = (c + id) + (a + ib) \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

□

Demonstração. A3 Elemento neutro: Provar que $\exists z = x + yi \in \mathbb{C} \mid \forall z_k = a + bi \in \mathbb{C}, z_k + z = z_k$

$$\begin{aligned} z_k + z &= (a + bi) + (x + yi) = a + x + i(b + y) = (a + bi) = z_k \\ &= a + x = a \implies x = 0 \quad b + y = b \implies y = 0 \\ &= z = (0, 0) \end{aligned}$$

□

Demonstração. A4 Elemento simétrico: Provar que $\forall z = a + bi \in \mathbb{C} \exists$ outro $\mathbb{C}, z_k = x + yi \mid z + z_k = (0, 0)$

$$\begin{aligned} z + z_k &= (a + bi) + (x + yi) = a + x + bi + yi = (a + x) + i(b + y) = (0, 0) \\ a + x &= 0 \implies x = -a \quad b + y = 0 \implies y = -b \\ z_k &= (-a - bi) = -(a + bi) = -z \end{aligned}$$

□

Demonstração. M1 Associatividade: Provar que $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(a + bi)(c + di)](e + fi) = [ac - bd + i(ad + bc)](e + fi) \\ &= (ac - bd)e - (ad + bc)f + i[(ad + bc)e + (ac - bd)f] \\ &= ace - bde - adf - bcf + i[ade + bce + acf - bdf] \\ &= a(ce - df) - b(de + cf) + i[a(de + cf) + b(ce - df)] \\ &= (a + bi)[ce - df + i(de + cf)] \\ &= (a + bi)[(c + di)(e + fi)] \\ &= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \end{aligned}$$

□

Demonstração. M2 Comutatividade: Provar que $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + i(bc + ad) = z_2 \cdot z_1$$

□

Demonstração. M3 Elemento neutro: Provar que $\exists z = x + yi \in \mathbb{C} \mid \forall z_k = a + bi, \in \mathbb{C}$ teremos $z_k \cdot$

$$z = z_k$$

$$\begin{aligned} z_k \cdot z &= (a + bi)(x + yi) = ax - by + i(bx + ay) = (a + bi) \\ ax - by = a &\implies ax = a + by \implies x = \frac{a + by}{a} \\ bx + ay = b &\implies b \left(\frac{a + by}{a} \right) + ay = b \implies \frac{ba + b^2y + a^2y}{a} = b \implies \\ y(a^2 + b^2) &= ba - ba \implies y = \frac{0}{a^2 - b^2} \implies y = 0 \\ x = \frac{a + by}{a} &= \frac{a}{a} = 1 \\ z_k &= 1 + 0i = 1 \end{aligned}$$

□

Demonstração. D Distributividade: Provar que $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a + bi)[(c + di) + (e + fi)] = (a + bi)[c + e + i(d + f)] \\ &= a(c + e) - b(d + f) + i[b(c + e) + a(d + f)] \\ &= ac + ae - bd - bf + i[bc + be + ad + af] \\ &= [ac - bd + i(bc + ad)] + [ae - bf + i(be + af)] \\ &= (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi) \\ &= z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 \end{aligned}$$

□

Para próxima demonstração precisamos ter em mente que $x \in \mathbb{R} \implies x^2 \geq 0$ e que dados $x, y \in \mathbb{R}$, a adição de $x^2 + y^2 = 0$ se e somente se $x = y = 0$.

Demonstração. D0 Divisores por zero: Provar que $z_1 \cdot z_2 = 0 \implies z_1 = (0, 0)$ ou $z_2 = (0, 0)$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) = ac - bd + i(bc + ad) = (0, 0) \\ ac - bd = 0 &\implies ac = bd \implies a = \frac{bd}{c} \text{ ou } c = \frac{bd}{a} \\ bc + ad = 0 &\implies b \left(\frac{bd}{a} \right) + ad = 0 \implies b^2d + a^2d = 0 \implies b^2 + a^2 = 0 \end{aligned}$$

Portanto $a = b = 0$ e $z_1 = (0, 0)$

$$bc + \left(\frac{bd}{c} \right) d = 0 \implies bc^2 + bd^2 = 0 \implies c^2 + d^2 = 0$$

Do mesmo modo $c = d = 0$ e $z_2 = (0, 0)$

□

Essas sequências de demonstrações já nos garante que os números complexos \mathbb{C} enquadram-se como um domínio de integridade. Para próxima prova descreveremos o inverso de um número complexo garantindo a validade de $M4$.

Demonstração. M4 Elemento inverso, $\exists z^{-1} \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C} z^{-1} \cdot z = 1$

$$z^{-1} \cdot z = 1 \implies z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \left(\frac{a-bi}{a-bi} \right) = \left(\frac{a-bi}{a^2+b^2} \right)$$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

□

Agora está provado que o conjunto dos complexos é de fato um corpo. Essa informação servirá de base para discussão do próximo capítulo, Extensão de Corpos, pois toda teoria apresentada está construída sobre subcorpos de números complexos.

4.3 Equações

Essa necessidade de se estender os conjuntos numéricos foi originada através da busca incessante de se resolver equações. Nesta seção serão expostas algumas das principais ideias relacionadas à resolução das mesmas. Veremos que as várias tentativas em representar as raízes de uma equação cujo grau é igual ou superior a dois de forma explícita levaram alguns matemáticos a desenvolver as chamadas soluções por radicais.

4.3.1 Equações de 1º grau

Sendo a, b e c números reais \mathbb{R} . Equações do tipo $ax + b = c$ são ditas lineares na variável x ou de 1º grau. Sua solução é simples $ax + b = c \implies x = \frac{c-b}{a}$.

4.3.2 Equação quadrática

Equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ exigem soluções utilizando radicais. Com a técnica completamento de quadrados é possível apresentarmos o valor da incógnita x de forma explícita. Surgirá também o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ que possibilita a discussão sobre as raízes da equação. Para $\Delta \geq 0$ teremos $x \in \mathbb{R}$ e caso contrário as raízes não estarão mais em reais \mathbb{R} , mas sim nos complexos \mathbb{C} . Como podemos ver temos uma necessidade natural apresentada pela matemática na resolução de problemas quadráticos.

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c = 0 &\implies \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \implies x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \implies \\
 x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 &\implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \implies \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} &\implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \implies \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &\implies x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \implies \\
 x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a} &\implies x = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

Situações que recaem em equações de segundo grau são equivalentes a problemas do tipo soma e produto, ou seja, encontrar dois números x_1 e x_2 onde $x_1 + x_2 = b$ e $x_1 \cdot x_2 = c$. Esse raciocínio também nos levará até as unidades imaginárias dos números complexos.

4.3.3 Equações cúbicas

A equação do terceiro grau em sua forma geral apresenta-se como $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ onde também é possível encontrarmos soluções por radicais. Em 1494 um renomado professor de Matemática conhecido como Frei Luca Pacioli afirmou, em uma de suas publicações, que não podia haver regra geral para equações do tipo $x^3 + px = q$. Alguns matemáticos acreditaram nessa afirmação e se deram por vencidos. Scipione Ferro (1465-1526) foi professor da Universidade de Bolonha e descobriu a solução por radicais da equação do terceiro grau contrariando o posicionamento de Pacioli, porém publicações sobre o assunto foram realizadas por Girolamo Cardano (1501-1576). Ferro não publicava suas descobertas.

$$\begin{aligned}
 ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\
 \frac{ax^3}{a} + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} &= 0 \\
 x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} &= 0
 \end{aligned}$$

Isso mostra que podemos considerar equações em que o coeficiente de x^3 é igual a 1, ou seja, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ e sobre a mesma devemos substituir $x = y - \frac{a}{3}$ obtendo

$$\begin{aligned}
\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c &= 0 \\
y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c &= 0 \\
y^3 - ay^2 + ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{2a^2}{3}y + by + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} - \frac{a^3}{27} + c &= 0 \\
y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} - \frac{a^3}{27} + c\right) &= 0 \\
y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) &= 0
\end{aligned}$$

Observe que agora a equação encontra-se sem o termo quadrático, ao nomearmos

$$p = \left(b - \frac{a^2}{3}\right) \text{ e } q = \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)$$

reduzimos o problema a encontrar as soluções de $x^3 + px + q = 0$. Precisaremos fazer outra substituição, porém agora por $x = u + v$,

$$\begin{aligned}
x^3 + px + q &= 0 \\
(u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\
u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q &= 0 \\
u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q &= 0 \\
u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q &= 0
\end{aligned}$$

A equação será satisfeita se ocorrerem duas situações simultaneamente, $u^3 + v^3 = -q$, ao passo que $(3uv + p)(u + v) = 0 \implies 3uv + p = 0 \implies uv = \frac{-p}{3}$, elevando ambos os membros ao cubo, teremos $u^3v^3 = \frac{-p^3}{27}$, onde temos um problema de soma e produto como citado em 4.3.2, teremos que resolver uma equação quadrática,

$$t^2 + tq - \frac{p^3}{27}$$

Aplicando a fórmula para equações quadráticas

$$\begin{aligned}
t &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{\sqrt{4}} \\
&= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}{4}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}
\end{aligned}$$

Dessa maneira

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

isolando u e v ,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$\text{Portanto } x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Para esse tipo de equação a discussão das raízes está sobre $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. Se $D > 0$ teremos uma raiz real e duas complexas conjugadas. Se $D = 0$ as três raízes serão reais, sendo uma dupla. E para $D < 0$ a fórmula mostrará três raízes reais distintas. Este último é o chamado caso irreduzível pois ao tentar eliminar os radicais cai-se em outra equação do terceiro grau.

4.3.4 Equações de quarto grau

Veremos agora os procedimentos para equações do tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, esse tipo de solução foi desenvolvido por Ludovico Ferrari que foi discípulo de Cardano conduzindo a importantes avanços na teoria das equações.

Primeiramente deve-se dividir cada um dos termos por a

$$\begin{aligned} \frac{ax^4}{a} + \frac{bx^3}{a} + \frac{cx^2}{a} + \frac{dx}{a} + \frac{e}{a} &= 0 \\ x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} &= 0 \end{aligned}$$

Ou seja, nossa equação se resumirá ao estudo de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Em seguida será preciso substituir $x = y - \frac{a}{4}$ ocasionando a eliminação do termo ax^3 .

$$\begin{aligned}
& \left(y - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(y - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(y - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d = 0 \\
& \left(y - \frac{a}{4}\right)\left(y - \frac{a}{4}\right)^3 + a\left(y^3 - 3y^2\frac{a}{4} + 3y\frac{a^2}{16} - \frac{a^3}{64}\right) + \\
& \quad b\left(y^2 - \frac{a}{2}y + \frac{a^2}{16}\right) + cy - \frac{ac}{4} + d = 0 \\
& \left(y - \frac{a}{4}\right)\left(y^3 - 3y^2\frac{a}{4} + 3y\frac{a^2}{16} - \frac{a^3}{64}\right) + ay^3 - 3\frac{a^2}{4}y^2 + 3\frac{a^3}{16}y - \frac{a^4}{64} + by^2 - \\
& \quad b\frac{a}{2}y + b\frac{a^2}{16} + cy - c\frac{a}{4} + d = 0 \\
& \quad y^4 - 3\frac{a}{4}y^3 + 3\frac{a^2}{16}y^2 - \frac{a^3}{64}y - \frac{a}{4}y^3 + 3\frac{a^2}{16}y^2 - 3\frac{a^3}{64}y + \\
& \frac{a^4}{256} + ay^3 - 3\frac{a^2}{4}y^2 + 3\frac{a^3}{16}y - \frac{a^4}{64} + by^2 - b\frac{a}{2}y + b\frac{a^2}{16} + cy - c\frac{a}{4} + d = 0 \\
& \quad y^4 + 3\frac{a^2}{16}y^2 + 3\frac{a^2}{16}y^2 - 3\frac{a^2}{4}y^2 + by^2 - \frac{a^3}{64}y - 3\frac{a^3}{64}y + \\
& \quad 3\frac{a^3}{16}y - b\frac{a}{2}y + cy - \frac{a^4}{64} + \frac{a^4}{256} + b\frac{a^2}{16} - c\frac{a}{4} + d = 0 \\
& y^4 + \left(\frac{-3a^2}{8}\right)y^2 + \left(\frac{a^3}{8} - b\frac{a}{2} + c\right)y + \left(-3\frac{a^4}{256} + b\frac{a^2}{16} - c\frac{a}{4} + d\right) = 0
\end{aligned}$$

Ao considerarmos

$$p = \left(\frac{-3a^2}{8}\right) \quad q = \left(\frac{a^3}{8} - b\frac{a}{2} + c\right) \quad r = \left(-3\frac{a^4}{256} + b\frac{a^2}{16} - c\frac{a}{4} + d\right)$$

Teremos nossa equação reduzida à $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ onde podemos fazer completamento de quadrados.

$$\begin{aligned}
(y^2)^2 + 2y^2\frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + qy + r &= 0 \\
\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - qy - r \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Devemos agora introduzir um novo parâmetro u e em seguida usando a equação 4.1, substituímos em 4.2 e obteremos o desenvolvimento a seguir

$$\left(\left(y^2 + \frac{p}{2}\right) + u\right)^2 = \left(y^2 + \frac{p}{2}\right)^2 + 2\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)u + u^2 \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p^2}{4} - qy - r + 2\left(y^2 + \frac{p}{2}\right)u + u^2 \\
&= \frac{p^2}{4} - qy - r + 2uy^2 + pu + u^2 \\
&= 2uy^2 - qy + \left(\frac{p^2}{4} - r + pu + u^2\right) \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Na equação 4.3 pensando em quadrados perfeitos é possível reescrevermos os termos $+2uy^2 - qy$

$$2uy^2 - qy = 2uy^2 - 2y\sqrt{2u}\frac{q}{2\sqrt{2u}} + \frac{q^2}{8u} - \frac{q^2}{8u} = \left(y\sqrt{2u} - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2 - \frac{q^2}{8u} \quad (4.4)$$

Substituindo 4.4 na equação 4.3

$$\left(\left(y^2 + \frac{p}{2}\right) + u\right)^2 = 2uy^2 - 2y\sqrt{2u}\frac{q}{2\sqrt{2u}} + \frac{q^2}{8u} - \frac{q^2}{8u} + \left(\frac{p^2}{4} - r + pu + u^2\right)$$

Para que a equação acima se torne um quadrado perfeito a próxima equação deverá ser verdadeira.

$$\begin{aligned} -\frac{q^2}{8u} + \left(\frac{p^2}{4} - r + pu + u^2\right) &= 0 \\ \frac{-q^2 + 2up^2 - 8ur + 8pu^2 + 8u^3}{8u} &= 0 \\ 8u^3 + 8pu^2 + (2p^2 - 8r)u - q^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tratando-se de uma equação cúbica em u . Usando a fórmula apresentada em 4.3.3 encontramos o valor de u e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \left(\left(y^2 + \frac{p}{2}\right) + u\right)^2 &= 2uy^2 - 2y\sqrt{2u}\frac{q}{2\sqrt{2u}} + \frac{q^2}{8u} \\ \left(\left(y^2 + \frac{p}{2}\right) + u\right)^2 &= \left(y\sqrt{2u} - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2 \\ \left(y^2 + \frac{p}{2}\right) + u &= \pm \left(y\sqrt{2u} - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right) \\ y^2 \pm y\sqrt{2u} \pm \frac{q}{2\sqrt{2u}} + \frac{p}{2} + u &= 0 \end{aligned}$$

Ao resolver a equação quadrática em y finalizamos o problema.

4.4 Equações polinomiais

As equações de 1º grau, quadráticas, cúbicas e quárticas são exemplos de equações polinomiais, basta igualarmos uma função polinomial a 0. Normalmente os zeros apresentados por uma função polinomial são as soluções de problemas que precisamos solucionar o que de certa forma explica o porquê de tantos esforços em desenvolver métodos sistemáticos para soluções dessas equações.

4.4.1 Função polinomial

Seja o conjunto de números complexos definido por $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\}$. É possível considerarmos uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ da por

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=1}^n a_i x^i$$

Cada elemento a_i é chamado de coeficiente da função polinomial. Já as parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$ são os termos:

Exemplo 4.4.1. Para a função polinômial $f(x) = 6x^2 + 3x + 8$ os coeficientes são $\{6, 3, 8\}$ e os termos $\{6x^2, 3x, 8\}$

Uma função polinomial de um único termo é denominada função monomial ou simplesmente monômio.

Para determinarmos o valor numérico de um polinômio, basta substituir o número desejado na variável correspondente. Observe o mesmo polinômio exibido em 4.4.1 para o valor de $x = 3$.

Exemplo 4.4.2. $f(3) = 6 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 8 = 54 + 9 + 8 = 71$

Ao substituirmos um valor a na variável de um polinômio qualquer $f(x)$ e o mesmo assumir como valor numérico o zero, ou seja $f(a) = 0$, dizemos que a é uma raiz da função f .

Seja A um anel. Ao fixarmos um polinômio $p \in A[X]$ podemos selecionar um elemento qualquer $a \in A$. Definimos $f(a)$ substituindo x por a na expressão que representa p . Fazendo a associação de cada polinômio a uma função polinomial. Como essas funções podem assumir valores numéricos após a substituição de sua variável, podemos também fazer a relação entre polinômio e equação polinomial.

4.4.2 Igualdade

Agora veremos quais os critérios necessários para estabelecermos a igualdade entre dois polinômios. Existem certas características que devem ser observadas entre dois polinômios para que possamos afirmar se podemos ou não estabelecer a igualdade entre eles. A próxima definição estabelece o comportamento dos polinômios nulos ou identicamente nulo.

Definição 4.4.1. Dizemos que um polinômio f é nulo (ou identicamente nulo) quando f assume o valor numérico 0 para todo $x \in \mathbb{C}$, em símbolos $f(x) = 0 \iff f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$

Teorema 4.4.1. Um polinômio f é nulo, se e somente se, todos os coeficientes de f for igual a zero.

Demonstração. Considere $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ queremos demonstrar que $f(x) = 0 \iff a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = a_n = 0$.

Como $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{C}$ e inclusive para todos os elementos de um determinado conjunto definido por $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ com cada $\alpha_i \in \mathbb{C}$ e $0 \leq i \leq n$. Dessa maneira será possível construirmos um sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} f(\alpha_0) = a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\alpha_0^2 + a_3\alpha_0^3 + \dots + a_{n-1}\alpha_0^{n-1} + a_n\alpha_0^n = 0 \\ f(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + a_3\alpha_1^3 + \dots + a_{n-1}\alpha_1^{n-1} + a_n\alpha_1^n = 0 \\ f(\alpha_2) = a_0 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + a_3\alpha_2^3 + \dots + a_{n-1}\alpha_2^{n-1} + a_n\alpha_2^n = 0 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ f(\alpha_n) = a_0 + a_1\alpha_n + a_2\alpha_n^2 + a_3\alpha_n^3 + \dots + a_{n-1}\alpha_n^{n-1} + a_n\alpha_n^n = 0 \end{cases}$$

Estamos diante de um sistema linear homogêneo do tipo $(n+1) \times (n+1)$ onde as incógnitas são os coeficiente de $f(x)$. O determinante da matriz principal desse sistema será dado por.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \alpha_0^3 & + \dots + & \alpha_0^{n-1} & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & + \dots + & \alpha_1^{n-1} & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & + \dots + & \alpha_2^{n-1} & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \alpha_n^3 & + \dots + & \alpha_n^{n-1} & \alpha_n^n \end{vmatrix}$$

Temos um determinante de uma matriz de Vandermonde onde os elementos característicos são $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ todos distintos. A única solução é a trivial em que $a_i = 0$. \square

Teorema 4.4.2. Dois polinômios $f(x)$ e $g(x)$ são iguais, se e somente se, os coeficientes de f e g foram iguais, seguindo a mesma ordem, $f(x) = g(x) \iff a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$

Demonstração.

$$\text{Sendo } f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_ix^i$$

$$\text{Se } a_i = b_i \iff a_i - b_i = 0 \iff (a_i - b_i)x^i = 0 \iff \sum_{i=0}^n (a_i - b_i)x^i = 0 \iff \sum_{i=0}^n a_ix^i - \sum_{i=0}^n b_ix^i =$$

$$0 \iff \sum_{i=0}^n a_ix^i = \sum_{i=0}^n b_ix^i \iff f(x) = g(x). \quad \square$$

4.4.3 Operações

Adição entre dois polinômios $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n = \sum_{i=0}^n b_ix^i$ pode ser realizada somando-se de forma correspondente os termos semelhantes que são aqueles que apresentam mesmo expoente na variável.

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \sum_{i=0}^n a_ix^i + \sum_{i=0}^n b_ix^i \\ &= \underbrace{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}_{f(x)} + \underbrace{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}_{g(x)} \\ &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n \\ &= \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)x^i\end{aligned}$$

Definindo a soma dessa maneira todos os axiomas da adição são satisfeitos para o conjunto dos polinômios.

Agora iremos conjecturar uma forma de descrever o comportamento para o produto de dois polinômios: seja

$$\begin{array}{ll}f_0(x) = a_0 & g_0(x) = b_0 \\f_1(x) = a_0 + a_1x & g_1(x) = b_0 + b_1x \\f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 & g_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \\f_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 & g_3(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \\ \vdots & \vdots \\f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n & g_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \\ & + b_3x^3 + \dots + b_nx^n\end{array}$$

Para o produto $f_0(x) \cdot g_0(x)$ temos $(f_0 \cdot g_0)(x) = a_0b_0$ onde a soma dos índices é nula. Na sequência faremos $f_1(x) \cdot g_1(x)$ o que acarreta em

$$\begin{aligned}(f_1 \cdot g_1)(x) &= (a_0 + a_1x)(b_0 + b_1x) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_1b_1x^2\end{aligned}\tag{4.5}$$

Observe agora que para o termo $a_0b_0x^0$ a soma dos índices dos coeficiente a_0b_0 é nula, enquanto para o termo $(a_0b_1 + a_1b_0)x^1$, a soma dos índices dos coeficientes a_0b_1, a_1b_0 , é 1, e para o termo $a_1b_1x^2$, temos a_1b_1 , onde a soma dos índices é dois.

Veremos tal padrão para $f_2(x) \cdot g_2(x)$ e $f_3(x) \cdot g_2(x)$

$$\begin{aligned}(f_2 \cdot g_2)(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x^3 + a_2b_2x^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_3 \cdot g_3)(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) \\
&= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + \\
&\quad a_3b_0)x^3 + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)x^4 + (a_2b_3 + a_3b_2)x^5 + a_3b_3x^6
\end{aligned}$$

Com isso parece que $f_n(x) \cdot g_n(x)$ se apresenta como descrito abaixo

$$\begin{aligned}
(f_n \cdot g_n)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + \\
&\quad (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_2 + \cdots + a_2b_{n-2} + a_1b_{n-1} + a_0b_n)x^n \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Para garantir a funcionalidade do padrão estabelecido será usado o princípio de indução finita.

Demonstração. Base da indução Para $n = 1$, está provada na equação 4.5.

$$\text{Passo da indução} \left\{ \begin{array}{l} \text{Hipotese : } (f_n \cdot g_n)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + \\ (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_1b_{n-1} + a_0b_n)x^n \\ \text{Tese : } (f_{n+1} \cdot g_{n+1})(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + \\ (a_{n+1}b_0 + a_nb_1 + \cdots + a_1b_n + a_0b_{n+1})x^{n+1} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
(f_n \cdot g_n)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \\
&\quad a_{n-2}b_2 + \cdots + a_2b_{n-2} + a_1b_{n-1} + a_0b_n)x^n \iff (a_{n+1}b_0 + a_nb_1 + \cdots + a_1b_n + \\
&\quad a_0b_{n+1})x^{n+1} + (f_n \cdot g_n)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots + \\
&\quad (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + a_{n-2}b_2 + \cdots + a_2b_{n-2} + a_1b_{n-1} + a_0b_n)x^n + (a_{n+1}b_0 + a_nb_1 + \cdots + \\
&\quad a_1b_n + a_0b_{n+1})x^{n+1} \iff (a_{n+1}b_0 + a_nb_1 + \cdots + a_1b_n + a_0b_{n+1})x^{n+1} + (f_n \cdot g_n)(x) = \\
&\quad (f_{n+1} \cdot g_{n+1})(x) \iff (a_{n+1}b_0 + a_nb_1 + \cdots + a_1b_n + a_0b_{n+1})x^{n+1} = (f_{n+1} \cdot g_{n+1})(x) - \\
&\quad (f_n \cdot g_n)(x)
\end{aligned}$$

Pelo princípio de indução finita $(f_n \cdot g_n)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_1b_{n-1} + a_0b_n)x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Agora será possível encontramos uma maneira para representar o produto de polinômios com n termos, perceba que em 4.6 cada um dos termos pode ser escrito usando somatórios.

$$\begin{aligned}
(f_n \cdot g_n)(x) &= \sum_{i+j=0} a_ib_j + \sum_{i+j=1} a_ib_jx + \sum_{i+j=2} a_ib_jx^2 + \cdots + \sum_{i+j=n-1} a_ib_jx^{n-1} + \sum_{i+j=n} a_ib_jx^n \\
(f_n \cdot g_n)(x) &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i+j=k} a_ib_jx^{i+j} \right)
\end{aligned}$$

Para multiplicação vale as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e distributiva, o que garante ao conjunto dos polinômios a classificação, domínio de integridade. O mesmo não assume características de corpo pois falha na propriedade $M4$, elemento inverso.

Com efeito suponha por absurdo que todo polinômio $f(x)$ admite um polinômio $g(x)$ tal que $f(x) \cdot g(x) = 1$ isso acarreta em $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ o que obriga $g(x) \neq 0$, ora, a única forma onde $\forall x \in \mathbb{C} g(x) \neq 0$ é com $g(x)$ sendo um polinômio constante $\neq 0$. Portanto apenas os polinômios constantes diferentes de zero possuem elemento inverso.

Logo o conjunto dos polinômios com coeficientes complexos \mathbb{C} munidos das operações de adição e multiplicação constituem um domínio de integridade.

4.4.4 Grau

Definição 4.4.2. Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chama-se grau de f e representa-se por ∂f ou $\text{gr}f$ o número natural n tal que $a_n \neq 0$ e $a_i = 0, \forall i > n$

$$\partial f = n \begin{cases} a_p \neq 0 \\ a_i = 0, \forall i > n \end{cases}$$

O grau de um polinômio é o expoente do termo de mais alto grau não nulo.

4.4.5 Irredutibilidade

Um polinômio f é irredutível sobre um determinado conjunto A se o valor numérico de f for diferente de zero para qualquer elemento que pertença ao conjunto A . Essa ideia será explicada através do teorema das raízes racionais.

Teorema 4.4.3 (Teorema da raízes racionais). Se uma função polinomial $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ com $a_n \neq 0$ de coeficientes inteiros \mathbb{Z} admitir uma raiz racional $\frac{p}{q}$ sendo $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, além de p e q primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Demonstração. Sendo $\frac{p}{q}$ raiz de f então $f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + \dots + a_n\frac{p^n}{q^n} = 0$. Ao multiplicarmos a equação por q^n teremos $a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \dots + a_np^n = 0$ nessa mesma equação podemos isolar o termo a_np^n e em seguida colocar q em evidência.

$$\begin{aligned} -a_np^n &= a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \dots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n \\ a_np^n &= -q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q^1 + \dots + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}) \end{aligned}$$

Como os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, p$ e q são inteiros \mathbb{Z} então um inteiro $z_1 = (a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q^1 + \dots + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1})$ com isso $a_np^n = -qz_1 \implies \frac{a_n}{q} = -z_1$ e como p^n e q são primos entre si, concluímos que $q \mid a_n$.

Sobre a equação inicial podemos isolar o termo a_0q^n

$$\begin{aligned} -a_0q^n &= a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \cdots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} \\ a_0q^n &= -p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \cdots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}) \end{aligned}$$

Assim como feito anteriormente podemos escrever $a_0q^n = -pz_2 \implies \frac{a_0q^n}{p} = -z_2$ sendo $z_2 = (a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + a_{n-2}p^{n-3}q^2 + \cdots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1})$ um número inteiro. Dessa maneira $p \mid a_0$ □

Esse teorema será fundamental na prova das impossibilidades clássicas pois exigirá a identificação de polinômios irredutíveis sobre o conjunto dos números racionais \mathbb{Q}

4.5 Teorema fundamental da álgebra

Teorema 4.5.1. Seja f um polinômio sobre o conjunto dos complexos \mathbb{C} com $\partial f \geq 1$. Então existe pelo menos um raiz $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$.

A importância em tal teorema está no fato de garantir a existência de ao menos um zero para uma função polinomial sobre os complexos \mathbb{C} . Isso explica o fato do não surgimento de outros conjuntos numéricos que vão além dos complexos, pois como vimos no decorrer do capítulo os conjuntos numéricos foram sendo descobertos a partir da necessidade de buscar explicações para equações que não admitiam solução sobre um dado conjunto. Situações como essas pararam de acontecer, já que não importava mais o fenômeno de estudo, muito menos a polinomial usada para fazer o modelamento, sempre é possível obtermos alguma solução em complexo \mathbb{C} .

EXTENSÃO DE CORPOS E OS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS

Évariste Galois foi um gênio, porém um tanto azarado segundo Eves (2011) ao contar relatos de acontecimentos a respeito da curta trajetória do jovem, veja Figura 23. Nasceu perto de Paris, em 1811, mostrando seu extraordinário talento para Matemática. Pouco depois de ter completado 16 anos, descobriu a teoria dos grupos, ou grupos de Galois, ramo fundamental para atual álgebra abstrata.

Figura 23 – Évariste Galois



Fonte: <http://super.abril.com.br/cultura/evariste-galois-o-genio-azarado>, 2015

Um dos motivos que nos leva a considerar Galois um gênio azarado está ligado à Escola Politécnica da França, que tinha como política admitir somente alunos que se mostrassem acima da média, fez o exame por duas vezes e foi reprovado por não conseguir cumprir as formalidades exigidas. Entrou em uma escola comum em 1829, mas foi expulso por envolver-se nas agitações da revolução de 1830, além de ganhar alguns meses de prisão. Outro fato relevante é o suicídio cometido por seu pai, acredita-se que o fez por estar se sentindo perseguido pela igreja. Já Galois, com 22 anos incompletos, se envolveu em um caso amoroso, levando-o a aceitar um duelo para

defender sua honra, e morreu a tiros.

É considerado um gênio por ter escrito na noite que antecedia sua morte uma carta em forma de testamento científico a um amigo onde continha a teoria dos grupos, que fornece critérios para a possibilidade das construções geométricas com régua e compasso, e sobre a resolubilidade de equações por radicais.

Uma abordagem moderna de sua teoria explicitada por outros matemáticos, como por exemplo, Richard Dedekind e Leopold Kronecker envolve o estudo de automorfismos (aplicação de uma estrutura algébrica em si mesma) de extensão de corpos.

A partir de agora iremos construir o caminho percorrido até alcançarmos ferramentas suficiente para construção das provas de impossibilidade dos três problemas clássicos. Primeiro relacionando a teoria de extensão de corpos com equações polinomiais, posteriormente extensões simples, polinômio minimal e grau de uma extensão algébrica simples. Todos os conhecimentos aqui explicitados podem ser encontrado em maiores detalhes nas referências (RIBEIRO, 2012) (FREITAS, 2014) (COSTA, 2013) (LOPES, 2014) (LUGLI, 2014) (PEREIRA, 2013b) (VITOR, 2013) (PEREIRA, 2013a) (JUNIOR, 2013) (FERMINO, 2013) organizadas ao final do trabalho.

5.1 Extensões e equações polinomiais

Extensões de corpos e equações polinomiais, agora será exposto a relação existente entre esses dois conceitos. Ao considerarmos dois subcorpos complexos \mathbb{C} , sejam eles os conjunto A e B , e uma determinada equação polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, e considere que a aplicação de A em B onde $x \in A$ e $f(x) \in B$ define uma função. Normalmente a resolução de problemas do cotidiano modelados por equações polinomiais esta na busca de suas raízes, que podem não estar contidas no domínio da nossa função. Ou seja, voltando para o nosso exemplo, é possível que existam raízes da função f que não pertençam ao conjunto A .

Em símbolos: Seja a função polinomial $f : A \rightarrow B$ de grau n , por possuir grau n a mesma terá n raízes, sendo elas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, é possível que exista alguma raiz $x_i \notin A$.

Situações como essa fará sentido se conseguirmos explicar x_i , o que acontecerá somente se o incluirmos em A , ou melhor, se estendêssemos A mantendo seus elementos e a funcionalidade de suas operações, para que possa comportar x_i . Observe a definição 5.1.1 e o exemplo 5.1.1 a seguir.

Definição 5.1.1. Uma extensão de corpo é um monomorfismo $h : A \rightarrow K$, em que A e K , são subcorpos complexos \mathbb{C} . Onde A , é dito o corpo menor e K , o corpo maior. Tal extensão pode também ser representada pelo símbolo $K : A$.

Lembrando que homomorfismo é uma função entre anéis, logo também é uma função entre corpos, pois todo corpo é necessariamente um anel, quando tal função apresenta-se de

forma injetiva, o homomorfismo é classificado como sendo monomorfismo.

Exemplo 5.1.1. Consideremos uma função polinomial

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \text{ definida por } f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + x + 3$$

Usando a pesquisa das raízes racionais é possível descobrir que -3 é uma raiz, através da divisão de polinômios podemos decompor a função f obtendo

$$f(x) = (x^2 + 1)(x + 3)$$

Igualando f a zero teremos $(x^2 + 1)(x + 3) = 0$ e pela lei do cancelamento temos

$$x + 3 = 0 \implies x = -3 \text{ onde não teremos problemas pois, } -3 \in \mathbb{Q}$$

Mas também temos que considerar

$$x^2 + 1 = 0 \implies x = \pm\sqrt{-1} \implies x = \pm i \text{ e nesse caso } \pm i \notin \mathbb{Q}$$

Portanto as raízes são $\{-i, +i, -3\}$ onde apenas $-3 \in \mathbb{Q}$, diante dessa situação, é possível construir um novo conjunto para fazer parte do domínio da função f que compreenda suas raízes e mantenha sua estrutura algébrica. Construir esse conjunto é fazer uma extensão de corpos como descrito da definição 5.1.1.

Esse conjunto é formado por números $k \in \mathbb{C}$ da forma

$$k = p + qi + 3r + 3iw \text{ onde } p, q, r, w \in \mathbb{Q}$$

Ao considerarmos o conjunto D dos elementos k , vemos de acordo com a definição 5.1.1 que A é o corpo menor e D o maior, ou seja, fazer a substituição é realizar uma extensão do tipo $D : A$. Assim dizemos que D é uma extensão de A .

Importante perceber que os racionais \mathbb{Q} , estão imersos no conjunto D , basta verificarmos que para $q = r = w = 0$ teremos $k = p$.

Os números naturais \mathbb{N} e inteiros \mathbb{Z} não caracterizam um corpo, já os racionais \mathbb{Q} satisfaz todos os axiomas necessários para receber tal tratamento. Com isso podemos considerar algumas funções entre corpos presentes na educação básica, porém não é explicado com a profundidade aqui apresentada.

A função $f_1 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma extensão, basta pensar na inclusão dos números irracionais nos racionais. Do mesmo modo $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, nesse caso inclui-se a unidade imaginária aos números complexos \mathbb{C} . Agora convém vermos a prova do teorema 5.1.1.

Teorema 5.1.1. Todo subcorpo complexos \mathbb{C} contém os racionais \mathbb{Q} .

Demonstração. Seja um subcorpo $K \subset \mathbb{C}$, como K é um subcorpo o mesmo contém o conjunto $\{0, 1\}$. Usando processo de indução finita temos que $1 \in K$ e $n \in K$, mas K é fechado em relação a adição, então $n + 1 \in K$, com isso temos que os naturais $\mathbb{N} \subset K$. Ainda pelo fato de K ser subcorpo, podemos afirmar que existe um elemento simétrico para cada um de seus elementos, ou seja, para cada n existe um $-n$, conseqüentemente o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} \subset K$. Por fim podemos considerar os números $a, b \in K$ sendo a, b números inteiros \mathbb{Z} . Cada elemento de K pode ser associado ao seu inverso, portanto $b^{-1} \in K$ e $ab^{-1} \in K$ por ser fechado em relação a multiplicação, logo podemos concluir que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} \in K$. \square

O conjunto dos números racionais \mathbb{Q} estão contidos em todos os subcorpos complexos \mathbb{C} , isso quer dizer que fazer a intersecção de todos os subcorpos complexos \mathbb{C} é o mesmo que obter os racionais \mathbb{Q} , tal observação nos possibilita entender a próxima definição 5.1.2.

Definição 5.1.2. Seja X um subconjunto complexo \mathbb{C} . Então o subcorpo complexo \mathbb{C} gerado por X é a intersecção de todos os subcorpos de \mathbb{C} que contém X .

1. O conjunto que representa o menor subcorpo complexo \mathbb{C} que contém X é único.
2. O conjunto dos números complexos \mathbb{C} pode ser obtido a partir de elementos de X por uma sequência finita de operações.

Uma questão que acaba surgindo naturalmente ao estudarmos esse assunto é a existência de um menor corpo contido nos complexos \mathbb{C} , este é denominado como sendo um subcorpo primo.

Exemplo 5.1.2. Procuraremos um subcorpo complexo K gerado pelo conjunto $X = \{1, \sqrt{2}, i\}$. Pelo que vimos no teorema 5.1.1, K deve conter os números racionais \mathbb{Q} . Como K foi gerado por X seus elementos são da forma $\alpha = p + q\sqrt{2} + ri + si\sqrt{2}$ com $p, q, r, s \in \mathbb{Q}$. Chamaremos de A o conjunto onde todos os elementos podem ser escritos como α , logo podemos concluir que $A \subset K$ e por definição $K \subset A$ e portanto $A = K$. Assim os elementos de A acabam dando uma descrição do subcorpo K gerado por X .

O mesmo também pode ser representado por $\mathbb{Q}(X)$, ou seja, um subcorpo complexo que foi gerado adicionando-se o conjunto X .

Definição 5.1.3. Se $K : A$ é uma extensão de corpos e Y é um subconjunto de K , então o subcorpo complexo \mathbb{C} gerado por $A \cup Y$ é escrito como $A(Y)$ é dito ser obtido a partir de A adicionando Y , pode ser representado por $K = A(Y)$.

5.2 Extensões Simples

Podemos aplicar a definição 5.1.3 onde o conjunto adicionado é unitário, considere $Y = \{\alpha\}$ e acompanhe a definição 5.2.1 a seguir onde é adicionado apenas o elemento α ao corpo menor A afim de obtermos o corpo maior K .

Definição 5.2.1. Uma extensão simples é uma extensão de corpos $K : A$ tal que $K = A(\alpha)$ para algum $\alpha \in K$, ou seja, uma extensão simples é resultado da adição de um único elemento ao corpo menor.

Exemplo 5.2.1. 1. O subcorpo complexo $\mathbb{R}(i)$ contém todos os elementos da forma $x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Mas, estes elementos acabam por percorrer todo o conjunto dos números complexos \mathbb{C} , nos permitindo concluir que $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$. Temos um extensão simples adicionando i aos números reais \mathbb{R} .

2. P é um subcorpo real \mathbb{R} , seus elementos são da forma $p + q\sqrt{2}$ com $p, q \in \mathbb{Q}$, nesse caso $P = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Trata-se de uma extensão simples adicionando $\sqrt{2}$ aos números racionais \mathbb{Q} .

Extensões simples classificam-se em dois tipos: algébricas e transcendentess. Seja K um subcorpo complexo \mathbb{C} , ao fazermos uma extensão de simples de K adicionando como novo elemento α , e caso verifica-se que α satisfaz uma equações polinomial construída sobre K , essa extensão será classificada algébrica, do contrário será transcendentess. A explicação de tal fato encontra-se na próxima definição.

Definição 5.2.2. Seja K um subcorpo complexo \mathbb{C} , e seja $\alpha \in \mathbb{C}$. Então α é algébrico sobre K se existir um polinômio não pulo f sobre K , tal que, $f(\alpha) = 0$. Caso contrário, dizemos que α é transcendentess sobre K .

Exemplo 5.2.2. O número π é transcendente sobre os racionais \mathbb{Q} , pois não existe um polinômios com coeficiente racionais, cuja raiz é π .

5.3 Polinômio Minimal

Vemos no exemplo anterior que o polinômio $f(t) = t^2 - 5$ nos da garantia de que $\sqrt{5}$ é algébrico sobre o conjunto dos racionais \mathbb{Q} , fazendo a extensão $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}$ ser uma extensão algébrica simples. Porém os polinômios $f_1(t) = t^3 - 5t$ e $f_2(t) = t^4 - 5t^2$ também mostra que $\sqrt{5}$ é algébrico, pois o mesmo é raiz dos três polinômios, dando a ideia de ser três extensões algébricas distintas. A fim de explicar essa falsa impressão da não unicidade das extensões simples será exposto definições que estão relacionadas ao polinômio minimal.

Definição 5.3.1. Um polinômio $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$ sobre um subcorpo K é mônico se $a_n = 1$, portanto, se o coeficiente do termo de maior expoente é 1.

Considere uma extensão algébrica simples $K(\alpha) : K$, portanto existe um polinômio f sobre K , tal que α seja raiz, ou seja $f(\alpha) = 0$. Também podemos afirmar que f é um polinômio mônico, caso não seja basta multiplicar cada um dos termos pelo inverso do coeficiente do termo de maior expoente. Dessa maneira, existe um único polinômio mônico de menor grau que tenha α como raiz.

Teorema 5.3.1. Seja $K : A$ uma extensão de corpos, e suponhamos que $\alpha \in K$ é algébrico sobre A . Então o polinômio mônico f sobre A de menor grau que possui α como raiz é único. A ele da-se o nome de polinômio minimal.

Demonstração. Suponha por absurdo a existência de dois polinômios f e g distintos nas condições acima, portanto α é zero de ambos os polinômios e $f(\alpha) - g(\alpha) = 0$, tal diferença gera um novo polinômio mônico tendo α como raiz, contrariando o fato de f e g serem os únicos. \square

5.4 Grau de uma extensão simples

Agora somos capazes de fazer uma relação entre extensão de corpos e espaços vetoriais. Veremos que toda extensão algébrica simples pode ser associada a dimensão de um espaço vetorial V , e que a mesma determinará o grau de uma extensão simples.

Considere a extensão algébrica simples $K(\alpha) : K$, sabemos que existe um polinômio mônico de menor grau f que possui α como raiz, tal polinômio poderá ter grau n , ou seja $\partial f = n$.

Seja $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n$, substituindo α na função f teremos:

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n = 0$$

De onde podemos afirmar que

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = -\alpha^n$$

Podemos olhar a equação acima como uma combinação linear de um conjunto de vetores. Onde os coeficientes são os elementos do conjunto $B = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}\}$, ao passo que os vetores são elementos de $A = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}\}$, observe ainda que tal combinação descreve a constante $-\alpha^n$, o que garante que os vetores são linearmente independentes.

O conjunto A representa uma base que está contida em $K(\alpha)$. Todos os elementos de K podem ser escritos como combinação linear dos elementos de A .

A dimensão de um espaço vetorial é determinada pelo número de vetores necessário para descrever todos os outros do espaço em questão. No caso do conjunto A temos n elementos, por isso trata-se de um espaço vetorial de dimensão n e por consequência n representará o grau da extensão. Em símbolos teremos:

$$[K(\alpha) : K] = n$$

Para termos certeza de que uma extensão de corpos representa de fato um espaço vetorial não basta que seus vetores sejam linearmente independentes, também é necessário verificar a validade dos oito axiomas que caracterizam um espaço vetorial.

Seja $K : A$ uma extensão de corpos. As operações

$$(\beta, u) \mapsto \beta u, \beta \in A \text{ e } u \in K$$

$$(u, v) \mapsto u + v, u, v \in K$$

Essas operações definem sobre K uma base de um espaço vetorial sobre A .

Demonstração.

1. Comutatividade da adição $u + v = v + u, \forall u, v \in K$
2. Associatividade da adição $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in K$
3. Existência de elemento neutro aditivo $0 + u = u, \forall u \in K$
4. Existência de inverso aditivos $u + (-u) = 0, \forall u \in K$
5. Distributividade de um escalar em relação a soma de vetores

$$\beta(u + v) = \beta u + \beta v, \forall \beta \in A \text{ e } \forall u, v \in K$$

6. Distributividade de um vetor em relação a soma de escalares

$$u(\beta + \gamma) = u\beta + u\gamma, \forall \beta, \gamma \in A \text{ e } \forall u \in K$$

7. Existência de elemento neutro multiplicativo $1 \cdot u = u, \forall u \in K$
8. Associatividade de escalares em relação a vetores

$$\beta(\gamma u) = (\beta\gamma)u, \forall \beta, \gamma \in A \text{ e } \forall u \in K$$

□

Exemplo 5.4.1. Considere o polinômio $p(t) = t^2 - 3$ sobre o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} , o mesmo é irredutível, claramente vemos que $\sqrt{3}$ é um zero de $p(t)$, ou seja $p(\sqrt{3}) = 0$, façamos uma extensão simples $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}$. Observe ainda que $p(t) = t^2 + 0t^1 - 3t^0$ ao substituirmos α encontramos:

$$p(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 + 0(\sqrt{3})^1 - 3(\sqrt{3})^0 = 0 \implies 0\sqrt{3} - 3 \cdot 1 = -3$$

A equação nos mostra que -3 foi escrito como combinação linear dos coeficientes $\{0, -3\}$ e dos vetores $\{\sqrt{3}, 1\}$. Observe que com esses dois vetores é possível através de combinações lineares

descrever qualquer elemento dos números racionais $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, como são apenas dois elementos, o espaço vetorial possui dimensão 2, portanto:

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3} : \mathbb{Q})] = 2$$

Definição 5.4.1. O grau, $[K : A]$, de uma extensão $K : A$ é a dimensão do espaço vetorial de K construído sobre A .

Note que a extensão $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) : \mathbb{R}$ tem como grau 2, uma vez que, $\{1, i\}$ determina uma base para o espaço vetorial \mathbb{C} sobre \mathbb{R} . Isso quer dizer que $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.

5.5 Construções Geométrica

Suponha em um plano, dois pontos A e B descritos sobre um sistema de eixos XY , onde cada ponto desses eixos são representados por um único número real \mathbb{R} , sem perda de generalidade suponha eixos ortogonais. Os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, trazem em suas coordenadas elementos suficientes para construção do conjunto $X = \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$, que por sua vez satisfaz a condição de estar contido nos reais \mathbb{R} .

O fato de $X \subset \mathbb{R}$ nos permite dizer que X é um subconjunto dos números complexos \mathbb{C} , e de acordo com o teorema 5.1.2 é possível construirmos um subcorpo complexo \mathbb{C} gerado a partir de X , basta fazermos a interseção de todos os subcorpos complexos que contenha X , é evidente que na interseção dos mesmo existirá o conjunto X pois estamos escolhendo-os dessa maneira, por outro lado o teorema 5.1.1 mostra que o conjunto dos racionais \mathbb{Q} está contido em todos os subcorpos complexos \mathbb{C} , o que nos garante a existência dos racionais \mathbb{Q} no subcorpo que está sendo construído. Portanto, sendo H tal subcorpo, teremos que $H = X \cup \mathbb{Q}$.

Sendo assim H possui característica de corpo, ao mesmo tempo em que representa coordenadas de pontos em um plano, aos elementos do conjunto H damos o nome de números construtivos, onde podem ser usados para dar origem aos pontos construtivos.

As construções geométricas realizadas pelos gregos estão relacionadas aos pontos de um plano, para compreender essa relação precisamos entender o conceito de construção dos gregos.

Construção com régua não graduada e compasso, os famosos instrumentos Euclidianos, fundamenta-se na execução de apenas duas operações, regras que jamais podem ser violadas.

1. Traçar uma reta por dois pontos conhecidos.
2. Construir uma circunferência conhecendo-se dois pontos, onde um deverá ser o centro e o outro estar sobre a circunferência.

É possível executar essas operações um número finito de vezes obtendo nesse processo diversos outros pontos, que surgiram da intersecção de duas retas, reta e circunferência, ou duas

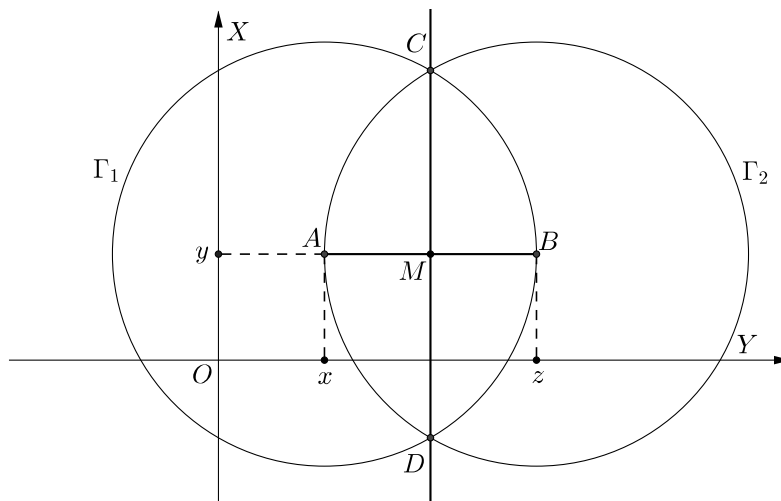
circunferências. Cada novo passo que realizamos na construção geométrica dá origem a um novo ponto. Perceba que temos aqui o conceito de extensão de corpos para pontos construtivos.

Ainda com os pontos A e B , é possível com uma régua não graduada traçar uma reta passando por A e B , em seguida construir duas circunferência, ambas com raio AB , porém uma com centro em A e outra em B a intersecção dessas circunferências geram outros dois pontos, digamos C e D , como não pertencem a H , a solução é fazer uma extensão do tipo:

$$H(C) : H \text{ sendo } H(C) = H_c \text{ em seguida } H_c(D) : H_c$$

Tal construção é a descrição do ponto médio, veja a Figura 24. Para determinarmos o ponto médio temos que traçar uma reta por C e D , obtendo a intersecção com a reta que passa por A e B , sendo o ponto M procurado.

Figura 24 – Ponto Médio



Da geometria analítica temos uma forma para representação de retas usando a chamada equação geral $ax + by + c = 0$, do mesmo modo podemos fazer a representação de circunferências, por exemplo, em sua forma canônica $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Os pontos construtivos podem ser representados analiticamente por três condições, vejamos a primeira delas:

Intersecção de duas retas

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Isolando a variável x na primeira equação temos $x = \frac{-c - by}{a}$, ao substituirmos tal valor na segunda temos:

$$a_1 \left(\frac{-c - by}{a} \right) + b_1y + c_1 = 0$$

que é um polinômio de grau 1 na variável x .

Interseção de retas e circunferências

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r^2 \end{cases}$$

Assim como feito acima, isolando a variável na primeira equação e substituindo na segunda encontraremos um polinômios de grau 2 na variável y .

$$\left(\frac{-c - by}{a} - a_1\right)^2 + (y - b_1)^2 = r^2$$

O mesmo ocorre para duas circunferências.

Todo ponto construtivo, ou seja, que pode ser obtido através de um número finito de intersecções usando retas e circunferências pode ser descrito analiticamente por polinômios de grau 1 ou 2. Com o exposto anteriormente obtemos o seguinte resultado.

Proposição 5.5.1. Seja H o conjunto dos pontos construtivos de um plano, e P um ponto não pertencente a H , então a extensão simples $H(P) : H$, sempre apresentará grau 1 ou 2.

5.6 Provando as impossibilidades clássicas

Agora somos capazes de atacar com propriedade os três problemas clássicos. Como as provas de impossibilidade da duplicação do cubo e da trisseção do ângulo foi apresentadas pela primeira vez pelo matemático Wantzel, provaremos dois de seus teoremas.

Teorema 5.6.1 (Wantzel). O cubo não pode ser duplicado usando construções com régua e compasso.

Demonstração. Dado um cubo de aresta 1, seu volume v também será igual a 1. Queremos duplicar tal volume, ou seja, encontrar a medida da aresta de outro cubo cujo volume é igual a 2. Portanto teremos

$$a^3 = 2 \implies a^3 - 2 = 0$$

Portanto podemos relacionar tal equação ao polinômio $x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ por homomorfismo de valoração 1.

Tal polinômio é mônico, minimal e irredutível sobre os racionais \mathbb{Q} . Logo $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 3$, mas sabemos que as construções geométricas com régua e compasso possui grau dois, contradição, portanto não podemos fazer a duplicação do cubo nessas condições. \square

Antes de provarmos o próximo teorema, será necessário o uso de uma identidade trigonométrica, observe o desenvolvimento abaixo:

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) \\
&= \cos(\theta + \theta)\cos(\theta) - \sin(\theta + \theta)\sin(\theta) \\
&= (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\cos(\theta) - 2\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) \\
&= \cos^3(\theta) - \sin^2(\theta)\cos(\theta) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) \\
&= \cos^3(\theta) - 3\sin^2(\theta)\cos(\theta) \\
&= \cos^3(\theta) - 3(1 - \cos^2(\theta))\cos(\theta) \\
&= \cos^3(\theta) - 3(\cos(\theta) - \cos^3(\theta)) \\
&= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) + 3\cos^3(\theta) \\
&= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$$

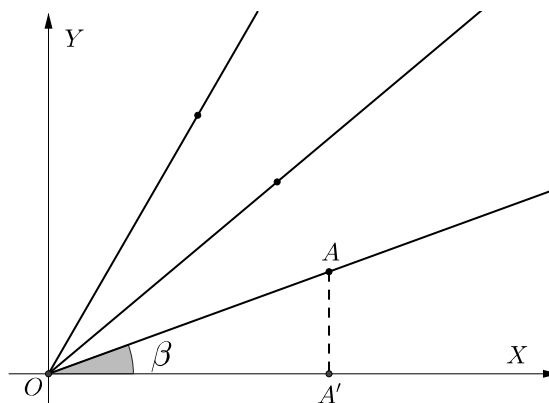
Definição 5.6.1. Um determinado ângulo α é construtivo somente se o seu cosseno também o for.

Teorema 5.6.2 (Wantzel). O ângulo $\frac{\pi}{3}$ não pode ser trissectado usando construções com régua e compasso

Demonstração. Suponha por absurdo que seja possível realizar a trissecção de um ângulo qualquer usando régua e compasso. Logo poderemos fazer a trissecção de um ângulo cuja medida é $\theta = \frac{\pi}{3}$, e trissectar tal ângulo é equivalente a obtermos $\beta = \frac{\pi}{9}$.

Agora, na Figura 25 temos um plano coordenado XY , e uma semirreta OA a partir da origem, que forma um ângulo de medida β no primeiro quadrante sobre o eixo positivo OX . É possível realizarmos uma projeção no eixo X pelo ponto A , obtendo o ponto A' , observe ainda que a medida $OA' = x = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos(\beta)$

Figura 25 – Trissecção do ângulo $\theta = \frac{\pi}{3}$



Agora usando a identidade $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$ ao substituirmos θ por $\frac{\pi}{9}$, encontramos

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}$$

Sendo assim podemos fazer a relação da equação acima com a equação polinomial $8x^3 - 6x - 1 = 0 \in \mathbb{Q}[X]$, novamente podemos fazer tal associação através do homomorfismo de valoração 1.

Tal polinômio é irredutível, e caracteriza $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = \cos(\beta)$ como um número algébrico sobre os racionais \mathbb{Q} . Portanto podemos construir uma extensão algébrica simples do tipo

$$\mathbb{Q}(\cos(\beta)) : \mathbb{Q}$$

E o grau dessa extensão será 3

$$[\mathbb{Q}(\cos(\beta)) : \mathbb{Q}] = 3$$

Contradição, pois se $\frac{\pi}{9}$ é construtivo, então $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ é construtivo. Mas sabemos que o grau de extensão para números construtivos sempre será 1 ou 2. \square

Lema 2. Todo número construtivo a será algébrico sobre os racionais \mathbb{Q} .

Demonstração. Suponha por absurdo um número a construtivo e não algébrico sobre os racionais \mathbb{Q} . Se a não for algébrico então não existirá um polinômio cujos coeficientes sejam racionais e possua raiz a , inclusive polinômios de grau 1 ou 2. Contradição, pois todo número construtivo possui grau de extensão 1 ou 2. \square

Teorema 5.6.3. Não é possível fazer a quadratura do círculo através de régua e compasso

Demonstração. Suponha por absurdo que podemos encontrar a medida da aresta de um quadrado cuja área é equivalente a área de um círculo dado usando régua e compasso. A área do círculo de raio r é dada por $A = \pi r^2$, fazer a quadratura do círculo significa determinar a medida l da aresta de um quadrado tal que $l^2 = \pi r^2 \implies l^2 - \pi r^2 = 0$.

Novamente por homomorfismo de valoração 1 tal equação pode ser associada ao polinômio $x^2 - \pi r^2$ e nesse caso $r\sqrt{\pi}$ é raiz da equação, usando a contra positiva do lema 2, todo número transcendente sobre os racionais \mathbb{Q} não será construtivo. Com isso temos nossa contradição, pois $\sqrt{\pi}$ é um número transcendentes sobre o conjunto dos racionais \mathbb{Q} e não pode ser construtivo e simultaneamente não poderá ser raiz do polinômio $x^2 - \pi r^2$. \square

CONCLUSÃO

O ensino de Matemática nos dias atuais tornou-se um desafio para professores e sistemas de ensino, principalmente no que diz respeito à inclusão de estudos relacionados a construções geométricas nos novos currículos das escolas brasileiras públicas e privadas. Esta dissertação foi executada objetivando responder quais são os principais fatores de relevância no estudo dos três problemas clássicos da geometria euclidiana relacionado ao ensino de matemática atualmente. Compreender se existe dúvidas e interesse em tais demonstrações nos levaram a novas técnicas e estratégias de aprendizagem vitais para qualquer professor.

Os desafios enfrentados pelos professores foram levantados a partir de olhares voltados ao ensino de geometria, especificamente os três problemas clássicos. Os resultados convergem para uma perda de conteúdos fundamentais que com o passar do tempo estão caindo em desuso nas atividades curriculares. A falta de contato com as construções geométricas e o não uso da régua e do compasso nas aulas de matemática estão prejudicando o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos por parte dos alunos. Identificamos vários fatores que prejudicam o ensino de geometria de um modo geral, tais como, tempos e espaços escolares, falta de preparo dos professores, deficiência na formação inicial e após o término da graduação, além das próprias estruturas que compõem os currículos.

No intuito de tentar vencer as dificuldades apresentadas grande parte dos pesquisadores aqui citados orientam para duas estratégias de complementação nas aulas de Matemática: uso dos recursos tecnológicos e da história da Matemática. Percebe-se a importância dos fatos históricos para tornar o ensino mais significativo ligando-o as demais disciplinas, em contrapartida as tecnologias fazem parte das nossas rotinas e integrá-las hoje é de extrema importância na compreensão de conceitos que antes ficavam apenas no imaginário, sistematizando cálculos e tarefas maçantes dando maior espaço a novas ideias e pensamentos que são priorizados pela matemática.

As demonstrações das impossibilidades dos três problemas clássicos mostram as limita-

ções existentes nos poderosos instrumentos Euclidianos. Por outro lado, conhecemos a infinidade de construções geométricas pertinentes a um vasto campo profissional, como por exemplo, arquitetura, engenharia e mecânica. Essa trajetória percorrida até a prova das impossibilidades carregam saberes matemáticos que aparentemente não pareciam estar ligados aquela situação, como a álgebra de polinômios e teorias de corpos por exemplo. Nomes como Platão, Galois, Gauss e Wantzel estão em evidência nessa e em outras descobertas, produzindo assim uma gama enorme de discussões científicas.

Uma explicação rápida para o fato desses problemas terem perdurado por tanto tempo é o não conhecimento das teorias de extensão de corpos do matemático Galois, pois só tempos após sua descoberta Wantzel foi capaz de utilizar esse recurso para compor a demonstração dos teoremas que viriam provar a impossibilidade dos problemas clássicos. O grau de uma extensão simples foi a grande ideia por trás dessas demonstrações, mas como a mesma não foi criada pensando-se nessa aplicação, foi preciso algum tempo para associá-las às construções geométricas e finalizar de vez essa dúvida que acabou contribuindo para o surgimento de novas descobertas matemáticas.

Hoje em dia não se tem dúvidas sobre a validade dos teoremas de Wantzel e ainda muito se pesquisa sobre os três problemas clássicos, pois são variados os campos da Matemática necessários para explicar de forma concreta suas impossibilidades. Professores percebem a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo como temas geradores para aulas de geometria na educação básica e em sua própria formação visando sanar essa deficiência existente no ensino de Matemática.

Após fazer o levantamento dessas informações, a presente pesquisa foi construída pensando-se em quais os conceitos e acontecimentos históricos fundamentais para que se possa compreender as demonstrações dos três problemas, e a partir disso foi possível realizar a formulação de uma estratégia para tal. Expor conceitos históricos e acontecimentos que possibilitem fazer associação entre álgebra e geometria. Explicar estruturas algébricas até que seja possível compreender o conceito de extensão simples. Por fim, fazer associação entre extensões simples e espaços vetoriais nos levando ao grau de um extensão para então construir as demonstrações.

Dessa maneira verifica-se que é imprescindível a abordagem de tal assunto na educação básica pois percebe-se a existência de uma grande quantidade de conceitos matemáticos por trás dos três problemas clássicos. O desenvolvimento cognitivo é responsável pelo sucesso dentro e fora da escola, e depende, entre outras situações, de boas aulas de Matemática.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, E. F. Uma análise sobre a impossibilidade da trissecção do ângulo. **VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática, Universidade Luterana do Brasil, Canoas - RS**, 16, 17 e 18 de outubro 2013. Citado 2 vezes nas páginas [41](#) e [47](#).

BERTOLLI, D. O. Instanciação automatizada de um framework de realidade virtual para treinamento médico. **Universidade de São Paulo Escola de Artes, Ciências e Humanidades**, Agosto 2010. Citado na página [25](#).

BIAZZI, R. N. **Polinômios Irredutíveis: Critérios e Aplicações**. 76 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado, PROFMAT) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Cap. 8., 2014. Citado 2 vezes nas páginas [39](#) e [57](#).

BIOLCHINI, J.; MIAN, P. G.; NATALI, A. C. C.; TRAVASSOS, G. H. Systematic review in software engineering. **Programa de Engenharia de Sistemas e Computação COPPE/UFRJ**, Maio 2005. Citado na página [25](#).

CARVALHO, J. P. de. Os três problemas clássicos da matemática grega. **Programa de Iniciação Científica-PIC, OBMEP**, 19 de agosto 2010. Citado 5 vezes nas páginas [15](#), [47](#), [52](#), [53](#) e [54](#).

COSTA, V. C. da. **Números Construtíveis**. 64 p. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção do título de mestre em Matemática, PROFMAT) — Centro de Ciências e Tecnologia, Unidade Acadêmica de Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Cap. 5., 2013. Citado 6 vezes nas páginas [15](#), [33](#), [47](#), [50](#), [51](#) e [80](#).

DIAS, V. G. **Quadratura: da antiguidade à atualidade**. 57 p. Dissertação (Trabalho de conclusão de curso PROFMAT) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Cap. 6., 2014. Citado 2 vezes nas páginas [36](#) e [47](#).

EVES, H. **introdução à história da matemática**. [S.l.]: Unicamp, Campinas, 2011. (5ª edição). Citado 2 vezes nas páginas [47](#) e [79](#).

FELIX, A.; NOVAIS, R.; SANTOS, J. P. Construção com régua e compasso: Números construtíveis. **VI Encontro Brasiliense de Educação Matemática "Ser educador matemático", Brasília - DF**, 19, 20 e 21 de setembro 2014. Citado na página [42](#).

FERMINO, D. **Álgebra Motivada Pela Geometria**. 69 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Cap. 3., 2013. Citado 4 vezes nas páginas [44](#), [47](#), [57](#) e [80](#).

FERRARI, F. C.; MALDONADO, J. C. Teste de software orientado a aspectos: Uma revisão sistemática. **Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - São Carlos**, Janeiro 2007. Citado na página [25](#).

- FREITAS, J. M. de. **Os três problemas clássicos da matemática Grega**. 75 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Matemática) — Instituto de Biociência, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto, Cap. 3., 2014. Citado 3 vezes nas páginas 32, 47 e 80.
- HEFEZ, A. **Curso de Álgebra volume 1**. [S.l.]: IMPA-COLEÇÃO MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA, 2014. (5ª edição). Citado na página 57.
- IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar, complexos, polinômios, equações**. [S.l.]: Editora Atual, 2005. (7ª edição). Citado na página 57.
- JUCA, A. de M. **Construções Geométricas no ambiente virtual de ensino telemático, com medição na sequência fedathi**. 227 p. Dissertação (Tese de Doutorado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Cap. 6., 2011. Citado na página 37.
- JUNIOR, E. M. M.; SANTOS, H. da S.; INSTITUIÇÃO, M. P. de S. F.; FREITAS, R. F. B. de; CARVALHO, T. M. M. de. O geogebra como ferramenta para o estudo das cônicas. **XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática - Retrospectivas e Perspectivas - SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática 25 anos - Curitiba - PR**, 18 a 21 de julho 2013. Citado na página 42.
- JUNIOR, L. P. da S. **Construções Geométricas Por Régua e Compasso e Números Construtíveis**. 47 p. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso, PROFMAT) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Cap. 5., 2013. Citado 4 vezes nas páginas 39, 47, 57 e 80.
- KITCHENHAM, B. **Procedures for Performing Systematic Reviews**. [S.l.]: Software Engineering Group Department of Computer Science Keele University, 2004. Citado na página 25.
- LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. [S.l.]: SBM-COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 2012. (6ª edição). Citado na página 57.
- LIMA, J. P. de. **Uma proposta para o ensino das seções cônicas no ensino básico mediante o uso de um ambiente dinâmico**. 147 p. Dissertação (Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, PROFMAT) — Departamento de ciências exatas e naturais, Universidade Federal Rural do semi-árido, Mossoró, Cap. 9., 2014. Citado na página 34.
- LIMA, V. A. de. **Uma contribuição ao ensino do cálculo de raízes quadradas e cúbicas**. 71 p. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso, PROFMAT) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Cap. 6., 2013. Citado na página 38.
- LOPES, A. S. **Critérios para a construtibilidade de polígonos regulares por régua e compasso e números construtíveis**. 51 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Centro de ciências, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, Cap. 6., 2014. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 80.
- LUGLI, R. **Não precisamos de régua, sim de Álgebra e compasso**. 51 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Cap. 3., 2014. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 80.
- MARTINS, C. P. **Tópicos de Geometria Analítica: Elipse**. 64 p. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso, PROFMAT) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Cap. 6., 2013. Citado na página 44.

MENEZES, D. B. **O uso de dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana: história, teoremas e problemas**. 67 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Matemática) — Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Cap. 5., 2014. Citado 3 vezes nas páginas 15, 32 e 33.

NASCIMENTO, M. C. do; FEITOSA, H. de A. Os três problemas clássicos da antiguidade. **Revista Ciência e Tecnologia, São Paulo - SP**, v. 10, n. 16, p. 1 – 11, janeiro 2010. Citado na página 41.

PEIXOTO, H. C. **Tópicos de Geometria Análítica: Parábola**. 65 p. Dissertação (Trabalho de conclusão de curso PROFMAT) — Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, Cap. 6., 2013. Citado na página 36.

PEREIRA, H. R. **Números Complexos e Transformação de Mobius**. 48 p. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso, PROFMAT) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Cap. 4., 2013. Citado 3 vezes nas páginas 38, 57 e 80.

PEREIRA, T. V. **Regiões Circulares e o Número π** . 42 p. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso, PROFMAT) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, Cap. 5., 2013. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 80.

PRECIOSO, J. C.; PEDROSO, H. A. Construções euclidianas e o desfecho de problemas famosos da geometria. **RECEN-Revista Ciências Exatas e Naturais, Guarapuava - PA**, v. 13, n. 2, p. 163 – 183, julho/dezembro 2011. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 47.

RIBEIRO, M. do R. C. **Curvas e Geometria Dinâmica**. 78 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado em Matemática) — Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto - Portugal, Cap. 5., 2012. Citado 3 vezes nas páginas 31, 47 e 80.

SCHUBRING, G.; ROQUE, T. O papel da régua e do compasso nos elementos de euclides: Uma prática interpretada como regra. **História Unisinos, Sao Leopoldo - RG**, v. 18, n. 1, p. 91 – 103, janeiro/abril 2014. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 47.

SILVA, L. S. C. **O Teorema de Morley**. 58 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Cap. 9., 2014. Citado na página 35.

SILVA, V. E. V. A racionalidade argumentativa de perelman na educação matemática. **X Encontro Nacional de Educação Matemática, Educação Matemática, Cultura e diversidade, Salvador - BA**, 7 a 9 de julho 2010. Citado na página 42.

SOUSA, R. B.; ALITOLEF, S. dos S. A última noite de um gênio: A comovente e trágica história de Évariste galois. **XI semana de matemática I semana de estatística UNIR, Jí-Paraná - RO**, 17 a 21 de outubro 2011. Citado na página 41.

VACARI, A. Método de exaustão: Uma pesquisa bibliográfica. **II SIEPE - Semana de integração, Ensino, Pesquisa e Extensão - Universidade Federal do Centro - Oeste, Departamento de Matemática, Guarapuava - PR**, 27 a 29 de setembro 2011. Citado na página 42.

VERBYTSKA, O. **Matemática no dia - dia**. 100 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Departamento de matemática, Universidade de Lisboa facultade de ciências, Lisboa, Cap. 10., 2014. Citado na página 43.

VITOR, C. B. **Cônicas: lugares geométricos e construções dinâmicas**. 66 p. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Instituto de ciências exatas, Universidade Federal do Amazonas, Amazonas, Cap. 6., 2013. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 80.

VOSKOGLOU, M. G.; KOSYVAS, G. D. Analyzing students' difficulties in understanding real numbers. **REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education, Barcelona**, v. 1, n. 3, p. 301 – 336, outubro 2012. Citado na página 43.

WAGNER, E. **Construções Geométricas**. [S.l.]: SBM-COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA, 2007. (6ª edição). Citado na página 47.