# Problemas isoperimétricos: uma abordagem no ensino médio

***Fernando Herrero Lomas***

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

**Fernando Herrero Lomas**

# Problemas isoperimétricos: uma abordagem no ensino médio

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert

**USP – São Carlos**
**Fevereiro de 2016**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Lomas, Fernando Herrero
L634p Problemas isoperimétricos: uma abordagem no ensino médio / Fernando Herrero Lomas; orientador Marcelo Rempel Ebert. - São Carlos - SP, 2016.
43 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. problema isoprimétrico. 2. desigualdade isoperimétrica. 3. área. I. Ebert, Marcelo Rempel, orient. II. Título.

**Fernando Herrero Lomas**

# Isoperimetric problems: an approach in high school

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Program in Mathematics Professional Master. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert

**USP – São Carlos**
**February 2016**

*Este trabalho é dedicado a minha esposa, aos meus pais, aos meus irmãos, aos meus afilhados e aos meus amigos professores, que sabem o quanto é difícil conciliar o tempo entre trabalho e estudo.*

# AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por estar realizando mais este sonho. Só Ele sabe o quanto foi difícil superar todas as dificuldades para ingressar e conseguir terminar mais esta etapa. Foi Ele, que me fez acreditar na minha capacidade, quando eu já estava perdendo as esperanças.

Agradeço a minha esposa Eloisa Pimenta Lomas, pelo todo tempo de apoio, cobrança e incentivo para que eu concluísse esse trabalho. Pela paciência de por muito tempo ver todos os sábados durante dois anos dedicados ao PROFMAT.

Agradeço aos meus pais Eloisia e Benedito pelo empenho em incentivar a formação como ser humano e professor.

Agradeço aos meus irmãos Ana Paula e Hugo por sempre me incentivar.

Agradeço aos professores do PROFMAT que abdicaram de ficar em suas casas aos sábados para contribuir com nossa formação, uma vez que nós professores encontramos inumeros obstáculos para frenquentar curso durante a semana.

Agradeço aos meus amigos de PROFMAT que mesmo a distância sempre se fizeram presentes através de mensagens.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr.Marcelo Rempel Ebert que sempre foi importante, não só para apoiar durante a dissertação, mas também por sempre se mostrar presente nos vários momentos do PROFMAT.

*“A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela”*

*Albert Einstein.*

# RESUMO

LOMAS, F. H.. **Problemas isoperimétricos: uma abordagem no ensino médio**. 2016. 43 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Nesta dissertação foram discutidas abordagens do problema isoperimétrico que podem ser aplicadas no ensino médio e para alunos de Licenciatura plena em Matemática. Foi realizada inicialmente uma abordagem histórica e posteriormente a discussão de casos particulares e gerais de desigualdade isoperimétrica tanto no plano como no espaço. A abordagem principal é no plano, onde analisado as curvas de perímetro fixo o círculo apresenta a maior área.

**Palavras-chave:** problema isoprimétrico, desigualdade isoperimétrica, área.

# ABSTRACT

LOMAS, F. H.. **Isoperimetric problems: an approach in high school.** 2016. 43 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

In this thesis it was discussed isoperimetric problem of approaches that can be applied in high school and for full degree students in mathematics . It was initially performed a historical approach and then the discussion of individual and general cases of isoperimetric inequality both in the plane and in space . The main approach is in the plan, which analyzed the fixed perimeter curves the circle has the largest area.

**Key-words:** isoperimetric problem, isoperimetric inequality, area.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

# SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

# INTRODUÇÃO

O problema isoperimétrico, um problema clássico da Matemática, é um assunto interessante a ser discutido com alunos dos Ensino Médio, pois o mesmo mostra claramente o quanto a Matemática se faz presente na vida das pessoas. Explorando esse assunto em sala de aula o professor poderá estimular seus alunos discutirem e pensar nas várias situações possíveis para obter a maior área e através de pistas mostrar a importância de vários resultados matemáticos.

Este trabalho poderá servir como um manual ao professor da Educação Básica para aplicação em sala de aula, para que tal objetivo seja alcançado essa dissertação apresenta uma divisão em 4 partes:

- Abordagem histórica - Um pouco de história e curiosidades.
- Assuntos preliminares - Itens de Matemática básica que servirão de apoio para melhor compreensão das demonstrações utilizadas.
- Desigualdes isoperimétricas no $\Re^2$ - Casos particulares e o teorema que motivou esse trabalho de pesquisa.
- Desigualdes isoperimétricas no $\Re^3$ - Casos particulares e uma ideia de uma nova pesquisa.

CAPÍTULO 2

# ABORDAGEM HISTÓRICA

O problema isoperimétrico já são encontrados em textos gregos de Papus (Pappus) ou Papo de Alexandria. Segundo [1] um dos maiores trabalhos de Papus foi *Coleção Matemática*. Esta coleção é uma combinação de guia de geometria da época, com várias proposições originais, extensões e notas históricas. Infelizmente dos oito livros que compõem essa obra perdeu-se o primeiro e parte do segundo livro.

Destacamos o livro V, que aborda amplamente à Isoperimetria, ou seja, comparação de áreas de figuras limitadas por perímetros iguais e também de volumes de sólidos que são limitados por áreas iguais. Nesta obra é abordado também de maneira interessante sobre os favos de mel das abelhas e propriedades de máximos e mínimos.


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATAE
In Latinum Conuersae, & Commentarijs
Illustratae.
VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

Figura 1 – Livro Coleção Matemática - Edição de 1589

Apesar das abordagens do problema isoperimétrico já no séc. IV, não há indícios de uma prova formal para o problema, dentro deste período. Entretanto o problema isoperimétrico sempre despertou interesse de mais matemáticos, por exemplo, o interesse de Jakob Bernoulli que no século XVII também propõe discussões sobre o problema de figuras isoperimétricas e por esse motivo este foi um dos primeiros matemáticos a trabalhar no cálculo de variações, segundo (EVES, 2004).

Apesar de não existirem provas formais, o fato de conhecer o resultado "provável"do problema, pode ter influenciado na organização de cidades durante a idade média. Pois ao analisarmos mapas da época fica claro a disposição circular ou semicircular. Inclusive de maneira inteligente quando da utilização de construção de muros semicirculares utilizando rios como delimitações da fronteira. Pode-se citar como exemplos as cidades de Paris (França), Braga (Portugal) e Colônia (Alemanhã).

Figura 2 – Cidade de Paris

Figura 3 – Cidade de Braga


Figura 4 – Cidade Colônia

Outra curiosidade é a referência a solução do problema isoperimétrico no épico Eneida. Eneida é uma epopéia em doze cantos, escrita em versos por Virgílio em seu retiro na Campânia durante os últimos 12 anos de sua vida (30-19 a.C.). A referência do problema isoperimétrico é feita na história da Rainha Dido, canto VI da obra de Virgilio, por isso encontramos versões desta história como "*A Lenda de Dido*".

Dados os períodos históricos da Coleção de Pappus e a obra de Virgilio podemos concluir que já havia estudos anteriores sobre o assunto, mas tais registros devem ter se perdido.

Entretanto apenas em 1870, com Weierstrass surgiu uma prova rigorosa amplamente aceita. Segundo (LIMBERGER, 2012), essa prova aparece como corolário nos estudos da teoria de "Cálculo das Variações". Posteriormente apareceram novas provas no século XX pelos alemães Erhard Schmidt e Adolf Hurwitz, porém a demonstração deste último faz uso das séries de Fourier. Tipo de demonstração que não será abordada neste trabalho uma vez que este tem como objetivo a aplicação no Ensino Médio.

CAPÍTULO

3

# ASSUNTOS PRELIMINARES

Neste capítulo trataremos de assuntos que representam os pré-requisitos para o entendimento dos resultados matemáticos que serão utilizados para demonstrar e apresentar o assunto.

## 3.1 A Elipse

Nesta seção vamos apenas apresentar o conceito de Elipse, pois a definição de Elipse será utilizada para demonstrar a desigualdade isoperimétrica para triângulos.

**Definição 1.** Uma **elipse** é o conjunto de todos os pontos no plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva dada, sendo esta constante maior que a distância entre os pontos fixados.

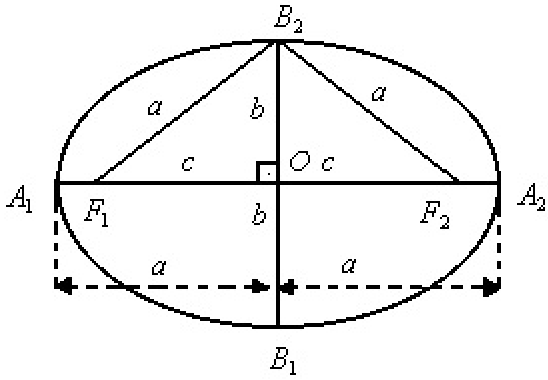



Figura 5 – Elipse com Focos F1 e F2

Os pontos fixados $F_1$ e $F_2$ são os focos da elipse, enquanto que o ponto O (ponto médio de $\overline{A_1A_2}$) é o centro da elipse. Denominamos $\overline{A_1A_2}$ como eixo maior e $\overline{B_1B_2}$ como eixo menor.

## 3.2 Calculando a área de triângulos

Para calcular a área de triângulos nas próximas demonstrações serão utilizadas dois resultados em especial que são:

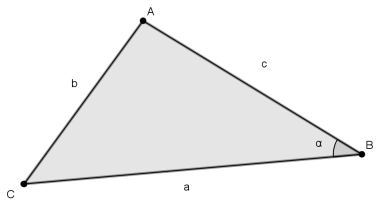



Figura 6 – Triângulo qualquer

**Modo 1 - (Conhecido dois lados e um ângulo entre eles):**Podemos utilizar a fórmula matemática que utiliza a trigonometria como recurso,

$$S = \frac{ac \cdot sen(\alpha)}{2}. \tag{3.1}$$

**Modo 2 - (Conhecido os três lados do triângulo):**Podemos utilizar a famosa fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad p = \frac{a+b+c}{2}. \tag{3.2}$$

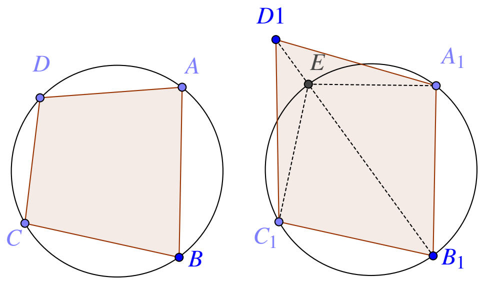
## 3.3 Quadriláteros inscrítiveis

Nesta seção será discutido um pouco sobre os quadriláteros inscritíveis, para tal demonstraremos a seguinte proposição, que pode ser encontrada no livro (BARBOSA; PLANA, ).

**Proposição 1.** Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se e somente se possui um par de ângulos opostos suplementares.

*Demonstração.* Supondo que o quadrilátero possa ser inscrito em um circulo. Desta forma cada um dos ângulos é um ângulo inscrito no circulo. Seja ABCD esse quadrilátero. Considerando os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$. esses ângulos juntos com os pontos $B$ e $D$ determinam os dois arcos. Como esses arcos somam 360$^o$ e sabemos que todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco correspondente, a soma dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ será 180$^o$, portanto suplementares. Seja um quadrilado ABCD com um par de ângulos opostos suplementares. Como a soma dos ângulos internos dos quadriláteros é 360$^o$, então, o outro par de ângulos opostos também é suplementar. Observe as figuras abaixo:

É sempre possível estabelecer 3 pontos sobre o círculo, mas quando vamos colocar o quarto ponto, temos três possibilidades para esse ponto: Ponto sobre o círculo, dentro ou fora do




círculo. Vamos que o ponto esteja fora, desta forma observe o segmento $B1D1$ e o $E$ o ponto sobre o círculo. O Quadrilátero $A1B1C1E$ é um quadrilátero inscrito no círculo e, portanto seus ângulos são suplementares.

$$A\widehat{B}C + A\widehat{E}C = 180^{o}.$$

Por hipótese também temos

$$A\widehat{B}C + A\widehat{D}C = 180^{o}.$$

Dessas duas igualdades, concluímos que $A\widehat{D}C = A\widehat{D}C$.

□

## 3.4 Desigualdades das Médias

Nesta seção será apresentada todas as médias, porém faremos apenas a demonstração das desigualdade entre a média aritmética e geométrica, pois será utilizada na demonstração desigualdade isoperimétrica entre quadriláteros.

**Definição 2.** Sejam $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ números reais positivos. Os valores

$$m_h(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}, \tag{3.3}$$

$$m_g(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}\ , \tag{3.4}$$

$$m_a(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\ , \tag{3.5}$$

e

$$m_q(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} \tag{3.6}$$

são chamados, respectivamente, de média harmônica, média geométrica, média aritmética e média quadrática dos números $a_i$,$i = (1, 2, 3, ..., n)$.

**Proposição 2.** Dados $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos tem-se $m_g(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq m_a(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ e a igualdade vale se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração em duas etapas:

**Etapa 1**: A desigualdade vale para $n = 2^m$.

Provaremos por indução. Para $n = 2$ a desigualdade vale. De fato,

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geq 0.$$

Assim, $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$ e consequentemente $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$.

Agora queremos provar que se a desigualdade vale para $n = k = 2^m$, então também vale para $n = 2k = 2^{m+1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2k}}{2k} &= \frac{\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k} + \frac{a_{k+1}+a_{k+2}+...+a_{2k}}{k}}{2} \\
&\geq^{*} \frac{\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} ... a_{2k}}}{2} \\
&\geq^{**} \sqrt{\sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k}\sqrt[k]{a_{k+1} a_{k+2} ... a_{2k}}} \\
&= \sqrt[2k]{a_1 a_2 ... a_{2k}}
\end{aligned}$$

onde em $(*)$ e $(**)$ usamos a validade da desigualdade para $n = k$ e para $n = 2$, respectivamente. Provado para n=2, é claro que vale para $n = 4, 8, \cdots 2^m, \cdots$, como já era esperado.

**Etapa 2**: Dado $m$ inteiro positivo, então a desigualdade vale para todo $n < 2^m$. Para que isso seja verificado, definimos o número $L = \sqrt[n]{a_1 ... a_n}$, e como a desigualdade vale para $n = 2^m$, temos então que

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + ... + a_n + \underbrace{L + ... + L}_{(2^m - n) vezes}}{2^m} &\geq \sqrt[2^m]{a_1 \cdot ... \cdot a_n \cdot L^{2^m - n}} \\
&= \sqrt[2^m]{L^n \cdot L^{2^m - n}} = L.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{a_1 + ... + a_n + (2^m - n)L}{2^m} \geq L,$$

logo

$$a_1 + ... + a_n \geq 2^m L - (2^m - n))L = nL,$$

obtendo desta maneira

$$a_1 + ... + a_n \geq nL = n\sqrt[n]{a_1 ... a_n},$$

ou seja, a desigualdade desejada. O caso em que $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$ é imediato.

□

CAPÍTULO

4

# DESIGUALDADE ISOPERIMÉTRICA

Este capítulo está dedicado a desigualdade isoperimétrica no plano e um exemplo no espaço. Aqui além do teorema isoperimétrico e do teorema da desigualdade isoperimétrica, faremos algumas demonstrações de algumas situações envolvendo casos particulares antes de uma discussão mais geral.

## 4.1 A Desigualdade Isoperimétrica no $\Re^2$

Apresentaremos alguns casos de desigualdade isoperimétrica no plano.

### *4.1.1 A Desigualdade Isoperimétrica para triângulos*

Vamos discutir como determinar entre triângulos com mesmo perímetro qual terá maior área. Seja então uma família de triângulos cujo os vértices da base sejam fixados e que seja determinado um perímetro fixo.

Pela definição da Elipse, podemos sem perda de generalização determinar que se fixarmos o lado de um triângulo (chamaremos de base) e fixarmos o perímetro o terceiro vértice deste triângulo estará sobre uma elipse cujos focos são vértices da base previamente fixada. De fato podemos afirmar que o terceiro vértice estará sobre uma elipse, pois a soma das distâncias do terceiro vértice aos outros dois lados é constante.

Sendo assim dada essa família de triângulos com o mesmo perímetro, precisamos determinar qual triângulo vai ter a maior área.

Dado que a base foi fixada, teremos que a maior área será a do triângulo que apresentar maior altura, ou seja, o triângulo cujo o terceiro vértice coincidir com o vértice superior da elipse. Sendo assim entre todos os triângulos ABC de base AB fixa e perímetro dado, temos que o de maior área será o triângulo isósceles.

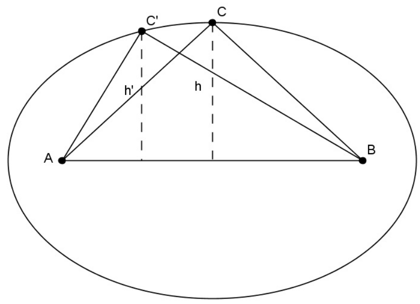



Figura 7 – Triângulos com base no eixo maior da elipse

**Proposição 3.** Dentre todos os triângulo ABC de base AB com medida fixa e perímetro dado, o de maior área é o isósceles

*Demonstração.* Tomando um triângulo de lados a, b e c pela fórmula de Heron temos que:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad p = \tfrac{a+b+c}{2}$$

Fixando $a$, para maximizar a área teremos que o produto $M = (p-b)(p-c)$ deve ser máximo. Tomando $p = \frac{a+b+c}{2}$, ou seja,

$$2p = a+b+c, \tag{4.1}$$

isolando $b$ e substituindo em M, obtemos

$$M = (p-(2p-a-c))(p-c) = -p^2+(a+2c)p+(ac+c^2). \tag{4.2}$$

Como temos uma função quadrática na variável $p$, com discriminante $\Delta = a^2 > 0$, o valor máximo de $M$ é assumido no vértice da parábola, ou seja, na abcissa

$$p = \frac{a+2c}{2}. \tag{4.3}$$

Comparando (4.1) e (4.3) teremos que $a+b+c = a+2c$, assim o produto $M$ será máximo quando $b = c$, ou seja, quando o triângulo for isósceles. □

Precisamos considerar também as situações em que não se tem nenhum lado fixado, desta maneira podemos tratar um caso mais geral.

**Proposição 4.** Entre todos os triângulos apenas com um perímetro $p$ fixado o de maior área é o triângulo equilátero.

*Demonstração.* Tomando um triângulo de lados a, b e c pela fórmula de Heron temos que:

$$A = \sqrt{\tfrac{p}{2}\left(\tfrac{p}{2}-a\right)\left(\tfrac{p}{2}-b\right)\left(\tfrac{p}{2}-c\right)}, \qquad p = a+b+c$$

Admitindo a média geométrica como

$$m_g(a_1,a_2,...,a_n) = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \tag{4.4}$$

e a média aritmética como

$$m_a(a_1,a_2,...,a_n) = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \tag{4.5}$$

e ainda conhecendo a desigualdade $m_g \leq m_a$ podemos escrever que

$$A \leq \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{\frac{p}{2}-a+\frac{p}{2}-b+\frac{p}{2}-c}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}.$$

A maior área atingida é $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ . Considerando que a desigualdade $m_g \leq m_a$ só é igual quando $a_1 = a_2 = ... = a_n$, temos que $\frac{p}{2} - a = \frac{p}{2} - b = \frac{p}{2} - c \Leftrightarrow a = b = c$ , ou seja, quando o triângulo é equilátero.

Sendo assim a área $\frac{p^2}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ . □

Concluímos o estudo da desigualdade isoperimétrica de um triângulo chegando no resultado que dado um perímetro $p$ a maior área é encontrada quando a medida do lado $l$ deste triângulo for igual a $\frac{1}{3}p$.

### 4.1.2 A Desigualdade Isoperimétrica para Quadriláteros

Esta seção tem o objetivos de analisar os problemas isoperimétricos nos quadriláteros.

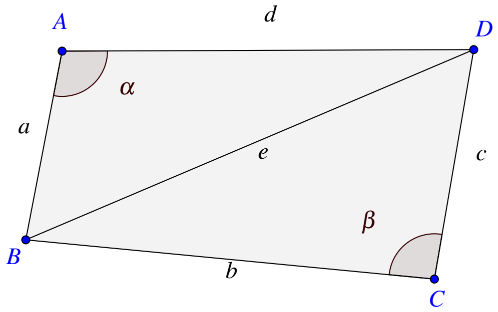
**Proposição 5.** Dentre todos os quadriláteros com comprimentos de lados fixados aquele de maior área é o inscritível.

*Demonstração.* Conhecida a fórmula de Bretschneider para a área S de um quadrilátero convexo ABCD de lados $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ e $d = \overline{DA}$ e ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$:

$$S = \sqrt{\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)\left(\frac{p}{2}-d\right) - \frac{1}{2}abcd[1+cos\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right)]}, \text{ na qual } p = a+b+c+d.$$

Para que o valor $S$ seja maximizado somente quando $1+cos(\widehat{A}+\widehat{C})$ for minimizado. Isso acontecerá quando o valor do cosseno for $-1$, ou seja, $\widehat{A}+\widehat{C} = \Pi$. Sabendo que um quadrilátero é inscritível, se e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares. □

**Proposição 6.** Entre todos os quadriláteros inscritíveis o de maior área é quadrado.




*Demonstração.*

Dado um quadrilátero qualquer $ABCD$, podemos calcular a área em duas etapas. Calculando a área do triângulo $ABD$ e a área do triangulo $BCD$, assim temos:

$$A_1 = \frac{ad \cdot sen(\alpha)}{2}. \tag{4.6}$$

$$A_2 = \frac{cb \cdot sen(\beta)}{2}. \tag{4.7}$$

$$A = \frac{ad \cdot sen(\alpha)}{2} + \frac{cb \cdot sen(\beta)}{2}. \tag{4.8}$$

Para que (4.8) seja máxima é preciso que (4.6) e (4.7) tenham o maior valor possível. Para tal é necessário que $\sin\alpha$ e $\sin\beta$ sejam máximos, ou seja, $\alpha = \beta = \pi$.

Isso já garante que o quadrilátero seja um retângulo e assim com um par de ângulos suplementares, sendo assim inscritível.

Para concluir a prova temos provar que dado um perímetro fixo a área do quadrado é maior que de um retângulo. Então que seja um retângulo $ABCD$ com lados de medidas $a+x$ e $a-x$. Assim a área deste retângulo é determinada por $A = (a+x)(a-x) = a^2 - x^2$, ou seja, $A$ tem valor máximo quando $x = 0$. Provando que a maior área dada um quadrilátero com perímetro fixo é a de um quadrado.

□

### 4.1.3 A desigualdade isoperimétrica para polígonos

A demonstração da desigualdade isoperimétrica para polígonos utilizando apenas geometria plana é longa e cansativa, tornando-se inapropriada para ser aplicada no Ensino Médio, desta forma torna-se mais adequado a apresentação de uma atividade interativa utilizando um software livre, tal como Geogebra (software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino), para que os alunos intuitivamente percebam que ao fixar um perímetro $P$ o polígono regular terá sua área aumentada a cada aumento no número de lados, tal atividade está disponível no anexo1.

A seguir apresentamos uma prova simples, utilizando cálculo diferencial

**Proposição 7.** Se $i < j, i$ e $j$ inteiros positivos, então a área de um polígono regular de $i$ lados é menor do que a área de um polígono regular de $j$ lados de mesmo perímetro. Além disso, a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.

*Demonstração.* Seja $p$ o perímetro de um polígono regular de $n$ lados. Desta maneira, pode-se afirmar que esse polígono possui lados com medida $l = \frac{p}{n}$. Divindindo esse polígono regular em $n$ triângulos isósceles de base $l$ e altura $a$, $a = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}}$. A área $S$ deste polígono pode ser determinada por $S = \frac{p^2}{4n} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\pi}{n}}$, multiplicando o numerador e denominador da fração por $\frac{\pi}{n}$, pode-se rescrever $S$ como $S = \frac{p^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan \frac{\pi}{n}}$.

Para ver como $S$ varia, trocamos $\frac{\pi}{n}$ por $x$, assim estudaremos a função $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ para $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Tomar $n$ grnade implica em calcular o limite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \left( \frac{x}{\tan x} \right) \\ &= \lim_{x \to 0} (cos(x)) \cdot \lim_{x \to 0} \left( \frac{x}{sen(x)} \right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Usando a regra do produto e o limite fundamental, temos:

1. $\lim_{x \to 0}(cos(x)) = 1$,
2. $\lim_{x \to 0} \left( \frac{x}{sen(x)} \right) = 1$ (Limite fundamental).

Então, $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Além disso $f$ é continua em $(0, \frac{\pi}{2})$ e calculando a 1ª derivada de $f(x)$ obtemos:

$$f(x) = x \cdot \frac{cos(x)}{sen(x)} \to f'(x) = 1 \cdot \frac{cos(x)}{sen(x)} + x \cdot \frac{(-sen(x) \cdot sen(x) - cos(x) \cdot cos(x))}{sen(x)^2} \tag{4.10}$$

$$f'(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)} + x \left( \cdot \frac{-1}{sen(x)^2} \right) = \frac{cos(x)}{sen(x)} - \frac{x}{sen(x)^2}.$$

Conclui-se que $f'(x) < 0$ e a área de $S$ é estritamente crescente, quando $n$ cresce. Portanto se $i < j$ a área do polígono regular de $i$ lados será maior que a área de um polígono regular de $j$ lados. E ainda, como $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, temos que a área $S$ de um polígono regular de $n$ lados satisaz $S < \frac{p^2}{4\pi}$.

Agora se tomarmos um círculo de perímetro $p$, neste caso o raio será $r = \frac{p}{2\pi}$, e logo sua área será $S = \frac{p^2}{4\pi}$. Portanto, temos que a área do círculo é maior do que a área de qualquer polígono regular de mesmo perímetro.

$\square$

Como consequência da proposição 7, tem-se que:

**Teorema 1. (Desigualdade isoperimétrica)** Toda curva fechada de comprimento $l$ engloba uma área menor ou igual a $\frac{l^2}{4\pi}$. Além disso, esse valor só é alcançado para círculo de raio $\frac{l}{2\pi}$ (Veja (LIMBERGER, 2012)).

**Obs.** Sendo mais rigorosos, podemos assumir que a superfície da Terra é aproximadamente eesférica e que um problema isoperimétrico real pode ser resolvido sobre essa superfície esférica. E a solução neste caso é a mesma, ou seja, a maior área dado um perímetro fixo será determinada por um círculo. A desigualdade isoperimétrica para curvas fechadas sobre uma esfera foi resolvida em 1905 por (BERNSTEIN, 1905). Não discutiremos essa solução, pois a Matemática envolvida não se aplica no Ensino Médio.

## 4.2 A Desigualdade Isoperimétrica no $\Re^3$

Apresentaremos a seguir um exemplo de problema isoperimétrico em $\Re^3$

A proposta é provar que entre todos os paralelepípedos com área $S$ fixada o maior volume é encontrado no cubo, ou seja, um paralelepípedo regular).

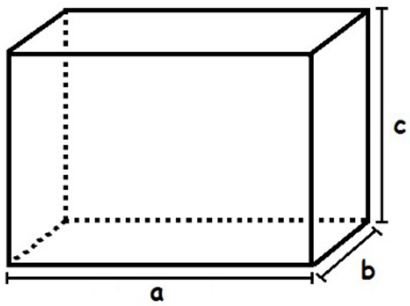



Figura 8 – Paralelepípedo reto retângulo com lados $a$, $b$ e $c$

*Demonstração.* A área da superfície é $S = 2(ab + bc + ac)$ e o volume deste sólido é $V = abc$, usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica $m_g(a_1, a_2, a_3) \leq m_a(a_1, a_2, a_3)$ temos que

$$v^2 = ab \cdot ac \cdot bc \leq \left(\frac{ab + ac + bc}{3}\right)^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^3. \tag{4.11}$$

Para que o volume máximo seja atingido, ou seja, para que $V = \sqrt{\left(\frac{S}{6}\right)^3}$ atinja o seu maior valor possível é necessário que $ab = ac = bc$, logo $a = b = c$.

□

Em $\Re^3$, dentre todos os sólidos com mesma superfície, a de maior volume é a esfera.

# REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M.; PLANA, G. E. **Coleçao do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, Rio de Janeiro.

BERNSTEIN, F. Über die isoperimetrische eigenschaft des kreises auf der kugeloberfläche und in der ebene. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 60, n. 1, p. 117–136, 1905.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas, São Paulo: UNICAMP, 2004.

LIMBERGER, R. **Abordagens do problema isoperimétrico, Dissertação de Mestrado**. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, Campinas, 2012.

APÊNDICE

A

# ROTEIRO DE AULA

**Público Alvo:** Alunos da $3^a$ série do Ensino Médio

**Recursos Pedagógicos:**

- Material impresso;
- Giz e lousa (sala convencional);
- Laboratório de Informática;
- Sala de recursos multimídia.

**Objetivo Geral:** Mostrar a utilização de conceitos geométricos que foram importantes em decisões durante a história e através disso motivar o estudo de Matemática.

**Objetivos Específicos:**

- Utilizar o software livre Geogebra para modelar situações;
- Incentivar a solução de problemas em grupo;
- Mostrar a importância da Matemática para sociedade.

**Conteúdos:**

- Geometria Plana;
- Problema Isoperimétrico Clássico.

## A.1 Roteiro de aulas

### A.1.1 Aula 01 - Aspecto Histórico

(Sala com Recursos Multimídia)

Essa aula pode ser ilustrada com um vídeo "Problema isoperimétrico e Área máxima"disponível no youtube - https://www.youtube.com/watch?v=FffRJ9LKjgc .

Após o vídeo aproveitar o tempo para interagir com a turma e recolher as curiosidades que podem ter sido encontradas neste vídeo.

### A.1.2 Aula 02 - Relembrando alguns resultados da Geometria Plana

(Sala comum)

Referência é o capítulo[3].

- Definição de Elipse;
- Área de triângulos;
- Ângulo inscrito na circunferência;
- Polígonos inscritíveis;
- Desigualdade das médias aritmética e geométrica.

### A.1.3 Aula 03 - O problema isoperimétrico

(Sala com Recursos Multimídia)

Apresentar o problema clássico. Capítulo [4].

### A.1.4 Aula 04 - Usando o Geogebra

(Sala de informática)

Os alunos podem ser organizados em trios para essa atividade. Deve ser entregue impresso o roteiro com as instruções de construção dos polígonos no Geogebra.

O ideal é contar com um monitor assistente para ajudar aos alunos nesta atividade, pois muitos encontram dificuldades em localizar os comandos inicialmente.

Seguindo as instruções do roteiro os alunos devem chegar nas figuras abaixo, lembrando que número máximo de lados testado para o polígono foi de 30 lados, mas pode-se utilizar um número maior de lados, caso se queira, mas nesta quantidade e comparando com o círculo já se tem a ideia ituitiva do objetivo desta aula que é compreender a o problema isoperimétrico no plano.

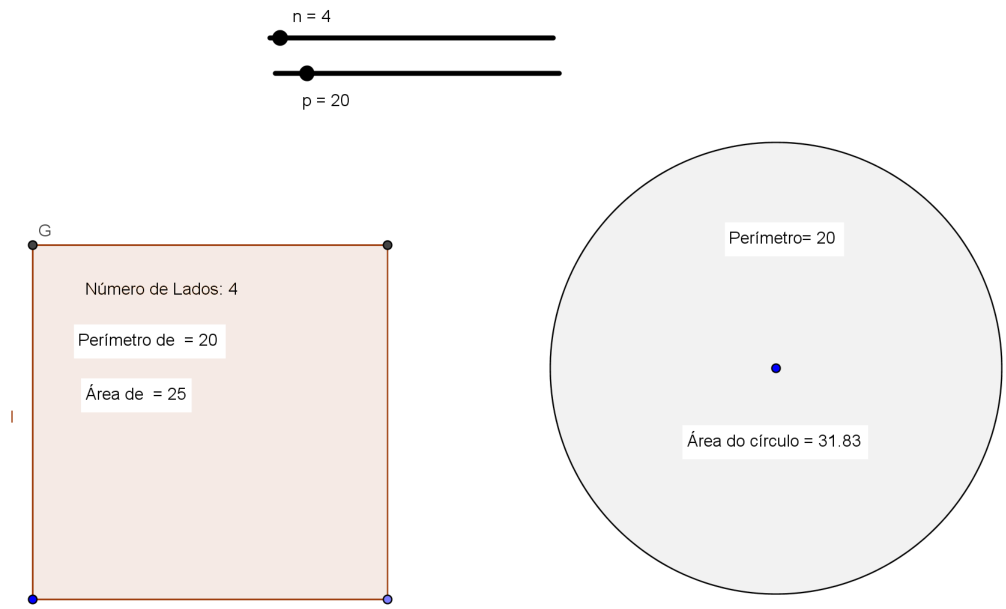



Figura 9 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 4$ lados e circunferência com mesmo perímetro

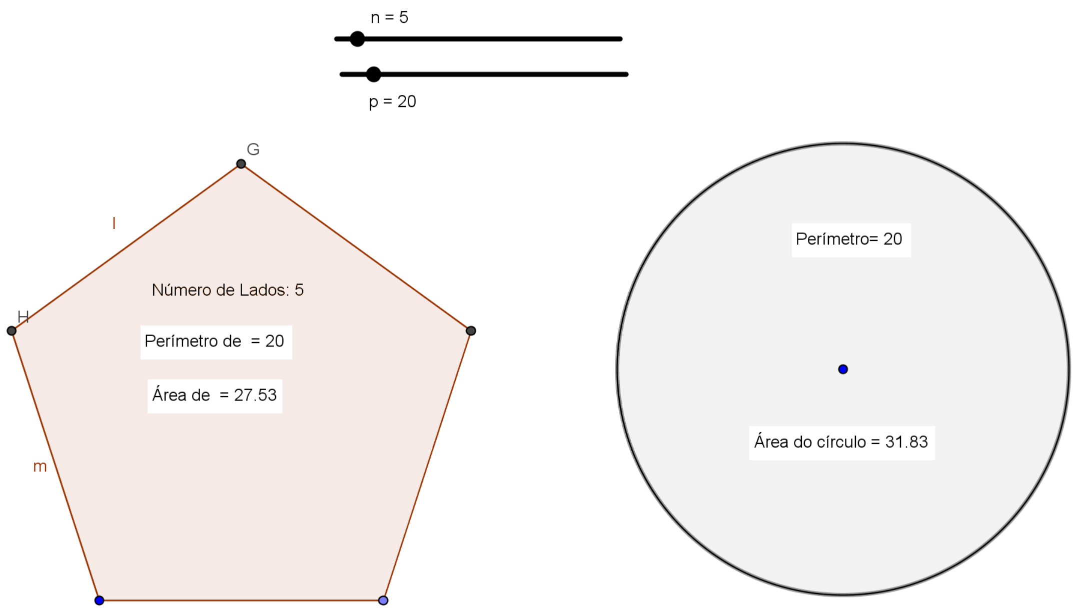



Figura 10 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 5$ lados e circunferência com mesmo perímetro

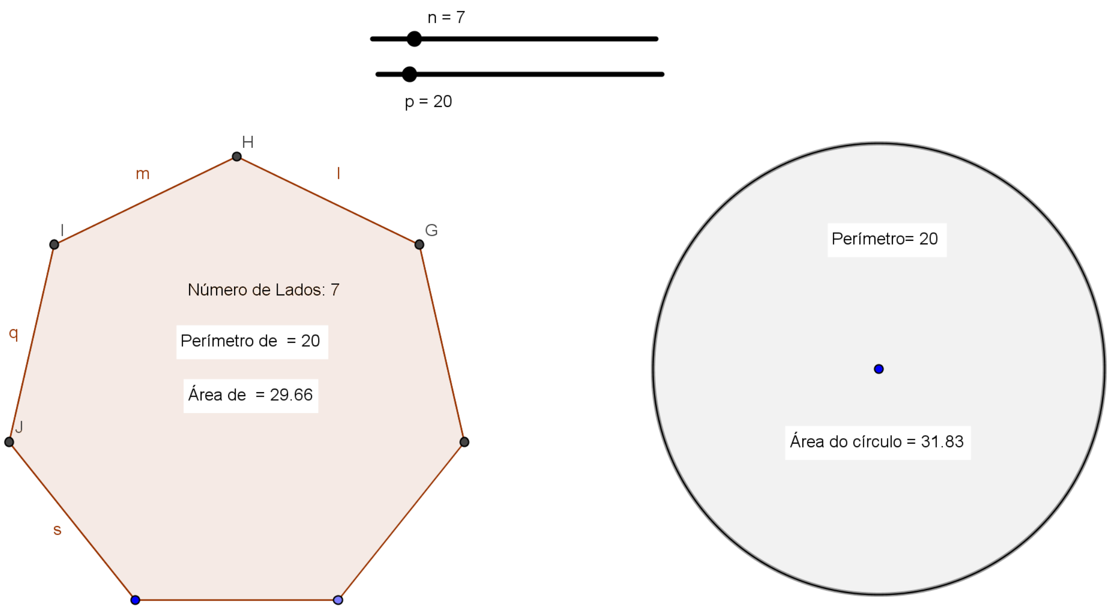



Figura 11 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 7$ lados e circunferência com mesmo perímetro

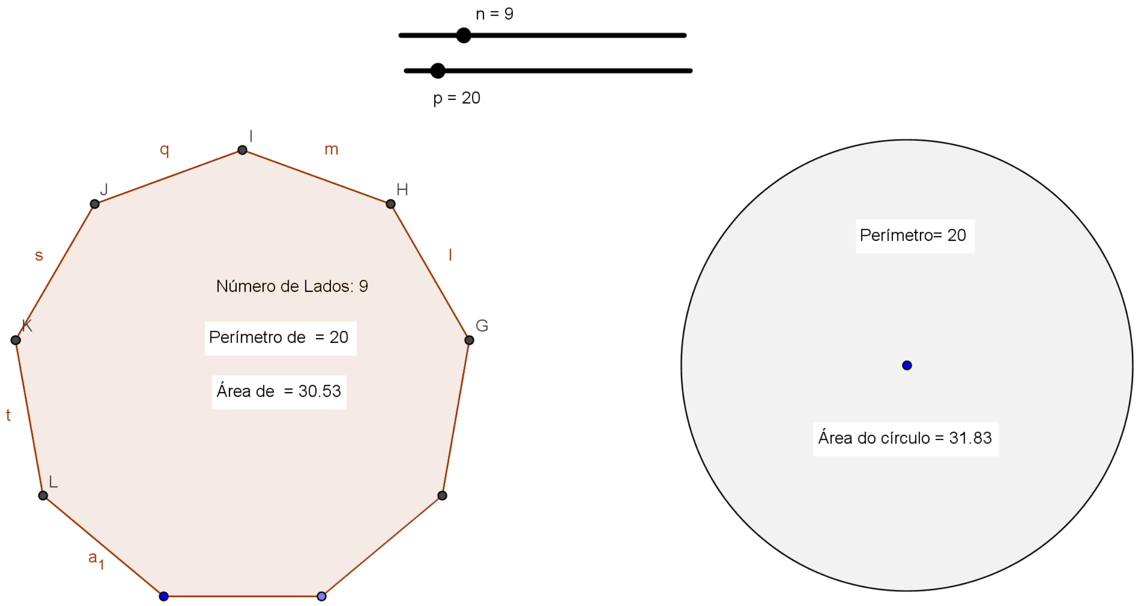



Figura 12 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 9$ lados e circunferência com mesmo perímetro

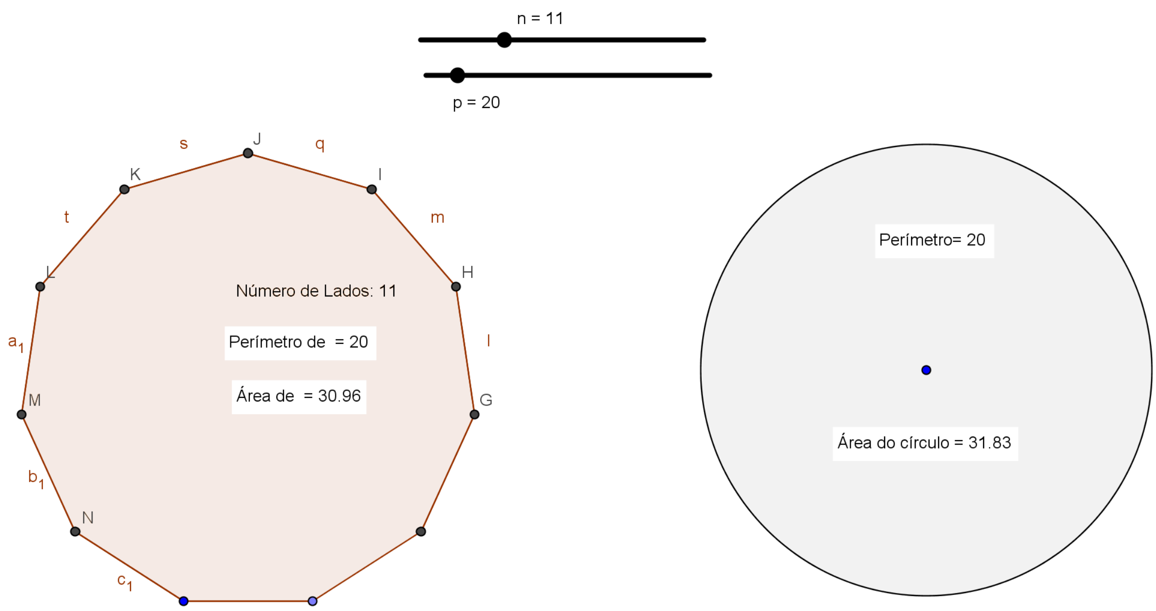



Figura 13 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 11$ lados e circunferência com mesmo perímetro

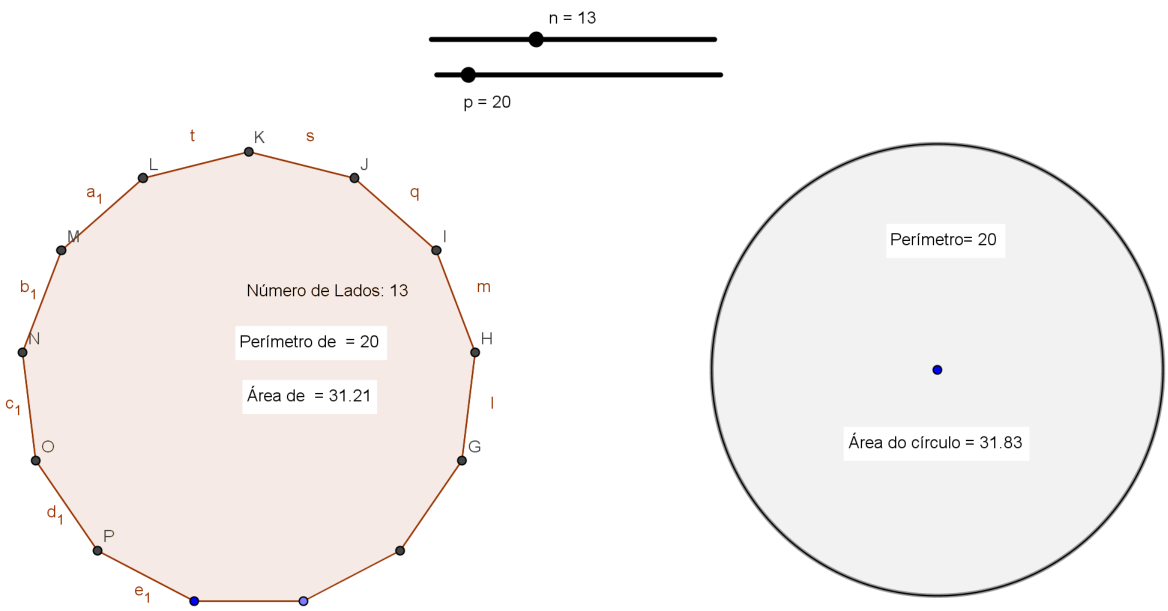



Figura 14 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 13$ lados e circunferência com mesmo perímetro

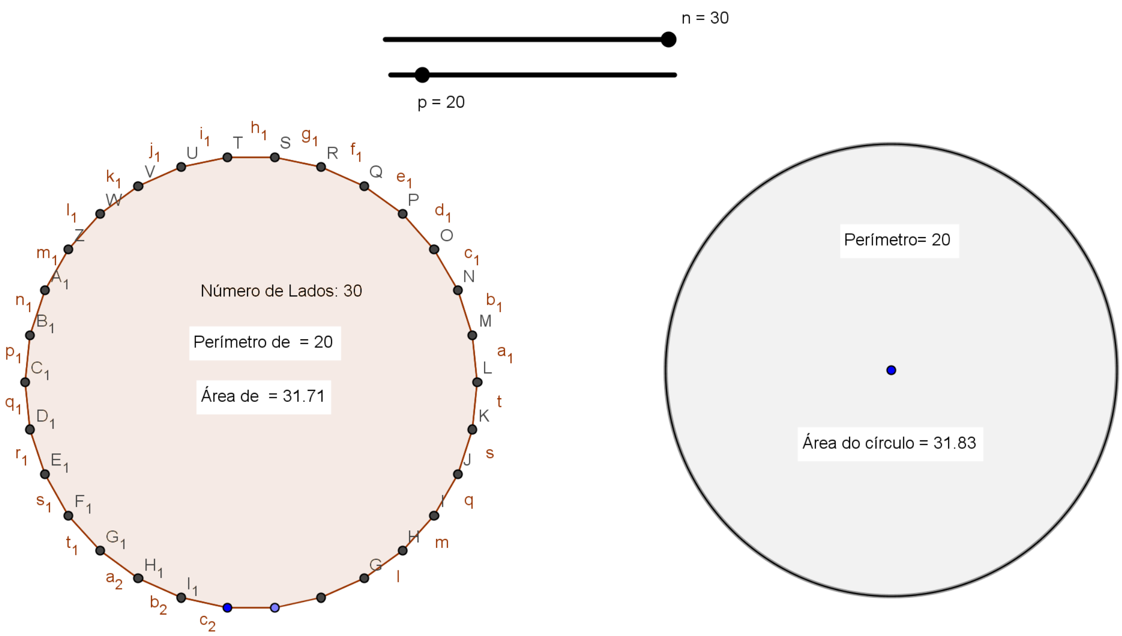



Figura 15 – Perímetro fixado $p = 20$, polígono com $n = 30$ lados e circunferência com mesmo perímetro

## A.2 Considerações

Espera-se que este roteiro ajude ao professor a realizar as atividades para que seus alunos entendam de maneira clara e que se interessem pela Matemática como uma ciência de experimentação, pois precisamos urgentemente de novos talentos que queiram ingressar nos cursos de graduação em Matemática ou Ciências Exatas. Não existe pessoa melhor que o professor em sala de aula para inspirar futuros estudiosos da área.

APÊNDICE

B

# ROTEIRO DE CONSTRUÇÃO DO GEOGEBRA

GeoGebra

Usando recursos para analisar o que acontece ao fixar um perímetro de um polígono e varia o número de lados

Aluno1: ____________________________ Aluno2: ____________________________

Aluno3: ____________________________

**Passo1:** Criar um controle deslizante *n* que representará o número de lados do polígono.

Clicando neste botão e posteriormente no espaço de trabalho escolha o nome *n* o período de 3 a 30 com incremento de 1.

**Passo2:** Criar um controle deslizante *p* que representará o perímetro do polígono.

Clicando neste botão e posteriormente no espaço de trabalho, logo abaixo do controle deslizante n, escolha o nome *p* o período de 10 a 50 com incremento de 10.

**Passo3:** Criar uma variável c, digitando na caixa de entrada => c=p/n


**Passo4:** Criar um ponto fixo A e na sequencia criar um segmento de valor fixo, sendo o valor escolhido a medida c.

Os botões utilizados serão respectivamente: e , quando for solicitado o tamanho digite c. Esse passo é importante, pois definirá a medida do lado do polígono.

**Passo5:** Criar um polígono regular com tamanho do segmento criado no passo anterior e com número de lados *n*.

**Passo6:** Use para determinar o perímetro e para determinar a área do polígono criado.

Arraste o controle deslizante para alterar o número de lados do polígono e ver o que acontece com a área.

**Passo7:** Utilize o passo 3 para criar a variável *d*: d=p/(2*pi), este será o raio do círculo com comprimento *p*. Utilize agora o passo 4 para criar um segmento de tamanho fixo com medida *d*. Usando a ferramenta compasso e o segmento criado determinaremos um círculo de raio *d* e perímetro *p*. Repita o passo 6 para esse círculo e agora faça suas comparações e cheque a suas conclusões.

Bom trabalho! Prof. Fernando H Lomas