2016: DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

PROBABILIDADE GEOMÉTRICA:
UMA ESTRATÉGIA DE ENSINO VIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Daniel Amaral Prates [1]
Andréa Cristiane dos Santos Delfino[2]

Resumo:

A proposta deste trabalho é apresentar uma alternativa para introduzir a Probabilidade Geométrica no ensino básico de matemática, em específico, no 3º ano do ensino médio. De acordo com Paterlini (2002), o tema foi escrito pela primeira vez em 1777 por Georges Louis Leclerc, um naturalista francês que ficou conhecido como o Conde de Buffon. Em seus estudos sobre jogos e lançamentos aleatórios, Buffon propôs vários problemas sobre probabilidade num contexto geométrico. A relação dos conceitos de comprimento, área e volume com o cálculo de probabilidades envolve espaços amostrais contínuos, um assunto não muito explorado no ensino médio. Diante disso, será apresentada uma proposta pedagógica, abordando o tema em questão, através do Método de Resolução de Problemas, descrito por Polya (1978). Entende-se que este trabalho possa ser útil para professores e alunos, uma vez que aborda conceitos pouco explorados nos currículos do ensino básico de matemática.

Palavras-chave: Probabilidade Clássica, Probabilidade Frequentista, Resolução de Problemas, Probabilidade Geométrica.

1 Introdução

O conhecimento acerca das probabilidades assume papel importante no desenvolvimento de várias áreas, sendo muito relevante seu estudo no ensino básico. A respeito disso, cita-se o uso das probabilidades no campo da genética, nas análises de mercado e economia, nas previsões meteorológicas, na engenharia e até mesmo em estudos estatísticos do comportamento humano.

> Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento. (PCNEM, 2007, p.111).

[1]Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2014, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, danielprates@live.com

[2]Professora orientadora, Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ, andrea@ufsj.edu.br

A união da geometria com a probabilidade pode proporcionar uma visão mais ampla destes conceitos, pois possibilita a junção de dois temas distintos. Além disso, estabelece conexões que envolvem valores contínuos para eventos e espaços amostrais.

A teoria de probabilidade que normalmente é tratada no ensino básico é baseada em espaços amostrais finitos, associada com métodos de contagem.

A abordagem da probabilidade geométrica permite trabalhar a probabilidade sob outra perspectiva, o que culmina na ampliação dos conhecimentos dos alunos.

Para que o tema seja melhor absorvido, o aluno deverá ter embasamento teórico a respeito de geometria. Sendo assim, o 3º ano do ensino médio seria a série adequada para este fim. Isto corrobora com a proposta curricular da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), em que a probabilidade é apresentada de forma mais consistente, o que acontece também de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do ensino médio. Contudo, a proposta da SBM acrescenta novos conceitos em relação aos PCNs, como os espaços contínuos de probabilidade e a probabilidade frequentista, todos presentes na probabilidade geométrica.

Para a absorção do tema considera-se que a metodologia de resolução de problemas é adequada, pois desperta no estudante, o hábito do questionamento sobre suas próprias construções e estratégias de resolução. A probabilidade, como um todo consiste em resolver uma infinidade de problemas, desde os mais simples até os mais complexos, desde o lançamento de uma moeda, até o cálculo de lançamentos ou escolhas aleatórias em espaços envolvendo medidas contínuas, sejam elas de comprimento, área ou volume. Pois as dificuldades dos estudantes em lidar com conceitos interligados e em contextos que requerem um esforço maior do que recorrer a um simples modelo, são fatos que ocorrem com frequência nas salas de aula.

> A resolução de problemas, como metodologia de ensino da Matemática, pode fazer com que os conceitos e princípios matemáticos fiquem mais compreensivos para os estudantes uma vez que eles serão elaborados, adquiridos, investigados de maneira ativa e significativa. É a apropriação compreensiva do conteúdo, pois é uma Matemática mais qualitativa em destaque. (ROMANATTO, 2012, p.303)

A metodologia em questão, consiste em colocar o problema como ponto de partida na construção do conhecimento matemático e a partir daí o professor propõe perguntas direcionadas para que o aluno construa a sua própria resolução. De acordo com Polya (1978), as indagações são feitas em 4 fases, a compreensão, o plano, a execução e o restrospecto. Estas 4 fases serão explicadas em detalhes na seção 3.4.

Considerando que o tema abordado é pouco explorado no ensino médio, os objetivos deste trabalho são apresentar um referencial teórico para suporte em possíveis consultas e também apresentar a metodologia de resolução de problemas como uma estratégia auxiliar no ensino da probabilidade geométrica.

2 Considerações sobre o conceito de probabilidade

Atualmente, o estudo das probabilidades nas escolas de ensino básico encontra-se limitado aos conceitos da probabilidade clássica. Isso acontece, talvez, pelo fato da verificação experimental da probabilidade exigir um número de tentativas inviável para se realizar dentro da sala de aula ou até mesmo pelo fato dos currículos escolares não abrangerem outros conceitos sobre probabilidade.

Mas acredita-se que isso não seja motivo para limitar o estudante de vivenciar a probabilidade também em outros aspectos, como os conceitos de probabilidade frequentista, probabilidade subjetiva e que se ofereça caminhos para que se desenvolvam as habilidades relacionadas à probabilidade geométrica. É importante que o aluno saiba identificar em seu cotidiano e também em cada situação-problema, qual conceito sobre probabilidade deverá ser considerado.

2.1 Axiomas e Propriedades da Probabilidade

Os axiomas são regras que norteiam o cálculo de probabilidades e as propriedades consequências destes axiomas. Eles são válidos para qualquer definição de probabilidade.

2.1.1 Axiomas

Segundo Barbetta, Reis e Bornia (2010), seja um experimento aleatório e um espaço amostral Ω associado a ele. A cada evento $E_i (i = 1, 2, ...)$ associa-se um número real denominado probabilidade de ocorrência de E_i, $P(E_i)$, que deve satisfazer aos seguintes axiomas:

(a) $0 \leq P(E_i) \leq 1$

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) Se $E_1, E_2, ..., E_1$ são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente, então

$$P(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n)$$

O axioma (a) nos diz que a ocorrência de um evento estará entre 0 e 1, podendo assumir qualquer valor real desse intervalo. O axioma (b) afirma que, ao realizar o experimento, sempre vai ocorrer algum dos resultados possíveis, razão pela qual o espaço amostral é chamado de evento certo. O axioma (c) é a respeito de como a probabilidade da união de eventos resulta na soma das probabilidades desses eventos, e será explicada em detalhes na seção 2.2.1.

2.1.2 Propriedades

Considere Ω um espaço amostral e $\overline{A}$, o evento complementar de A. Segundo Lima *et. al.* (1998), se A e B são eventos, então:

i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

ii) $P(\emptyset) = 0$

iii) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

v) Se $A \supset B$ então $P(A) \geq P(B)$

Demonstração:

i) $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Daí, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

ii) $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$, pois Ω e $\emptyset$ são mutuamente excludentes.Daí $P(\emptyset) = 0$.

iii) $P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B)$ pois $A - B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes. Daí, $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) $P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] = P(A - B) + P(B)$ pois $A - B$ e B são mutuamente excludentes. Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, resulta $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

v) Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$, se $A \supset B$ resulta $P(A - B) = P(A) - P(B)$. Como $P(A - B) \geq 0$, temos $P(A) \geq P(B)$.

2.2 Probabilidade Clássica

Existem certos experimentos ou fenômenos que, mesmo sendo realizados sob condições idênticas, não apresentam necessariamente os mesmos resultados. Cita-se, o lançamento de uma moeda perfeita, o lançamento de um dado não viciado ou a retirada de uma carta de um baralho e em seguida recolocando-a até que seja feita outra retirada. Esses experimentos podem ser chamados de aleatórios, devido à casualidade envolvida em cada vez que são realizados; o que os difere dos experimentos determinísticos, que são assim classificados devido ao fato de seus resultados serem conhecidos, pois podem ser calculados e observados com os conceitos da física e de outras ciências.

Num experimento aleatório, existe um conjunto de possibilidades totais, denominado na probabilidade clássica de espaço amostral. Segundo Barbetta, Reis e Bornia (2010), espaço amostral é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório, que neste caso, será denotado por Ω. “Um espaço amostral é dito discreto, quando for finito ou infinito enumerável; é dito contínuo, quando for infinito, formado por intervalos de números reais.” (BARBETTA; REIS & BORNIA, 2010, p.94). A ocorrência de parte deste espaço, ou de um subconjunto dele, é chamada de evento. Mais precisamente, cada evento pode ser classificado como sendo a representação de uma característica específica ou geral do espaço amostral. Para os dois exemplos a seguir, cada evento será nomeado pela letra E.

Exemplo 2.1 ***Espaço Amostral Discreto***

Experimento Aleatório: Lançamento de um dado não viciado de seis faces.

Espaço Amostral Discreto: $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

Evento: $E_1 : \{\textit{números primos}\}$ *ou* $E_1 : \{2, 3, 5\}$.

Exemplo 2.2 ***Espaço Amostral Contínuo***

Experimento Aleatório: Diâmetro D de um eixo, em mm, que sai da linha de produção.

Espaço Amostral Contínuo: $\Omega = \{\textit{Tamanho D}\}$

Evento: $E_2 : \{\textit{Tamanho adequado para venda}\}$ *ou* $E_2 : \{49 < D < 51\}$.

Portanto, fica definido o conceito de espaço amostral e o evento como sendo um subconjunto desse espaço.

Segundo Lima *et. al.* (1998), a mesma definição de probabilidade clássica utilizada por vários matemáticos, como Jerônimo Cardano (1501-1576), Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre Simon Laplace (1749-1827), é descrita como sendo um modelo equiprobabilístico, apresentado da seguinte forma: se um experimento tem como espaço amostral $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ com um número finito de elementos, então os eventos elementares $\{e_i\}$ são equiprováveis, se todos têm a mesma probabilidade de ocorrer, isto é:

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{\text{n}} \tag{1}$$

Ou seja,

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = ... = P(\{e_n\}) \tag{2}$$

Portanto, para eventos equiprováveis, se um evento A é formado por k elementos, então

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favoráveis ao evento A}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos possíveis do espaço amostral}} \tag{3}$$

No lançamento de um dado honesto, os elementos do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ são equiprováveis, pois cada elemento do espaço amostral tem a mesma chance de ocorrer, ou seja, a chance de sair 1 é a mesma de sair 2, que é a mesma de sair 3, e assim por diante. Portanto, $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$. Veja o exemplo 2.3.

Exemplo 2.3 ***Eventos Equiprováveis***
Seja o lançamento de um dado não viciado de seis faces, qual é a probabilidade de se obter um número ímpar na face superior? Descreve-se essa situação da seguinte forma:

A: {Ocorrer um número ímpar} e Ω: {Ocorrer qualquer face do dado}

Sabe-se que $n(A) = 3$, pois $A = \{1, 3, 5\}$ e que $n(\Omega) = 6$, pois $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Logo, $P(A) = n(A)/n(\Omega) = 3/6 = 1/2$.

No entanto, nem todas as situações probabilísticas possuem o espaço amostral composto por eventos equiprováveis. Veja o exemplo 2.4.

Exemplo 2.4 ***Eventos Não Equiprováveis***
Supondo-se que, no lançamento de um dado viciado, a probabilidade de ocorrer um número par é o dobro da probabilidade de ocorrer um número ímpar na face superior, sendo que os três números pares ocorrem com igual probabilidade, bem como os três números ímpares. Qual é a probabilidade de ocorrer um número par? Descreve-se essa situação da seguinte forma:

A: {Ocorrer um número par} e B: {Ocorrer um número ímpar}

Sabe-se que $P(A) = 2P(B)$, e que no lançamento de um dado, com certeza, ocorre um número ímpar ou um número par. Logo, pelo axioma (b) da subseção 2.1.1, tem-se que $P(A) + P(B) = 1$. Daí concluí-se que $P(A) = 1 - P(B)$. Mas, pelo enunciado, $P(A) = 2P(B)$; logo, $2P(B) = 1 - P(B) \iff 3P(B) = 1 \iff P(B) = 1/3$. Portanto, $P(A) = 2/3$.

2.2.1 Regra da adição de probabilidades

Para calcular a probabilidade de ocorrer um evento A ou um evento B, utiliza-se a soma de probabilidades. Será definida primeiramente, a regra da adição para eventos mutuamente excludentes e depois para eventos não mutuamente excludentes, pois a regra é diferente para os dois casos.

a) Eventos Mutuamente excludentes

Alguns eventos não podem ocorrer de forma simultânea. É impossível pensar que uma pessoa possa estar “viva e morta”. Ou um número ser simultaneamente “par e ímpar”.

Essas situações são classificadas, no estudo das probabilidades, como sendo eventos mutuamente excludentes. Isto é, a ocorrência de um exclui a ocorrência do outro.

Para fundamentar esta situação, utiliza-se o conceito de conjuntos. Pode-se representar dois eventos mutuamente excludentes, utilizando o conceito de conjuntos disjuntos, como apresentado na Figura 1.

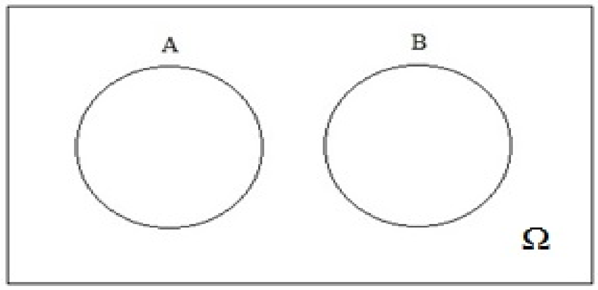

FIGURA 1: Eventos Mutuamente Excludentes
(Fonte: Autor)

Na Figura 1, nota-se que conjuntos disjuntos não possuem elementos comuns. Portanto $A \cap B = \emptyset$.

A título de exemplo, suponha que se queira calcular a probabilidade de ocorrer cara ou coroa no lançamento de uma moeda. É fácil perceber que essa probabilidade é certa de acontecer, pois no lançamento de uma moeda só temos essas duas opções. Isto é, para se calcular a probabilidade de acontecer um certo evento A ou um certo evento B, deve-se escrever P(A ou B) = P(A) + P(B), mais especificamente no caso da moeda, P(cara ou coroa) = P(cara) + P(coroa) = 0,5 + 0,5 = 1.

Neste caso, a conjunção *OU* é usada de forma exclusiva, isto é, *OU* significa *um* ou *outro*, pois a ocorrência de um evento exclui a possibilidade do outro. Neste exemplo, isso fica bem claro, pois a face de uma moeda não pode ser cara e coroa ao mesmo tempo.

Dessa forma, para eventos mutuamente excludentes, tem-se:

$$P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{4}$$

b) Eventos Não Mutuamente excludentes

Eventos não mutuamente excludentes podem ocorrer de forma simultânea, tal como apresentado na Figura 2.

Suponha que o espaço amostral seja $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, o evento $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e o evento $B = \{2, 3, 5, 7\}$. E que se deseja calcular a probabilidade de um número ser par ou primo, ou seja, $P(A \cup B)$. O que ocorre, é que se a Fórmula (4) for utlizada, assim como exemplificada na Fórmula (5):

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} = \frac{8}{7} \tag{5}$$

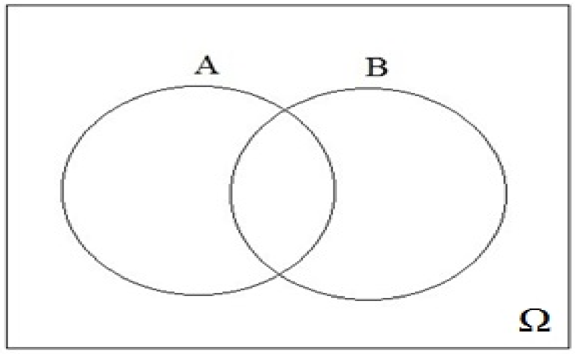

FIGURA 2: Eventos Não Mutuamente Excludentes
(Fonte: Autor)

o cálculo fica errado, pois contradiz o axioma (b) da subseção 2.1.1. Isso acontece pelo fato destes dois eventos não serem mutuamente excludentes, pois $A \cap B = \{2\}$. O elemento 2 é um número par e também é primo, ou seja, quando é feita a soma de $P(A)$ com $P(B)$, conta-se o elemento em comum duas vezes. E isso acontece todas as vezes que os eventos possuem a intersecção não vazia.

Para corrigir esse fato, é necessário subtrair o que for comum. Ou seja, o cálculo correto da Fórmula (5) seria:

$$P(A \text{ ou } B) = P(A)+P(B)-P(A \text{ e } B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}+\frac{n(B)}{n(\Omega)}-\frac{n(A \text{ e } B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{1}{7} = 1 \quad (6)$$

Neste caso, a conjunção *OU* deve ser usada de forma inclusiva, isto é, *OU* significa *um* ou *outro* ou *ambos*. Dessa forma, para eventos não mutuamente exclusivos, tem-se:

$$P(A \text{ ou } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (7)$$

2.2.2 Regra da Multiplicação de Probabilidades

A regra da multiplicação de probabilidades é utilizada para se calcular a probabilidade de ocorrer um evento A qualquer e, em seguida, ocorrer um evento B qualquer, ou ainda a ocorrência de vários eventos seguidos, em uma mesma situação. Mas é necessário esclarecer quando um evento depende ou não do outro. Portanto, antes de definir uma regra para a ocorrência de um evento E e, em seguida, a ocorrência do outro, é necessário explicar o que são eventos independentes e eventos dependentes. Enquanto o primeiro ocorre sem influenciar eventos futuros, o segundo depende de eventos anteriores. Essas duas situações serão detalhadas nos itens (a) e (b) a seguir.

a) Eventos Independentes:

Eventos independentes são aqueles que não influenciam eventos futuros, dentro do cálculo de uma mesma probabilidade. Por exemplo, lançar um dado quatro vezes e calcular a probabilidade de nas quatro vezes sair a face número 6; ou resolver um teste de múltipla escolha e acertar as cinco primeiras questões; ou retirar uma carta de um baralho, recolocá-la no monte e, em seguida, retirar uma segunda carta, a fim de se conhecer a probabilidade de nas duas retiradas sair uma carta de copas.

Existem ainda, eventos que também são chamados de independentes, por possuírem a característica de não influenciar eventos futuros. Será apresentado, a seguir, um exemplo que configure essa situação. E depois, a fórmula para se calcular a probabilidade de ocorrer um certo evento A e, em seguida, ocorrer um certo evento B em uma mesma situação.

Seja uma urna com 10 bolas numeradas de 1 a 10, com as quais será feito o seguinte experimento: retirar 2 bolas dessa urna, mas com a reposição da primeira. Qual seria a probabilidade destas duas bolas serem numeradas com um número par?

Sejam os eventos A: $\{1^{\text{a}}$ bola numerada com um número par entre 1 e 10, inclusive$\}$, isto é, $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ em que $n(A) = 5$, e B: $\{2^{\text{a}}$ bola numerada com um número par entre 1 e 10, inclusive$\}$, isto é, $B = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ em que $n(B) = 5$. E ainda Ω: $\{10$ bolas numeradas$\}$, isto é, $\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$. Deseja-se calcular a probabilidade da primeira bola ser par e a segunda também, ou seja, P(A e B).

Tem-se que $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{10}$ e que $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{10}$, note que a probabilidade de ocorrer A é igual à probabilidade de ocorrer B, isso ocorre pelo fato do experimento acontecer com a reposição das bolas. Tem-se, portanto, um exemplo claro de eventos independentes, pois a ocorrência do primeiro não influencia a ocorrência do segundo. Como fica então, o cálculo de P(A e B)?

Será descrito na Figura 3, o experimento, colocando todas as possibilidades da probabilidade que se deseja calcular, no caso P(A e B), ou ainda $P(A \cap B)$.

Na Figura 3, percebe-se que, para que todas as possibilidades sejam esgotadas, deve-se multiplicar (possibilidades da 1^{a} bola) $\times$ (possibilidades da 2^{a} bola) $= 10 \times 10 = 100$, totalizando todas as situações possíveis de acontecer. Mas o que se deseja calcular é P(A e B), logo é necessário multiplicar $P(A)$ por $P(B)$, ou melhor, $P(A \cap B) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{5}{10} = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$.

Portanto, para eventos independentes, tem-se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{8}$$

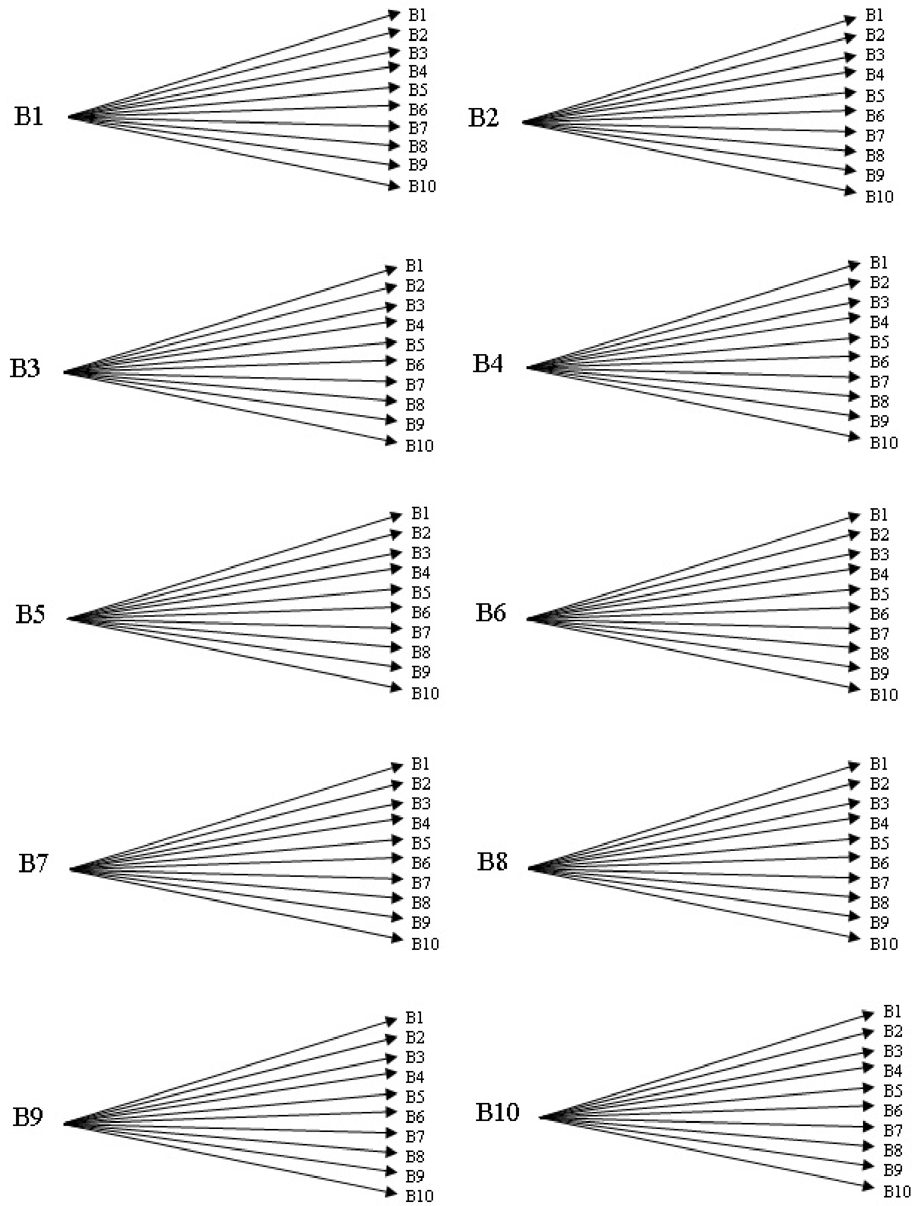

FIGURA 3: Possibilidades para a Bola 1 e a Bola 2.
(Fonte: Autor)

b) Eventos Dependentes (Probabilidade Condicional)

Alguns experimentos possuem uma característica marcada por eventos que podem condicionar a probabilidade da ocorrência de eventos futuros. Suponha experimentos que envolvam retiradas de algum objeto do mesmo tipo, mas com a condição de que cada objeto retirado não será recolocado para uma nova retirada, e sim descartado de uma nova realização do experimento. Essa situação é caracterizada pelo fato de que a cada vez que se retira um objeto de um conjunto total de objetos, e este mesmo objeto não é recolocado, a próxima retirada fica sujeita a um espaço amostral modificado, o que compromete a probabilidade do próximo evento. A partir daí, utiliza-se a teoria da probabilidade condicional para calcular as probabilidades que envolvam eventos dependentes ou eventos condicionados.

Seja então, um experimento que utiliza um baralho de 52 cartas. O experimento consiste em calcular a probabilidade de se retirar 2 reis seguidos, mas sem a reposição de nenhuma carta. A princípio, o espaço amostral é composto pelo baralho completo, isto é, 52 cartas. E os eventos serão denominados de A: {1ª carta ser um rei qualquer} e B: {2ª carta ser um rei qualquer}. O espaço amostral antes da 1ª retirada será denominado Ω_0: {52 cartas do baralho} e o espaço amostral depois da 1ª retirada Ω_1: {51 cartas do baralho}. Com a retirada da primeira carta, é necessário diminuir o espaço amostral, o que compromete a probabilidade da segunda retirada. Desta forma, escreve-se a segunda probabilidade como $P(B|A)$, que significa a probabilidade de ocorrer o evento B, na certeza que A já ocorreu. Portanto, para escrever a probabilidade de ocorrer o evento A e em seguida o evento B, usa-se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221} \tag{9}$$

A fórmula (9), não é específica somente para experimentos com retiradas sem reposição. Mas, também, para situações em que o próximo evento fique caracterizado por uma influência causada pelo evento anterior, ou ainda, por situações em que se preestabeleça uma condição que também comprometa o cálculo da probabilidade desejada.

Com isso, será apresentado um exemplo no qual a probabilidade desejada esteja condicionada a uma situação preestabelecida. Suponha, agora, que se deseja calcular a probabilidade de se retirar um rei do baralho, com a informação de que esse rei é do naipe de copas.

Assim, classifica-se o evento A:{a carta ser do naipe de copas}, evento B: {a carta ser um rei} e $(A \cap B)$: {a carta ser um rei do naipe de copas}. As probabilidades serão escritas $P(A)$: probabilidade de se retirar uma carta de copas, $P(B|A)$: probabilidade de se retirar um rei, sabendo que a carta retirada é do naipe de copas e $P(A \cap B)$: probabilidade da carta ser um rei do naipe de copas. Desta forma, tem-se que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13} \tag{10}$$

Os exemplos apresentados descrevem duas situações distintas que envolvem a probabilidade condicional. Uma a respeito da retirada de objetos sem reposição, e a outra em que a condição inicial muda o espaço amostral. Os problemas de probabilidade surgem a todo momento, em diferentes áreas do conhecimento. Portanto, é necessário analisar cada caso, a fim de defini-lo ou não como um problema de probabilidade condicional.

2.3 Probabilidade Frequentista

Frequentemente, em aulas sobre o ensino de probabilidade, os alunos questionam os professores sobre alguns eventos que ocorrem na natureza ou até mesmo sobre jogos de azar. E a grande maioria possui uma ideia errada associada à probabilidade. Muitos alunos consideram probabilidades com apenas dois resultados possíveis, associando essa ideia sempre ao experimento do lançamento de uma moeda não-viciada. Muitos dizem que a probabilidade de chover ou não no dia seguinte é sempre de 50% para chuva e 50% para não chuva (este exemplo será tratado na seção 2.4, que abordará a probabilidade subjetiva), como se fosse cara ou coroa, em que realmente a probabilidade é de 50% para cada face da moeda.

Outro exemplo é a probabilidade de acertar ou não uma questão de múltipla escolha, seja ela com quantas alternativas for. É muito comum que a maioria das pessoas pense, também de maneira equivocada, que as chances são de 50% em acertar e 50% em errar a questão. Ou, ainda, a probabilidade de certo candidato às eleições presidenciais vencer ou não as eleições, mais uma vez creditando 50% ao fato de vencer e 50% ao fato de não vencer.

Todas essas ideias retratam que um evento pode ou não acontecer, mas não necessariamente em 50% para cada lado. Ou seja, depois de estabelecer um certo evento, é possível associar a ocorrência desse evento a um "sucesso" e a não ocorrência a um "fracasso". Essa concepção de sucesso e fracasso foi proposta pelo francês Bernoulli, em seus estudos sobre probabilidade. É trivial pensar que a ocorrência de um sucesso exclui a ocorrência de um fracasso. Pode-se dizer, portanto, que os eventos são mutuamente excludentes. E que a soma das probabilidades de fracasso e sucesso é de 100%.

Diante dessa concepção proposta por Bernoulli sobre sucesso e fracasso, suponha que se deseja calcular o número de vezes que a face "cara" de uma moeda caia voltada para cima, em cinco lançamentos dessa moeda. Então, associa-se o "sucesso" em sair a face cara. Se esse experimento for realizado cinco vezes, não é difícil pensar que por obra do acaso ocorresse nos cinco lançamentos a face cara. Por outro lado, pode não acontecer as 5 caras nos 5 lançamentos. Será que é possível utilizar essa experiência para se calcular a probabilidade proposta inicialmente?

Segundo Triola (2008) a probabilidade frequentista ou aproximação da probabilidade pela frequência relativa é definida quando se realiza, ou se observa um procedimento e conta-se o número de vezes que certo evento B ocorre. A partir daí baseia-se nestes resultados e estima-se $P(B)$ como:

$$P(B) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de vezes em que ocorreu B}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de vezes que o procedimento foi repetido}} \tag{11}$$

Mas, será que a Equação (11) é válida para calcular a probabilidade em questão? Será que está correto dizer que em cinco lançamentos, obtém-se cinco caras? Isto é, que a probabilidade de sair cara nos cinco lançamentos é de 100%? Provavelmente não. É por este motivo que Triola (2008) afirma que esta fórmula trata-se a princípio de uma estimativa, em vez de um valor exato. À medida que o número total de observações aumenta, as estimativas correspondentes tendem a se aproximar da verdadeira probabilidade. Essa probabilidade é estabelecida como um teorema comumente conhecido como Lei dos Grandes Números.

A Lei dos Grandes Números diz que as estimativas dadas pelas frequências relativas tendem a ficar melhores com mais observações. Essa lei reflete uma noção simples confirmada pelo senso comum: uma estimativa de probabilidade baseada em poucas tentativas pode estar bem afastada dos valores reais, mas, com um número grande de tentativas, a estimativa tende a ser mais precisa.

Segundo James (2015), outro método para conceituar probabilidade frequentista é o de definir $P(B)$ como o limite da frequência relativa da ocorrência de B em n repetições independentes do experimento, com n tendendo ao infinito.

$$P(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times \{\text{n}^{\text{o}} \text{ de ocorrências de B}\} \tag{12}$$

É importante dizer que as regras vistas na seção 2.2, sobre a probabilidade clássica, também são válidas para a probabilidade frequentista, pois as fórmulas 3, 11 e 12 tratam da razão entre o número de casos favoráveis sobre o número de casos totais. O que ocorre é que na probabilidade frequentista, a quantidade n de repetições é observada segundo a Lei dos Grandes Números.

2.4 Probabilidade Subjetiva

Tanto a probabilidade clássica como a probabilidade frequentista são passíveis de experimentos realizáveis repetidamente e sob as mesmas condições. Mas alguns fenômenos importantes não podem ser observados com estas mesmas características. Estes fenômenos podem ser identificados em algumas perguntas que envolvam probabilidades, tais como: Qual é a probabilidade de existir vida em outro planeta? Ou de chover amanhã? Qual é a expectativa de vida de um doente com câncer? Tais questões não podem ser resolvidas com a probabilidade clássica ou a probabilidade frequentista. No entanto, podem ser resolvidas, ou melhor, estimadas por uma interpretação subjetiva de probabilidade.

A probabilidade subjetiva deve-se ao fato de uma pessoa julgar o resultado de algum fenômeno, baseado em sua experiência ou acúmulo de conhecimento sobre tal processo. Triola (2008) define probabilidade subjetiva como sendo a probabilidade de ocorrer um evento específico, estimada com base no conhecimento de circunstâncias relevantes. Tais circunstâncias podem ser evidenciadas em várias situações.

Ao tentarem estimar a probabilidade de chover amanhã ou nos próximos dias, os meteorologistas se utilizam de seus ofícios de pesquisadores e especialistas em condições do tempo para desenvolver uma estimativa de probabilidade, fazendo desta forma previsões sobre o tempo com certa antecedência. Também utilizando-se da experiência e do conhecimento especializado, médicos podem estimar o tempo de vida de pacientes doentes de câncer.

Entretanto, assim como pode acontecer da previsão do tempo não ser exata, muitas vezes acontece também do paciente morrer bem antes da previsão dada pelo médico, ou até bem depois; mostrando, de forma clara, que tais previsões foram calculadas sob um ponto de vista subjetivo de probabilidade.

3 Probabilidade Geométrica e Resolução de Problemas

Primeiramente, será apresentado um breve histórico sobre a Probabilidade Geométrica, pois acredita-se que o contexto histórico é motivador no ensino da matemática, uma vez que, é neste momento que se apresentam os motivos pelos quais os matemáticos pensam e produzem a matemática. E em sala de aula podem ser feitas conexões de conceitos matemáticos da época em relação aos avanços atuais da ciência.

> Explorar conteúdos relativos aos temas números, álgebra, medidas, geometria e noções de estatística e probabilidade envolve diferentes formas do pensar em Matemática, diferentes contextos para as aplicações, bem como a existência de razões históricas que deram origem e importância a esses conhecimentos." (PCNEM, 2007, p.119).

Em seguida, esta seção irá tratar da definição, dos problemas clássicos, da estratégia de ensino e outras situações-problema envolvendo a probabilidade geométrica, contudo utilizando-se da metodologia da resolução de problemas.

3.1 Breve histórico da Probabilidade Geométrica

O termo probabilidade geométrica originou-se através de Georges Louis Leclerc, conhecido como Conde de Buffon (França, 1707-1788). Segundo Paterlini (2002), o Conde de Buffon dedicou-se principalmente à História Natural, também estudou Direito, Medicina e mostrou interesse pela Teoria dos Números, Cálculo Diferencial, Geometria e a Teoria das Probabilidades. Em uma de suas publicações, o 4º volume do "Suplemento à História Natural", publicado em 1777, das 35 seções existentes, 3 delas foram dedicadas ao Cálculo de Probabilidades. Em uma delas Buffon apresenta o seguinte problema: "Jogando uma agulha de comprimento a, sobre faixas desenhadas no chão de largura d, onde a é menor ou igual a d, qual é a probabilidade dessa agulha tocar ou cruzar uma das linhas?" De acordo com Moretti e Santos (2012), este problema ficou conhecido pelos matemáticos como o "Problema da agulha de Buffon", e depois em 1812, devido a uma generalização de Laplace, como o "O Problema de Buffon-Laplace".

A partir daí, novas aplicações na ciência começaram a aparecer.

> A experiência da agulha de Buffon constitui um dos casos singulares na ciência em que, a partir de uma simples ideia, se concretiza o desenvolvimento de uma nova abordagem de problemas matemáticos com importantes implicações no estudo de problemas físicos. Esta ideia, introduzida no séc. XVIII por Buffon e depois enriquecida com o forte contributo que Laplace lhe dedicou, permitiu o desenvolvimento de estudos de probabilidade geométrica. Estes estudos, inicialmente visando aplicações de índole matemática como a obtenção do número irracional π, criaram a base de uma poderosa ferramenta de simulação e de cálculo numérico, como o método de Monte Carlo, cuja aplicação a problemas matemáticos e fenômenos de natureza estocástica é hoje, de elevada importância. (RIBEIRO & COSTA, 2007)

Mas, o que Buffon não pôde ver é que a simplicidade de seu problema poderia ainda inspirar uma importante aplicação que foi desenvolvida por Allan M. Cormack e Godfrey N. Hounsfield, e que lhe rendeu o Prêmio Nobel de Medicina em 1979. Tal projeto consistia na construção de um aparelho de raio X, que aliado à computação, podia "jogar" feixes paralelos no corpo humano, de forma que fosse possível mensurar e converter em imagem tridimensional, partes ou objetos inacessíveis. Desta forma, estava criado o tomógrafo computadorizado e, posteriormente, o aparelho de ressonância magnética, de acordo com Tecnologia e Educação - DERP, (2010).

3.2 Definição de Probabilidade Geométrica

Vários problemas sobre probabilidade, no ensino básico da matemática, aparecem com o espaço amostral do experimento caracterizado como sendo finito. Estes problemas estão amparados pelos axiomas e propriedades apresentados anteriormente na seção 2.1. Mas, segundo Morgado e Carvalho (2013), o mesmo ferramental desenvolvido em espaços amostrais finitos pode ser aplicado também a situações em que o espaço amostral é infinito e, mesmo, não enumerável. "Quando selecionamos um ponto ao acaso em uma parte do plano, é razoável supor que a probabilidade do ponto selecionado pertencer a uma certa região seja proporcional à área dessa região." (MORGADO & CARVALHO, 2013, p.166).

Este conceito de Morgado e Carvalho, citado no parágrafo anterior, é apresentado de forma mais consistente por Wagner (1997), quando ele define a probabilidade geométrica em um de seus artigos publicado na Revista do Professor de Matemática (1997). Além da definição, Wagner argumenta que "No 2º grau, o ensino de probabilidades se restringe ao caso finito e os problemas são basicamente de contagem de casos favoráveis e casos possíveis." (WAGNER, 1997, p.28). O que reforça a aplicabilidade da probabilidade sob uma perspectiva geométrica. Pois, de acordo com estes autores, a probabilidade geométrica não se limita em simplesmente resolver problemas envolvendo a contagem de casos favoráveis e casos possíveis, mas envolve espaços infinitos de probabilidade.

Diante disso, a definição de probabilidade geométrica será apresentada a seguir, baseando-se no referido artigo de Eduardo Wagner (1997).

Definição 1: Em $\mathbb{R}$

Se P e Q são pontos de uma linha de extremos A e B (ver Figura 4), admitimos que a probabilidade de que um ponto da linha AB pertença à linha PQ (contida em AB) é proporcional ao comprimento de PQ e não depende da posição dos pontos P e Q sobre AB. Portanto, selecionado um ponto de AB, a probabilidade de que ele pertença a PQ será:

$$P = \frac{\text{Comprimento PQ}}{\text{Comprimento AB}} \tag{13}$$

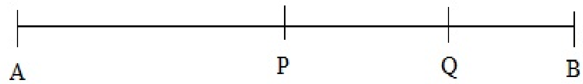

FIGURA 4: Representação no $\mathbb{R}$
(Adaptada de Wagner, 1997).

Definição 2: Em $\mathbb{R}^2$

Considere que uma região A do plano contém a região B do plano, como na Figura 5. É razoável admitir que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionando ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a B será:

$$P = \frac{\text{Área de B}}{\text{Área de A}} \tag{14}$$

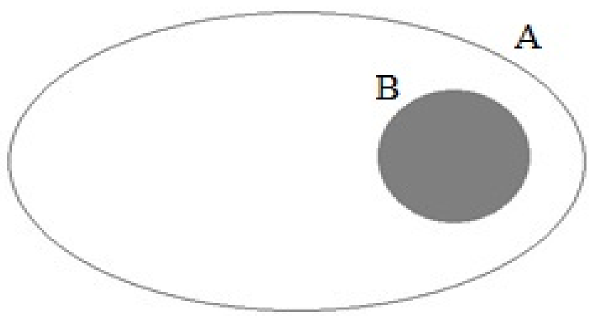

FIGURA 5: Representação no $\mathbb{R}^2$
(Adaptada de Wagner, 1997).

Definição 3: Em $\mathbb{R}^3$

Se o volume B de um sólido qualquer está contido no volume A, de um outro sólido, como na Figura 6, podemos admitir que a probabilidade de que um ponto do volume do corpo de A pertença ao volume de um ponto do corpo B é proporcional ao volume de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionando ao acaso um ponto de A, a probabilidade deste ponto pertencer a B, será:

$$P = \frac{\text{Volume de B}}{\text{Volume de A}} \tag{15}$$

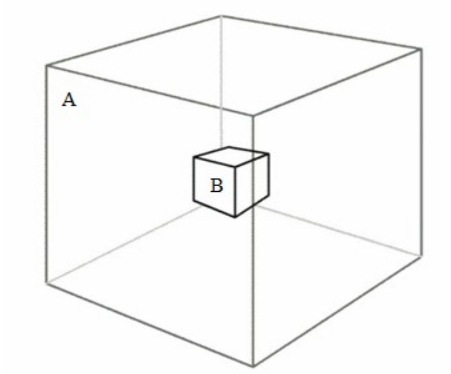

FIGURA 6: Representação no $\mathbb{R}^3$
(Fonte: Autor).

3.3 Problemas Clássicos da Probabilidade Geométrica

Os problemas clássicos apresentados nesta seção, foram retirados da Revista de Sociedade Brasileira de Matemática (1992 e 1997).

Problema 1: A agulha de Buffon (TUNALA, RPM - nº 20, 1992, p. 20 e 21)

Consideremos uma família de retas paralelas em $\mathbb{R}^2$, onde duas paralelas adjacentes arbitrárias distam de a. Tendo-se lançado, ao acaso, sobre o plano, uma agulha de comprimento l ($l \leq a$), determinar a probabilidade P de que a agulha intercepte uma das retas.

Solução:

Designaremos por x a distância do ponto médio da agulha à reta mais próxima, e por θ o ângulo formado entre a agulha e esta mesma reta, como na Figura 7.

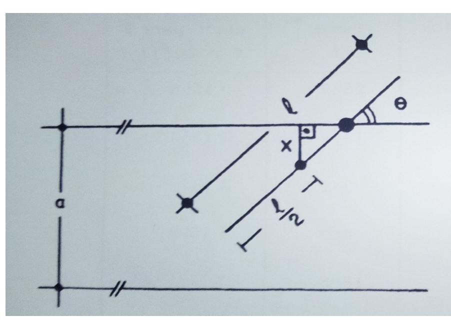

FIGURA 7: Retas paralelas e comprimento da agulha.
(Tunala, 1992).

A posição da agulha, em relação à reta mais próxima, é individualizada pelos valores de $x \in [0, \frac{a}{2}]$ e $\theta \in [0, \pi]$.

Ainda da Figura 7, deduz-se que a agulha interceptará a reta mais próxima se $x \leq \frac{l}{2} sen\theta$, ou seja, se o ponto (θ, π) que individualiza a reta mais próxima, pertencer à região hachurada g da Figura 8. Observe que a região $G = [0, \pi] \times [0, \frac{a}{2}]$.

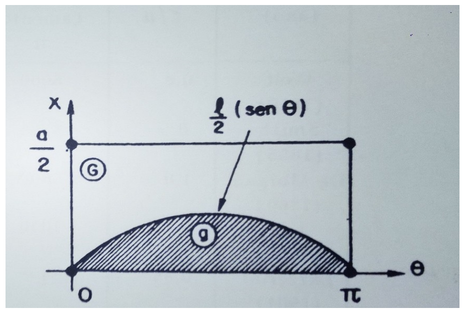

FIGURA 8: Região g e região G.
(Tunala, 1992).

Sendo assim,

$$P = \frac{\text{Área de g}}{\text{Área de G}} = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2} sen\theta d\theta}{\pi \frac{a}{2}} = \frac{2l}{\pi a} \tag{16}$$

Problema 2: O Paradoxo de Bertran (WAGNER, RPM nº34, 1997, p.32 e 33)

Escolhendo ao acaso uma corda de uma circunferência, qual é a probabilidade de que ela seja maior que o lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência?

Seja uma circunferência de raio 1. O lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência mede $\sqrt{3}$ e o menor arco que a corda determina mede 120º. Como se deseja buscar as cordas maiores que o lado do triângulo equilátero, então o seu comprimento x é tal que *lado* $<$ *comprimento* $\leq$ *diâmetro*, isto é, $\sqrt{3} < x \leq 2$ e o menor arco α que ela determina sobre a circunferência é tal que $120° < \alpha \leq 180°$.

1ª Solução:

Para desenhar uma corda AB maior que o lado do triângulo equilátero inscrito, assinale um ponto A sobre a circunferência. Considere, então, os pontos M e N de forma que A, M e N dividam a circunferência em três partes iguais, como na Figura 9.

Para que a corda AB subtenda um menor arco maior que 120°, o ponto B deve pertencer ao (menor) arco MN. A probabilidade de que um ponto da circunferência,

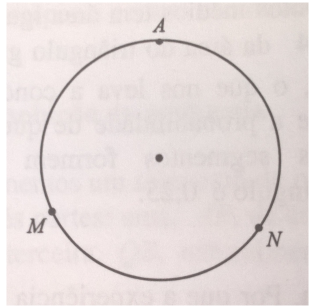

FIGURA 9: Circunferência dividida em 3 partes iguais.
(Wagner, 1997).

escolhido ao acaso, pertença ao arco MN é igual a $1/3$.

Logo, a probabilidade de que uma corda de uma circunferência seja maior que o lado do triângulo equilátero é igual a $1/3$.

2ª Solução:

Seja O o centro da circunferência e seja PQ um diâmetro. Vamos considerar todas as cordas perpendiculares a PQ. É claro que PQ contém todos os pontos médios dessas cordas. Sejam M e N os pontos médios dos raios OP e OQ. As cordas perpendiculares a PQ que passam por M e N tem comprimentos iguais a $\sqrt{3}$, como na Figura 10.

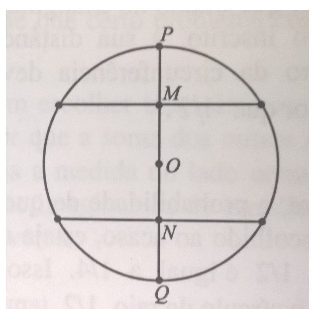

FIGURA 10: Cordas perpendiculares a PQ
(Wagner, 1997).

Portanto, todas as cordas perpendiculares a PQ cujos pontos médios estão no segmento MN possuem comprimentos maiores que o lado do triângulo equilátero inscrito.

Nessa forma de raciocínio, escolher uma corda significa escolher um ponto do diâmetro PQ, e é claro que a probabilidade de que um ponto de PQ, escolhido ao acaso, pertença ao segmento MN é igual a $1/2$.

Concluímos que a probabilidade de que uma corda de uma circunferência seja maior que o lado do triângulo equilátero inscrito é igual a $1/2$.

3ª Solução:

Seja O o centro da circunferência. Para cada ponto M no interior dessa circunferência, considere a corda AB que passa por M e é perpendicular a OM.

Nessa forma de raciocinar, desenhar uma corda significa escolher um ponto M, médio dessa corda, no interior da circunferência.

Se $OM = 1/2$, então $AB = \sqrt{3}$.

Observe que, se $OM < 1/2$, então AB é maior que $\sqrt{3}$ e que, se $OM > 1/2$, então AB é menor que $\sqrt{3}$.

Portanto, para que uma corda seja maior que o lado triângulo equilátero inscrito, a sua distância ao centro da circunferência deve ser menor que $1/2$, como na Figura 11.

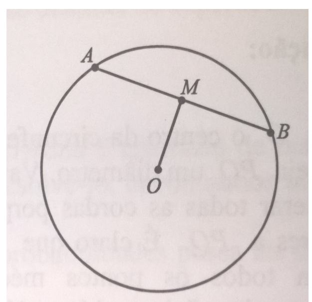

FIGURA 11: Corda maior que o lado do triângulo equilátero.
(Wagner, 1997).

Ora, a probabilidade de que um ponto interior à circunferência de raio 1, escolhido ao acaso, esteja no interior da circunferência concêntrica de raio $1/2$ é igual a $1/4$. Isso é claro, porque o círculo de raio 1 tem área π e o círculo de raio $1/2$ tem área $\pi/4$.

Segundo Wagner (1997), as três soluções estão corretas. Mas, o que ocorre é que a expressão "Escolhendo ao acaso uma corda de uma circunferência" não está bem definida, ou seja, não se sabe precisamente o que seja escolher uma corda de uma circunferência. Escolher uma corda significa escolher um procedimento de como desenhá-la, ou seja, o que vou fazer primeiro e o que farei depois.

3.4 Estratégia de Ensino: A Resolução de Problemas

A estratégia de ensino que será apresentada, está baseada no Método de Resolução de Problemas. Acredita-se que situações inesperadas provocam nosso cérebro no sentido de tentar elaborar uma saída. "A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios." (PCNEM, 2007, p.112).

As definições de probabilidade geométrica apresentadas na seção 3.2 são relativamente simples. Mas, o envolvimento do tema na resolução de problemas proporciona várias situações que podem resgatar outros conceitos da matemática e da geometria em geral, o que requer do aluno outras habilidades ao se deparar com situações que envolvam a definição de probabilidade.

Resolver problemas, principalmente os que envolvem situações reais, como os que foram apresentados na seção 3.3 e os que serão propostos na seção 3.5, proporciona aos alunos momentos que exigem raciocínio, estratégias de resolução e o acionamento de conteúdos aprendidos em anos anteriores. É muito importante que os alunos se familiarizem com o fato de terem que resolver problemas. Muitas vezes, os conteúdos de matemática se apresentam de maneira rotineira e com exemplos repetitivos, anulando a oportunidade dos alunos aplicarem a criatividade para construírem novas maneiras de pensar e interligar diferentes ferramentas da matemática. A esse respeito, os PCNs afirmam que

> (...) sabemos do fracasso dos alunos quando propomos a análise de situações onde devem ser relacionados dados ou fatos diversos ou quando é necessária a tomada de decisão entre diferentes e possíveis caminhos de resolução. Nesse caso, percebemos que, mesmo quando possuem informações e conceitos, os alunos não os mobilizam, não os combinam eficientemente, desanimam, esperam a explicação do professor, não se permitem tentar, errar, não confiam em suas próprias formas de pensar. Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido. (PCNEM, 2007, p.113)

Diante disso, a probabilidade geométrica será apresentada através do método da resolução de problemas. E afinal, em que consiste este método?

> Se a sequência "definições, propriedades, exercícios e problemas" era habitual do ensino da Matemática e com o agravante dos exercícios e dos problemas terem ênfase nos aspectos envolvendo regras, fórmulas e algoritmos, a proposta metodológica da resolução de problemas faz uma inversão significativa, qual seja, "problemas, definições, propriedades, exercícios e novos problemas". Propomos o problema como o centro ou o início do processo de ensinar e de aprender Matemática e isso pode ser decisivo para essa disciplina adquirir um sentido para os estudantes. (ROMANATTO, 2012, p.302).

Além de centralizar o problema como ponto de partida para construção do conhecimento matemático, é necessário que o professor estabeleça uma sequência de indagações, que induzam os alunos a pensar uma estratégia de resolução. E que, a partir daí, essa estratégia comece a fazer parte da prática do aluno sempre que se deparar com situações-problema.

Como o objetivo deste trabalho é apenas aplicar o método, ele será apresentado de forma direta e de maneira funcional. O método consiste num processo em que o professor faz indagações ao aluno de tal modo que o mesmo possa, por si só, desenvolver sua própria solução. Ou seja, o professor irá direcionar perguntas que levem ao aluno a solução do problema. É claro que alguns professores já possuem de maneira intuitiva ou por experiência, o hábito de indagar os alunos. Mas na verdade existe um método para isso.

De acordo com Polya (1978), o Método da Resolução de Problemas é composto por 4 fases; *compreensão, plano, execução* e *retrospecto.*

> (...) Primeiro temos que compreender o problema. Temos que perceber claramente o que é necessário. Segundo temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (POLYA, 1978, p. 3 e 4).

Compreensão do problema: É frustrante para um professor, perceber que os alunos estão desinteressados diante de um problema proposto. Em experiências em sala de aula, percebe-se que a geometria e a probabilidade não estão dentre os assuntos mais preferidos da maioria dos alunos. Ao se depararem com muitas restrições em relação à probabilidade, ou então com a quantidade de conceitos exigidos em resoluções de problemas geométricos, muitos acabam desistindo e se sentindo desestimulados.

Na maioria das vezes, tal desinteresse se deve ao fato do aluno não compreender o problema, ou então se sentir confuso com o que se pede. Como dar uma resposta por algo que você nem entendeu? “É uma tolice responder uma pergunta que não tenha sido compreendida. É triste trabalhar para um fim que não se deseja.” (POLYA, 1978, p.4).

Portanto esta primeira fase, é o momento de familiarização e do aperfeiçoamento da compreensão. Em que os alunos serão direcionados, através das indagações do método, a compreender melhor o que se pede.

Estabelecimento de um plano: Um plano só pode ser elaborado, se tivermos algum conhecimento sobre o assunto. Mesmo que esse conhecimento seja superficial. “Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos, que precisamos executar, para obter a incógnita.” (POLYA, 1978, p.5).

Conhecer um problema parecido, identificar uma figura que já se saiba calcular a área, separar uma figura desconhecida em outras que já se conhece a fórmula para o que se pede. Esboçar uma figura e identificar dados do problema na figura, pensar numa possibilidade para definir certo evento que conste no enunciado de problemas de probabilidade, identificar se os eventos são enumeráveis ou contínuos. Todos estes saberes podem ser identificados por perguntas adaptadas ao método descrito por Polya (1978), no caso da probabilidade geométrica.

Nesse exercício de desenvolver o plano, tanto o professor como o próprio aluno pode identificar e registrar, os pontos falhos em relação ao conhecimento prévio sobre os conceitos necessários ao problema. Ele pode ter percebido num problema de probabilidade envolvendo áreas, por exemplo, que ele já estudou os paralelogramos, mas estava confundindo paralelogramo e quadrilátero.

Execução do plano: Esta etapa do método, com certeza, é a mais difícil. É importante que o professor "induza" o aluno a estabelecer sua própria estratégia de resolução. Por isso as indagações se fazem importantes em todas as fases. O professor direciona, mas quem estabelece e executa deve ser o aluno.

> Se o aluno tiver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é de que o estudante, esqueça o seu plano, o que pode, facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio houver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. (POLYA, 1978, p.9).

Logo, discutir caminhos para a resolução, indagar e ouvir as respostas, pode nortear novas perguntas a serem feitas ao aluno, fazendo com que o estudante desenvolva uma resolução própria.

Retrospecto: Este momento, deve ser utilizado, após resolução do problema. É um momento enriquecedor. Mas pouco explorado, pois o estudante pode querer partir rapidamente para o próximo problema, perdendo a oportunidade de se fazer uma análise da resolução, e identificar conexões importantes que foram feitas nas fases anteriores.

> Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à resolução do problema, e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com o estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução. (POLYA, 1978, p.10)

O professor pode pedir por exemplo, que o aluno reescreva um conceito que, antes do problema, estava confuso. Ou ainda propor novas comparações com o tema abordado no problema. É interessante supor situações que envolvam algum tipo de lançamento aleatório, em que a resolução teórica pode ser verificada através de experimentos aleatórios realizados pelos próprios alunos, anotando e registrando valores, para, em seguida, confrontar com o resultado teórico do problema. O Problema da Agulha de Buffon seria um ótimo exemplo para esta prática.

Esta fase é, também, um momento de rever se algo está errado na resolução. Ou até mesmo melhorá-la. Pois é nesta prática de volta e aperfeiçoamento das resoluções que os alunos desenvolvem e melhoram suas capacidades em resolver problemas.

Serão estabelecidas então, na subseção 3.4.1, algumas perguntas que poderão ser usadas, nos problemas sobre a probabilidade geométrica, observando as 4 fases do método.

3.4.1 Definição das quatro fases da metodologia via resolução de problemas para este trabalho

Nesta subseção serão definidos questionamentos de acordo com a metodologia de resolução de problemas, específicos para este trabalho.

Fase 1: Compreensão do Problema
a. Qual a probabilidade que queremos calcular?
b. Qual seria o evento? Devemos calcular área do que?
c. Qual seria o espaço amostral?

Fase 2: Estabelecimento de um plano
a. Conhece algum problema parecido?
b. Podemos desenhar a figura? Ou o problema já apresenta algum desenho?
c. Qual ou quais regiões irão representar o evento ou o espaço amostral?
d. Você conhece alguma fórmula que calcule o comprimento, a área ou o volume dessas regiões?
e. Essas regiões representam figuras geométricas com alguma característica específica?

Fase 3: Execução do plano
a. Calcular o comprimento, a área ou o volume da região que representará o evento.
b. Calcular a região que representará o espaço amostral.
c. Utilizar a fórmula para se calcular a probabilidade geométrica.

Fase 4: Retrospectiva do problema
a. Podemos melhorar esta solução?
b. Quais recursos da geometria tivemos que recorrer na resolução do problema?
c. Existem outras maneiras de resolver o problema?

3.5 Exemplo de aplicação do cálculo de probabilidade geométrica via metodologia de resolução de problemas

Esta parte do trabalho é de fundamental importância, pois apresenta um material que pode ser explorado pelos professores que desejam utilizar a probabilidade geométrica como uma estratégia de ensino. Portanto serão propostos alguns exemplos de probabilidade geométrica via o método descrito na seção 3.4 e na subseção 3.4.1

PROBLEMA 1: O Encontro (TUNALA, RPM nº20, 1992, p.20)

Duas pessoas decidiram se encontrar em um determinado local entre 11 e 12 horas. Combinou-se, previamente, que a primeira pessoa a chegar esperará no máximo 15 minutos pela outra. Ache a probabilidade P de este encontro realizar-se neste intervalo, admitindo-se que os instantes de chegada (entre 11 e 12 horas) de cada uma das pessoas provêm do acaso.

Solução:

Fase 1: Compreensão do Problema

a) O que o problema pede?

A probabilidade do encontro se realizar entre 11h e 12h, uma vez que a 1ª pessoa a chegar, só ficará esperando 15 min.

Logo, P(E) = P(encontro acontecer entre 11h e 12h).

b) Qual seria o evento?

O momento de chegada entre as duas pessoas não pode ser maior que 15 min. Ou então elas não se encontram.

c) Qual seria o espaço amostral??

O intervalo [11,12], ou seja, 1h.

Fase 2: Estabelecimento de um plano

a) Conhece algum problema correlato?

Não.

b) É possível descrever a situação que representa o evento?

Sim. Sabemos que o horário de chegada dessas pessoas é de 11h às 12h. Logo, podemos estabelecer que o horário de chegada da 1ª pessoa será às $11 + x$ e o da 2ª pessoa às $11 + y$. E que a diferença entre os instantes de chegada não pode ser maior que 15 min ou 1/4 de hora.

c) Podemos representar o item b matematicamente?

Sabemos que a diferença de atraso entre as 2 pessoas não pode ser maior que 1/4 de hora,

ou seja podemos escrever $|y - x| \leq 1/4$, que corresponde a $\begin{cases} y \leq x + 1/4 \\ y \geq x - 1/4 \end{cases}$.

d) É possível montar um gráfico?

Podemos associar os instantes de chegada a pontos de 2 segmentos de comprimento unitário, em eixos ortogonais x e y em $\mathbb{R}^2$. Cada ponto (x,y) de $[0,1] \times [0,1]$.

Gráfico do item c: $\begin{cases} y \leq x + 1/4 \\ y \geq x - 1/4 \end{cases}$,

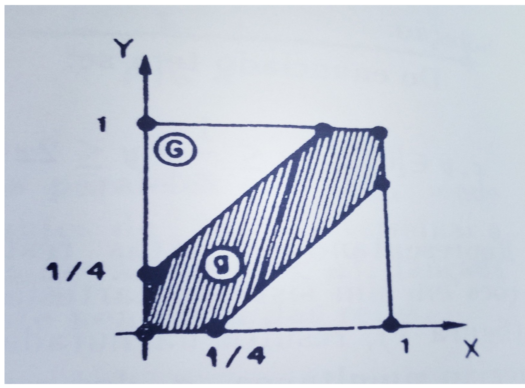

FIGURA 12: Região g e região G.
(Tunala, 1992).

e) Quais regiões irão representar o evento e o espaço amostral?
A região g representa a faixa em que os atrasos não ultrapassam 1/4 de hora, portanto é o evento. E o espaço amostral é representado pelo quadrado $[0,1] \times [0,1]$.

f) Conhece alguma maneira de calcular a área dessas regiões?
Sim, área do quadrado e área do triângulo.

Fase 3: Execução do plano

a) Calcular a região que representará o evento (g) e o espaço amostral (G).
Área de G = Área do quadrado de lado 1.
Área de g = (Área de G) - 2 $\cdot$ (Área do triângulo isósceles).

b) Utilizar a fórmula para calcular a probabilidade geométrica.

$$P(E) = \frac{\text{Área de g}}{\text{Área de G}} = \frac{1 - 2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4})}{1} = \frac{7}{16} \tag{17}$$

Fase 4: Retrospectiva do Problema

a) Quais recursos da geometria ou da matemática, tivemos que recorrer na resolução do problema?
Coordenadas cartesianas, área do quadrado, área do triângulo e inequação modular.

b) Essa solução pode ser melhorada?
Sim.
PROBLEMA 2: Acertando o alvo (Proposto pelo autor)

Em uma competição de tiro ao alvo, na modalidade de tiros – Papel 10 metros, os disparos ocorrem a uma distância de 10 metros do alvo. O alvo oficial, e aceito pela CBTE (Confederação Brasileira de Tiro Esportivo), ISSF (International Shooting Sport Federation, e CISM (Conseil International du Sport Militaire) deve possuir 17cm × 17cm. Este alvo tem impressão monocromática, com 10 escalas de pontuação de mesma largura. Os pontos de 1 a 6 situam-se nas escalas com coloração branca, e, de 7 a 10, no círculo preto, como na Figura 10.

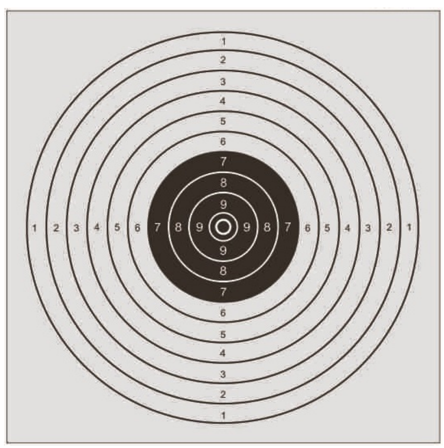

FIGURA 13: Alvo de (17×17)cm
(Fonte: https://tubaraocenter.com.br)

Suponha que um atirador iniciante, sem experiência, queira acertar a parte preta do alvo, isto é, deseja conseguir pelo menos 7 pontos. Como calcular a probabilidade dele conseguir a pontuação desejada?

Solução:

Fase 1: Compreensão do Problema

a) O que o problema pede?
Calcular a probabilidade do atirador conseguir pelo menos 7 pontos.

A partir daí tem-se que P(A) = P(Atirador conseguir pelo menos 7 pontos).

b) Qual é o evento que se deseja calcular?
Conseguir uma pontuação de pelo menos 7 pontos.

c) Qual é o espaço amostral?
Qualquer pontuação.

d) Quais são os dados?
O alvo possui (17×17) cm^2.
O alvo possui 10 escalas de pontuação de mesma largura.
A pontuação de 1 a 6 está nas escalas de cor branca e a de 7 a 10 nas escalas de cor preta.

Fase 2: Estabelecimento de um plano

a) Conhece algum problema correlato?
Não.

b) O problema apresenta alguma figura?
Sim.

c) Quais regiões representarão o evento e o espaço amostral?
O círculo de coloração preta, o evento. E o círculo completo, o espaço amostral.

d) Você conhece alguma fórmula que calcule a área do círculo?
Sim.

e) É possível estabelecer um plano com esses dados?
Nessa etapa, encontrou-se a ligação entre os dados e a incógnita do problema. Observou-se que é necessário calcular a probabilidade de conseguir pelo menos 7 pontos. Ou seja, deve-se calcular a probabilidade de acertar qualquer uma das escalas maiores ou iguais a 7. Como o diâmetro do alvo é de 17 cm, é necessário saber qual é a área compreendida entre 7 e 10 pontos. Como trata-se de um circunferência, é importante saber qual é o raio dessa circunferência. Pois se for calculado a área da circunferência central, é fácil saber o valor do o evento "acertar o alvo".

Fase 3: Execução do plano

a) Calcular as áreas que representam o evento e o espaço amostral.
b) Calcular a probabilidade de acertar o alvo.
Se o diâmetro do alvo é de 17 cm, e considerando que cada pontuação marcada possui a mesma distância, dividiremos os 17 cm por 20, obtendo assim a distância de cada pontuação.

Portanto $17 \div 20 = 0,85$ cm é a medida de cada distância. Agora é possível saber o diâmetro do círculo de coloração preta $= 0,85 \cdot 8 = 6,8$ cm. Sabemos que a área de um círculo é calculada por $A = \pi \cdot r^2$, a partir daí, teremos:

$$P(A) = \frac{\text{Área do círculo preto}}{\text{Área do círculo completo}} = \frac{\pi \cdot (3,4)^2}{\pi \cdot (8,5)^2} = \frac{11,56}{72,25} = 0,16 \qquad (18)$$

Fase 4: Retrospectiva do Problema

a) Rever se todos os argumentos e manipulações feitos estão corretos.
Verificado.

b) Quais conceitos tivemos que recorrer para resolver o problema?
Área do Círculo.

c) Poderíamos elaborar outras variáveis para o mesmo problema?
Sim. Como calcular outras probabilidades envolvendo pontuações distintas.

PROBLEMA 3: Quadrado contido no círculo (Adaptado da UFRJ)

Um ponto M é selecionado ao acaso no interior de um círculo G de raio 2 cm e centro O. Em seguida, constrói-se um quadrado, também centrado em O, que tem M como ponto médio de um de seus lados. Calcule a probabilidade de que o quadrado, assim construído, esteja inteiramente contido no círculo G.

Solução:

Fase 1: Compreensão do Problema

a) O que o problema pede?
Calcular a probabilidade de que o quadrado esteja totalmente construído no círculo G.
Logo, P(A) = P(de que o quadrado esteja inteiramente construído no círculo G).

b) Qual é o evento desejado?
Ainda não é possível saber.

c) Qual é o espaço amostral?
Ainda não é possível saber.

d) Quais são os dados?
O ponto M está dentro do Círculo G com centro em O e raio 2 cm.

O quadrado construído também tem centro em O e M é ponto médio de um de seus lados.

Fase 2: Estabelecimento de um Plano

a) Conhece algum problema correlato?
Não.

b) O problema apresenta alguma figura?
Não.

c) É possível desenhar uma figura?
Sim.

d) É possível estabelecer um plano com esses dados?
Sim, é necessário fazer um desenho representando a situação, e a partir do desenho, definir a região do evento e a região do espaço amostral.

Fase 3: Execução do plano

a) Fazer a figura representativa do problema.
Observa-se que o maior quadrado que pode ser inscrito na circunferência de raio 2 cm é um quadrado que tem sua diagonal medindo 4 cm.
Seja P, a circunferência inscrita no quadrado $ABCD$ e seja G a circunferência circunscrita no quadrado $ABCD$, como na Figura 14.

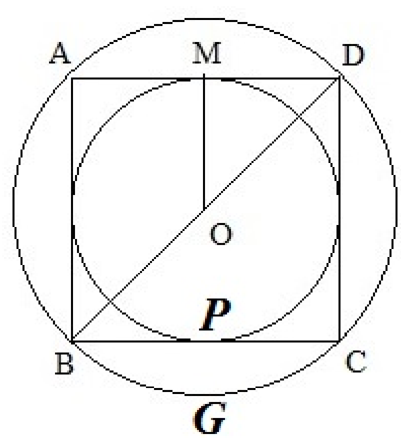

FIGURA 14: Circunferência G, Circunferência P e quadrado $ABCD$.
(Fonte: Autor)

Verifica-se que o ponto M pode estar em qualquer região de P. Logo, a área de P representa o evento da probabilidade a ser calculada, e a área de G, o espaço amostral.

Portanto é necessário descobrir os raios das circunferências P e G.

b) Calcular o raio da circunferência P.

Neste caso, o raio da circunferência P é igual a medida do segmento OM, que pode ser calculado observando da Figura 14, em que $OM = \dfrac{AB}{2}$.

Logo, no quadrado $ABCD$, tem-se:

$$\begin{aligned} Diagonal &= Lado\sqrt{2} \\ 4 &= AB\sqrt{2} \\ AB = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} &= \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ AB &= 2\sqrt{2} \end{aligned} \tag{19}$$

Ou seja,

$$\text{raio de } P = OM = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \tag{20}$$

c) Calcular o raio da circunferência G.

Na Figura 14, o raio de G, é a diagonal BD dividida por 2:

$$\text{raio de } G = OD = \frac{BD}{2} = \frac{4}{2} = 2 \tag{21}$$

d) Calcular a probabilidade.

Como a área de $P = \pi \cdot OM^2$ e a área de $G = \pi \cdot OD^2$, tem-se:

$$P(A) = \frac{\text{Área de P}}{\text{Área de G}} = \frac{\pi \cdot (\sqrt{2})^2}{\pi \cdot 2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{22}$$

Fase 4: Retrospectiva do Problema

a) Rever se todos os argumentos e manipulações feitos estão corretos.

Verificado.

b) Quais conceitos tivemos que recorrer para resolver o problema?

Área do Circunferência, diagonal do quadrado, conceito de circunferências concêntricas, ponto médio de um segmento.

PROBLEMA 4: A esfera e o cilindro (Proposto pelo autor)

Uma esfera de raio R, está inscrita num cilindro equilátero, como na Figura 15. Qual a probabilidade de selecionarmos um ponto do cilindro e este ponto se encontrar dentro da esfera?

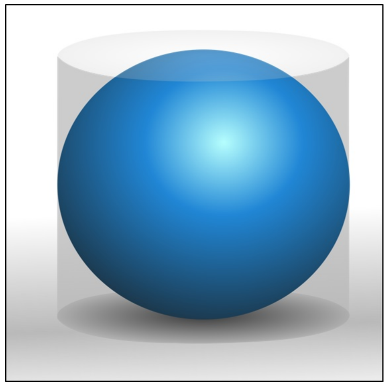

FIGURA 15: Esfera de raio R inscrita num Cilindro Reto.
(Fonte: http://commons.wikimedia.org)

Solução:

Fase 1: Compreensão do Problema

a) O que o problema pede?
A probabilidade de escolhermos um ponto qualquer do cilindro, e este ponto se encontrar dentro da esfera.
Fica definido então que P(A) = P(um ponto do cilindro se encontrar dentro da esfera).

b) Qual é o evento desejado?
Qualquer ponto que esteja dentro da esfera.

c) Qual é o espaço amostral?
Todos os pontos do cilindro.

d) Quais são os dados?
Uma esfera de raio R está inscrita num cilindro equilátero.

Fase 2: Elaboração de um Plano

a) Conhece algum problema correlato?
Não.

b) O problema apresenta alguma figura?
Sim.

c) O que é um cilindro equilátero?
A altura deste tipo de cilindro coincide com o diâmetro da circunferência que compõe a base, ou seja $h = 2R$.

d) O que significa dizer que uma esfera está inscrita em um cilindro equilátero?
Como na Figura 15, a esfera se encontra dentro do cilindro, de maneira que o raio da esfera coincide com o raio da base do cilindro.

e) Como calcular o evento?
Calculando o volume da esfera em função de R.

f) Como calcular o espaço amostral?
Calculando o volume do cilindro.

Fase 3: Execução do Plano

O evento desejado será dado pelo volume da esfera e o espaço amostral será dado pelo volume do cilindro, portanto:

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{23}$$

e

$$V_{\text{Cilindro}} = \pi R^2 \cdot h \tag{24}$$

Portanto,

$$P(A) = \frac{V_{\text{Esfera}}}{V_{\text{Cilindro}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\pi R^2 \cdot h} = \frac{4R}{3h} \tag{25}$$

Mas como o cilindro é equilátero, $h = 2R$, logo:

$$P(A) = \frac{4R}{3 \cdot 2R} = \frac{4R}{6R} = \frac{2}{3} \tag{26}$$

Fase 4: Retrospectiva do Problema

a) Rever se todas os argumentos e manipulações feitas estão corretas.
Verificado.

b) Quais conceitos tivemos que recorrer para resolver o problema?

Conceito de cilindro equilátero, volume da esfera volume do cilindro.

Propor o problema como ponto de partida da aprendizagem de qualquer conteúdo de matemática, faz com que o método se torne um instrumento recorrente, vencendo cada etapa do problema no tempo adequado e norteando o pensamento sobre cada fase. Apesar de inicialmente os alunos quererem logo uma resposta, esse procedimento deve ir além de uma simples resposta, pois outras resoluções podem e devem ser consideradas, assim como o conhecimento prévio do aluno sobre algum dado ou parte do problema. Desta forma o aluno poderá construir novos saberes a partir de conhecimentos já aprendidos.

Considerações Finais

Verificou-se que a probabilidade geométrica aliada ao método da resolução de problemas pode ser um instrumento valioso para o ensino básico da matemática. Os problemas clássicos apresentados na seção 3.3, podem ser adaptados ao método, assim como foi feito no problema do Encontro na seção 3.5. Durante a pesquisa bibliográfica, observou-se que a probabilidade geométrica pode ser aplicada também em outras fases de ensino, como os anos finais do ensino fundamental e na graduação de cursos da área de exatas.

Nos anos finais do ensino fundamental, a realização dos lançamentos aleatórios, como propõe o Problema da agulha, pode ser uma excelente oportunidade para os alunos vivenciarem a construção do conceito de probabilidade frequentista. Estimar o valor de π, através do problema da agulha e depois comparar os resultados através de medições do comprimento e do diâmetro da circunferência, transformando uma aula sobre probabilidade, numa aula extremamente rica.

Observa-se ainda que existem alguns trabalhos que aplicam a probabilidade geométrica utilizando ferramentas tais como simulações computacionais com a finalidade de estimar o valor de π, ou aplicações do Problema da Agulha em bacias hidrográficas. O fato da probabilidade geométrica abordar os espaços contínuos de probabilidade, abre um "leque" de atividades que poderiam ser aplicadas no cálculo de integrais, assim como aconteceu na resolução do problema da agulha, apresentado na seção 3.3. Isso nos motivou a pensar em estudar novas possibilidades para a Probabilidade Geométrica em termos de aplicações com o cálculo diferencial e integral.

No entanto, este trabalho limitou-se a desenvolver, à priori, a probabilidade geométrica como uma estratégia pedagógica para o ensino médio, em específico para o 3º ano. O que não impede que este trabalho sirva também para o 2º ano do ensino médio, uma vez que os PCNs já contemplam a probabilidade clássica.

Este trabalho é baseado na proposta curricular da SBM, e voltado para professores do ensino básico. Portanto, foi necessário e oportuno, apresentar os conceitos de probabilidade clássica, probabilidade frequentista e probabilidade subjetiva, para depois abordar as definições e problemas da probabilidade geométrica.

Os problemas clássicos apresentados podem servir de base para novos problemas. O método da resolução de problemas é uma ferramenta interessante para se ensinar a probabilidade geométrica, devido ao fato dos professores terem que retomar ou reconstruir os conceitos da geometria plana, espacial e analítica. A resolução de problemas busca desenvolver nos alunos a capacidade de pensar outras soluções. O Paradoxo de Bertran, problema apresentado na seção 3.3, apresenta três resoluções diferentes, e com três respostas diferentes, o que possibilita ao professor uma excelente oportunidade de adaptá-lo ao método da Resolução de Problemas e explorar a parte *retrospecto*, na qual se discute, por exemplo, se a resposta está ou não correta.

Considera-se que o tema em questão se apresenta como um uma ferramenta motivadora e um material para os professores do ensino básico. Uma vez que o objetivo do PROFMAT é: "(...) proporcionar formação matemática aprofundada relevante ao exercício da docência no Ensino Básico, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática". (Edital-PROFMAT, 2015)

Agradecimentos

Primeiramente ao Senhor Jesus, por sempre renovar as minhas esperanças e por me conceder a realização de mais esta conquista. Aos meus pais, Maria Helena e José Paulo, que são meus amores, pela entrega e disponibilidade em me ajudar sempre que preciso e de maneira incondicional. Aos meus irmãos Paulo e Flávia pela torcida e à minha irmã Cristina pelas constantes orações.

Agradeço também aos meus amigos, em especial a Camila Batista, por não me deixar desistir em momentos difíceis. À professora Gil, pela disponibilidade em tirar dúvidas importantes sobre a escrita do trabalho. Em especial a Professora Dra. Andréa, minha orientadora, por me proporcionar um tema motivador, pela disponibilidade em direcionar minhas ideias, pelas revisões do trabalho e por acreditar no meu potencial. Aos meus colegas de sala, que também se tornaram meus amigos. Aos professores do PROFMAT por contribuirem de forma significativa para o meu "amadurecimento" matemático.

E, enfim, a todos matemáticos que contribuíram de forma direta e indireta com este trabalho, pois entendem que a matemática é uma linguagem iluminada por Deus no pensamento dos homens para quantificar toda a criação Divina.

Referências

1 BARBETTA, Pedro A., REIS, Marcelo M. e BORNIA, Antônio Cezar. Estatística para cursos de Engenharia e Informática, 3ª ed. Editora Atlas S.A, São Paulo, 2010.

2 BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2007.

3 JAMES, Barry R. Probabilidade: Um curso em nível intermediário, 4ª.ed. Editora IMPA, Rio de Janeiro, 2015. (Coleção projeto Euclides)

4 LIMA, Elon L., CARVALHO, Paulo C. P., WAGNER, E. e MORGADO, Augusto C. A Matemática do Ensino Médio-Vol. 2, 5ª ed. Editora SBM, Rio de Janeiro, 2004. (Coleção do Professor de Matemática).

5 MORETTI, Alba Regina e SANTOS, Viviane das Graças dos. Probabilidade Geométrica: trabalhando com o problema das agulhas de buffon e algumas aplicações. Rev. de Ci. Exatas, RJ, EDUR, v. 27/31, n. 1, jan-jun, p. 58-61, 2012.

6 MORGADO, Augusto C. e CARVALHO, Paulo C. P. Matemática Discreta, 1ª ed. Editora SBM, Rio de Janeiro, 2014. (Coleção PROFMAT).

7 PATERLINI, Roberto R. O problema do jogo dos discos. Revista do Professor de Matemática – n. 48. Editora SBM, São Paulo, 2002.

8 POLYA, George. A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do Método matemático. Tradução e adaptação: Heytor Lisboa de Araújo. 1ª.ed. Editora: Interciência, Rio de Janeiro, 1978.

9 RIBEIRO, Álvaro S. e COSTA, Carlos A. de O. Contribuição do problema de Buffon-Laplace para a compreensão dos métodos de simulação. 4ª ed. Editora: LNEC, Lisboa, 2007.

10 ROMANATTO, Mauro C. Resolução de Problemas nas Aulas de Matemática. Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFscar, v.6, no. 1, p.299-311, mai 2012. Disponível em http://www.reveduc.ufscar.br Acesso em 28-05-2016.

11 SBM, Sociedade Brasileira de Matemática. Contribuição da SBM para discussão sobre currículo de Matemática. Editora SBM, 2014.

12 TRIOLA, Mário F. Introdução à Estatística, 10ª ed. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2008.

13 TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO - DERP. A Agulha de Buffon, Abril de 2010. Disponível em http://matem-deribeiraopreto.blogspot.com.br/2010/04/agulha-de-buffon.html. Acesso em 12-06-2016.

14 TUNALA, N. Determinação de Probabilidades por Métodos Geométricos. Revista do Professor de Matemática – n. 20. Editora SBM, São Paulo, 1992.

15 WAGNER, Eduardo. Probabilidade Geométrica. Revista do Professor de Matemática – n. 34. Editora SBM, São Paulo, 1997.

16 WOLFRAM MATH WORLD – The web's most extensive mathematics resource: Buffon-Laplace Needle Problem. Disponível em http://mathworld.wolfram.com/Buffon-LaplaceNeedleProblem.html. Acesso em 12-04-2016.