2016: DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Estudo dos Números Complexos via Representação Matricial

Bruno Tobias [1]
Carlos Alberto Raposo da Cunha[2]

Resumo: Nos atuais livros didáticos referentes ao nível médio de ensino, o conjunto dos números complexos é dado segundo uma abordagem bastante tradicional, a qual é apresentado um fato histórico, muitas das vezes não concernente ao conteúdo estudado, e em seguida define-se as operações básicas deste conjunto, sendo seus elementos dados na sua forma algébrica. A ausência de contextualização somada ao uso recorrente de definições e fórmulas, sem relacionar estas com as transformações no plano complexo, é um dos motivos do baixo interesse neste tópico, embora muito rico na Matemática. Com o propósito de obter um tempo maior em sala de aula para lidar com a contextualização e utilização dos números complexos, a estratégia de ensino se faz primordial. Visto que o estudo das matrizes é anterior ao número complexo, neste trabalho propomos a abordagem dos números complexos via representação matricial. O tratamento matricial dos números complexos permite o relacionamento das operações básicas deste conjunto com as operações usuais do conjunto das matrizes de ordem dois. A fim de obter conhecimento e domínio das operações de soma de complexos, produto de complexos, os conceitos de conjugado e módulo de um complexo, inverso e divisão de complexos e potenciação de números complexos é suficiente o conhecimento das operações de soma de matrizes, produto de matrizes, o conceito de matriz transposta e determinante. Com isso, o estudo dos números complexos se dará, de uma maneira acessível aos alunos do ensino médio, face à maior familiaridade em lidar com o conjunto de matrizes.

Palavras-chave: Matrizes. Números Complexos. Representação. Operações.

1 Introdução

Pela prática vivenciada em sala de aula, percebemos que estudo dos números complexos é de tamanha estranheza aos alunos do ensino médio que sua abordagem causa desconfiança até mesmo por parte dos professores. A importância ao estudo dessa classe de números está aquém de suas contribuições à Matemática, de tal modo que seu estudo se dá num caráter reflexivo, no sentido que se estuda números complexos por números complexos, não relacionando suas definições e propriedades a outros objetos da Matemática.

Ainda pela prática na atuação nas séries do ensino médio, situamos cronologicamente o estudo de matrizes na segunda série do ensino médio e o estudo dos números complexos na terceira série. Embora não conste nos Conteúdos Básicos Comuns (CBC) do estado de Minas Gerais, o conteúdo de matrizes faz parte, pelo ao menos nos pesquisados, dos livros didáticos adotados, na rede de ensino pública estadual e federal e na rede particular. Já o conteúdo

[1]Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2013, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, brunotobi@gmail.com

[2]Professor Orientador, Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, raposo@ufsj.edu.br

de números complexos está inserido no CBC (MG) como tópicos complementares à terceira série, de modo que, procura-se desenvolver nos alunos habilidades de reconhecer, representar, operar e lidar com números complexos em equações quadráticas.

Propomos aqui uma abordagem alternativa à encontrada nos livros didáticos, livros estes listados na referência, que foram considerados.

Historicamente, a principal motivação para o surgimento dos números complexos não se deu devido à resolução de equações do segundo grau e sim à resolução de equações cúbicas.

Por volta de 75 d.C, segundo Rosa (1998, p.42), Heron de Alexandria, em Estereometria, num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide, surgiu a necessidade de calcular $\sqrt{81-144}$. Heron, continuou seus cálculos adotando simplesmente o valor de $\sqrt{144-81}$.

Tempos depois, por volta de 275 d.C., no famoso livro Arithmética, Diofanto de Alexandria, apresenta a resolução da equação $24x^2-172x+336=0$, cujas raízes são $x=\dfrac{43\pm\sqrt{-167}}{12}$. Até então, estas soluções eram dadas como estranhas.

Por volta de 1515, segundo Iezzi (2005, p.99), o matemático italiano Scipione del Ferro (1465-1526), conseguiu resolver algebricamente equações cúbicas do tipo $x^3+ax^2+bx+c=0$ fazendo a substituição $x=y-\dfrac{a}{3}$ e obtendo equações do tipo $y^3+py+q=0$, equações estas que na época já existiam alguns métodos de resolução. O método utilizado por Scipione não fora publicado, mas revelado a seu discípulo Antonio Maria Fior.

Segundo Garbi (2006, p.121), pelos anos de 1535, o italiano Niccolo Fontana (1499(?)-1557), conhecido como Tartaglia, anuncia a descoberta de uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3+mx=n$. Esta solução apareceu em 1545 em Nuremberg, em Ars Magna (A Grande Arte), um grande tratado em latim de álgebra, de Girolamo Cardano (1501-1576).

Nessa mesma época o matemático italiano, Rafael Bombelli (1526-1573), em seu livro, L'Algebra Parte Maggiore Dell' Arithmetica, traz uma obra notável sobre a resolução de equações cúbicas. Bombelli viu-se obrigado a lidar com raízes quadradas de números negativos, quando utilizou a fórmula de Cardano-Tartaglia para resolução de equações cúbicas. Ele, então, criou regras de soma e multiplicação para estes "números".

Os termos real e imaginário foram introduzidos em 1637 por René Descartes (1596-1650). O símbolo i para denotar $\sqrt{-1}$ foi utilizado a primeira vez pelo suíço Leonard Euler (1707-1783). Este símbolo teve seu lugar assegurado nas notações matemáticas após sua utilização em Disquisitiones Arithmetica de 1801 de Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Segundo Boyer (2010, p.350-351), a representação geométrica dos números complexos no plano foram estudadas pelos matemáticos, suíço Jean Robert Argand (1768-1822) e o norueguês Caspar Wessel (1745-1818). No entanto, seus trabalhos não tiveram notoriedade na época.

Segundo Domingues (2009, p.329), em 1833, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) apresenta à Academia Irlandesa um artigo em que introduz uma álgebra formal de pares de números complexos cujas regras de combinação são utilizadas até hoje.

A representação dos números complexos pode ser dada pela forma algébrica, pares ordenados, vetorial, trigonométrica, exponencial, transformações no plano e matricial. Esta última, a fim de obter uma sequência didática não disponível nos livros utilizados no ensino médio, será nosso objeto de estudo.

2 O Conjunto das Matrizes de Ordem 2

Nesta seção estudaremos os conceitos de matriz necessários para relacionarmos matrizes com números complexos.

O interesse desta seção é apenas mostrar que as ferramentas necessárias de matrizes para compreensão de complexos são bastante simples, e não fogem de nenhum curso de matrizes a nível médio.

Para maiores informações sobre este tópico, vide DANTE.

Definição 2.1 (Matriz) *Uma matriz A, 2×2, com entradas reais é um arranjo retangular em duas linhas e duas colunas.*

Usualmente, cada elemento de uma matriz é representado por uma letra minúscula, em geral, a mesma que nomeia a matriz, acompanhada de dois índices. O primeiro índice indica a linha, e o segundo, a coluna onde se localiza o elemento da matriz. Assim a_{ij} indica o elemento situado na linha i e na coluna j da matriz A.

Assim, a matriz $A = (a_{ij})$ será representada, genericamente, por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

2.1 Operações com Matrizes

Seja $\mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes do tipo 2×2 com entradas reais. Sobre este conjunto, define-se:

2.1.1 Soma

Dadas $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, define-se a soma $A + B$ por

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Proposição 2.1 *A soma de matrizes satisfaz as seguintes propriedades:*

i) ***Associatividade****: para todas A, B e $C \in \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ temos*

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Demonstração: $A+(B+C) = (a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij}) = (A+B)+C.$ ■

ii) ***Comutatividade****: para todas $A, B \in \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ temos*

$$A + B = B + A.$$

Demonstração: $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$ ■

iii) ***Elemento Neutro***: *a matriz* $0 \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *com entrada zero em todas as posições, é tal que,* $\forall A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$A + 0 = 0 + A.$$

iv) ***Inverso***: *para toda* $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *existe* $-A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$A + (-A) = (-A) + A = 0.$$

Demonstração: *Tome* $-A := (-a_{ij})$. *Assim,*

$$A + (-A) = (a_{ij} + -a_{ij}) = (\underbrace{0}_{ij}) = 0.$$

■

2.1.2 Multiplicação por escalar

Dada a matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ define-se a multiplicação por escalar αA por

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

Proposição 2.2 *A multiplicação por escalar satisfaz as seguintes propriedades:*

i) ***Elemento Neutro***: *para toda* $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *temos*

$$1A = A.$$

Demonstração: $1A = 1(a_{ij}) = (a_{ij}) = A.$ ■

ii) ***Associatividade***: *para todos* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *temos*

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A.$$

Demonstração: $\alpha(\beta A) = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha\beta)(a_{ij}) = (\alpha\beta)A.$ ■

É fácil ver que a soma matricial e a multiplicação por escalar são operações que gozam entre si, da distributividade. Isto é,

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

e

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B,$$

para $A, B \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.1.3 Produto

Dadas $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, define-se o produto AB por

$$AB = C = (c_{ij}),$$

onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kj}$

Proposição 2.3 *O produto de matrizes satisfaz as seguintes propriedades:*

i) ***Associatividade***: *para todas A, B e $C \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ temos*

$$A(BC) = (AB)C.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} A(BC) &= \left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{2} b_{kl} c_{lj} \right) \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \left(\sum_{l=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \left(\sum_{l=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \right) = (AB)C. \end{aligned}$$

■

ii) ***Elemento Neutro***: *a matriz $I_2 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é tal que*

$$IA = AI = A,$$

$\forall A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Da mesma forma que a multiplicação por escalar, o produto e a soma matricial são operações que gozam entre si, da distributividade. Isto é,

$$A(B + C) = AB + AC$$

e

$$(A + B)C = AC + BC,$$

para A, B e $C \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Definição 2.2 (Matriz transposta) *A transposta de uma matriz* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *é a matriz* A^T *definida por*

$$A^T = (a_{ji}),$$

ou seja, a matriz transposta é obtida trocando as linhas da matriz A *por suas colunas.*

Definição 2.3 (Matriz inversa) *A inversa de uma matriz* $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, se existir, é uma matriz* B *tal que*

$$AB = BA = I.$$

Se isto ocorre, dizemos que A é invertível e sua inversa é B, denotada por $B = A^{-1}$.

Nota-se que a inversa de uma matriz é única, pois se B e C são duas matrizes tais que

$$AB = BA = I$$

e

$$AC = CA = I,$$

então

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Definição 2.4 (Determinante) *Dada* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *define-se como determinante de* A*, denotado por* $\det A$*, o valor*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Da definição acima, segue, trivialmente, que $\det A = \det A^T$.

Agora, seja $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\det A \neq 0$. Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

então $\det A = ad - bc \neq 0$. Considere a matriz $B \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Claramente, $AB = BA = I$. Assim $B = A^{-1}$. Temos então, o seguinte resultado que irá relacionar o determinante de uma matriz com sua inversa.

Proposição 2.4 *Dada* $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*,* A *é ivertível se somente se* $\det A \neq 0$.

3 O Conjunto dos Números Complexos

Iniciaremos esta seção introduzindo o conjunto dos números complexos via sua representação em par ordenado. Em seguida, relacionaremos tal representação com a forma algébrica.

Para maiores informações sobre este tópico, vide DANTE.

O conjunto dos números complexos, representando por $\mathbb{C}$, consiste de todos os pares ordenados (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$.

Definiremos como **soma** de dois complexos, e respectivamente, **produto** de dois complexos as operações:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

e

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Chamaremos de **unidade imaginária** o complexo $i = (0, 1)$. Usando a operação de multiplicação verificamos que

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Faremos um abuso de linguagem matemática e definiremos que $(a, 0) = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Sendo assim, definiremos os números complexos como as expressões da forma

$$\begin{aligned} z &= (a, b) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= a(1, 0) + b(0, 1) \\ &= a + bi, \end{aligned}$$

onde a e b são números reais e $i^2 = -1$, ou seja,

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}.$$

O número a é chamado **parte real** de z e o número b é chamado **parte imaginária** de z. Fica fácil perceber que se um número complexo tem parte imaginária igual a zero, então este número será um número real.

Ao complexo $\overline{z}$ definido por $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$, chamaremos de **conjugado** de $z = a + bi$. Notemos que $z = \overline{z}$, se e somente, se z é real.

Ao valor, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, chamaremos de **valor absoluto**(módulo) de $z = a + bi$.

O número complexo representado por $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ para $z \neq 0$, e chamado de **inverso** de z, e dado por

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i,$$

é tal que $z^{-1} \cdot z = z \cdot z^{-1} = 1$. Com isso dados dois números complexo $w, z \neq 0$, definimos $\dfrac{w}{z} := w \cdot \dfrac{1}{z}$.

Devido à sua importância geométrica, descrevemos abaixo algumas propriedades do valor absoluto. Algumas, por serem imediatas, terão sua demonstração omitida.

1. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

2. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

4. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}, z \neq 0$.

5. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}, w \neq 0$.

6. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Desigualdade Triangular).

7. $|z| - |w| \leq |z - w| \leq |z| + |w|$.

Demonstraremos 6.
Demonstração: [6] Observe que por [2],

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w) \cdot \overline{(z+w)} \\ &= (z+w) \cdot (\overline{z} + \overline{w}) \\ &= |z|^2 + z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w + |z|^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\overline{z \cdot \overline{w}} = \overline{z} \cdot w$, assim:

$$z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w = 2\text{Re}(z \cdot \overline{w}) \leq 2|z \cdot \overline{w}| = 2|z| \cdot |w|,$$

portanto, $|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. Concluímos que $|z + w| \leq |z| + |w|$. ∎

A representação geométrica de um número complexo é realizada em um plano cartesiano denominado plano de Argand-Gauss ou plano complexo. Neste plano, o eixo das abscissas é chamado eixo real (Re) e o eixo das ordenadas é chamado eixo imaginário (Im). Tal representação, motiva a seguinte definição:

Definição 3.1 (Forma trigonométrica do número complexo) *Todo número complexo $z = a + bi$ pode ser escrito na forma trigonométrica*

$$z = r(\cos\theta + i\, sen\theta),$$

em que $r = |z|$ e θ é o ângulo (em radianos) que a semirreta, que liga a origem ao ponto z, forma com o eixo positivo real. O ângulo θ é chamado de argumento de z.

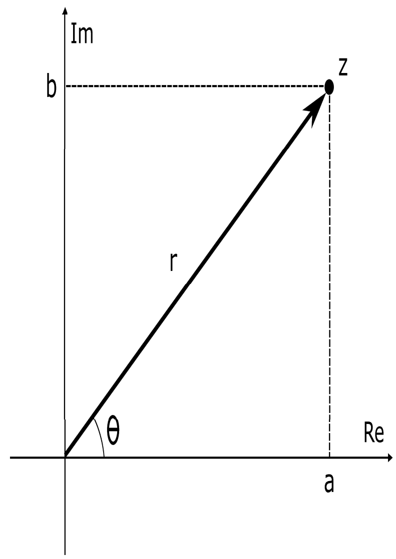

Figura 1: Módulo e argumento de um número complexo.

Na figura acima, observamos que:

$$\tan\theta = \frac{b}{a},$$

$$\text{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{r}$$

e

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{r}.$$

Como $\overline{z} = \overline{a+bi} = a - bi$, temos que o conjugado na forma trigonométrica será dado por

$$\overline{z} = r(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta) = r\left(\cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)\right).$$

Com isso, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{r}(\cos\theta - i\,\text{sen}\theta)$.

A escrita do número complexo na forma trigonométrica facilita ao cálculo de potências e raízes, como vemos nos dois teoremas abaixo.

Teorema 3.1 *Seja n um inteiro, r e θ números reais, então*

$$z^n = \left[r\left(\cos\theta + i\,sen\theta\right)\right]^n = r^n\left(\cos n\theta + i\,senn\theta\right).$$

Demonstração: Provaremos que a igualdade é válida para $n \in \mathbb{N}$ e, em seguida, para $n \in \mathbb{Z}$. Para isso, usaremos o princípio de indução finita.

Se $n = 0$, então $z^0 = 1$ (por definição) e $r^0(\cos 0 + i\,\text{sen}0) = 1$. Vamos admitir a validade da fórmula para $n = k-1$, logo $z^{k-1} = r^{k-1}\left(\cos(k-1)\theta + i\,\text{sen}(k-1)\theta\right)$ e agora provaremos a validade para $n = k$.

Temos que

$$\begin{aligned} z^k &= z^{k-1}\cdot z \\ &= r^{k-1}\left(\cos(k-1)\theta + i\,\text{sen}(k-1)\theta\right)\cdot r\cdot(\cos\theta + \text{sen}\theta) \\ &= r^k(\cos k\theta + i\,\text{sen}k\theta). \end{aligned}$$

Para n negativo, basta usar que $z^{-n} := (z^{-1})^n = \dfrac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.2 *Seja n um inteiro positivo e z um número complexo. Existem n raízes n-ésimas de z, que são assim definidas*

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\, sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Demonstração: Tomamos z e w números complexos em suas formas trigonométricas, ou seja, $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ e $w = s(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\phi)$ com $r \geq 0$ e $s \geq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta) \\ &= w^n = s^n(\cos\phi + i\,\mathrm{sen}\phi)^n \\ &= s^n(\cos n\phi + i\,\mathrm{sen} n\phi), \end{aligned}$$

resultando, $s = r^{\frac{1}{n}}$ e $n\phi = \theta + 2k\pi$, para algum inteiro positivo k. Com isso teremos n raízes n-ésimas de z. ■

4 Representação Matricial

Como mencionado anteriormente, a representação dos números complexos pode ser dada pela forma algébrica, pares ordenados, vetorial, trigonométrica, exponencial, transformações no plano e matricial. Faremos aqui, como uma alternativa ao estudo dos números complexos, sua representação matricial. Todos os conceitos necessários a respeito de matrizes e complexos já foram dados nas seções que antecedem.

No conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tomemos as matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Se $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, então

$$A + B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix}.$$

Também, $A \cdot B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$.

Ainda, se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix}$.

Com isso, observamos que o subconjunto das matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ é fechado para soma, produto e produto escalar.

Dado o número complexo $z = a + bi$, queremos agora relacionar a sua representação algébrica com uma matriz da forma dada acima e relacionar definições e operações de complexos às definições e operações matriciais.

Aceitando um abuso de notação, definiremos como a **representação matricial do complexo** a relação

$$z = a + bi := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Da definição acima temos que, para $z = i$, as potências de i serão:

$i^0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$

$i^1 := i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$

$i^2 = i \cdot i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1,$

$i^3 = i^2 \cdot i = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -i.$

Veremos agora como serão dadas as propriedades somatórias dos números complexos via representação matricial.

4.1 Soma

Dados os complexos $z = a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $w = c + di = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, teremos

$$\begin{aligned} z + w &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \\ &= (a + c) + (b + d)i. \end{aligned}$$

4.2 Produto

Dados os complexos $z = a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $w = c + di = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$, teremos

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

4.3 Conjugado

O conjugado de um número complexo $z = a + bi$, será dado por $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$, assim $\overline{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Notemos, então, que para $z = A$, $\overline{z} = A^T$.

4.4 Inverso

Recorremos à inversa de uma matriz para representarmos o inverso de um número complexo.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0$, seja B a matriz tal que $AB = BA = I$. Pela álgebra matricial sabemos que B é a inversa de A e é dada por

$$B = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Reescrevemos B como

$$B = \frac{1}{\det A} \cdot A^T.$$

Logo, para $z = a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A$,

$$z^{-1} = \frac{A^T}{\det A}.$$

4.5 Divisão

Com o exposto acima, temos que a divisão de números complexos via representação matricial, utilizaremos a matriz transposta e o determinante. Assim, para $z = a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A$ e $w = c + di = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = B \neq 0$, teremos que

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = A \cdot \frac{B^T}{\det B}.$$

4.6 Módulo

O módulo de um número complexo, como visto anteriormente, é dado por, para $z = a+bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Sendo assim, para $z = a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A$,

$$|z| = \sqrt{\det A}.$$

4.7 Potenciação

Para $z = a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A$, temos que

$$z^0 = A^0 := I = 1,$$

$$z^1 = A^1 := A,$$

$$z^2 = z \cdot z = A \cdot A = A^2,$$

$$\vdots$$

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n fatores} = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{n fatores} = A^n.$$

Para $z \neq 0$, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, de modo que $z = a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A$,

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{A^T}{\det A}\right)^n = \frac{(A^T)^n}{(\det A)^n} = \frac{(A^n)^T}{\det A^n}.$$

5 Considerações Finais

Reafirma-se a estranheza causada ao ensino e aprendizado de números complexos por parte de alunos e professores da educação básica. Abordagens descontextualizadas, estratégias de ensino ineficientes são fatores que, entre outros, acarretam um desempenho inversamente proporcional à grande aversão a este estudo. A amenização destes fatos pode se dar pela busca alternativa de sequências didáticas. Deste modo, buscamos aqui tratar do ensino de números complexos com a representação matricial, visto que este último, é um assunto de menor aversão por partes dos alunos ao seu entendimento. Com isso, com a utilização de recursos matemáticos junto à sua estrutura como ciência, as estratégias de ensino podem e devem ser aprimoradas a fim da obtenção de melhores resultados junto aos alunos.

Com a utilização de isomorfismos entre espaços vetoriais e sem fazer menção direta deste fato, foi possível propor uma alternativa competente ao ensino de números complexos, os relacionando com matrizes de ordem dois, haja vista que tal tópico é, salvo proporções, de entendimento mais fácil aos alunos da educação básica.

O presente trabalho continua com a utilização de tal estratégia e posterior análise dos resultados.

Agradecimentos

Primeiramente confiamos. E em seguida, acreditamos. Agora, agradecemos...

Agradeço portanto a Deus, por sua infinita bondade, conceder-me a vida e permitir esta realização.

Agradeço aos meus pais, pela educação, pelo caminho e sobretudo, pelo exemplo.

Agradeço à minha esposa, por caminhar na minha frente, me protegendo e mostrando o caminho correto.

Agradeço aos meus filhos pela compreensão das ausências.

Agradeço a todos meus familiares, pelo carinho, estima e por estarem sempre comigo.

Agradeço à Universidade José do Rosário Vellano, na pessoa do Professor José Roberto Paoliello por seu profissionalismo.

Agradeço ao DEMAT, professores e funcionários, pela competência, presteza e possibilitar ampliar sempre os conhecimentos.

Agradeço ao André, pelo auxílio no LaTex.

Agradeço à companhia prazerosa dos colegas de curso, principalmente aos companheiros de viagens, César e Éder.

Agradeço aos membros da banca, professores Arnulfo Miguel e Éder Marinho, pelas correções, sugestões e orientações.

Agradeço, em especial, ao meu orientador, Carlos Alberto Raposo da Cunha, pela competência nesta orientação, paciência e persistência.

Referências

[1] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[2] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *Trigonometria/Números Complexos*. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[3] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*. Volume único. 1.ed. São Paulo: Ática, 2005.

[4] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 5.ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011, 848 p.

[5] GARBI, Gilberto Geraldo. *A Rainha das Ciências*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

[6] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy. *Matemática Fundamental: Uma nova abordagem*: Ensino Médio: volume único. Coleção Delta. São Paulo: FTD, 2002. 712 p.

[7] DOMINGUES, Hygino Hugueros. *Fundamentos da Aritmética*. Santa Catarina: Editora da UFSC, 2009.

[8] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar*. 7.ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 2-9.

[9] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. *Matemática: Ciência e Aplicações*: Ensino Médio. Volume 2. 4.ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

[10] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. *Matemática: Ciência e Aplicações*: Ensino Médio. Volume 3. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[11] IEZZI, Gelson et al. *Matemática: Ciência e Aplicações, 3a série: ensino médio matemática*. 2.ed. São Paulo: Atual, 2004.

[12] OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. *Números Complexos: um estudo dos registros de representações e de aspectos gráficos*. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

[13] *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, Ministério da educação/ Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 2002, 141 p.

[14] ROSA, Mário Servelli. *Números complexos, "Uma abordagem histórica para aquisição do conceito"*. 1998. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

[15] RUBIÓ, Angel Panadés. *Matemática, 3ª série: revisional*. Belo Horizonte: Editora Educacional, 2011.

[16] SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇAO DE MINAS GERAIS. *Conteúdo Básico Comum* - Matemática(2005). Educação Básica - Ensino Médio.