2016: DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Uma proposta de estudo de cônicas para o ensino médio.

Alexander Vallo de Siqueira Borges [1]
Francinildo Nobre Ferreira[2]

Resumo: Frequentemente observamos o desinteresse mostrado pelos alunos diante do estudo de cônicas em qualquer época de sua vida escolar. Observamos esses aprendizes ao se depararem com tal conteúdo por mais de uma vez de forma tradicional mostrando-se alheios a qualquer espécie de entendimento. Nosso objetivo nesse trabalho é introduzir uma proposta de estudo através de uma sequência didática, inclusive destacando a caracterização das cônicas como interseção de planos com o cone e suas propriedades a partir das quais se obtém as equações no plano cartesiano, com exemplos concretos que traga aos discentes uma oportunidade de releitura deste assunto. Destacamos que não pretendemos com nosso trabalho solucionar o problema exposto, e sim reapresentar os conceitos e propriedades através dessa nova escrita, buscando disponibilizar o conhecimento de forma não apenas teórica mas também com ludicidade. Esperamos assim um melhor contato dos discentes com tal conhecimento bem como comprometimento por parte deles.

Palavras-chave: Cônicas, Elipse, Hipérbole, Parábola.

[1]Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2014, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, tablasjf@yahoo.com.br
[2]Professor orientador, Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, nobre@ufsj.edu.br

1 Introdução

O PCN+ [13] destaca que a etapa final de escolarização básica tem como principal característica a formação cidadã do jovem. Essa formação visa além de outras coisas a observação crítica e em profundidade dos fenômenos e fatos científicos que ocorrem a todo momento ao redor do jovem estudante. O ensino fundamental além de instrumentalizar o estudante com as ferramentas matemáticas, tem a função de prepará-lo para alcançar voos mais altos quando o mesmo se encontrar no ensino médio. É nessa etapa, em especial no 3º ano do ensino médio, que o estudante começa a vislumbrar um potencial uso científico e tecnológico para seus estudos de matemática.

Porém, não basta que o conteúdo a ser lecionado seja agradável, é de extrema importância que o ensino da disciplina seja dosado de maneira equilibrada e especialmente apresentada para o estudante, caso contrário corremos o risco de "deixar uma má impressão da matemática" podendo causar uma decepção acadêmica na vida do aluno até mesmo levando-o a um desânimo em sua vida estudantil ou dificultando a realização de seus sonhos profissionais.

É importante lembrar que a Matemática, nesse momento da vida escolar, tem papel fundamental para que o aluno possa percebê-la presente nas outras ciências de uma maneira mais rigorosa, com domínio das habilidades e competências necessárias para enfrentar a realidade ao seu redor. O jovem cidadão munido de um bom instrumental matemático alcançará uma compreensão melhor, refinada leitura e portanto uma elevada capacidade de interpretação do mundo.

O estudo que aqui propomos é importante também para o aluno que pretende ingressar em cursos superiores na área de exatas, uma vez que possibilitará um melhor aproveitamento na disciplina de geometria analítica e nas disciplinas de cálculo.

Nesse sentido sugerimos uma alternativa de estudo das cônicas para o ensino médio em que o aluno perceba a importância do desenvolvimento científico matemático que, assim como as outras ciências, nasce de um contexto histórico, social, político e científico de sua época.

2 História das Cônicas

2.1 Problemas envolvendo cônicas

Você já se questionou alguma vez sobre qual a trajetória dos planetas em torno do sol? Isto é, que órbita eles descrevem? Ou ainda porque grande parte das antenas de TV terem um mesmo formato específico? Ou como funciona o método de localização para navios e aeronaves conhecido como sistema LORAN de navegação? Observamos que é muito comum questionarmos porque o assunto cônicas é estudado na escola, e nos lembramos que este aprendizado se deve pela realidade do mundo a nossa volta. O fato é que podemos observar estas curvas presentes de forma natural em vários questionamentos, como por exemplo, os que realizamos acima.

A matemática se apresenta a todo momento desde uma simples questão cotidiana como fazer compras em um mercado até questões extremamente complexas como por exemplo a construção naval. Os mais arredios podem optar por dizer que suas áreas de interesse não se vinculam de forma alguma a este ensino, mas o fato é que se nos atentarmos e soubermos observar pelo prisma correto a matemática também lá estará presente. As cônicas, objeto de nosso estudo neste trabalho, não fogem a este raciocínio e portanto os alunos também devem ser conduzidos ao seu estudo.

Para aqueles que não estejam convencidos e permaneçam com a pergunta se precisamos ou não das cônicas, esta dúvida ficará então respondida se alcançarmos a solução dos questionamentos acima apresentados através desta área do conhecimento. Mas tal ciência está de fato apta a solucionar plenamente nosso problema? Em caso afirmativo como se chega a tal conclusão?

A resposta não é tão simples quanto gostaríamos, mas desde já ela nos leva a uma viagem pela História. Viagem esta que chegando ao final, esperamos ter não só respondido nossas perguntas como também nos aproximado da matemática, tornando-nos senão "amigos" ao menos simpáticos a ela.

Ao longo do texto algumas datas estão de acordo com as referências utilizadas em seu desenvolvimento e que os autores informam serem estas datas aproximadas e prováveis.

2.2 Primeira parte de nosssa viagem

De acordo com a História não é possível estabelecer uma data para a origem da matemática. Têm-se notícias de uma escrita rudimentar quatro mil anos antes de Cristo. Na Mesopotâmia usava-se o barro para escrita em tabletas moles para em seguida serem cozidas em fornos ou até mesmo no calor do sol. E uma porcentagem destas escritas já era escrita matemática. O homem pela sua natureza exploratória continuou evoluindo em vários aspectos sociais e a produção escrita também não cessou, as civilizações daquela época tornaram-se mais expressivas levando a um novo momento da humanidade, como revela Boyer quando afirma:

> Os estudiosos egípicios e babilônios continuaram a produzir textos em papiro e cuneiforme durante muitos séculos após 800 a.C.; mas enquanto isso

> uma nova civilização se preparava rapidamente para assumir a hegemonia cultural... (BOYER, 1998, p. 30)

Por volta de 800 a.C. o mundo já se agigantava. Os primeiros jogos olímpicos, uma cultura literária admirável, artes, desenvolvimento agrícola. Esperávamos que a matemática também já tivesse um papel de destaque, porém vamos observar que ainda por mais dois séculos ela estaria em desenvolvimento incubado e que viria a desabrochar com os esforços iniciais de Tales por uma geometria demonstrativa (aproximadamente 600 a.C) coroando-se com os Elementos de Euclides (por volta de 300 a.C). Além de Tales e Euclides, muitos outros matemáticos de maior ou menor expressão foram responsáveis por um período de notáveis realizações.

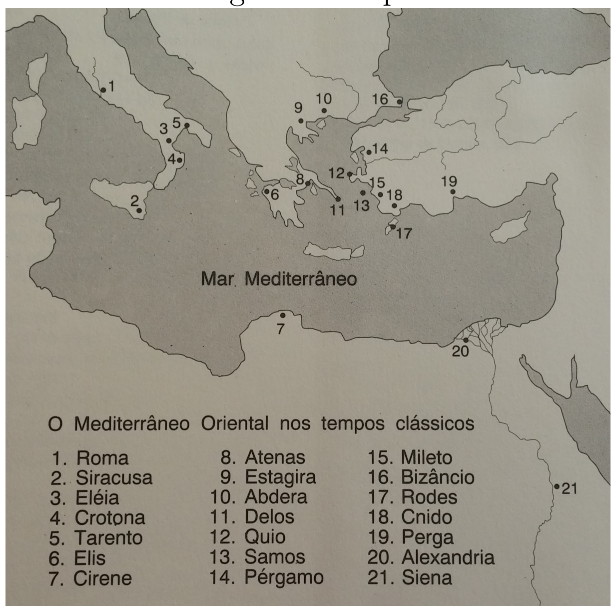
Nesse período a famosa biblioteca de Alexandria funcionava como uma universidade do mundo antigo. Todo e qualquer navio mercador ou viajante que por lá passavam tinham seus documentos confiscados, copiados pelos escribas da biblioteca para somente depois serem devolvidos aos seus donos de origem. Foi dessa forma que essa biblioteca concentrou em suas estantes grande parte do conhecimento do mundo antigo, ficando registrado o trabalho de compilação da geometria por Euclides, conhecidas como "Os Elementos", conforme mostra Venturi:.

> Dos 13 livros em que se subdividem Os Elementos, os 6 primeiros tratam da Geometria Plana Elementar; os 3 seguintes, da Teoria dos Números, o livro X trata dos incomensuráveis (números irracionais) e os 3 últimos da Geometria no Espaço. (Venturi, 2003, p.14)

De acordo com Eves (2004) além das escolas jônica e pitagórica fundadas por Tales de Mileto e Pitágoras, inúmeros outros centros de matemática surgiram em vários períodos de prevalência da história política grega.

A figura 1 mostra o mapa onde diversos centros de matemática se desenvolveram no então centro do mundo.

Figura 1: Mapa



Fonte: EVES, 2004, p. 130

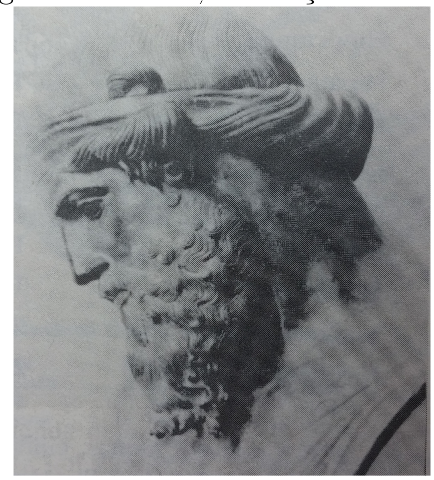
Nesse período, a cidade de Atenas se caracterizava por uma expansão política e intelectual. Esse clima atraía inúmeros matemáticos de todas as partes do mundo grego.

Mas a humanidade desde seus primórdios apresenta uma belicosidade característica que ainda hoje buscamos compreendê-la de modo desejável. Por tal motivo, a paz e o fervor do desenvolvimento cultural chegam ao fim em 431 a.C com o início da Guerra do Peloponeso entre Atenas e Esparta, conflito este muito longo. Mais um penoso século de trevas para a matemática em Atenas, e infelizmente durante esse período, o desenvolvimento da geometria foi menos profícuo.

Passado este período, reduzida politicamente, Atenas consegue retomar seu lugar como liderança cultural do mundo grego. Nessa nova fase nasce Platão em 427 a.C. senão na própria Atenas, em seus derredores. Após estudar por um período filosofia com Sócrates, sai pelo mundo em uma longa jornada a procura do saber. Estuda matemática com Teodoro de Cirene nas costas da África e torna-se amigo de Arquitas(428 − 347a.C.) que já havia influenciado os pitagóricos do sul da Itália a fundar uma nova escola em Tarento.

> Depois de seu retorno a Atenas por volta de 387 a.C, fundou sua famosa Academia, uma instituição orientada por propósitos sistemáticos de investigação científica e filosófica. ... Quase todos os trabalhos matemáticos importantes do século IV a.C. foram feitos por discípulos ou amigos de Platão, fazendo da Academia o elo de ligação da matemática dos pitagóricos mais antigos com a da posterior e duradoura escola de Alexandria.(EVES, 2004, p.131)

Figura 2: Platão, ilustração histórica



Fonte: EVES, 2004, p. 132

2.3 Segunda parte de nosssa viagem

A segunda parte da nossa viagem passa por um dos três grandes problemas da antiguidade. Problema este que por longo período ficou sem resposta mas fez a matemática dar um salto em seu desenvolvimento e assim surgir um novo ramo de estudo. De fato, quantas vezes o desconhecido impulsiona o homem na direção do saber graças à persistência e engenhosidade que esse decide aplicar em busca da solução. Karlson lembra esta naturalidade quando narra:

> "Um pai estirado no seu leito de morte disse a seus filhos que havia enterrado um tesouro na vinha. Estes, com sua mentalidade frívola-cobiçosa, puseram-se imediatamente a volver e revolver o terreno com o suor de seu rosto. Nenhum tesouro encontraram, e por um simples motivo: ele jamais havia existido. A vinha assim revolvida, porém, triplicou de produção, revelando-se ela, assim, o verdadeiro tesouro." (KARLSON, 1961, p.67)

Outros trezentos anos se passam e neste período a matemática evolui sistematicamente. Grandes personalidades surgem e contribuem para o conhecimento matemático fazendo com que ela alcance uma nova fase cultural. Três séculos e três linhas de desenvolvimento matemático podem ser enfatizadas. Primeiramente nasce uma organização e sistematização da matemática que culmina com os Elementos de Euclides, iniciado pelos pitagóricos e acrescidos por Hipócrates, Eudoxo, Teodoro, Teeteto e outros.

Em seguida, o desenvolvimento das noções relacionadas aos infinitésimos e infinitos e seus processos somatórios que foram os primórdios do cálculo nos tempos modernos.

Mas para falarmos da terceira linha de desenvolvimento, estudo das cônicas, é necessário antes abordar o problema que origina seu desenvolvimento, e que para a época fora tido como insolúvel: a duplicação do cubo, também conhecido como problema de Delos.

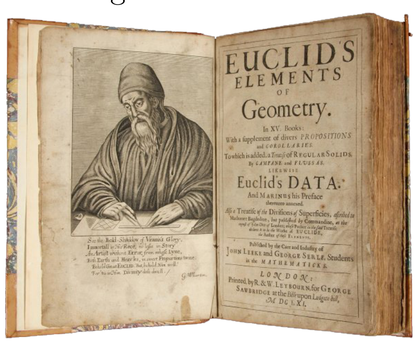
É importante ressaltar que quando falamos de problema "insolúvel" devemos nos lembrar de que a criatividade e a engenhosidade tem papel fundamental para seu estudo e, até se provar que o mesmo é impossível dentro de parâmetros pré-estabelecidos, ele já se tornou fonte de riqueza que o destaca dentre os demais problemas existentes na época.

Essa impossibilidade consistia no fato de que os problemas daquela época deveriam ser resolvidos com régua e compasso. Com a régua sem escalas era permitido traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Já com o compasso era permitido traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado. A construção com régua e compasso que era vista como regras de um jogo intelectual dos mais fascinantes e absorventes jamais inventados até então foi uma ferramenta explorada nos elementos de Euclides como destaca Eves:

> Como os postulados dos Elementos de Euclides limitaram o uso da régua e o do compasso de acordo com as regras acima, esses instrumentos, assim utilizados, tornaram-se conhecidos como instrumentos euclidianos. (Eves, 2004, p.134)

Ainda segundo BKOUCHE et JOËLLE (1993 apud Pitombeira, 2004) havia uma discussão de porque os gregos tentavam resolver problemas de construção usando somente a régua e compasso.

Figura 3: Euclides

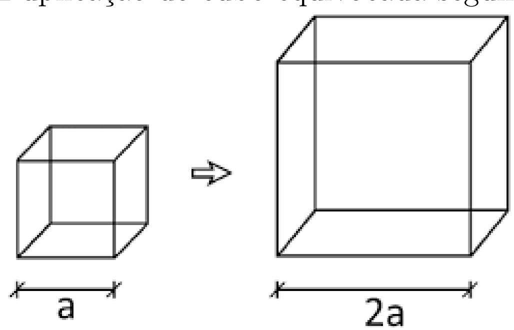


Fonte: [17]

Conta uma lenda que o famoso problema de duplicação do cubo teria se originado nas palavras de algum poeta grego antigo, ignorante de matemática, ao descrever a insatisfação do mítico rei Minos sobre o tamanho do túmulo de seu filho. Minos ordenara que o tamanho do túmulo fosse dobrado. O poeta fez então Minos concluir, incorretamente, que isso poderia ser feito dobrando-se cada uma das dimensões do túmulo.

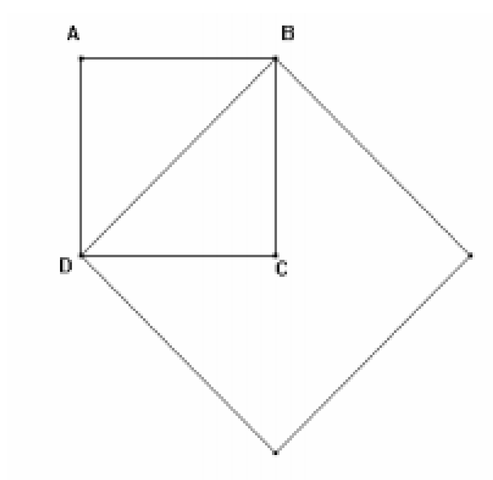
Essa pouca experiência matemática do poeta, levou os geômetras a estudar o problema de como construir um cubo com o dobro do volume de um outro cubo. A figura a seguir apresenta a esquerda um cubo com aresta de medida a e a direita um cubo com aresta de medida $2a$. O primeiro cubo terá um volume a^3 enquanto o segundo será $8a^3$, revelando que ao dobrar a aresta do cubo não dobramos o volume do cubo e sim multiplicamos o volume por 8.

Figura 4: Duplicação do cubo equivocada segundo o poeta



Veremos agora um modo pelo qual se desejou dobrar o volume do cubo. Inicialmente começaremos duplicando a área de um quadrado conhecida a medida do lado(figura 5).

Figura 5: Duplicação da área do quadrado



Considere um quadrado ABCD. Aplicando o teorema de Pitágoras obtemos:

$$DB = \sqrt{2} \cdot AB$$

Então

$$DB^2 = 2 \cdot AB^2$$

Assim o quadrado que tem como medida do lado DB tem área igual o dobro da área do quadrado original. A equação $DB^2 = 2 \cdot AB^2$ pode ser escrita como

$$\frac{AB}{DB} = \frac{DB}{2AB}.$$

Assim, achar o comprimento DB é o equivalente a inserir uma meia proporcional (hoje dizemos média geométrica) entre AB e $2AB$.(Pitombeira, 2004, pg. 3)

De maneira análoga os matemáticos gregos da época intuiram a solução para o problema espacial da duplicação do volume do cubo. Essa solução foi primeiramente proposta por Hipócrates (440 a.C) com base na construção de duas meias proporcionais entre dois segmentos de reta de comprimentos a e $2a$. De fato, denotando-se as médias geométricas por x e y, segundo minicurso 20 da II Bienal da SBM, temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

De $\frac{a}{x} = \frac{x}{y}$ temos $ay = x^2$.

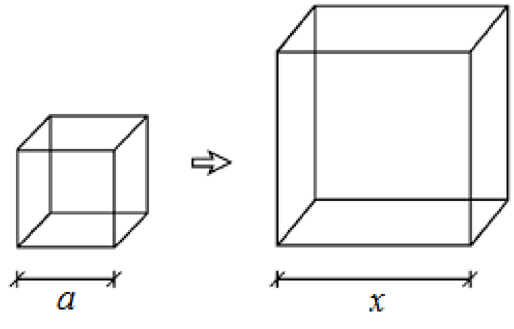
Multiplicando ambos os lados dessa equação por x obtemos $axy = x^3$.

Analogamente, de $\frac{a}{x} = \frac{y}{2a}$ temos $2a^2 = xy$.

Das equações $axy = x^3$ e $2a^2 = xy$ temos que $x^3 = a \cdot 2a^2$ obtendo $x^3 = 2a^3$.

A figura a seguir apresenta um cubo de aresta a e um cubo de aresta x.

Figura 6: Duplicação do cubo

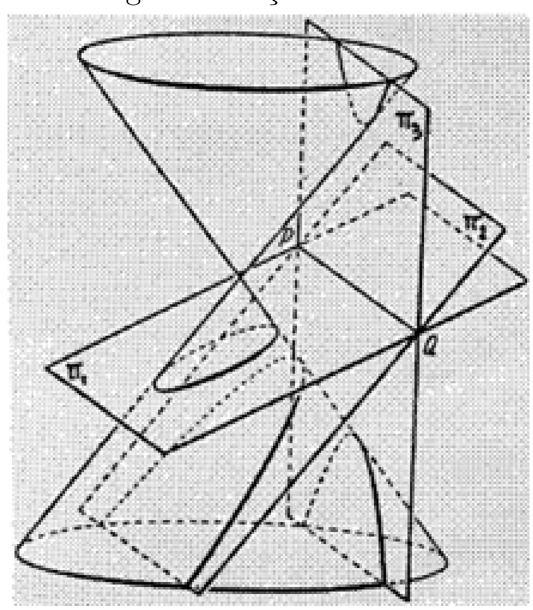


Ou seja, x é a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume de outro cubo de aresta a.

Mas o que Hipócrates fez foi transformar um problema complexo para a época em outro problema também impossível de ser resolvido com régua e compasso. Posteriormente Arquitas, também habilidoso não só com a matemática mas também com diversas outras áreas de interesse, teria tido acesso a um tratado mais antigo de matemática no qual unido à sua genialidade traria novos resultados que levariam finalmente à solução do problema, conforme afirma Boyer (1998) dizendo que sua contribuição mais notável foi uma solução tridimensional do problema de Delos, utilizando interseções de figuras espaciais para a solução do problema. Esta construção encontra-se em (Boyer, 1998, pg. 49). Pitombeira afirma em vídeo que um historiador em seu livro comenta ser "Inspiração dos Deuses"encontrar tal solução.

Algumas décadas depois Apolônio, utilizando essas interseções de figuras espaciais introduziu os termos elipse, hipérbole e parábola para as seções que até então eram conhecidas por seções do cone com o plano com ângulo reto, seções do cone com o plano com ângulo maior que o reto e seções do cone com o plano com ângulo menor que o reto conhecidas como seções cônicas (figura 7).

Figura 7: Seções Cônicas



Fonte: COSTA, 2007, p. 80

Foi também Apolônio quem mostrou como obter todas as seções cônicas de um mesmo cone oblíquo de duas folhas, apesar de ter sido Manaechmo quem considerou pela primeira vez as seções de um cone.

Bom, já havíamos então falado sobre a sistematização da matemática e o desenvolvimento das noções relacionadas aos infinitésimos e infinitos. Agora estamos aptos a enunciar nosso terceiro ponto que trata do estudo das cônicas.

Devemos observar que até então todas as soluções são geométricas. A geometria analítica posteriormente daria uma nova linguagem a esse estudo.

3 Cônicas

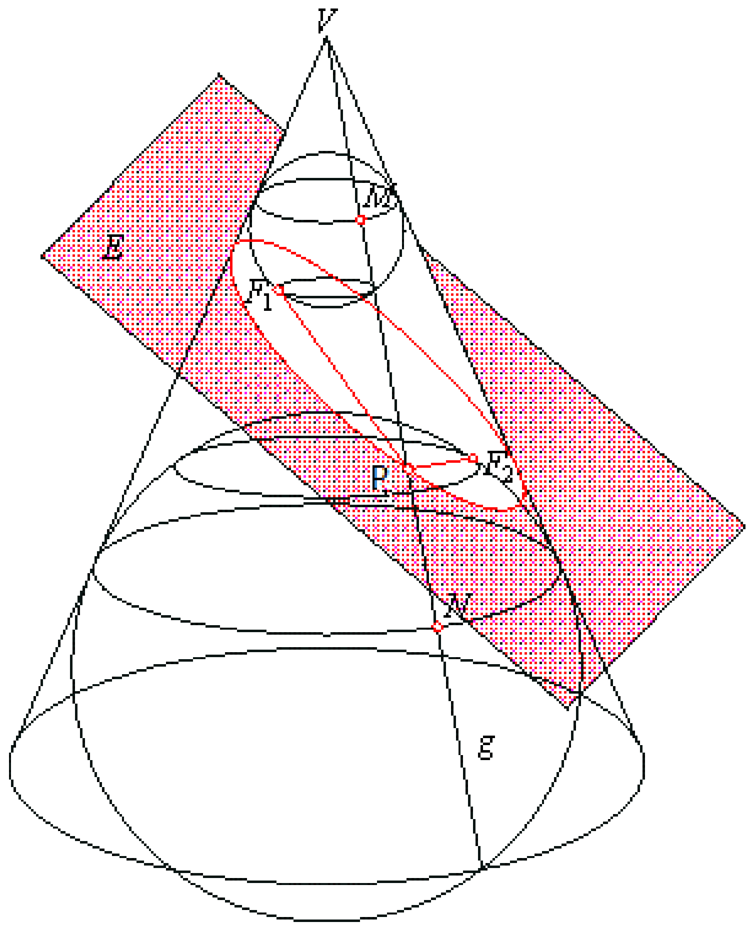
Conforme observamos anteriormente, ao realizarmos cortes em um cone feitas com um plano, encontramos algumas figuras planas que são chamadas elipses, parábolas e hipérboles. Podemos nos perguntar como essas curvas obtidas podem ser descritas utilizando propriedades da geometria plana. Ou seja, se poderíamos caracterizar suas propriedades através da geometria plana.

Para responder os questionamentos supracitados vamos dar um salto na história indo a 1800 d.C.. Neste período houve todo um desenvolvimento do estudo das cônicas, que auxiliam na resposta deste questionamento, mas vamos utilizar o trabalho do matemático Dandelin (1794-1847) que nos traz uma solução “elegante”.

3.1 A elipse como interseção de um plano com um cone

Considere um cone com ângulo menor que 90 graus e vértice V. Tracemos um plano E perpendicular a uma de suas geratrizes (Figura 8). Observe que podem ser inscritas duas esferas no cone e tangentes ao plano, uma acima e outra abaixo do plano, conforme essa mesma figura.

Figura 8:



Fonte: internet [15]

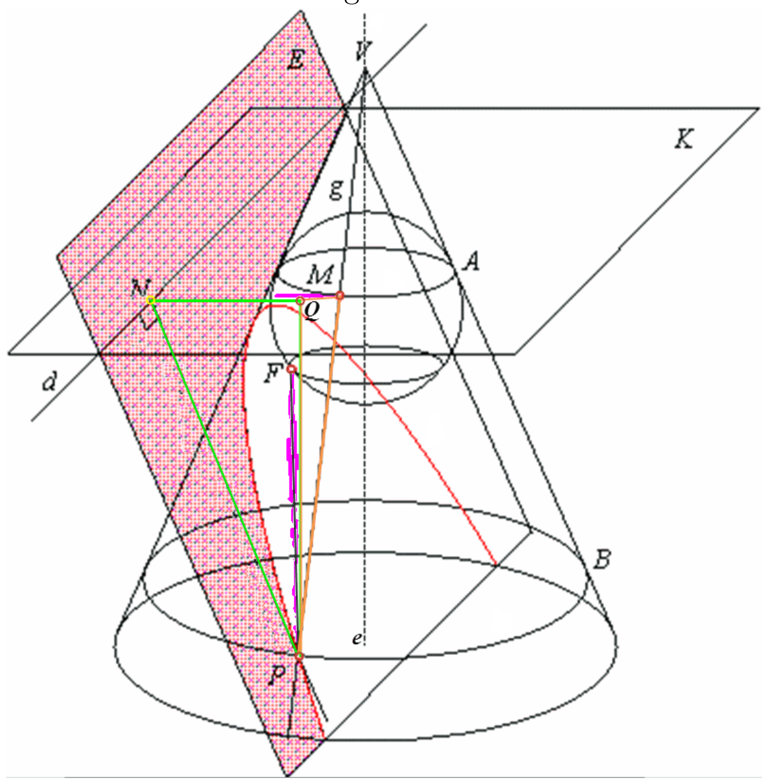
Note que as esferas tangenciam o plano E nos pontos F_1 e F_2. Seja P um ponto qualquer da interseção do cone com o plano, ou seja, um ponto da elipse. Tome sobre a geratriz VP os pontos M e N onde as esferas tangenciam o cone. Note que P, F_1 e F_2 estão no plano (por construção) e P, M e N estão sobre a mesma reta (por construção). Como $\overline{PF_1} = \overline{PM}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PN}$ (segmentos tangentes a esfera passando por P) temos que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PM} + \overline{PN} = \overline{MN}$. Deste modo, para qualquer ponto P tomado na elipse (interseção do plano E com o cone) a distância $\overline{MN}$ é sempre a mesma e os pontos F_1 e F_2 são fixos. Daí podemos concluir que a soma das distâncias $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ será sempre a mesma para aquela interseção.

Pela construção, a elipse pode então ser caracterizada como uma curva plana formada pelos pontos P cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante (no caso da construção anterior é o comprimento do segmento MN). Por esta razão a elipse é definida desta forma nos livros didáticos. Posteriormente vamos tratar a elipse usando o plano cartesiano e a caracterização desta curva neste plano.

3.2 A parábola como interseção de um plano com um cone

Vamos considerar agora um novo corte de um plano E que intersecta o cone de vértice V e é paralelo a uma de suas geratrizes, no caso da figura a seguir, a geratriz VB:

Figura 9:



Fonte: internet [15]

Inscreva agora uma esfera no cone limitada e tangente ao plano E em um ponto F (figura 9). Como a esfera está inscrita no cone, existe um plano K tal que os pontos de interseção da esfera com o cone estão contidos neste plano K. Agora, seja d a reta interseção entre os planos E e K e P um ponto qualquer da interseção do plano E com o cone. Considere a geratriz que contém P e intersecta K em um ponto M, e Q é a projeção ortogonal de P sobre o plano K. Assim, o segmento PQ é paralelo ao eixo do cone denominado por e. Tracemos a reta contida em K perpendicular a d passando por Q. Denominamos tal interseção N. Por construção $NQ \in K$ e $NP \in E$. Como PQ é perpendicular a QN e QN é perpendicular a reta d, pelo teorema das três perpendiculares temos que PN é perpendicular a d. Assim, podemos dizer que PN é a distância de P a d. Desta forma obtemos o triângulo PNQ e o triângulo PMQ ambos retângulos em Q, sendo o segmento PQ comum aos dois triângulos.

Vamos agora lembrar que o plano E é paralelo a geratriz VB. Ainda, em particular, PN é paralelo a esta geratriz. E mais, todas as geratrizes fazem o mesmo ângulo com o eixo e do cone. Logo $\angle NPQ = \angle MPQ$ e por consequência os triângulos PNQ e PMQ são congruentes pelo caso ALA, assim, $\overline{PN} = \overline{PM}$. Como PM e PF são segmentos tangentes a esfera temos que $\overline{PM} = \overline{PF}$. Por transitividade $\overline{PN} = \overline{PF}$.

Desta forma podemos concluir que a distância de um ponto P da curva (que pertence a interseção de E com o cone) ao ponto F é igual a distância do ponto P à reta d.

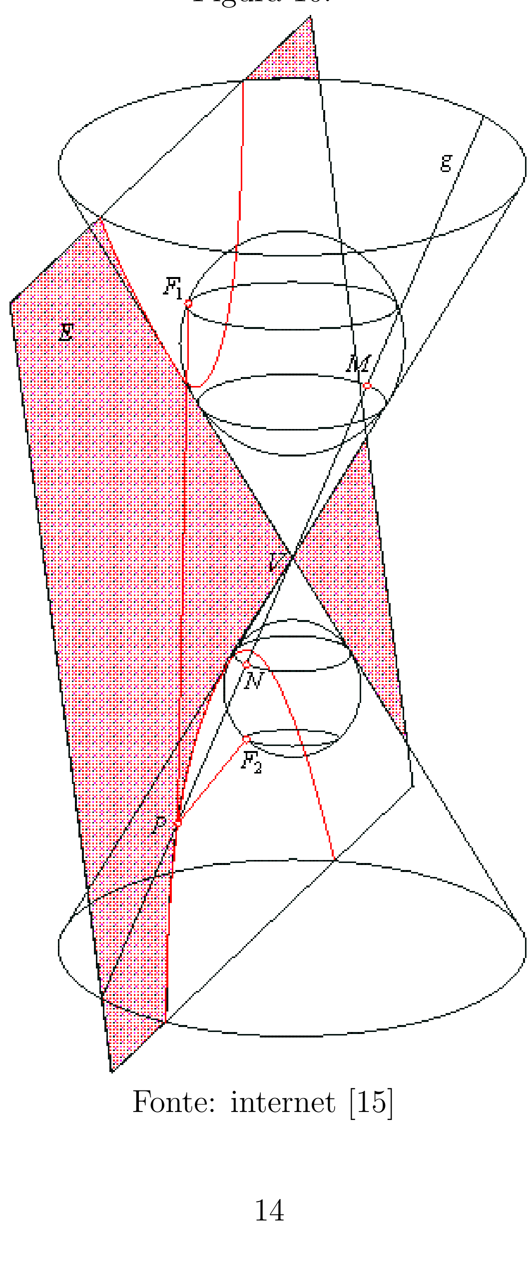
Pela construção, a parábola pode então ser caracterizada como a curva plana formada pelos ponto P cuja distância a um ponto fixo F chamado foco é igual a distância a uma reta dada chamada reta diretriz.

Posteriormente vamos tratar a parábola usando o plano cartesiano e a caracterização desta curva neste plano.

3.3 A hipérbole como interseção de um plano com um cone de duas folhas

Trataremos agora da interseção de um plano E com um cone de duas folhas (figura 10).

Figura 10:



Fonte: internet [15]

Consideremos um plano E que intersecta um cone de duas folhas. Vamos agora inscrever duas esferas no cone, uma em cada folha de forma que as mesmas sejam tangentes ao plano E em F_1 e F_2 respectivamente. Seja P um ponto qualquer da interseção de E com a folha inferior do cone. A geratriz VP é tangente às esferas nos pontos N e M. Note que $\overline{PF_1} = \overline{PM}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PN}$. Assim, $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \left|\overline{PM} - \overline{PN}\right| = \overline{MN}$. Desse modo para qualquer ponto P tomado na curva interseção do plano E com o cone de duas folhas, a distância MN é sempre a mesma e os pontos F_1 e F_2 são fixos. Daí podemos concluir que a diferença $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right|$ é sempre a mesma (no caso dessa construção a medida do segmento MN).

Essa curva interseção do plano E com o cone de duas folhas é o que conhecemos como hipérbole, sendo os pontos F_1 e F_2 os focos e a medida do segmento MN a constante maior que zero e menor que a distância entre os focos.

Pela construção, a hipérbole pode então ser caracterizada como a curva plana formada pelos pontos P cuja módulo da diferença a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante dada maior que zero e menor que a distância entre os pontos dados.

Posteriormente vamos tratar a hipérbole usando o plano cartesiano e a caracterização desta curva neste plano.

Faremos a seguir um estudo das cônicas vistas anteriormente, elipse, hipérbole e parábola, mas sobre o ponto de vista do sistema de coordenadas do plano cartesiano, iniciando com a elipse.

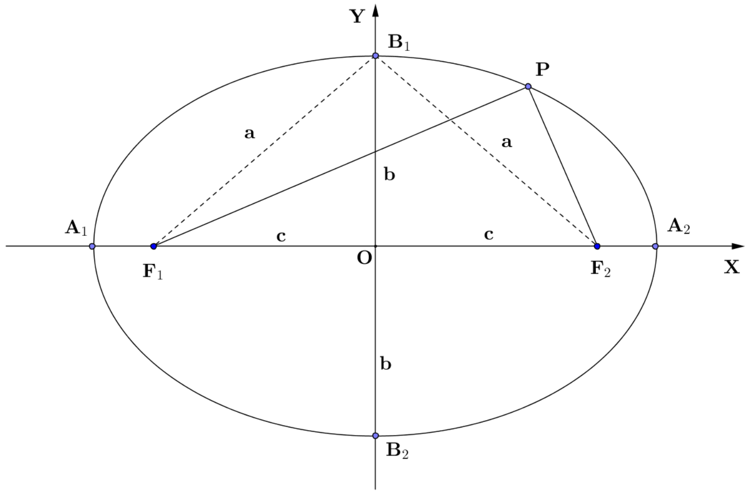
3.4 Elipse

Vimos anteriormente a elipse como uma seção cônica, ou seja, a interseção de um cone com um plano. Agora vamos estudar esta elipse porém caracterizando-a através de uma equação no plano cartesiano.

Definição 3.1. *Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos, ou seja, o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos F_1 e F_2 dados neste plano é igual a uma constante maior que a distância entre os focos.*

Considere dois pontos F_1 e F_2 denominados focos e P um ponto da elipse. A reta que contém F_1 e F_2 é denominada reta focal ou eixo focal. A reta focal intersecta a elipse em dois pontos A_1 e A_2 designados vértices. O segmento A_1A_2 é denominado eixo maior. A reta mediatriz de F_1 e F_2 é denominada reta não focal ou eixo não focal. A elipse intersecta tal reta em dois pontos B_1 e B_2 e o segmento B_1B_2 é denominado eixo menor. A interseção dos eixos é o ponto O. Denotaremos a distância entre os focos F_1 e F_2 por $2c$, sendo c uma constante positiva. A soma das distâncias de P a F_1 e de P a F_2 como $2a$, com a maior que c (Figura 11).

Figura 11:



Diante das considerações anteriores, utilizando o teorema de pitágoras, podemos concluir que a distância entre os vértices B_1 e B_2 é $2b$ com $b^2 = a^2 - c^2$.

Observação 3.1. *Note que de acordo com os conceitos estabelecidos a elipse não precisa ter nenhum de seus eixos necessariamente na horizontal ou vertical. Porém tal discussão terá espaço mais a frente quando tratarmos de translação e rotação da elipse.*

Observação 3.2. *Construção da elipse com material instrucional*

Materiais (figura 12)

- *Barbante*
- *2 Pregos*
- *Martelo*
- *Tábua 30x40cm*
- *Lápis comum ou para madeira*

Construção (figura 13)

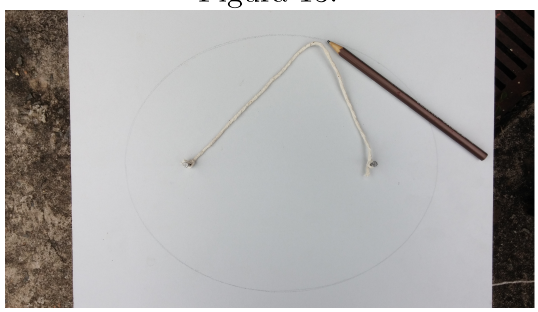
Marque dois pontos na tábua e em seguida pregue os dois pregos. Corte um pedaço de barbante maior que distância entre os pontos. Amarre as pontas do barbante no prego e em seguide fixe os pregos nos pontos marcados sobre a madeira. Agora apoie o lápis no barbante tencionando o mesmo o máximo possivel conforme a figura. Agora deslize o lápis sobre a superficie de madeira mantendo o barbante tencionado. Repita o processo para o outro lado.

Observe que os pregos representam nossos focos, o comprimento do barbante é nossa medida 2a e a distância entre os pregos é a distância 2c.

Podemos usar pitágoras para calcular a medida b e verificar no experimento se a medida encontrada está aproximada da medida real.

Figura 12:

Figura 13:



Caracterizaremos agora a elipse usando uma equação no plano cartesiano. Para tornar a equação da elipse mais simples tome os pontos F_1 e F_2 no eixo das abscissas e simétricos em relação a origem como sendo os focos tais que $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Tome ainda um ponto $P = (x, y)$ e uma constante igual a $2a$ maior que a distância entre os focos. Nestas condições a equação da elipse $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ torna-se:

$$\sqrt{(-c-x)^2 + (-y)^2} + \sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2} = 2a.$$

Assim,

$$\sqrt{(-c-x)^2 + (-y)^2} = 2a - \sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2}.$$

Elevando ambos membros ao quadrado temos

$$(-c-x)^2 + (-y)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2} + (c-x)^2 + (-y)^2.$$

Ou seja,

$$c^2 + 2cx + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2} + c^2 + -2cx + x^2 + y^2.$$

Simplificando, obtemos

$$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2} - 2cx.$$

Ou seja,

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2}.$$

Ou ainda,

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2}.$$

Elevando novamente ambos membros ao quadrado obtemos

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2\left[(c-x)^2 + (-y)^2\right].$$

Desta forma,

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2\left(c^2 - 2cx + x^2 + y^2\right).$$

Simplificando esta equação obtemos

$$c^2x^2 + a^4 = a^2c^2 + a^2x^2 + a^2y^2.$$

Isto é

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4.$$

Ou ainda,

$$-x^2\left(a^2 - c^2\right) - a^2y^2 = -a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

Como $b^2 = a^2 - c^2$, segue que

$$-x^2b^2 - a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros desta equação por $-a^2b^2$ temos que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Esta equação é conhecida como equação reduzida da elipse.

Observação 3.3. *A equação da elipse encontrada pode ser reescrita da seguinte forma*

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Observação 3.4. *Interpretando o eixo focal como eixo das abscissas e o eixo não focal como eixo das ordenadas, temos na figura 11 o gráfico da elipse cuja equação é a que acabamos de encontrar.*

Consideremos agora o eixo focal da elipse como eixo das ordenadas e o eixo não focal como eixo das abscissas, o foco F_1 como $(0, -c)$, o foco F_2 como $(0, c)$ e o ponto P da elipse como $P = (x, y)$. Com essas considerações a equação da elipse $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ torna-se

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Apresentaremos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 3.1. *Encontre a equação reduzida da elipse com eixo maior sobre a abscissa de medida 20 e distância focal de medida 12.*

Resolução:

Admitindo que os eixos da elipse se intersectam na origem temos:

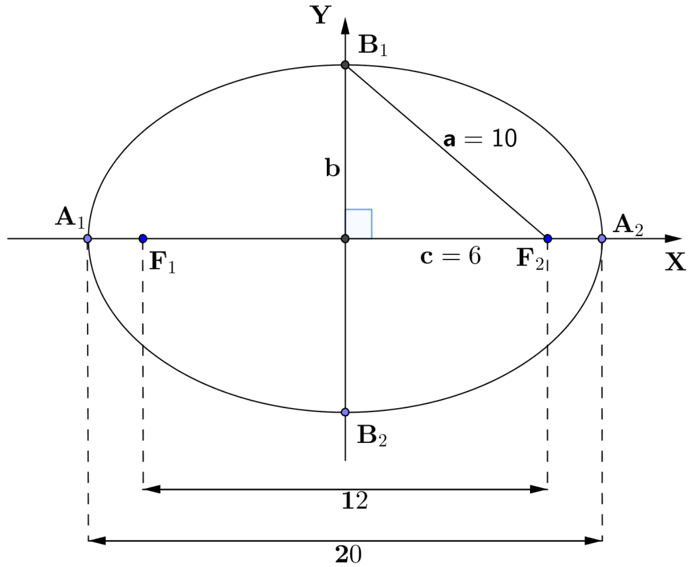
Como $a = 10$ e $c = 6$ segue que $b = 8$

Assim obtemos a equação

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

A representação gráfica desta elipse é

Figura 14:



Note que se no enunciado do exemplo anterior tivéssemos o eixo maior sobre o eixo das ordenadas e distância focal de medida 12 teríamos a equação $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$.

Exemplo 3.2. *Determine a equação reduzida da elipse, cujos focos são $F_1(0,2)$ e $F_2(0,-2)$, sabendo que o ponto $B(4,0)$ pertence a elipse procurada.*

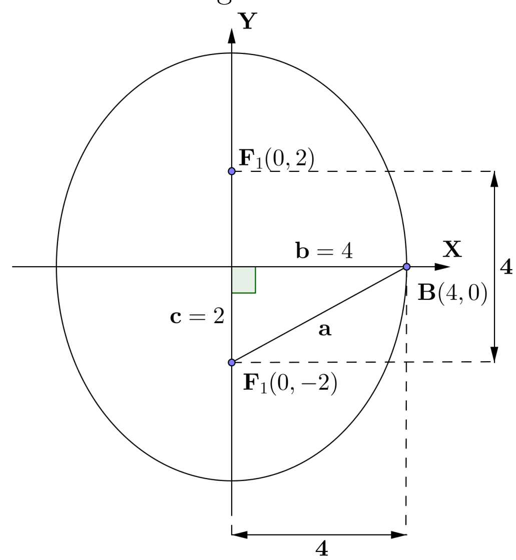
Resolução:

Como o eixo focal encontra-se agora coincidente com o eixo das ordenadas, de acordo com os dados do problema, temos $b = 4$ e $c = 2$ e daí temos $a^2 = 20$. Deste modo a equação da elipse será

$$\frac{y^2}{20} + \frac{x^2}{16} = 1$$

A representação gráfica desta equação é

Figura 15:



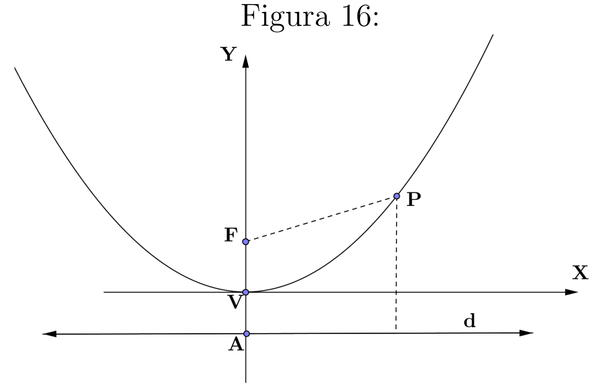
A seguir vamos retomar o conceito de parábola e estudar a equação desta curva no plano cartesiano.

3.5 Parábola

Definição 3.2. *Uma parábola é o lugar geométrico dos pontos, ou seja, o conjunto dos pontos de um plano cuja distância a um ponto F dado é igual à distância de uma reta d dada que chamaremos reta diretriz.*

Considere o ponto F o foco e d a reta diretriz de uma parábola. A reta que passa por F e é perpendicular a reta d é denominada eixo de simetria da parábola. A reta diretriz e o eixo de simetria se intersectam no ponto A, figura 16.

Figura 16:



Observação 3.5. *Note que de acordo com os conceitos estabelecidos a parábola não precisa ter seu eixo necessariamente na horizontal ou vertical. Voltaremos a essa discussão mais a frente quando tratarmos de translação e rotação da parábola.*

Observação 3.6. *Construção da parábola com material instrucional*

Materiais (figura 17)

- *Barbante*
- *3 Pregos*
- *Martelo*
- *Tábua 30x40cm*
- *Régua comum de madeira*
- *esquadro de madeira*
- *Lápis comum ou para madeira*

Construção (figura 18)

Fixe a régua com dois pregos próximo às suas extremidades. Fixe outro prego acima da régua. Corte um pedaço de barbante e amarre uma ponta no prego acima da régua e a outra ponta em uma das pontas do esquadro. Deslize o esquadro sobre a régua mantendo o barbante rente ao esquadro com o lápis para fazer a primeira parte da parábola. Em seguida passe o esquadro para o outro lado do prego e continue o desenho mais uma vez mantendo a linha próxima ao esquadro com o lápis enquanto este faz a curva.

Observe que o prego acima da régua representa o foco, o barbante faz com que a distância do lápis à régua seja igual a distância do lápis ao foco.

Figura 17:

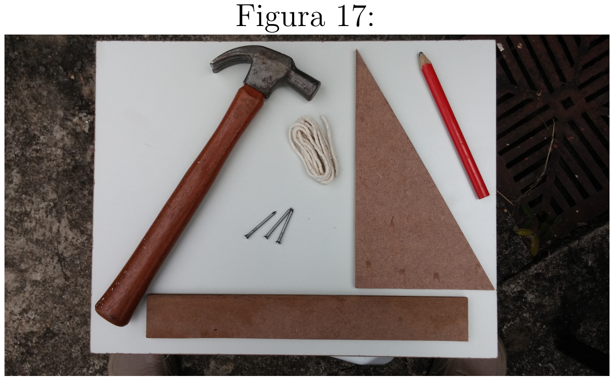
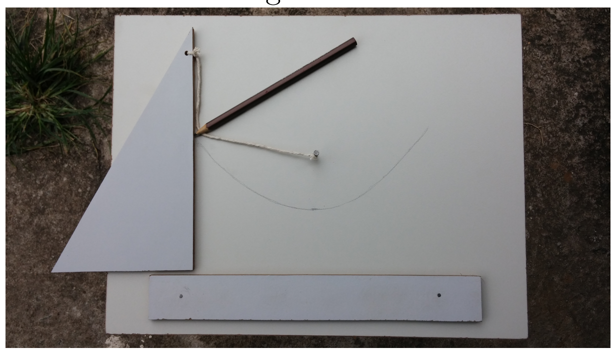


Figura 18:



Para encontrar a equação da parábola, no plano, de forma mais simples considere o vértice da parábola como $V = (0, 0)$, o foco como $F = (0, p)$ e a diretriz como a reta $d : y = -p$, sendo p um número positivo. Nessas considerações a parábola no plano cartesiano é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano cartesiano cuja distância ao ponto F é igual a distância à reta d. Ou seja, $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$.

Isto é,

$$\sqrt{(0-x)^2 + (p-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}.$$

Ou seja,

$$\sqrt{x^2 + (p-y)^2} = |y+p|.$$

Desenvolvendo o membro à esquerda e elevando ambos os lados ao quadrado temos

$$\left(\sqrt{x^2 + p^2 - 2py + y^2}\right)^2 = (|y+p|)^2.$$

Assim obtemos

$$x^2 + p^2 - 2py + y^2 = y^2 + 2py + p^2.$$

E portanto

$$x^2 = 4py.$$

Observação 3.7. *Observe que esta equação também pode ser escrita como*

$$x^2 - 4py = 0.$$

Observação 3.8. *Interpretando a reta diretriz como sendo paralela ao eixo das abscissas e o eixo de simetria como eixo das ordenadas, temos na figura 16 o gráfico da parábola cuja equação é a que acabamos de encontrar.*

Consideremos agora a reta diretriz como sendo paralela ao eixo das ordenadas e o eixo de simetria como eixo das abscissas, o foco F como $(p, 0)$, a reta diretriz como a reta $d : x = -p$, sendo p um número positivo e o ponto P da parábola como $P = (x, y)$. Com essas considerações a equação da parábola, $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$, torna-se

$$y^2 = 4px.$$

No exemplo a seguir determinaremos o foco, o vértice e a diretriz a partir da equação de uma parábola.

Exemplo 3.3. *Determine o foco, o vértice e a equação da reta diretriz da parábola de equação $x^2 = 4y$.*

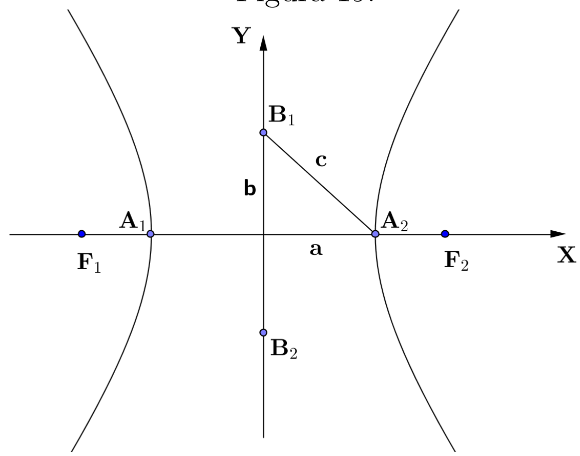
Resolução:

Como temos uma equação da forma $x^2 = 4py$, podemos afirmar que a solução será vértice $V = (0, 0)$, foco $F = (0, p)$ e diretriz $d : y = -p$ bastando para tanto encontrar o valor de p. Observando as duas equações, $x^2 = 4py$ e $x^2 = 4y$ é possível ver que $4p = 4$, ou seja, $p = 1$. Assim obtemos o vértice $V = (0, 0)$, o foco $F = (0, 1)$ e a reta diretriz $y = -1$.

3.6 Hipérbole

Definição 3.3. *Uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos, isto é, o conjuntos dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias a dois pontos chamados focos F_1 e F_2 dados é igual a uma constante maior que zero e menor que a distância entre os focos, figura 19.*

Figura 19:



Considere F_1 e F_2 os focos de uma hipérbole. A reta que contém esses pontos é chamada reta focal ou eixo focal da hipérbole. A reta focal intersecta a hipérbole em dois pontos A_1 e A_2 designados vértices. O segmento A_1A_2 é denominado eixo transverso. A reta mediatriz a F_1 e F_2 é denominada reta não focal ou eixo não focal.

Considerando a distância entre os focos como $2c$, sendo c uma constante positiva e a diferenças das distâncias aos focos como $2a$, onde a é uma constante positiva e menor que c. Considere agora os pontos do eixo não focal B_1 e B_2, simétricos em relação ao eixo focal, cuja distância entre eles é $2\sqrt{(c)^2 - (a)^2}$ (figura 19). O segmento B_1B_2 é denominado eixo imaginário. Estes pontos podem ser obtidos como a interseção de uma circunferência de centro A_1 (ou A_2) e raio de medida c com o eixo não focal (figura 19).

Observação 3.9. *Note que de acordo com os conceitos estabelecidos a hipérbole não precisa ter nenhum de seus eixos necessariamente na horizontal ou vertical. Voltaremos a esta discussão mais a frente quando tratarmos de translação e rotação da hipérbole.*

Observação 3.10. *Construção da hipérbole com material instrucional*

Materiais (figura 20)

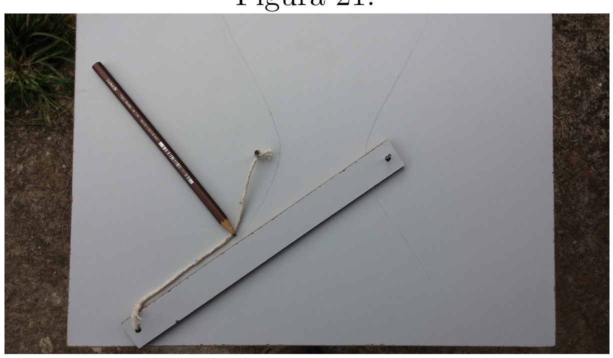
- *Barbante*
- *2 Pregos*
- *Martelo*
- *Tábua 30x40cm*
- *Régua comum de madeira*
- *Lápis comum ou para madeira*

Construção (figura 21)

Marque dois pontos na tábua para serem os focos. Fixe a régua com um prego em um dos focos. Fixe outro prego no outro foco. Corte um pedaço de barbante e amarre uma ponta no prego acima da régua e a outra ponta no prego distinto daquele que prende a régua. Agora com o lápis mantenha o barbante esticado próximo a regua e deslizando a régua para obter um ramo da hipérbole. Repita a operação agora invertendo o barbante e a régua de focos.

Figura 20:

Figura 21:



A seguir vamos encontrar a equação de uma hipérbole no plano cartesiano. Para simplificar vamos considerar o eixo focal da hipérbole como eixo das abscissas e o eixo não focal como eixo das ordenadas, o foco F_1 como $(-c, 0)$, o foco F_2 como $(c, 0)$ e o ponto P da hipérbole como $P = (x, y)$. Com essas considerações a equação da hipérbole torna-se

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a.$$

Ou seja,

$$\sqrt{(-c-x)^2 + (-y)^2} = \pm 2a + \sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2}.$$

Elevando ambos membros ao quadrado obtemos

$$(-c-x)^2+(-y)^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(c-x)^2+(-y)^2}+(c-x)^2+(-y)^2.$$

Desenvolvendo as operações obtemos

$$c^2+2cx+x^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(c-x)^2+(-y)^2}+c^2+-2cx+x^2+y^2.$$

Simplificando essa equação obtemos

$$2cx=4a^2\pm 4a\sqrt{(c-x)^2+(-y)^2}-2cx.$$

Ou seja,

$$4cx-4a^2=\pm 4a\sqrt{(c-x)^2+(-y)^2}.$$

Que é equivalente a

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(c-x)^2+(-y)^2}.$$

Elevando novamente ambos os membros ao quadrado obtemos

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2\left[(c-x)^2+(-y)^2\right].$$

Isto é,

$$c^2x^2-2cxa^2+a^4=a^2\left(c^2-2cx+x^2+y^2\right).$$

Simplificando essa equação obtemos

$$c^2x^2+a^4=a^2c^2+a^2x^2+a^2y^2.$$

Assim

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4.$$

Ou seja,

$$-x^2\left(a^2-c^2\right)-a^2y^2=-a^2\left(a^2-c^2\right).$$

Como $b^2=c^2-a^2$, temos $-b^2=a^2-c^2$.

Substituindo esse valor na equação anterior obtemos

$$-x^2\left(-b^2\right)-a^2y^2=-a^2\left(-b^2\right).$$

Dividindo todos os membros desta equação por a^2b^2 concluímos que

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Esta equação é chamada equação reduzida da hipérbole.

Observação 3.11. *Observe que esta equação também pode ser reescrita como*

$$b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2=0.$$

Observação 3.12. *Interpretando o eixo focal como eixo das abscissas e o eixo não focal como eixo das ordenadas, temos na figura 19 o gráfico da hipérbole cuja equação é a que acabamos de encontrar.*

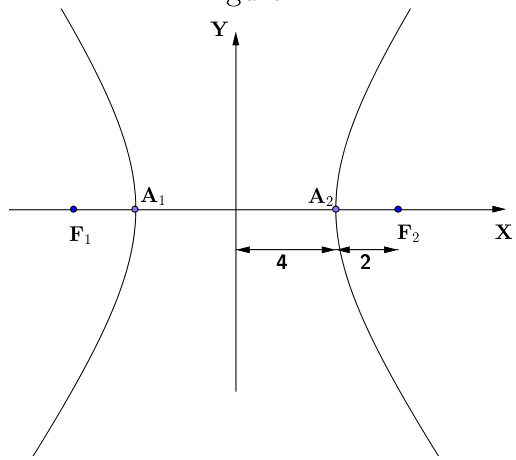
Consideremos agora o eixo focal da hipérbole como eixo das ordenadas e o eixo não focal como eixo das abscissas, o foco F_1 como $(0,-c)$, o foco F_2 como $(0,c)$ e o ponto P da hipérbole como $P=(x,y)$. Com essas considerações a equação da hipérbole $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$ torna-se

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1.$$

Passaremos agora a tratar de alguns exemplos.

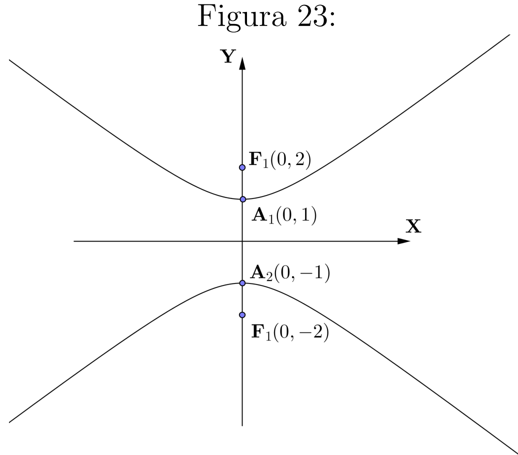
Exemplo 3.4. *Determine as equações das hipérboles cujos gráficos encontram-se nas figuras 22 e 23 a seguir* a)

Figura 22:



b)

Figura 23:



Resolução

a)

Observe que $F_1 = (-6, 0)$ e $F_2 = (6, 0)$, então $c = 6$

$A_1 = (-4, 0)$ e $A_2 = (4, 0)$, então $a = 4$

Sabemos que $c^2 = a^2 + b^2$, assim $6^2 = 4^2 + b^2$

Então $b^2 = 20$

E a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

b) Como neste caso o eixo focal está sobre o eixo das ordenadas e o eixo não focal está sob o eixo das abscissas, de modo análogo ao exemplo anterior, segue que $c = 2$ e $a = 1$

Como $c^2 = a^2 + b^2$ obtemos $b^2 = 3$

Portanto a equação da hipérbole será

$$\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{3} = 1.$$

Até agora obtivemos as equações tanto da elipse quanto da hipérbole com seus focos sobre o eixo das abscissas ou sobre o eixo das ordenadas e a interseção dos seus eixos era a origem do sistema cartesiano. No caso da parábola obtivemos as equações quando seu foco se encontrava sobre o eixo das abscissas ou sobre o eixo das ordenadas e seu vértice coincidia com a origem do sistema cartesiano. Mas o que ocorre com a equação destas cônicas quando estes pontos citados se encontram em outras posições no plano cartesiano? Para responder a este questionamento vamos analisar os movimentos de translação e rotação nesse plano.

3.7 Construção Gráfica por Translação

Nas equações das cônicas tratadas anteriormente consideramos os eixos cartesianos $x = 0$ e $y = 0$. Veremos agora como ficam as equações dessas cônicas quando fazemos uma translação por (x_0, y_0), ou seja, vamos considerar uma transformação que pega cada ponto (x, y) do plano e associa a um outro ponto $(x + x_0, y + y_0)$. Mediante essa transformação os eixos $x = 0$ e $y = 0$ serão transformados respectivamente nos eixos $x = x_0$ e $y = y_0$.

A Elipse

Fazendo agora a translação por (x_0, y_0) no caso da elipse, note então que os focos $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ serão $F_1 = (-c + x_0, y_0)$, $F_2 = (c + x_0, y_0)$. Os vértices da elipse serão $A_1 = (-a + x_0, y_0)$, $A_2 = (a + x_0, y_0)$. E os vértices B_1 e B_2 serão $B_1 = (x_0, -b + y_0)$, $B_2 = (x_0, b + y_0)$.

Com essas considerações, a equação da elipse $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ torna-se:

$$\sqrt{(-c + x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} + \sqrt{(c + x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} = 2a.$$

Desenvolvendo estes cálculos obtemos

$$\frac{(x – x_0)^2}{a^2} + \frac{(y – y_0)^2}{b^2} = 1.$$

De modo análogo, se o eixo focal coincidir com o eixo das ordenadas, ao transladarmos por (x_0, y_0) vamos obter a equação

$$\frac{(y – y_0)^2}{a^2} + \frac{(x – x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Em ambos os casos o novo centro da elipse é (x_0, y_0)

Exemplo 3.5. *Considere uma elipse de centro $O\,(5, 7)$. Determine sua equação reduzida cujo eixo maior mede 8 e cujo eixo menor mede 6.*

Resolução:

Vamos resolver admitindo que o eixo maior da elipse é paralelo ao eixo das abscissas.
Como o eixo maior mede 8 então $2a = 8$ e assim $a = 4$. Como o eixo menor mede 6 então $2b = 6$ e portanto $b = 3$.

Assim a equação reduzida da elipse torna-se

$$\frac{(x – 5)^2}{16} + \frac{(y – 7)^2}{9} = 1.$$

Observação 3.13. *Note que se tivéssemos considerado o eixo focal paralelo ao eixo das ordenadas teríamos a equação*

$$\frac{(x – 5)^2}{9} + \frac{(y – 7)^2}{16} = 1.$$

A Parábola

Fazendo agora a translação por (x_0, y_0) no caso da parábola, o vértice será $(0 + x_0, 0 + y_0) = (x_0, y_0)$, o foco F será $(0 + x_0, p + y_0)$ e a diretriz d será $y = -p + y_0$.
Com essas considerações a equação da parábola $dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$ torna-se

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - (p + y_0))^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p + y_0))^2} = |y - y_0 + p|.$$

Desenvolvendo os cálculos chegamos à equação

$$(x–x_0)^2 = 4p\,(y–y_0).$$

Se tivéssemos considerado a parábola com eixo de simetria sendo o eixo das abscissas e vértice o ponto $(0, 0)$, através da translação por (x_0, y_0) teríamos o vértice sendo o ponto (x_0, y_0), o foco $(p + x_0, y_0)$, e a diretriz d a reta $x = -p + x_0$. E portanto a equação dessa parábola torna-se

$$(y–y_0)^2 = 4p\,(x–x_0).$$

Exemplo 3.6. *Determine o foco, a diretriz e o vértice da parábola cuja equação é dada por* $(x - 3)^2 = 20\,(y - 4)$.

Resolução:

Observando a equação temos que o vértice da parábola é $V = (3, 4)$ e o foco encontra-se sobre a reta $x = 3$.

Como $4p = 20$ então $p = 5$.

Assim temos o foco $F = (3, 5 + 4) = (3, 9)$ e a diretriz $y = -5 + 4 = -1$.

Observação 3.14. *Quando estudamos a função quadrática* $y = f\,(x) = ax^2 + bx + c$ *sendo* $a \neq 0$, *estudamos que o gráfico dessa função é uma parábola. Por que isso acontece?*

Para responder a essa pergunta vamos transformar a equação $y = ax^2 + bx + c$ na equação de uma parábola como vimos anteriormente e encontrar seu foco, vértice e diretriz.

Como a é diferente de zero, a equação

$$y = ax^2 + bx + c$$

é equivalente a

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Completando o quadrado temos

$$y = a\left[x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right].$$

Que também pode ser escrita como

$$y = a\left[\left(x + \left(\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right].$$

Dividindo ambos os membros desta equação por a obtemos

$$\frac{1}{a}y = \left[x + \left(\frac{b}{2a}\right)\right]^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}.$$

Ou ainda,

$$\left[x + \left(\frac{b}{2a}\right)\right]^2 = \frac{1}{a}y + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}.$$

Colocando $\frac{1}{a}$ em evidência no segundo membro dessa equação obtemos

$$\left[x + \left(\frac{b}{2a}\right)\right]^2 = \frac{1}{a}\left[y + a\left(\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right)\right].$$

Que finalmente pode ser escrita como

$$\left[x + \left(\frac{b}{2a}\right)\right]^2 = \frac{1}{a}\left[y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right].$$

Comparando essa equação com a equação da parábola vista anteriormente cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo das ordenadas obtemos o vértice

$$V = (x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Ainda da equação da parábola vista anteriormente temos que $\frac{1}{a} = 4p$ então $p = \frac{1}{4a}$ portanto o foco dessa parábola é

$$F = (x_0, y_0 + p) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1 - \Delta}{4a}\right).$$

E a diretriz dessa parábola é $y = y_0 - p = -\dfrac{\Delta}{4a} - \dfrac{1}{4a} = -\dfrac{(1+\Delta)}{4a}$.

Concluímos então que o gráfico da função quadrática é uma parábola e veja que o vértice encontrado é o mesmo que aquele quando estudamos função quadrática.

A Hipérbole

De forma análoga ao que vimos anteriormente, se fizermos uma translação por (x_0, y_0) nos pontos da hipérbole e considerando o eixo focal como o eixo das abscissas temos que os focos que eram $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ se tornarão $F_1 = (-c + x_0, y_0)$ e $F_2 = (c + x_0, y_0)$. Os vértices da hipérbole serão $A_1 = (-a + x_0, y_0)$, $A_2 = (a + x_0, y_0)$. E os vértices B_1 e B_2 serão $B_1 = (x_0, -b + y_0)$ e $B_2 = (x_0, b + y_0)$.

Dessa forma, a equação da hipérbole $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ torna-se

$$\sqrt{(-c + x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} = \pm 2a + \sqrt{(c + x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}.$$

Desenvolvendo estes cálculos obtemos

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Também de forma análoga, se o eixo focal coincidir com o eixo das ordenadas, ao transladarmos por (x_0, y_0) vamos obter a equação

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1.$$

Em ambos os casos a interseção dos eixos da hipérbole é (x_0, y_0).

Exemplo 3.7. *Obtenha os focos e faça um esboço do gráfico da hipérbole de equação* $\dfrac{(x-2)^2}{27} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$.

Resolução:

Como os eixos da hipérbole se intersectam no ponto $(2, 1)$ e o eixo focal é a a reta $y = 1$ então os focos dessa hipérbole são

$F_1 = (-c + 2, 1)$ e $F_2 = (c + 2, 1)$.

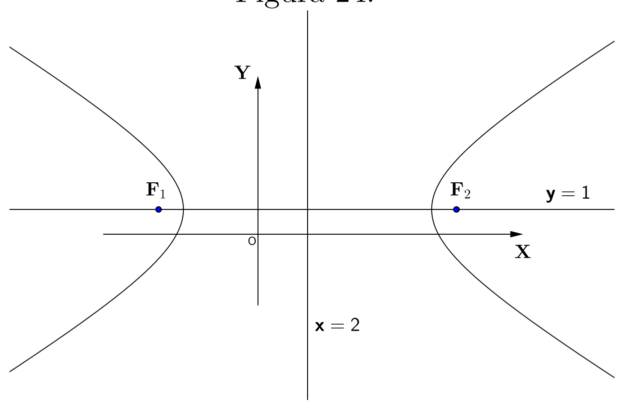
Como $a^2 = 27$ e $b^2 = 9$ temos que $c^2 = a^2 + b^2$ torna-se $c^2 = 36$ e portanto $c = 6$.

Desta forma temos $F_1 = (-6 + 2, 1)$ e $F_2 = (6 + 2, 1)$

Ou seja, $F_1 = (-4, 1)$ e $F_2 = (8, 1)$

Para o esboço do gráfico veja a figura abaixo

Figura 24:



3.8 Rotação e a Equação Geral das Cônicas

Anteriormente vimos como ficam as equações da elipse, hipérbole e parábola quando ocorre uma translação por (x_0, y_0).

Já vimos também que as cônicas anteriormente trabalhadas tem equação da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ sendo A, B, C, D, E e F constantes com $B = 0$. Considere agora a seguinte pergunta: Toda equação da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com A, B, C, D, E e F constantes não simultaneamente nulas é a equação de uma cônica?

Para responder tal pergunta vamos considerar o caso particular da equação anterior com $A = 0, B = 1, C = 0, D = 0$ e $F = -1$. Neste caso temos a equação $xy = 1$. Será que essa é a equação de uma cônica?

Inicialmente vamos considerar uma mudança das variáveis x e y para as variáveis $\overline{x}$ e $\overline{y}$ da seguinte forma:

$$x = \overline{x}\cos\theta + \overline{y}\operatorname{sen}\theta \text{ e } y = -\overline{x}\operatorname{sen}\theta + \overline{y}\cos\theta.$$

Substituindo esses valores de x e y na equação $xy = 1$ obtemos

$$(\overline{x}\cos\theta + \overline{y}\operatorname{sen}\theta)(-\overline{x}\operatorname{sen}\theta + \overline{y}\cos\theta) = 1.$$

Desenvolvendo essa multiplicação obtemos

$$-\overline{x}^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + \overline{xy}\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + \overline{y}^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 1.$$

Se eliminarmos o termo em $\overline{xy}$ teremos uma equação que já conhecemos.

Desse modo se considerarmos $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, essa equação se transforma em

$$-\frac{\overline{x}^2}{2} + \frac{\overline{y}^2}{2} = 1,$$

que é a equação de uma hipérbole. Vamos agora encontrar os eixos dessa hipérbole. Para tanto, precisamos compreender geometricamente o que significa trocar as variáveis x e y pelas variáveis $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Considere no plano xy o vetor $\overrightarrow{OP}$ não nulo com $O = (0, 0)$ e $P = (x, y)$

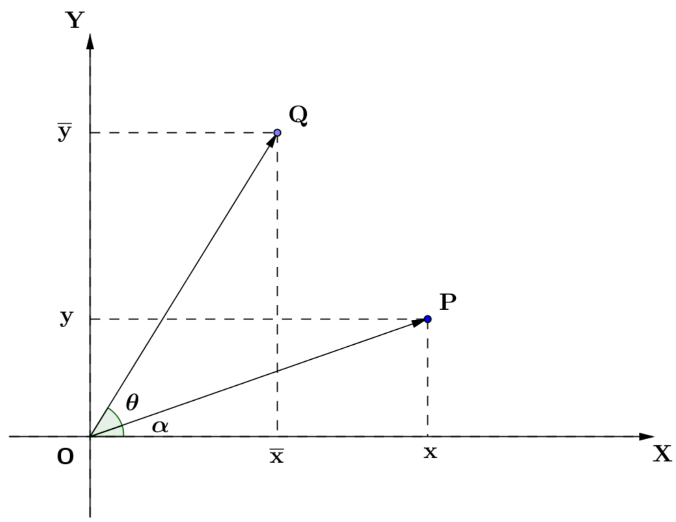
Se girarmos o vetor $\overrightarrow{OP}$ de um ângulo θ no sentido anti horário obteremos um vetor $\overrightarrow{OQ}$ sendo $Q = (\overline{x}, \overline{y})$, figura 25. As variáveis $\overline{x}$ e $\overline{y}$ são aquelas introduzidas anteriormente.

De fato, suponha que o ângulo formado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$ e o eixo x seja α.

Desse modo teremos, conforme a figura 25

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Figura 25:



Com a rotação do vetor $\overrightarrow{OP}$ de um ângulo θ temos que o $\cos(\theta+\alpha) = \dfrac{\overline{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pois a distância de O até P é a mesma distância de O até Q. Analogamente $\operatorname{sen}(\theta+\alpha) = \dfrac{\overline{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Desenvolvendo o cosseno da soma e o seno da soma obtemos

$$\cos(\theta+\alpha) = \cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

e

$$\operatorname{sen}(\theta+\alpha) = \operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\theta = \frac{\overline{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Substituindo o $\cos\alpha$ e o $\operatorname{sen}\alpha$ pelos valores encontrados anteriormente obtemos

$$\overline{x} = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \text{ e } \overline{y} = x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta.$$

Resolvendo com essas duas equações um sistema encontrando os valores de x e y em função de $\overline{x}$ e $\overline{y}$ obtemos

$$x = \overline{x}\cos\theta + \overline{y}\operatorname{sen}\theta \text{ e } y = -\overline{x}\operatorname{sen}\theta + \overline{y}\cos\theta.$$

Portanto dados x e y podemos obter $\overline{x}$ e $\overline{y}$. E reciprocamente dados $\overline{x}$ e $\overline{y}$ podemos encontrar x e y.

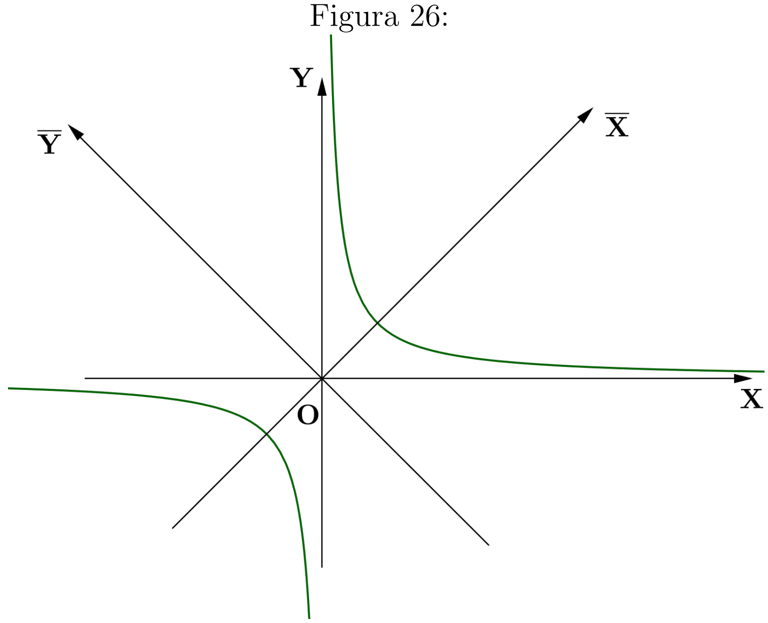
A transformação a qual pegamos um ponto (x,y) e levamos em um ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ é chamada rotação do ângulo θ no sentido anti-horário.

Considere agora um ponto P qualquer sobre o eixo Ox então P é do tipo $P = (x, 0)$, x qualquer. Tomando $x \neq 0$, ao girar $\overrightarrow{OP}$ de um ângulo $\frac{\pi}{4}$, as coordenadas do novo ponto serão $\overline{x} = x\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\overline{y} = x\frac{\sqrt{2}}{2}$, então $\overline{x} = \overline{y}$. Ou seja, um ponto qualquer sobre o eixo das abscissas é levado pela rotação de $\frac{\pi}{4}$ sobre a reta bissetriz dos quadrantes ímpares.

De modo análogo, qualquer ponto P sobre o eixo das ordenadas é levado pela rotação de $\frac{\pi}{4}$ sobre a reta bissetriz dos quadrantes pares.

Agora, compreendido geometricamente a mudança de variáveis, já podemos identificar o novo sistema de eixos da hipérbole encontrada anteriormente. Então os eixos da hipérbole $-\frac{\overline{x}^2}{2} + \frac{\overline{y}^2}{2} = 1$ serão as bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares, figura 26.

Figura 26:



No exemplo anterior a nossa equação não tinha os termos quadráticos x^2 e y^2. Mas voltando agora a nossa pergunta inicial: Dada a equação geral das cônicas $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, existe um sistema de coordenadas no qual essa equação possa sempre ser transformada em uma outra equação que elimine o termo em xy?

A resposta para essa pergunta é afirmativa e está relacionada ao fato de podermos sempre reescrever a equação dada na forma

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

.

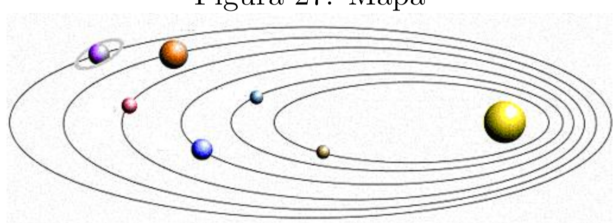
e observar que a matriz $\begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$ é simétrica. A resposta afirmativa é uma consequência de um resultado conhecido como Teorema Espectral, pertencente a uma área da matemática chamada álgebra linear, que pode ser encontrado em Hefez e Fernandes, 2012. Não trataremos de mais detalhes desse resultado neste trabalho, entretanto se o leitor desejar obter mais informações, veja a referência [6].

4 Retomando nossos questionamentos

Agora que já fizemos um estudo sobre cônicas vamos retomar nossos questionamentos feitos na seção 2.1.

Com relação a pergunta sobre qual a trajetória dos planetas em torno do sol, em um primeiro momento poderíamos pensar que os planetas orbitam de forma circular. Entretanto a primeira Lei de Kepler, também conhecida como Lei das Órbitas afirma que os planetas se movem em órbitas elípticas tendo o sol como um dos focos. Esta resposta foi oriunda de observação e sua base teórica através da física só viria muitos anos depois com Isaac Newton. Vale também lembrar que os focos desta "elipse"são muito próximos e portanto temos sim a impressão de que a órbita é circular.

Figura 27: Mapa



Fonte: internet

Para responder a pergunta de porque grande parte das antenas de TV terem um mesmo formato parabólico é necessário fazer as seguintes considerações.

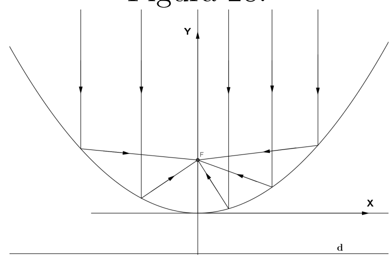
Quando um sinal de TV é transmitido, até chegar em nossas residências já sofreu muitas perdas e portanto chega fraco. Neste sentido, é importante então conservarmos ao máximo este sinal e até ampliarmos se possível.

Além disso podemos afirmar que os sinais chegam paralelos ao eixo das antenas de TV devido ao longo caminho que percorrem.

Por este motivo o formato das antenas de TV é uma superfície parabólica, conhecida como parabolóide, que é obtido ao giramos uma parábola em torno de seu eixo.

Essa superfície parabólica possui a propriedade proveniente da parábola, quando o sinal é paralelo ao eixo de simetria da parábola e toca sua superfície ele é refletido para o foco da parábola exatamente onde é colocado o receptor da antena fazendo portanto com que o sinal seja concentrado e ampliado naturalmente(figura 28).

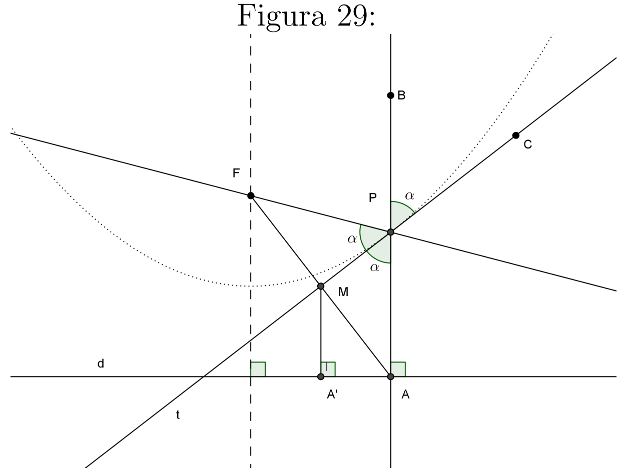
Figura 28:



Justificaremos agora a razão pela qual as ondas paralelas ao eixo quando tocam a parábola incidem no foco.

De fato, sejam P um ponto qualquer da parábola, F o foco, d a reta diretriz, $\overrightarrow{AB}$ a reta paralela ao eixo da parábola passando pelo ponto P e t a reta bissetriz ao ângulo $\angle FPA$ (figura 29).

Figura 29:



Vamos mostrar que t é tangente a parábola.

No triângulo PFA, $PF = PA$, pela propriedade da parábola. Como a reta t é bissetriz do ângulo FPA ela também contém uma mediana e uma altura do triângulo PFA. Ou seja, a reta t é mediatriz do segmento FA. Tome agora um ponto M da reta t diferente de P. Se A' é a projeção de M sobre d, temos $MF = MA > MA'$. E portanto M é sempre exterior a parábola, logo t é a reta tangente à parábola em P.

Mas sabemos por definição que o ângulo entre uma reta e uma curva em um ponto P é exatamente o ângulo entre esta reta e a reta tangente à curva neste ponto P. Como acabamos de ver t é tangente a curva em P e é também bissetriz do ângulo $\angle FPA$, logo $\angle FPM = \angle MPA$. Como $\angle BPC = \angle MPA$, pois são opostos pelo vértice, então $\angle BPC = \angle FPM$. Portanto todo sinal paralelo ao eixo da parábola ao tocá-la tem sua reflexão em direção ao foco.

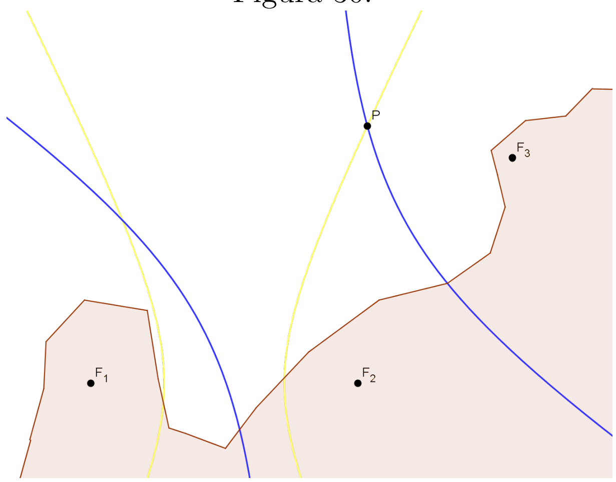
Passaremos agora a responder como funciona o sistema LORAN de navegação.

O sistema LORAN [16] é um dos métodos utilizados para localização de navios ou aeronaves a partir de sinais recebidos por estações em terra e foi desenvolvido em 1940 pelos norte americanos. Ele é também conhecido como método hiperbólico ou sistema hiperbólico de navegação pois através da recepção dos sinais das estações é possível construir o gráfico de hipérboles que serão exatamente as linhas de posição de uma aeronave ou embarcação que recebe tais sinais.

Para ficar claro, uma exemplificação deste processo será feita a seguir.

Suponha que o ponto P seja a posição de uma embarcação e os pontos F_1, F_2 e F_3 as respectivas posições de três estações em terra (figura 30).

Figura 30:



Enquanto as estações estão emitindo ondas a embarcação não tem a informação de quanto tempo tais sinais levam saindo de sua origem até alcançar sua localização. As informações que a embarcação pode obter são a diferença de tempo entre a chegada de sinal de uma estação e a chegada de sinal de uma outra estação que é medida por um receptor e a posição das estações. Mostraremos agora que a partir dessas informações é possível para encontrar a posição da embarcação.

Para isso, suponha que o sinal levou t segundos para ser recebido da estação F_1 e $t + \Delta t$ segundos da estação F_2. Da física temos que a velocidade v é a razão da medida do espaço didivido pelo tempo gasto para percorrer tal espaço. Como a velocidade v do pulso é sempre a mesma emitida por qualquer estação então $v = \frac{F_1P}{t}$ e $v = \frac{F_2P}{t+\Delta t}$. Desta forma, $v = \frac{F_1P}{t}$ temos que $tv = F_1P$.

Por outro lado, de $v = \frac{F_2P}{t+\Delta t}$ temos que $tv + v\Delta t = F_2P$. Ou seja $tv = F_2P - v\Delta t$

Das equações $tv = F_1P$ e $tv = F_2P - v\Delta t$ temos que

$$F_2P - F_1P = v\Delta t$$

Repetindo o processo com mais uma estação, nesse caso F_3, vamos encontrar outra equação

$$F_3P - F_1P = v\Delta t$$

Observe agora que as equações obtidas são exatamente equações de hipérboles, sendo $v\Delta t$ a constante $2a$ da definição de hipérbole. E o ponto P onde se encontra a embarcação pertence às duas hipérboles.

Podemos observar que existe um outro ponto no qual poderia também estar a embarcação. A localização exata da embarcação é feita quando se utiliza os sinais de outras estações. Atualmente o alcance dos sinais das estações é de até 4000 milhas ou aproximadamente 6400km.

5 Considerações Finais

Diante dos desafios oriundos da realidade presente na vida e no ambiente escolar nos dias atuais, os jovens cada vez mais se distanciam do aprendizado.

Nesse trabalho apresentamos uma proposta para o estudo de cônicas, com intuito de despertar o interesse do aluno do ensino médio para esse conhecimento. Com questionamentos e exemplos concretos, caminhamos pela História das cônicas até alcançar a teoria. De forma simples, mostramos os resultados dessa teoria e complementamos com alguns exemplos. Trazemos assim um material que pode servir de guia para estudo individualizado ou em grupo de forma que o aluno fique mais independente do professor obtendo conclusões próprias e gerando motivação.

6 Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que direta ou indiretamente participaram deste processo de construção do saber.

Agradeço em particular a minha esposa e meus filhos pela paciência com a qual suportaram estes dois anos da minha ausência.

A cada um dos professores do mestrado que dedicaram seus esforços para que culminasse este momento.

Mais uma vez em particular ao professor Francinildo Nobre Ferreira, orientador e amigo presente em todas as horas.

Mas um "muito obrigado" à aquele sem o qual nada seria possível: Deus.

Referências

[1] Costa, Gustavo, Revista da Olimpíada Regional de Matemática - UFSC, 2007.

[2] Boyer, História da Matemática - ed. Edgard Blucher, 1998.

[3] Eves, Howard, Introdução a História da Matemática - ed.UNICAMP, 2004.

[4] Karlson, PAUL. A magia dos números - ed. Globo, 1961.

[5] Boulos e Camargo, Geometria Analítica com tratamento vetorial - ed. Pearson, 2006.

[6] Hefez e Fernandez, Álgebra Linear coleção PROFMAT - ed. SBM, 2012.

[7] Delgado, Frensel e Crissaff, Geometria Analítica coleção PROFMAT - ed. SBM, 2012.

[8] Venturi, Cônicas e Quádricas - ed. Curitiba, 2003.

[9] Lehmann, Geometria Analítica - ed. Globo, 1991.

[10] Suvorov, Matemáticas Superiores - ed. Bookman, 2007.

[11] Paiva, Manoel, Matemática Paiva Volume 3 - Ed. Moderna, 2009.

[12] II Bienal da SBM http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf

[13] PCN+ http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

[14] http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/index.html

[15] http://sitios.usac.edu.gt/seccionesconicas/pruebaparabola.html

[16] https://www.mar.mil.br/dhn/bhmn/download/cap-36.pdf

[17] https://esquadraodoconhecimento.wordpress.com/2015/04/20/euclides-e-os-elementos/