

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO**



**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL**



**PROFMAT**

**ANTONIO ALBERTO DE SOUSA DIAS**

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E GEOGEBRA:  
FERRAMENTAS PARA O ENSINO DA FÍSICA NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

**Uberaba-MG**

**2016**

**ANTONIO ALBERTO DE SOUSA DIAS**

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E GEOGEBRA:  
FERRAMENTAS PARA O ENSINO DA FÍSICA NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro - UFTM, Departamento de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Peixoto, Departamento de Matemática, ICENE - UFTM.

Co-orientadora: Profa. Dra. Vanessa de Paula Cintra, Departamento de Matemática, ICENE - UFTM.

**Uberaba-MG**

**2016**

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do  
Triângulo Mineiro**

D53c

Dias, Antonio Alberto de Sousa

Cálculo diferencial e integral e Geogebra: ferramentas para o ensino da física na educação básica / Antonio Alberto de Sousa Dias. -- 2016.

90 f. : il., fig., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016

Orientador: Prof. Dr. Rafael Peixoto

Coorientadora: Profa. Dra Vanessa de Paula Cintra

1. Física - Estudo e ensino. 2. Cálculo diferencial - Ensino auxiliado por computador. 3. Cálculo integral - Ensino auxiliado por computador. I. Peixoto, Rafael. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 530.1

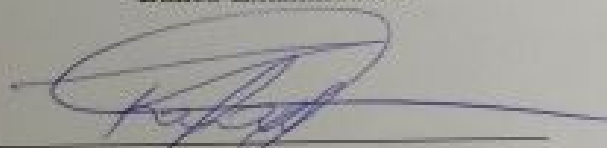
ANTONIO ALBERTO DE SOUSA DIAS

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL E GEOGEBRA:  
FERRAMENTAS PARA O ENSINO DA FÍSICA NA  
EDUCAÇÃO BÁSICA**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

22 de julho de 2016

Banca Examinadora



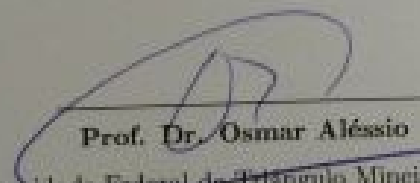
**Prof. Dr. Rafael Peixoto (Orientador)**

Universidade Federal do Triângulo Mineiro



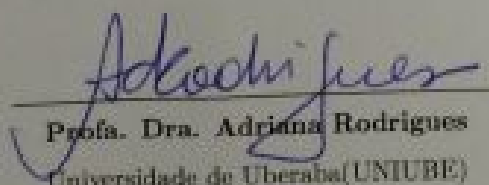
**Prof. Dra. Vanessa de Paula Cintra (Co-orientadora)**

Universidade Federal do Triângulo Mineiro



**Prof. Dr. Osmar Aléssio**

Universidade Federal do Triângulo Mineiro(UFTM)



**Prof. Dra. Adriana Rodrigues**

Universidade de Uberaba(UNIUBE)

# Agradecimentos

A todos que direta ou indiretamente contribuíram à elaboração desse trabalho, especialmente,

Ao Prof. Dr. Rafael Peixoto, pela paciência, aulas e orientação.

À Profa. Dra. Vanessa de Paula Cintra, pelas orientações.

Aos Professores da UFTM neste curso de mestrado – Dr. Flávio Molina da Silva, Dr. Heron Martins Félix, Me. Marcelo Ferreira, Dr. Osmar Aléssio, Dr. Bruno Nunes de Souza, Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni, Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza, Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martines, Dr. José Gustavo Coelho, Dr. Nelson Fernando Inforzato, Dr. Wellington Barros e Barbosa, Dr. Tadeu Alves Senne, pelas aulas, indicações de leitura, discussões e orientações que tanto me enriqueceram.

Aos colegas do PROFMAT/2014 - UFTM que no cumprimento dos créditos obrigatórios e optativos pudemos compartilhar o prazer de estarmos juntos, pouco a pouco descobrindo em cada um suas qualidades.

Especialmente, quero agradecer a meus pais, Antônio (*in memoriam*) e Isolda (*in memoriam* - primeira professora), pelo exemplo de integridade e amor dedicado e que não pouparam esforços, mesmo com as privações da vida na zona rural, em me educar, oportunizando condições de vida mais digna; a minhas filhas – Luísa e Marília – pela compreensão das ausências.

Aos colegas-amigos de trabalho do Colégio Marista Diocesano, da Escola Estadual Profa Corina de Oliveira, Colégio Nossa Senhora das Graças e do Instituto Federal do Triângulo Mineiro (IFTM) - Campus Paracatu, pela amizade e profissionalismo com que se dedicam à profissão docente e que flexibilizaram horários para que pudesse participar deste programa de mestrado.

*”Não há nada que seja maior evidência de insanidade do que fazer a mesma coisa dia após dia e esperar resultados diferentes” (EINSTEIN, A.).*

# Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de abordagem do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Básico de maneira a auxiliar na aprendizagem da Física. Como ferramenta utilizamos o software de Geometria Dinâmica, o Geogebra, que possibilita por meio de construção e análise gráfica, trabalhar concepções intuitivas de velocidade, aceleração média e instantânea, formalizar conceitos de taxa de variação média e variação instantânea de funções, entre outros. A abordagem sugerida auxilia na compreensão de fenômenos físicos, pois é por meio do Cálculo Diferencial e Integral que definimos as grandezas envolvidas na Cinemática.

**Palavras chave:** Física; Geogebra; Cálculo Diferencial e Integral; Ensino Básico.

# Abstract

The objective of this paper is to present a proposed approach of Differential and Integral Calculus in Basic Education to assist in learning of Physics. As a tool we use the software of Dynamic Geometry, The Geogebra, enabling through construction and graphical analysis, working intuitive concepts of speed, average and instantaneous acceleration, to formalize concepts of average rate of change and instantaneous variation of functions, among others. The suggested approach aids in the understanding of physical phenomena, because it is through the Differential and Integral Calculus that we define the quantities involved in the Kinematics.

**Keywords:** Physics; Geogebra; Differential and Integral Calculus; Basic Education.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>O Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Básico</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Introdução ao Cálculo</b>	<b>8</b>
3.1	Noções sobre Limites . . . . .	8
3.1.1	Propriedades operatórias dos limites . . . . .	21
3.1.2	Limite Trigonométrico Fundamental . . . . .	22
3.1.3	Limite Exponencial Fundamental . . . . .	24
3.2	Derivadas . . . . .	26
3.2.1	Interpretação Geométrica da derivada . . . . .	28
3.2.2	Propriedades Operatórias das Derivadas . . . . .	31
3.2.3	Função constante . . . . .	31
3.2.4	Função Potência . . . . .	32
3.2.5	Função Polinomial . . . . .	32
3.2.6	Função Trigonométrica . . . . .	33
3.2.7	Derivação da Função Composta . . . . .	36
3.2.8	Crescimento e decrescimento das Funções . . . . .	38
3.2.9	Máximos e Mínimos . . . . .	38
3.3	Integral . . . . .	43
3.3.1	Integral Definida e Integral Indefinida . . . . .	45
3.3.2	Propriedades da Integral . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Aplicação à Física</b>	<b>50</b>
4.1	Movimento Uniforme (MU) . . . . .	50
4.1.1	Características . . . . .	50
4.1.2	Função Horária . . . . .	51
4.1.3	Representação Gráfica . . . . .	51
4.2	Movimento Uniformemente Variado (MUV) . . . . .	56
4.2.1	Características . . . . .	56
4.2.2	Funções horárias da velocidade e da posição . . . . .	57
4.2.3	Representação gráfica . . . . .	59
4.2.4	Movimentos verticais no vácuo . . . . .	61

4.3	Movimento Harmônico Simples(MHS)	67
4.3.1	Características	67
4.3.2	Funções Horárias	69
4.3.3	Representação Gráfica	70
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>76</b>
	Referências	78

# Lista de Figuras

3.1	Gráfico de $f(x) = 2x + 1$ . . . . .	10
3.2	Animação sobre o gráfico de $f(x) = 2x + 1$ . . . . .	11
3.3	Gráfico de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ . . . . .	13
3.4	Animação sobre o gráfico de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ . . . . .	14
3.5	Função definida por partes . . . . .	16
3.6	Animação do gráfico de função definida por partes . . . . .	17
3.7	Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ . . . . .	19
3.8	Animação sobre o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ . . . . .	21
3.9	Gráfico de $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ . . . . .	23
3.10	Animação do Gráfico de $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ . . . . .	24
3.11	Gráfico de $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . . . . .	25
3.12	Animação sobre o gráfico de $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . . . . .	26
3.13	Interpretação geométrica de $f'(x_0)$ . . . . .	29
3.14	Deslocamento da reta secante . . . . .	30
3.15	Função $f(x) = x^2$ e sua derivada $f'(x) = 2x$ . . . . .	33
3.16	Função $f'(x) = \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x}$ e $f'(x) = \cos x$ . . . . .	34
3.17	Função $f'(x) = \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x}$ e $f'(x) = \cos x$ . . . . .	35
3.18	Função $f'(x) = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$ e $f'(x) = -\text{sen } x$ . . . . .	36
3.19	Crescimento e decrescimento das funções . . . . .	39
3.20	Máximo e mínimo locais . . . . .	40
3.21	$M$ é ponto de máximo no intervalo $[X_B, X_A]$ , mas não no intervalo $] - \infty, \infty[$	41
3.22	Função $f(x) = x^3$ . . . . .	42
3.23	Função $f(x) = x^3 - x$ . Máximo e Mínimo Local . . . . .	43
3.24	Função $f(x) =  x $ . . . . .	44

3.25	Integral indefinida . . . . .	45
3.26	Animação da Integral Indefinida . . . . .	46
3.27	$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ por falta . . . . .	47
3.28	$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ por excesso . . . . .	48
4.1	Função $S(t) = S_0 + v.t$ . . . . .	52
4.2	Animação da Função $S(t) = S_0 + v.t$ . . . . .	53
4.3	$v(t) = \frac{dS(t)}{dt} = cte$ . . . . .	54
4.4	Função $a = cte = \frac{dv(t)}{dt} = 0$ . . . . .	55
4.5	Encontro de dois móveis . . . . .	56
4.6	Função $S = s_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$ . . . . .	59
4.7	Função $V = f(t) = V_0 + at = \frac{dS(t)}{dt}$ . . . . .	60
4.8	Função $a = cte = \frac{dv(t)}{dt}$ . . . . .	61
4.9	Função $S = f(t)$ . . . . .	63
4.10	Função $V = V_0 + gt$ . . . . .	64
4.11	Função $g = cte = 10 \frac{m}{s^2}$ . . . . .	65
4.12	Lançamento Horizontal . . . . .	66
4.13	Tempo de queda . . . . .	67
4.14	MCU e MHS . . . . .	69
4.15	Função $x = 2.\cos(\frac{\pi}{2}.t)$ . . . . .	72
4.16	Função $v = -\pi.\sen(\frac{\pi}{2}.t)$ . . . . .	73
4.17	Função $a = \frac{\omega^2}{2}.\cos(\frac{\pi}{2}.t)$ . . . . .	74
4.18	Sistema massa-mola . . . . .	75

# Lista de Tabelas

3.1	Valores de $f(x) = 2x + 1$ quando $x$ se aproxima de zero. . . . .	9
3.2	Valores de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ quando $x$ se aproxima de 1. . . . .	12
3.3	Valores de $f(x)$ quando $x$ se aproxima de 1 . . . . .	15
3.4	Valores de $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ quando $x$ se aproxima de 1. . . . .	18
3.5	Valores de $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ quando $x$ se aproxima de $-\infty$ (à esquerda) e de $+\infty$ (à direita) . . . . .	20
4.1	MCU e MHS . . . . .	70

# Capítulo 1

## Introdução

Nasci em 1959 na cidade de Uberaba-MG. Morávamos, eu, meus pais e irmãos numa fazenda no município de Veríssimo-MG, onde aos seis anos de idade, ingressei numa escola, também na zona rural e cursei as três primeiras séries da Educação Infantil (atualmente Educação Fundamental I) em classes multisseriadas em que uma única professora ministrava aulas de todas as disciplinas. A professora orientava os alunos de uma série e, enquanto desenvolviam as atividades propostas, orientava os da série seguinte. Assim por diante, até que os últimos fossem orientados. Evidentemente, esse processo dificultava o acompanhamento dos alunos, inviabilizando o diagnóstico de sua situação para posteriores intervenções. O ensino da Matemática, devido a sua particularidade, era o mais prejudicado e apenas uma minoria dos alunos conseguia executar as tarefas e se destacar.

As séries seguintes e o Ensino Ginásial (Ensino Fundamental II), cursei em escolas urbanas, sendo uma classe por série e as disciplinas ministradas por mais de um professor. Mesmo com a constituição diferente, considero que a dificuldade na aprendizagem da Matemática persistia, atingindo grande parte dos alunos.

Durante a minha trajetória acadêmica, percebi que na segunda etapa da Educação Básica, curso colegial (Ensino Médio), a dificuldade em aprender Matemática se agravou, estendendo a outras disciplinas já que fenômenos físicos, químicos e biológicos que antes eram estudados enfatizando apenas os seus aspectos conceituais, para uma melhor compreensão, passavam a ser analisados com a preocupação em mensurar as grandezas envolvidas. Nessa direção, as dificuldades com o aprendizado da Matemática se espalhava por outras áreas do conhecimento.

Percebi que essa dificuldade que perpassa desde o Ensino Fundamental foi evidenciada quando apenas, uma pequena minoria dos alunos, canalizava para os vestibulares de exatas. Fiz parte dessa minoria e ingressei na Faculdade de Engenharia Civil.

Na Universidade, até mesmo alunos que tinham interesse em estudar exatas e que foram aprovados no processo de seleção, apresentavam muitas dificuldades de aprendizagem da Matemática. Essas dificuldades são evidenciadas em disciplinas como Cálculo Vetorial e Geometria Analítica, Álgebra Linear e, principalmente, Cálculo Diferencial e Integral (CDI).

Como a Matemática faz-se presente em outras diferentes áreas do conhecimento, percebi que essa dificuldade se refletia também em disciplinas como Física e Química e, consequen-

temente, naquelas específicas da engenharia, área do conhecimento onde se aplica a Química e, também a Física.

Durante a graduação, tínhamos como estratégia, visando suprir essas dificuldades de aprendizagem, formar grupos de estudo em que uns conseguiam ajudar os outros.

Ainda cursando graduação em Engenharia, comecei a trabalhar como professor de Matemática da Educação Básica, oportunidade de tentar contribuir com a aprendizagem da difícil disciplina, mas também como uma fonte de renda para reduzir os encargos da família, buscando a independência financeira.

Com o passar do tempo, como as escolas em que trabalhava tinham dificuldade em contratar professores de Física, para colaborar, comecei a ministrar também essa disciplina, dessa maneira, gradualmente fui sendo transferido para a mesma, podendo ver por outro ângulo, os efeitos das referidas dificuldades de aprendizagem.

Envolvido com o ensino de Física, cursei Licenciatura em Física e, posteriormente, fui contratado como professor temporário em uma Universidade Pública para ministrar aulas de Matemática e Física nos cursos de Licenciatura em Física, Matemática, Química e Biologia. A partir dessa experiência, agora com a visão de professor do Ensino Superior, pude constatar que as dificuldades de aprendizagem da Matemática persistem mesmo na Universidade e que a deficiência nesta disciplina dificulta a aprendizagem de outras ciências.

Percebemos, por meio de relatos de ex-alunos da Educação Básica que ingressam nas Universidades nos cursos de exatas, que a utilização do CDI auxilia na compreensão da Física. Ou seja, dificuldades encontradas frequentemente na compreensão de fenômenos físicos no Ensino Médio deixam de existir ou se tornam mais simples quando são abordados nessa perspectiva.

Nessa direção, destacamos a importância do ensino do CDI na Educação Básica, a partir de abordagens que viabilizem a aprendizagem e, de tal modo, possa contribuir para atenuar dificuldades. Assim, neste trabalho, procuramos utilizar o CDI na tentativa de melhor compreensão de fenômenos da Cinemática, particularmente, de alguns movimentos de corpos, abordados na Física da Educação Básica.

Frequentemente nos deparamos com situações em que os alunos, mesmo após muito estudo, confundem os conceitos das grandezas físicas. Por exemplo, quando se estuda a queda dos corpos em pequenas altitudes, onde a aceleração da gravidade pode ser considerada constante. Mesmo que se proponha situações em que a resistência do ar possa ser desprezada, é comum alguns alunos afirmarem que nesse movimento os corpos caem cada vez com maior aceleração, claramente confundindo os conceitos de velocidade e aceleração.

Como entender que, nesses movimentos, um corpo que cai a partir do repouso de uma altura de 20 m atinge o solo com velocidade de  $20 \frac{m}{s}$ , após 2 s de queda, enquanto outro que cai da altura de 5 m, também a partir do repouso atinge o solo após 1 s, com velocidade de  $10 \frac{m}{s}$ ? Na queda livre, enquanto a velocidade aumenta linearmente com o tempo, o espaço percorrido aumenta com o quadrado do tempo decorrido.

A ideia de velocidade como medida da rapidez com que varia o espaço percorrido em função do tempo e a aceleração como medida da rapidez com que varia a velocidade de um corpo em função do tempo, certamente contribui para a compreensão e distinção desses

conceitos e, destacamos o uso do CDI, onde a definição de limites e derivadas são fundamentais. Isso vai de encontro com o que Spina (2002) propõe, que é utilizar as ideias do CDI como elemento facilitador da compreensão e unificador dos atuais conteúdos desenvolvidos no Ensino Básico.

O CDI também contribui na determinação do espaço percorrido por um móvel quando sua velocidade sofre ou não variações, já que os alunos frequentemente afirmam erroneamente que um corpo que teve sua velocidade alterada de  $0$  a  $10 \frac{m}{s}$  em  $1$  s percorreu  $10$  m. O mesmo ocorre com a variação de velocidade em movimentos com aceleração constante ou não.

Há movimentos onde a aceleração não é constante, como quando um corpo apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito comprime inicialmente uma mola contra uma parede e é liberado. A mola impulsiona o corpo que adquire um movimento retilíneo com uma aceleração que decresce linearmente e a velocidade aumenta segundo uma função quadrática com a diminuição da deformação da mola, até o instante em que o corpo se desprende da mesma. Se o corpo for preso à mola e esta presa à parede, após ser liberado, o corpo passa a oscilar num movimento retilíneo de vai e vem (MHS - Movimento Harmônico Simples), em que a aceleração varia constantemente de intensidade e, periodicamente de sentido. Nesse caso, a posição, a velocidade e a aceleração dos movimentos, são descritos em função do tempo, por funções trigonométricas, o que aumenta significativamente as dificuldades de compreensão do conteúdo.

Nos dois casos, a posição, a velocidade e a aceleração dos movimentos, são descritos em função do tempo, por funções trigonométricas, o que aumenta significativamente as dificuldades e confusões dos alunos.

Compreendemos que no Ensino Básico, a falta de pré-requisitos da Matemática gera desinteresse por parte dos alunos, o que dificulta a aprendizagem sobre os fenômenos físicos. Nessa direção trazemos uma proposta de abordagem que utiliza o CDI no Ensino Básico de maneira a auxiliar na aprendizagem da Física.

Minha formação acadêmica e experiência enquanto professor e por estar cursando o mestrado profissional em Matemática, as discussões e reflexões ocorridas nessas instâncias, motivou e motiva minha atual produção focada no ensino de Física e Matemática, visando principalmente compreender as dificuldades de aprendizagem da Matemática e o que a deficiência nesta disciplina acarreta na aprendizagem de outras ciências, em especial, a Física.

Apresentamos neste trabalho uma proposta de abordagem do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Básico de maneira a auxiliar na aprendizagem da Física. Como ferramenta utilizamos o software de Geometria Dinâmica, o Geogebra, que possibilita por meio de construção e análise gráfica, trabalhar concepções intuitivas de velocidade e aceleração média e instantânea para formalizar conceitos de taxa de variação média e variação instantânea de funções. A abordagem sugerida auxilia na compreensão de fenômenos físicos, pois é por meio do CDI que definimos as grandezas envolvidas na Cinemática.



## Capítulo 2

# O Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Básico

Ao observarmos a nossa volta, percebemos que nada é estático, estamos em constante movimento e cada minuto vivido é diferente do anterior. Assim, encontramos muita aplicabilidade do cálculo em nossas vidas, experiências, entre outros.

A Matemática apresenta muitos campos de investigação e de aplicações práticas, que permitem simular situações reais, prever, generalizar e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio matemático, em todas as áreas do saber, dentre elas a Física (SPINA;2002).

Sabemos que na proposta curricular para o Ensino da Matemática publicada em 1992 o CDI desaparece da proposta curricular. Contudo, “apesar da não obrigatoriedade curricular, alguns livros continuaram e continuam mantendo noções de cálculo como um capítulo destinado ao ensino no último ano” (SPINA;2002).

Para Spina (2002), a introdução de conceitos do CDI no Ensino Médio justifica-se se atender a dois objetivos interligados:

- a) motivar o estudo de conteúdos “clássicos” do Ensino médio tais como: funções, geometria analítica, logaritmos, trigonometria e outros; e b) mostrar que a Matemática oferece ferramentas para solucionar problemas concretos (p.81).

Nessa direção, destacamos a importância do ensino do CDI na Educação Básica, a partir de abordagens que viabilize a aprendizagem e assim, possa contribuir para atenuar as dificuldades de aprendizagem.

Neste trabalho procuramos utilizar o CDI na tentativa de melhor compreensão de fenômenos da Cinemática, particularmente, de alguns movimentos de corpos, abordados na Física da Educação Básica.

Compreendemos que na Educação Básica, particularmente no Ensino Médio, a falta de pré-requisitos básicos de Matemática acarreta na dificuldade de aprendizagem do estudo de

fenômenos físicos, assim, conseqüentemente, o desinteresse de alguns alunos.

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), o Ensino Médio, pode ser considerado a "etapa final da educação básica" (Art.36) e concorre para a formação da identidade do aluno.

Durante o Ensino Médio, a aprendizagem das Ciências da Natureza, diferentemente do que é desenvolvido no Ensino Fundamental, deve permitir a obtenção e construção de formas de pensamento mais abstratas e ressignificadas, em que a Matemática tem um papel fundamental, permitindo compreender e utilizar conhecimentos científicos, seja para explicar o funcionamento do mundo ou para avaliar, planejar e executar ações de com intervenções na realidade (LDB).

Santos (2006) afirma que de acordo com o proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), o currículo do Ensino Médio deve permitir aos alunos o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, de forma multidisciplinar, preparando-o para a vida e também auxiliando na continuação dos estudos em níveis superiores. Segundo esse autor, parte significativa dos alunos conclui a Educação Básica com dificuldade para realizar operações com números reais, interpretar tabelas e gráficos e descrever fenômenos físicos que em geral necessitam da Matemática básica para sua melhor compreensão. Os resultados das avaliações institucionais do Governo federal, como Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica (SAEB) e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) comprovam isso.

Acreditamos que uma das conseqüências imediatas da dificuldade com a Matemática básica é que geralmente os alunos não procuram cursos de nível superior na área de exatas. Os que optam por esses cursos apresentam uma grande defasagem, o que tem forçado as Universidades a oferecerem disciplinas de nivelamento, tais como Pré-Cálculo. Nesse contexto, buscamos investigar se o estudo do Cálculo Diferencial e Integral na Educação Básica pode auxiliar o ensino da Física.

Consideramos que, para que o aluno possa compreender esses procedimentos estudados em Cálculo, ele deve ter alguns conhecimentos básicos de Matemática. Nessa direção, segundo Lopes (1999),

O diagnóstico sistemático de modelos permite prever, calcular, aperfeiçoar, medir, analisar o desempenho de experiências, além de estimar, proceder a análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico e humanístico dos diversos países (p. 913).

Sobre a apresentação do CDI no Ensino Médio (EM), Ávila (2006) em um artigo publicado na RPM (Revista do Professor de Matemática) sugere que o conteúdo de Derivada seja apresentado de forma simples e modesta. O estudo das funções pode ser executado integrado à geometria analítica, limites e derivadas. Segundo Ávila, atualmente esses conceitos são estudados separadamente, funções na primeira série do EM e os demais conteúdos citados, na

terceira série do EM.

Ávila (2006) recomenda que ao discutir gráficos no Ensino Fundamental (EF), o professor introduza o estudo sobre a equação da reta, particularmente a que passa pela origem do plano cartesiano, associada à ideia de proporcionalidade entre grandezas e regra de três, trabalhando coeficiente angular e declividade positiva e negativa.

A partir dessa ideia, na primeira série do EM, Ávila (2006) argumenta que apresentar a equação da reta na forma tradicional se torna mais fácil, apenas mostrando como se translada o gráfico ao longo do eixo  $y$ . Acréscimos e decréscimos também podem ser trabalhados, e o coeficiente angular como sendo a razão  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , dando um primeiro passo em direção ao estudo de Limite e Derivada.

Diante do panorama apresentado, destacamos que a inserção do CDI no Ensino Básico deve ser apresentado por meio de uma abordagem adequada para que a compreensão seja relativamente simples e auxilie na aprendizagem de diversos conceitos matemáticos e físicos.

A utilização do Geogebra como uma ferramenta para o ensino do Cálculo Diferencial Integral e de Fenômenos Físicos, se traduz diante do cenário mundial que de acordo com Penteado (2004) vivemos em uma sociedade de bases tecnológicas, com mudanças contínuas, em ritmo acelerado e não há como ignorar as alterações que as Tecnologias da Informação provocam na forma como as pessoas veem e apreendem o mundo. Esse ritmo acelerado com que a informática imprime à vida fora da escola caminha para a escola, ajustando e transformando esse cenário mundo (PENTEADO, 2004).

Consideramos o Geogebra uma das possíveis ferramentas tecnológicas para o ensino e a aprendizagem do CDI aplicado a fenômenos físicos. Por meio dessa ferramenta, é possível construir e analisar gráficos, trabalhar concepções intuitivas de velocidade, acelerações médias e instantâneas, formalizar conceitos de taxa de variação média, variação instantânea de funções de maneira geral.

A seguir, apresentaremos uma fundamentação teórica sobre Limite, Derivada e Integral, intermediada por sugestões de atividades que o professor da Educação Básica pode apresentar e aplicar esses conceitos. Essas atividades são direcionadas para aplicações nos conteúdos da Física (cinemática) selecionados, caracterizando a interdisciplinaridade. Particularmente, será trabalhado o Movimento Uniforme (MU), o Movimento Uniformemente Variado (MUV) e o Movimento Harmônico Simples (MHS).

Concepções intuitivas de velocidade e aceleração médias e instantâneas servem para formalizar conceitos de taxa de variação média e variação instantânea de funções de uma forma geral.

A derivação de funções constantes e polinomiais de primeiro e segundo grau (simples

e de fácil compreensão) será utilizada na descrição e análise dos movimentos uniforme e uniformemente variado. Já a derivação das funções trigonométricas seno e cosseno (não tão simples), será utilizada nas funções que caracterizam o MHS, no qual é aplicada a regra da cadeia. Os alunos devem descrever a aceleração como a taxa de variação no tempo da velocidade e a velocidade como taxa de variação no tempo do espaço percorrido, ou seja, a aceleração como derivada temporal da velocidade e esta, como derivada temporal do espaço. Na representação gráfica das funções que caracterizam os movimentos, que é apresentada ao longo desse trabalho, o cálculo de áreas com o eixo OX, num intervalo definido do domínio, permite obter a integral definida nesse intervalo. No gráfico da aceleração essa integral representa a variação da velocidade e no gráfico da velocidade, a variação do espaço.

# Capítulo 3

## Introdução ao Cálculo

Neste capítulo, apresentamos uma abordagem simples e dinâmica sobre os temas Limite, Derivada e Integral, de forma que estes conceitos possam ser introduzidos aos alunos do Ensino Médio. Para isto utilizaremos o programa Geogebra<sup>1</sup> com a finalidade de construir gráficos e animações que venham a contribuir para o entendimento dos conceitos apresentados. As principais referências utilizadas foram Stewart (2013), Iezzi (1980) e Lewis (1972).

### 3.1 Noções sobre Limites

Na introdução do conceito de limite de uma função num ponto, que pode existir ou não, é fundamental identificarmos o domínio da mesma, estudar seu comportamento e identificar possíveis restrições nas proximidades do referido ponto. A partir daí, pode-se concluir sobre a existência ou não do mesmo.

Para a determinação do domínio de uma função, em alguns casos, é importante estar ciente das propriedades que possuem os quocientes. Por exemplo, os quocientes da forma  $\frac{x}{0}$ , com  $x \neq 0$ , não existem, pois se um número  $a = \frac{x}{0}$ , teríamos que  $a \cdot 0 = x$ , o que é impossível já que  $a \cdot 0 = 0$  e por hipótese  $x \neq 0$ . Por outro lado, quando  $x = 0$ , dizemos que o quociente  $\frac{0}{0}$  é uma indeterminação, uma vez que se  $a = \frac{0}{0}$ , a relação  $a \cdot 0 = 0$  é satisfeita para qualquer número real  $a$ . Finalmente, o quociente  $\frac{0}{x}$ , com  $x \neq 0$ , que é sempre zero, pois a relação

---

<sup>1</sup>Geogebra - Dynamic Mathematics for Schools. Este software é gratuito e pode ser encontrado em <http://www.geogebra.org>

$0 = x \cdot 0$  é verificada para qualquer número real  $x$ . É importante frisar que estes quocientes nem sempre são encontrados.

A fim de clarificar o exposto, por meio de exemplos, daremos uma noção intuitiva do conceito de limite.

Considere a função afim  $f(x) = 2x + 1$ , definida para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{R}$  é o domínio de  $f$ , neste caso. Analisemos o comportamento da função  $f$  nas proximidades do ponto  $x = 0$ , mas diferente de zero, vide Tabela 3.1.

Aproximação pela esquerda		Aproximação pela direita	
x	f(x)	x	f(x)
-0.2	0.6	0.2	1.4
-0.1	0.8	0.1	1.2
-0.05	0.9	0.05	1.1
-0.03	0.96	0.03	1.06
-0.01	0.98	0.01	1.02

Tabela 3.1: Valores de  $f(x) = 2x + 1$  quando  $x$  se aproxima de zero.

Observe que a medida que  $x$  assume valores cada vez mais próximos de 0 (maiores ou menores), os valores da função  $f(x)$  se aproximam do valor 1. Disto, decorre que podemos tornar os valores de  $f(x)$  tão próximos de 1 quanto quisermos tornando os valores de  $x$  suficientemente próximo de 0. Expressamos isso dizendo que “o limite da função  $f(x) = 2x + 1$  quando  $x$  tende a 0 é igual a 1”. A representação desse limite é dada por

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$$

O gráfico a seguir mostra o comportamento da função  $f(x) = 2x + 1$  nas proximidades de  $x = 0$ .

Com alguns recursos do Geogebra, é possível mostrar, através de “animações”, o comportamento de uma função nas proximidades de um ponto, e assim enfatizar a noção de limite para alunos da educação básica. Vejamos como esta animação poder ser realizada para a função  $f(x) = 2x + 1$  estudada acima, vide Figura 3.2. Para isto, é preciso selecionar no programa Geogebra a função controle deslizante  $a$ , variando num intervalo que contenha 0, por exemplo, no intervalo de  $[-1, 1]$ . Depois digitar as entradas  $f(a) = 2a + 1$ ,  $P = (a, f(a))$ ,  $X = (a, 0)$  e  $Y = (0, f(a))$ . Para dar mais foco ao movimento dos pontos, sugerimos criar os segmentos que ligam  $X$  a  $P$  e  $P$  a  $Y$ . Assim quando movimentarmos os valores de  $a$ , os pontos  $X$ ,  $P$  e  $Y$  se movimentarão na tela do programa. Então, quando tomarmos os

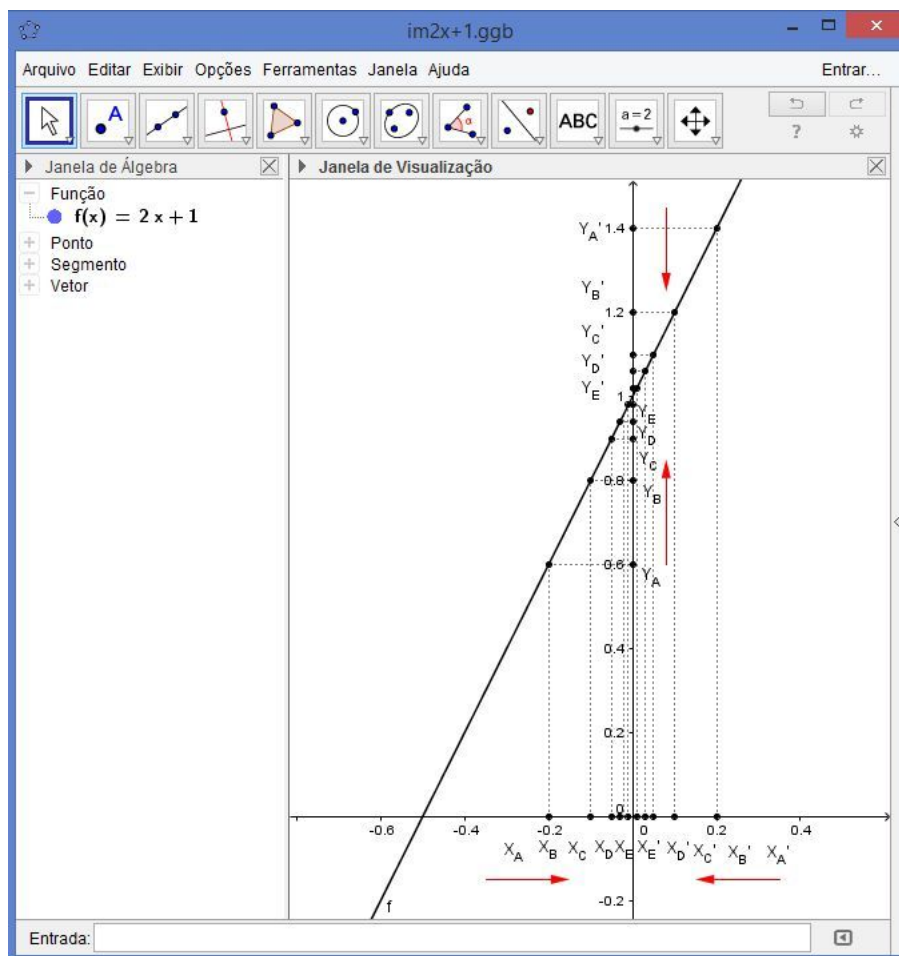


Figura 3.1: Gráfico de  $f(x) = 2x + 1$

valores de  $a$  próximos de 0, veremos que os valores de  $X$  se aproximarão de "0", no eixo  $x$ , e os valores de  $Y$  automaticamente se aproximarão de "1", no eixo  $y$ .

Como o ponto  $x = 0$  pertence ao domínio da função  $f(x) = 2x + 1$ , e o limite da função  $f(x)$  no ponto  $x = 0$  pode ser obtido, nesse caso especificamente, substituindo diretamente  $x$  por 0 na função ( $f(0) = 1$ ).

Agora, analisemos o comportamento de uma função próximo a um ponto que não pertence a seu domínio.

Considere a função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ . Observe que esta função não está definida no ponto  $x = 1$ , pois há uma indeterminação nesse ponto ( $f(1) = \frac{0}{0}$ ). Logo seu domínio é dado por  $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{1\}$ . Vejamos na Tabela 3.2 o comportamento de  $f(x)$  próximos a  $x = 1$ .

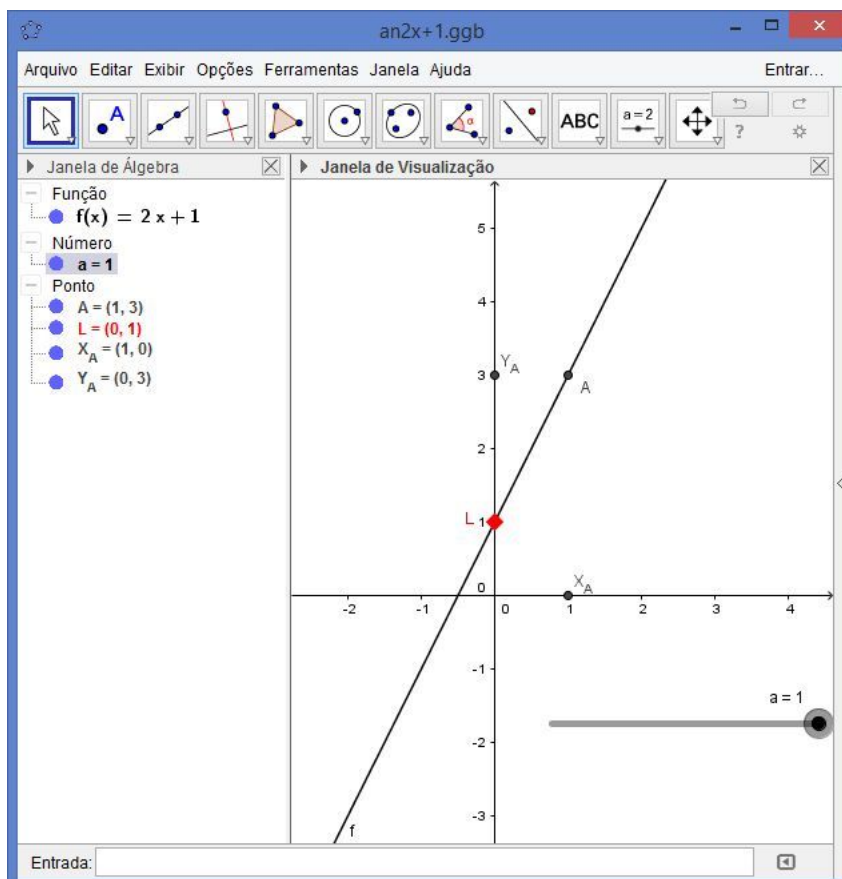


Figura 3.2: Animação sobre o gráfico de  $f(x) = 2x + 1$

Observemos que a medida que os valores de  $x \in \mathbb{D}$  se aproximam de 1, tanto pela esquerda quanto pela direita, os valores de  $f(x)$  se aproximam de 2 (veja também Figura 3.3). Então dizemos que o limite da função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  quando  $x$  tende a 1 é igual a 2”, e a representação desses limites é dada por

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

O gráfico a seguir mostra o comportamento da função  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  nas proximidades de  $x = 1$ .



Aproximação pela esquerda		Aproximação pela direita	
x	f(x)	x	f(x)
0.5	1.5	1.5	2.5
0.6	1.6	1,4	2.4
0.7	1.7	1.3	2.3
0.8	1.8	1.2	2.2
0.9	1.9	1.1	2.1

Tabela 3.2: Valores de  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  quando  $x$  se aproxima de 1.

De maneira análoga ao primeiro exemplo, pode-se ilustrar este processo, utilizando as ferramentas do programa Geogebra. Seleccionamos no programa a função controle deslizante  $a$ , variando agora num intervalo que contenha 1, por exemplo, no intervalo de  $[-1, 2]$ . Depois digitamos as entradas  $f(a) = (a^2 - 1)/(a - 1)$ ,  $P = (a, f(a))$ ,  $X = (a, 0)$  e  $Y = (0, f(a))$ . Como a função  $f(a)$  não está definida em 1, sugerimos destacar o ponto " $a = 1$ " no gráfico com uma bola aberta, simbolizando que naquele ponto a um "buraco" no eixo  $x$ . Para isto, basta criar os pontos  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 2)$  e  $C = (1, 2)$  e depois, clicando com o botão direito do mouse, seleccionar propriedades, depois estilo, e assim escolher a representação dos pontos  $A, B$  e  $C$ , como mostra a Figura 3.4.

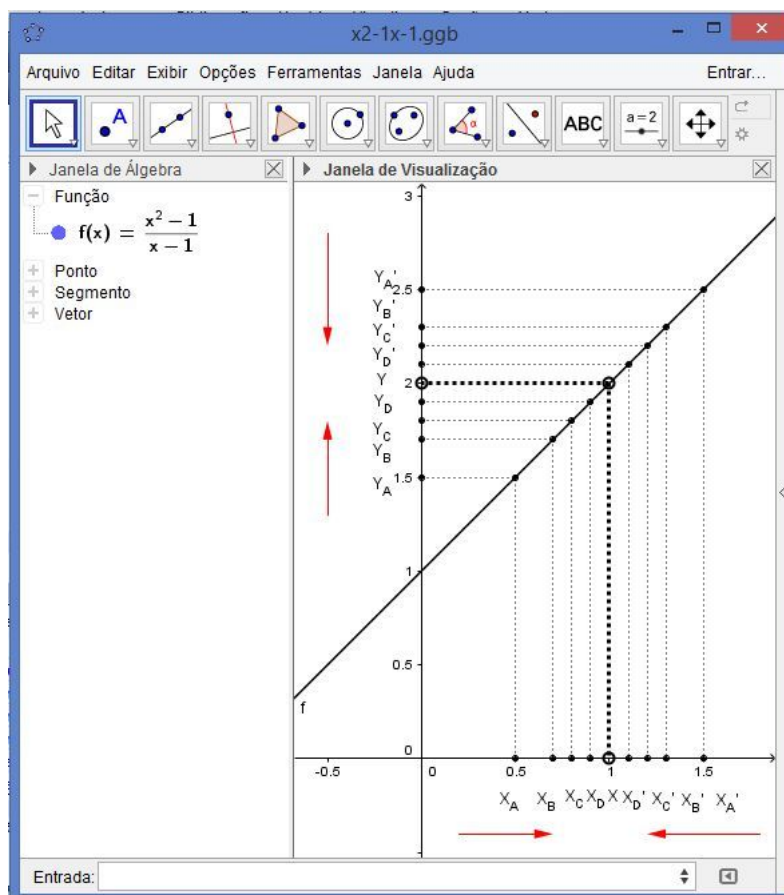


Figura 3.3: Gráfico de  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Então, no controle deslizante, quando tomarmos os valores de  $a$  próximos de 1, veremos que os valores de  $X$  se aproximarão de "1", no eixo  $x$ , e os valores de  $Y$  se aproximarão de "2", no eixo  $y$ . Porém, quando colocamos  $a = 1$ , teremos na parte esquerda da tela do programa que os valores de  $Y$  e  $P$  aparecerão como indefinidos, uma vez que a função não está definida em 1.

Algebricamente, também pode-se resolver este limite da seguinte forma

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1}$$

Simplificando  $(x - 1)$ , tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Conclui-se destes exemplos que para encontramos o limite de uma função em um dado ponto, não é necessário que a função dada esteja definida neste ponto. O que interessa é

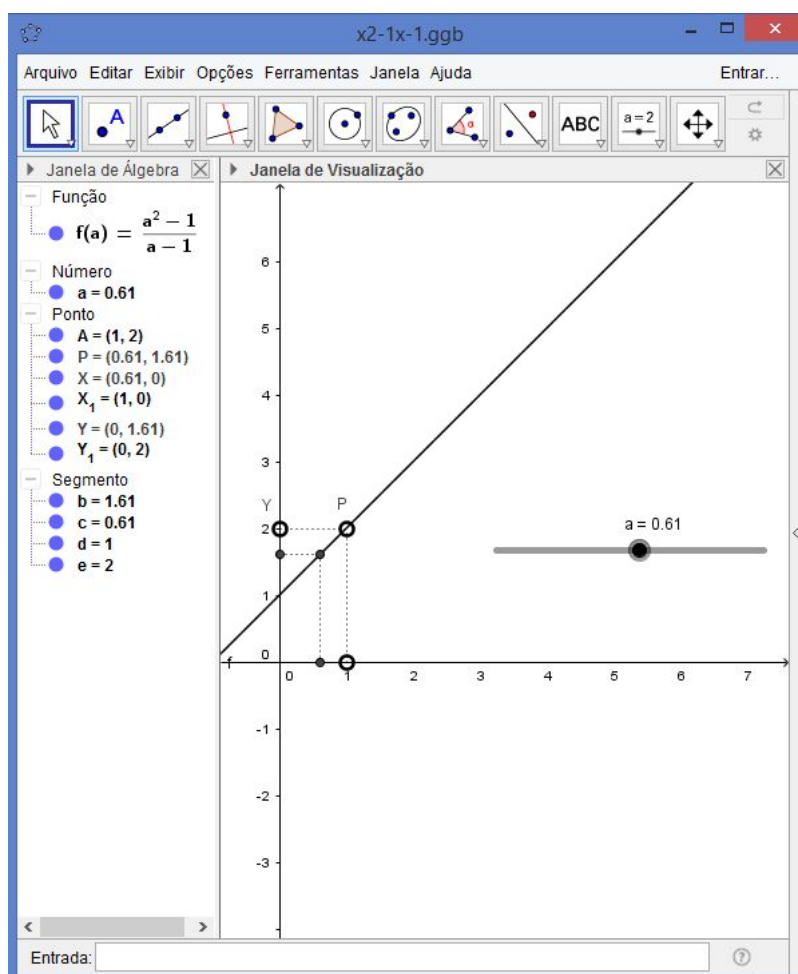


Figura 3.4: Animação sobre o gráfico de  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

saber o comportamento da função nas proximidades do ponto dado. Isto nos leva a seguinte definição:

**Definição 3.1.1** Dizemos que o limite de uma função  $f(x)$  é igual a  $L$ , quando  $x$  tende a  $x_0$ , e denotamos por

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

se pudermos tornar os valores de  $f(x)$  arbitrariamente próximos de  $L$  a medida que os valores de  $x$  são tomados suficientemente próximos de  $x_0$ .

Analisemos agora o seguinte caso particular.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , \text{ se } x < 1 \\ x + 1 & , \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$$

Observe que  $f(x)$  está definida em 1, e neste caso,  $f(1) = 2$ . Porém, vejamos na Tabela 3.3, o comportamento de  $f(x)$  nas proximidades do ponto  $x = 1$ .

Aproximação pela esquerda		Aproximação pela direita	
x	f(x)	x	f(x)
0	-3	2	3
0.2	-2.6	1.8	2.8
0.4	-2.2	1.6	2.6
0.6	-1.8	1.4	2.4
0.9	-1.2	1.1	2.1

Tabela 3.3: Valores de  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de 1

Constata-se que quando  $x$  se aproxima de 1 pela esquerda, os valores de  $f(x)$  se aproximam do valor  $-1$ , e que quando  $x$  se aproxima de 1 pela direita, os valores de  $f(x)$  se aproximam do valor 2. Veja Figura 3.5.

Indicamos esta situação simbolicamente por

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2,$$

onde o símbolo  $x \rightarrow 1^-$  significa que  $x$  está se aproximando de 1 por valores tomados menores que 1, e o símbolo  $x \rightarrow 1^+$  significa que  $x$  está se aproximando de 1 por valores tomados maiores que 1.

Nesse caso, como os valores da função  $f(x)$  se aproxima de dois valores distintos, quando  $x$  se aproxima de 1 por diferentes lados, dizemos que o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende a 1, não existe.

De modo geral, isso nos leva ao seguinte resultado:

**Teorema 3.1.2**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ .

Para a construção do gráfico da figura 3.6 e, posteriormente, para a construção da animação sobre este gráfico, indicamos tomar, no Geogebra, a entrada da função  $f(x)$  da seguinte forma:  $f(x) = \text{Se } [x < 1, 2x - 3, x + 1]$ . Isto fará com que a função apareça no

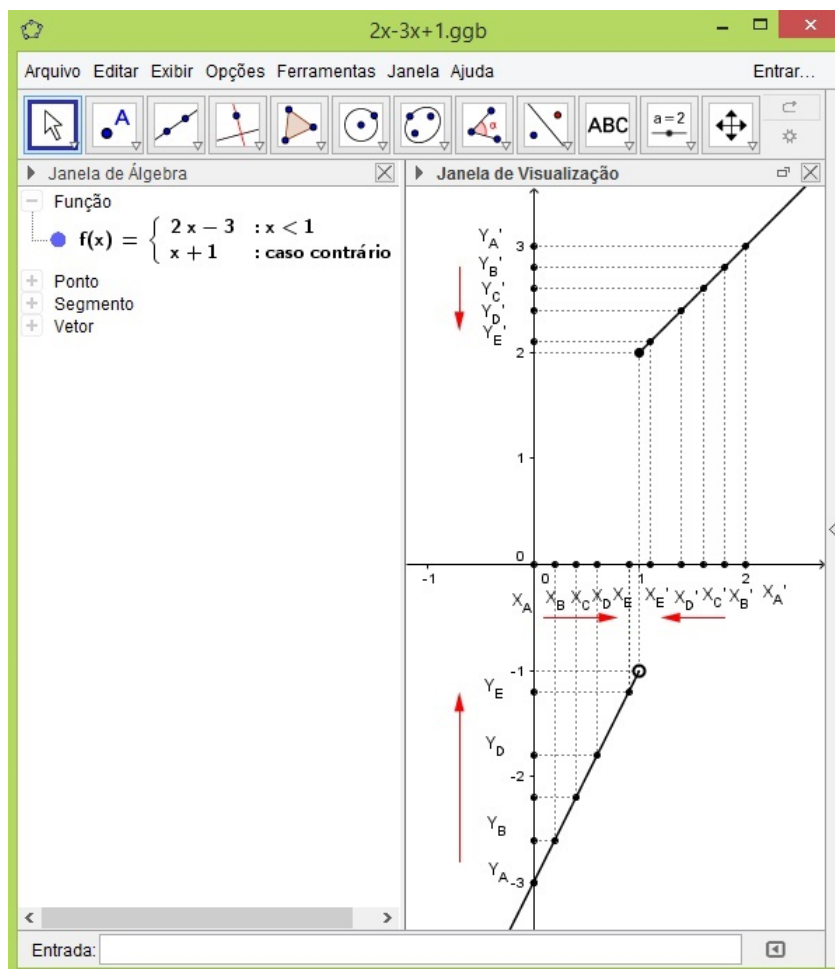


Figura 3.5: Função definida por partes

programa da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , \text{ se } x < 1 \\ x + 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Depois, basta destacar os pontos extremos, como indicado na figura 3.6. Para a construção da animação, o procedimento utilizado será feito da mesma forma indicada nos exemplos anteriores, tomando o controle deslizante  $a$ , variando de 0 a 2,  $f(a) =$  Se  $[a < 1, 2a - 3, a + 1]$ ,  $P = (a, f(a))$ ,  $X = (a, 0)$  e  $Y = (0, f(a))$ .

Vejam os mais alguns casos especiais do conceito de limite. Considere a função:

$$f(x) = \frac{1}{x - 1},$$

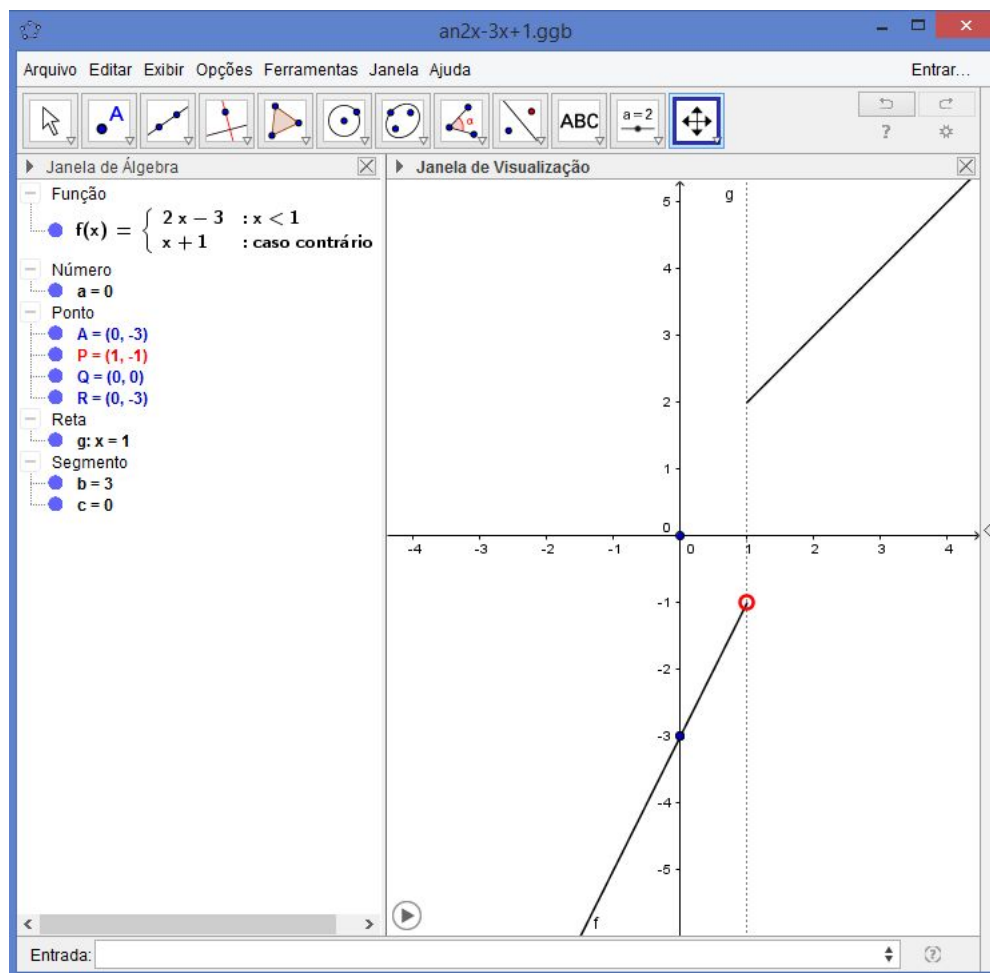


Figura 3.6: Animação do gráfico de função definida por partes

cujo domínio é dado por  $D = \mathbb{R} - \{1\}$ , já que  $\frac{1}{0}$  é uma indeterminação.

Analisemos, primeiramente, o comportamento de  $f(x)$  nas proximidades do ponto  $x = 1$ , vide Tabela 3.4.

Observe que fazendo os valores de  $x$  se aproximarem de 1 pela esquerda, vemos que os valores de  $f(x)$  decrescem rapidamente tendendo a valores infinitamente pequenos, aos quais expressaremos este comportamento por

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty,$$

em que o símbolo  $-\infty$ , neste caso, indica apenas que  $f(x)$  está tomando valores cada vez menores à medida que  $x$  se aproxima de 1 pela esquerda. Do mesmo modo, fazendo os valores de  $x$  se aproximarem de 1 pela direita, vemos que os valores de  $f(x)$  crescem rapidamente

Aproximação pela esquerda		Aproximação pela direita	
x	f(x)	x	f(x)
0.2	-1.25	2	1
0.5	-2	1.5	2
0.75	-4	1.25	4
0.8	-5	1.2	5
0.9	-10	1.1	10
0.99	-100	1.01	100

Tabela 3.4: Valores de  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  quando  $x$  se aproxima de 1.

para valores infinitamente grandes, aos quais também representamos por

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty,$$

onde o símbolo  $+\infty$ , neste caso, indica apenas que  $f(x)$  está tomando valores cada vez maiores a medida que  $x$  se aproxima de 1 pela direita. O gráfico a seguir mostra o comportamento da função  $f(x)$  nas proximidades de  $x = 1$ .

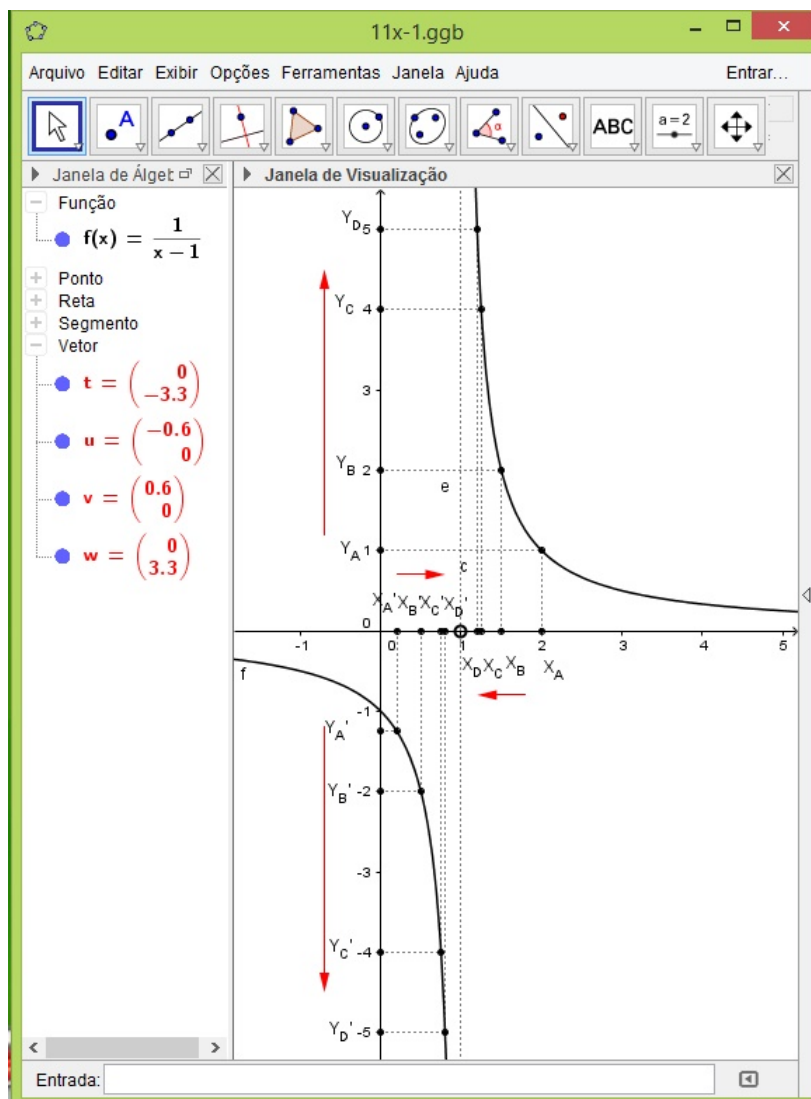


Figura 3.7: Gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ .

Neste caso, dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende a 1 não existe.

Por outro lado, fazemos sobre a mesma função  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  uma outra análise, para observarmos o comportamento da mesma quando os valores de  $x$  tendem a ser infinitamente pequenos, e, analogamente, quando os valores de  $x$  tendem a ser infinitamente grandes, conforme a Tabela 3.5.



Valores de $x$ tendendo a $-\infty$		Valores de $x$ tendendo a $+\infty$	
$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$
-1	-0.5	2	1
-4	-0.2	5	0.25
-9	-0.1	11	0.1
-99	-0.01	101	0.01
-999	-0.001	1001	0.01
-9999	-0.0001	10001	0.0001

Tabela 3.5: Valores de  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  quando  $x$  se aproxima de  $-\infty$  (à esquerda) e de  $+\infty$  (à direita)

Observem que à medida que os valores de  $x$  se tornam cada vez menores, temos que o valores de  $f(x)$  se aproximam cada vez mais do valor 0, e quando os valores de  $x$  são tomados cada vez maiores, vemos também que valores de  $f(x)$  também se aproximam de 0.

Aqui, representamos estes dois comportamentos da seguinte forma:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

no qual os símbolos  $x \rightarrow -\infty$  indicam que os valores de  $x$  são tomados suficientemente pequenos, e os símbolos  $x \rightarrow +\infty$  indicam que os valores de  $x$  são tomados suficientemente grandes.

A simulação do comportamento dessa função, em todos os casos aqui apresentados, podem ser ilustrados por meio de animação no Geogebra, utilizando o controle deslizante  $a$ , variando por exemplo de  $-1000$  a  $1000$ , digitando as entradas  $f(a) = 1/(a-1)$ ,  $P = (a, f(a))$ ,  $X = (a, 0)$  e  $Y = (0, f(a))$ , e enfatizando o comportamento da função quando  $X$  se aproxima de 1 pela esquerda e pela direita, e também quando  $X$  assume valores cada vez maiores e cada vez menores.

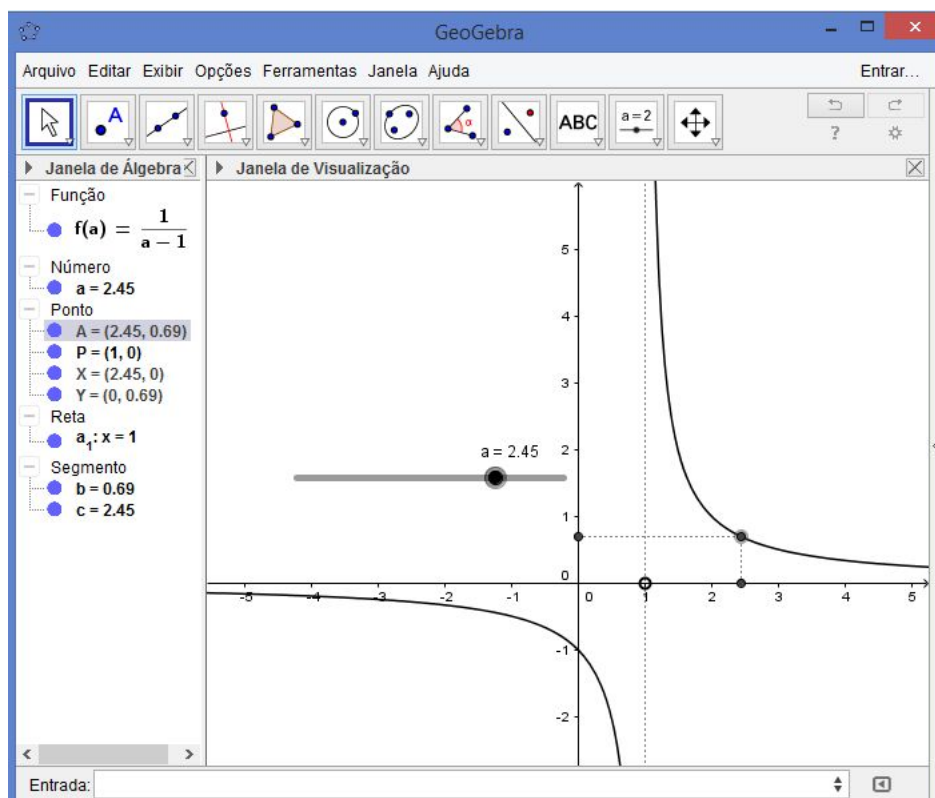


Figura 3.8: Animação sobre o gráfico de  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

### 3.1.1 Propriedades operatórias dos limites

1. O limite da soma é a soma dos limites.

Sejam  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ . Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$ .

2. O limite do produto é o produto dos limites.

Sejam  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$ . Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$ .

3. O limite do quociente é o quociente dos limites.

Sejam  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2 \neq 0$ . Tem-se que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$ .

**Definição 3.1.3** Uma função  $f(x)$  é contínua em um ponto  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

É importante salientar que a definição acima requer implicitamente que seja satisfeitas três propriedades para que a continuidade de  $f(x)$  seja satisfeita em  $x_0$ :

1.  $f(a)$  está definido.
2. O limite de  $f(x)$  existe quando  $x$  tende a  $x_0$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Se qualquer uma das propriedades acima não for satisfeita, dizemos que  $f(x)$  é descontínua em  $x_0$ .

Por exemplo, a função  $f(x) = 2x + 1$  é contínua em  $x = 0$ , pois  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$ , porém, as funções  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  e  $f(x) = \frac{1}{x - 1}$  não são contínuas em  $x = 1$ , pois em ambos os casos,  $f(1)$  não está definido nestas funções.

Vejamos agora dois importantes limites para o estudo do cálculo diferencial.

### 3.1.2 Limite Trigonométrico Fundamental

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

O limite trigonométrico pode ser apresentado geometricamente, por meio do programa Geogebra, observando o comportamento da função  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  nas proximidades do ponto  $x = 0$ , como mostra a figura 3.9.

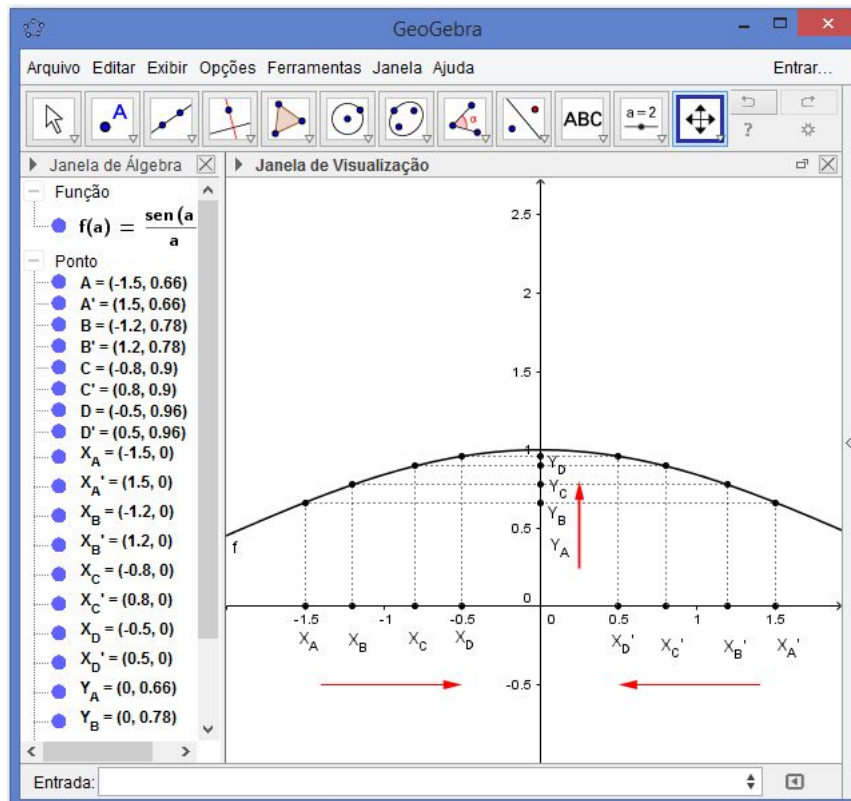


Figura 3.9: Gráfico de  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

A animação do comportamento da função  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$  nas proximidades  $x = 0$  pode ser feita com a criação de controle deslizante  $a$  no intervalo  $[-2, 2]$  e com as entradas  $X = (a, 0)$ ,  $Y = (0, f(a))$  e  $P = (a, f(a))$ , conforme mostra a figura 3.10.

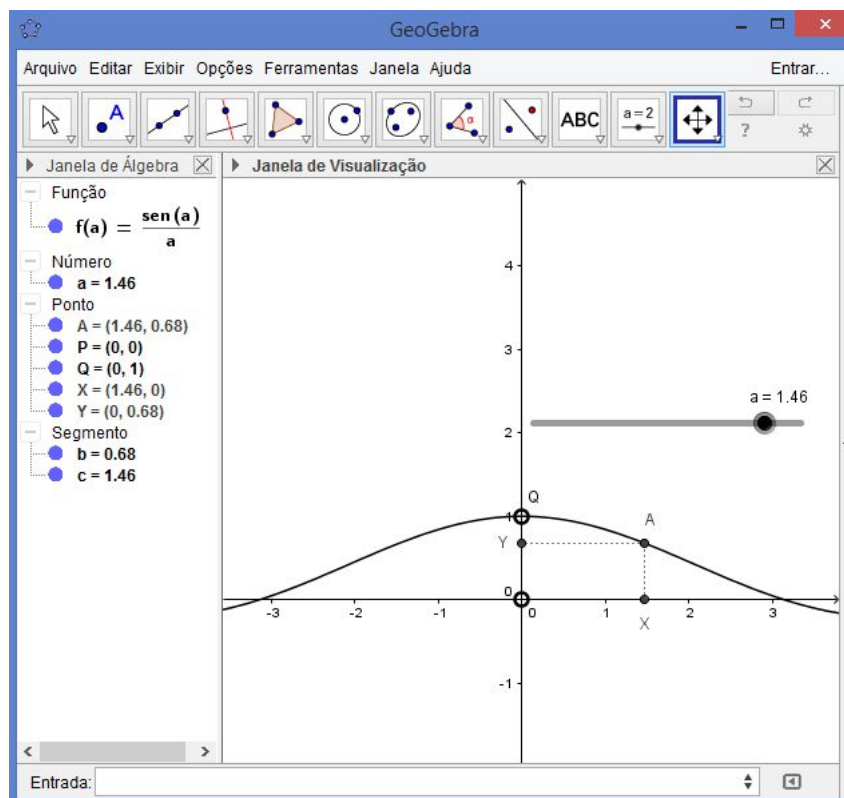


Figura 3.10: Animação do Gráfico de  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

### 3.1.3 Limite Exponencial Fundamental

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Nesses limites, o número irracional  $e = 2,71828\dots$  é denominado número de Euler (Leonhard Euler/1707 - 1783), que é a base dos logaritmos naturais.

A figura 3.11 mostra o comportamento da função  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , com  $x$  tendendo a  $+\infty$  e a  $-\infty$ . A veracidade de tais limites também pode ser ilustrada, através do Geogebra, analisando o comportamento da função  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , quando  $x$  assume valores suficientemente grandes e pequenos, como mostra a figura 3.12.

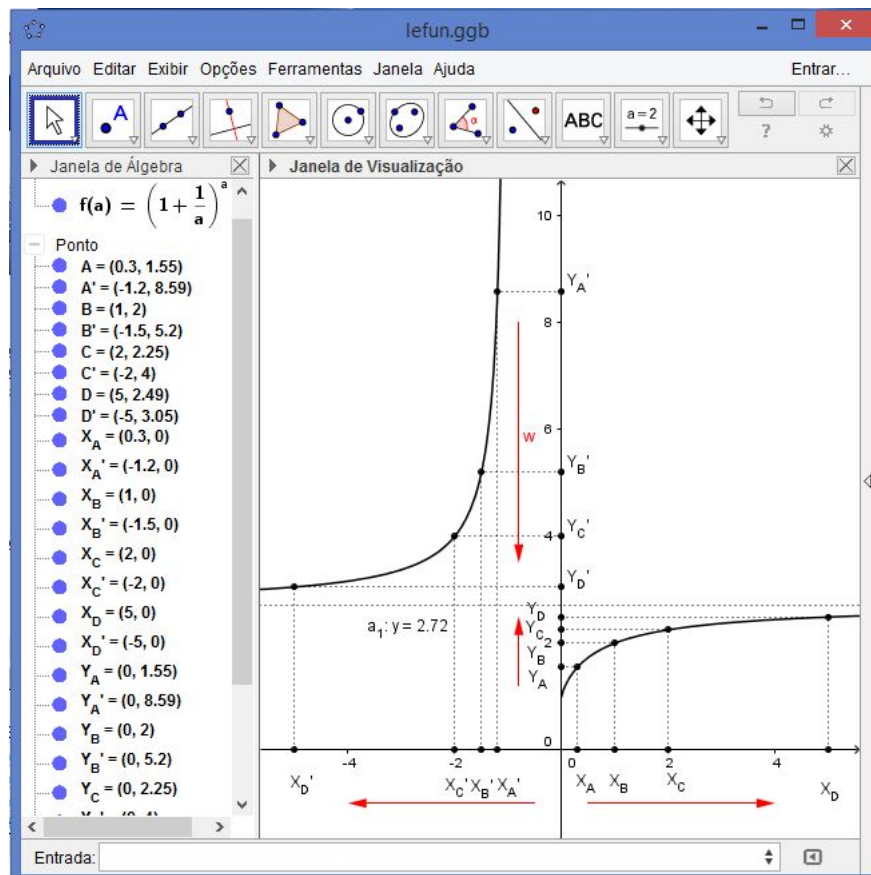


Figura 3.11: Gráfico de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

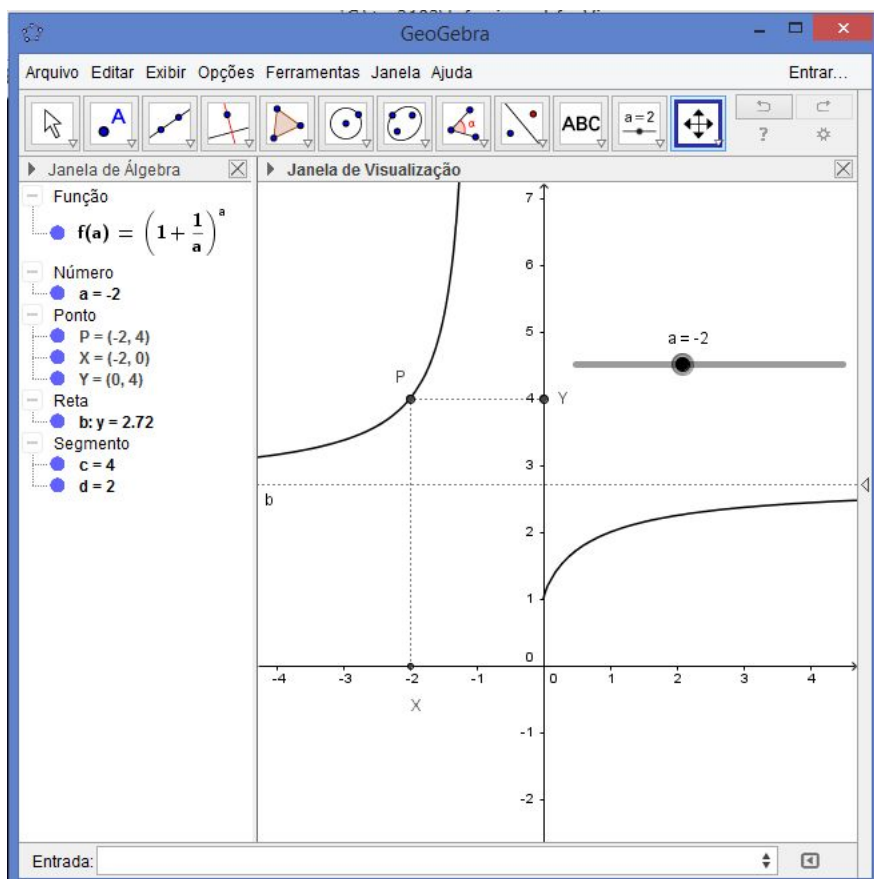


Figura 3.12: Animação sobre o gráfico de  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

## 3.2 Derivadas

No cotidiano, a velocidade é associada ao quociente entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la. No entanto, em movimentos em que a velocidade é variável (o móvel pode estar acelerando ou freando), esse quociente terá valores diferentes para cada intervalo de tempo escolhido. Por exemplo, se escolhermos dois intervalos de tempo iguais e consecutivos num movimento acelerado de um automóvel, a distância percorrida no segundo intervalo é, certamente maior que o dobro da distância percorrida no primeiro intervalo; mais precisamente, será o triplo. Com isso, o velocímetro do automóvel estará acusando valores diferentes e crescentes a cada instante. É a velocidade instantânea. Para caracterizá-la, podemos definir uma função  $S = f(t)$ , em que  $S$  representa a distância, em quilômetros,

do automóvel a um referencial escolhido sobre a trajetória  $S_0$  e  $t$ , o tempo, em horas, após o início (instante de referência =  $t_0$ ) do movimento. A velocidade média do instante  $t_0$  até o um instante  $t > t_0$  é definida pelo quociente  $\frac{\Delta S}{\Delta t}$  que representa a taxa de variação da posição  $S$  em relação ao tempo  $t$ , onde  $\Delta S = S - S_0$  é a distância percorrida entre os dois instantes e  $\Delta t = t - t_0$  é o tempo decorrido.

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

A velocidade média de um movimento, num determinado intervalo de tempo, representa o número de unidades de distância por unidade de tempo podendo ser medida em  $\frac{cm}{s}$ ,  $\frac{km}{h}$ ,  $\frac{milhas}{h}$ ,  $\frac{m}{s}$  etc. Sendo que essa última é a unidade do Sistema Internacional de Unidades (SI).

A velocidade instantânea, ou simplesmente velocidade, será o valor do limite da velocidade média quando o intervalo de tempo tende a zero, isto é, a derivada do espaço ( $dS(t)$ ) em relação ao tempo ( $dt$ ).

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$v(t) = \frac{dS(t)}{dt}$$

Assim, para cada instante  $t$  de um intervalo de tempo pré-fixado, encontramos o correspondente valor da velocidade, ou seja, a velocidade é uma função do tempo:

$$v = f(t)$$

Essa definição permite que, através da função que caracteriza o espaço de um móvel em função do tempo, se possa fazer inferência sobre a variação de velocidade.

Analogamente à velocidade média, define-se a aceleração média num intervalo de tempo pré-fixado como sendo o quociente entre a variação da velocidade ( $\Delta v$ ) e a variação do tempo ( $\Delta t$ ).

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

O valor da aceleração média num determinado de tempo indica o número de unidades de velocidade por unidade de tempo. A aceleração média pode ser medida em  $\frac{cm}{s}$ ,  $\frac{km}{h}$ ,  $\frac{cm}{s^2}$ ,  $\frac{h}{h^2}$ ,  $\frac{km}{h^2}$ ,  $\frac{h}{s}$  e, no SI,  $\frac{m}{s}$ ,  $\frac{m}{s^2}$  etc.



Como a velocidade instantânea, a aceleração instantânea ou aceleração, é o limite da aceleração média quando o intervalo de tempo tende a zero, isto é, a derivada da velocidade ( $dv(t)$ ) em relação ao tempo ( $dt$ ).

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Então, para cada instante  $t$  de um intervalo de tempo pré-fixado, encontramos o correspondente valor da aceleração, ou seja, a aceleração é uma função do tempo:

$$a = f(t)$$

Essa definição permite que, através da função que caracteriza a velocidade de um móvel em função do tempo, possamos inferir sobre a aceleração de seu movimento.

Assim, para estudar e definir essas grandezas físicas, é necessário o entendimento do conceito de derivada.

Genericamente, seja uma função  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , e seja  $x_0 \in (a, b)$ . Uma variação  $\Delta x = x - x_0$  no valor de  $x$  acarreta uma variação  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$  em  $y$ .

Para valores de  $\Delta x$  relativamente pequenos,  $\Delta y$  também é relativamente pequeno e o quociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  assume valores aproximadamente iguais. Isto motiva a seguinte definição.

**Definição 3.2.1** *Dada uma função  $f$  e  $x_0$  um ponto de seu domínio, definimos a derivada de  $f$  no ponto  $x_0$  como sendo o limite do quociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , quando  $\Delta x$  tende a zero, isto é,*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Se o limite de  $f$  no ponto  $x_0$  não existir, então temos que a derivada de  $f$  não existe nesse ponto.*

### 3.2.1 Interpretação Geométrica da derivada

Vejam agora que a derivada de uma função  $f$  num ponto  $x_0$  representa a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P_0(x_0, y_0)$ , onde  $y_0 = f(x_0)$ .

Considere no gráfico de uma função  $f$  os pontos  $P_0(x_0, f(x_0))$  e  $P(x, f(x))$ , onde  $x = x_0 + \Delta x$ , sendo  $\Delta x$  uma pequena variação de  $x_0$ . Considere a reta secante ao gráfico de  $f$  que passa pelos pontos  $P_0$  e  $P$ , como ilustrado na figura 3.13.

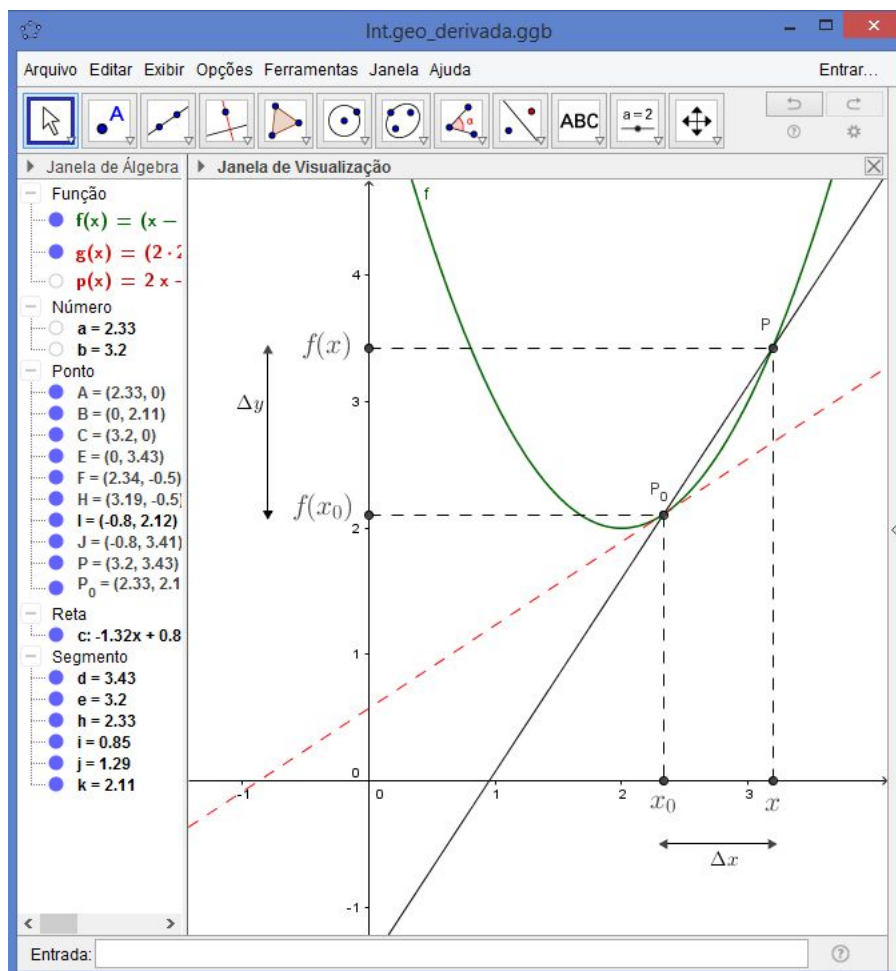


Figura 3.13: Interpretação geométrica de  $f'(x_0)$ .

Observe que o coeficiente angular desta reta secante é dado por

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Definindo um controle deslizante sobre  $x$ , e fazendo  $x$  se aproximar de  $x_0$ , vemos que o ponto  $P$  se aproxima do ponto  $P_0$ , fazendo assim com que a reta secante se aproxime da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P_0$ . Disso se conclui que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P_0$ , pode ser dado por

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Depreende-se disso que a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $P_0$  é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Para mostrar o deslocamento da reta secante ao gráfico de  $f(x)$ , basta criar dois controles deslizantes,  $a$  e  $b$ , e os pontos  $A = (a, f(a))$ , e  $B = (b, f(b))$ . A reta secante à curva é dada por

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

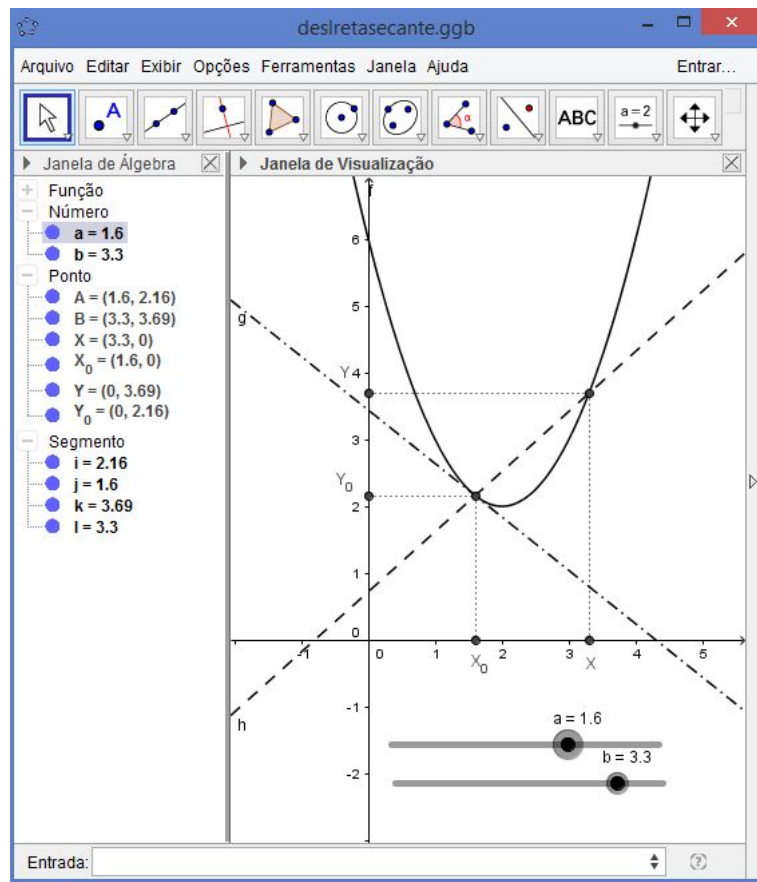


Figura 3.14: Deslocamento da reta secante

De maneira geral, dado qualquer  $x$  para o qual a derivada de  $f$  exista, podemos associar a  $x$  o número  $f'(x)$ . Assim, podemos considerar  $f'(x)$  como uma função, chamada de **derivada** de  $f$ , e definida por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Observe que a determinação da função derivada facilita a obtenção do valor da derivada de uma função em cada ponto em que a mesma é definida e derivável.

### 3.2.2 Propriedades Operatórias das Derivadas

Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$ , funções deriváveis no ponto  $x$ .

1. A derivada da soma de duas funções.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

2. A derivada da diferença de duas funções.

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

3. A derivada do produto de duas funções.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

4. Derivada do quociente de duas funções.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \text{ com } g(x) \neq 0$$

Vejamos alguns exemplos.

### 3.2.3 Função constante

Seja  $f(x) = c$ , onde  $c$  é uma constante real. Por definição,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Portanto,  $f'(x) = 0$ .

### 3.2.4 Função Potência

Seja  $f(x) = x^n$ . Considere  $t = x + \Delta x$ . Observe que quando  $\Delta x \rightarrow 0$  então  $t \rightarrow x$ . Assim, derivando  $f$ , temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{t^n - x^n}{t - x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t - x) \cdot (t^{n-1} + t^{n-2}x + t^{n-3}x^2 + \dots + t^2x^{n-3} + tx^{n-2} + x^{n-1})}{t - x} \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \dots + x^2x^{n-3} + xx^{n-2} + x^{n-1}}_{n \text{ parcelas}} = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

Devido a esta demonstração ser técnica para o Ensino Básico, sugerimos que a mesma seja feita em casos particulares, por exemplo,  $n = 1, 2, 3$ , e em seguida apresentar sua generalização.

Uma outra maneira de abordar o conceito de derivada na Educação Básica é através demonstrações gráficas no Geogebra. Por exemplo, mostremos que a derivada de  $f(x) = x^2$  é  $f'(x) = 2x$ , utilizando animação no Geogebra como ilustrado na Figura 3.15. Utilizando controles deslizantes  $a$  e  $b$ , variando, por exemplo, no intervalo  $[-5, 5]$  e definindo os pontos  $A = (a, a^2)$  e  $B = (b, b^2)$  do gráfico de  $f$ , a reta que passa por  $A$  e  $B$  e a reta tangente a  $f(x)$  no ponto  $A$ , dada por  $y = 2ax - a^2$ .

### 3.2.5 Função Polinomial

Seja  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ , onde cada  $a_i$  é um número real. Segue do exemplo anterior e das operações de derivação que

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

Novamente, sugere-se a verificação desta propriedade através de exemplos, como dada a função  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x$ , usando as propriedades da soma e da potência, temos que a função derivada é dada por  $f'(x) = 12x^2 + 6x - 4$ .

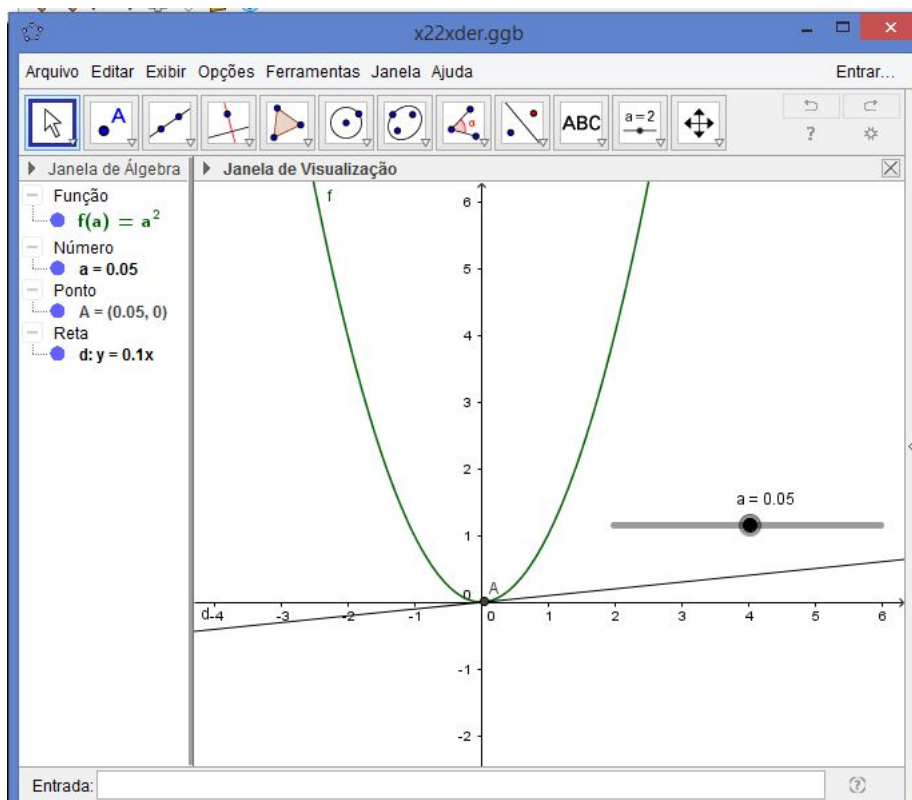


Figura 3.15: Função  $f(x) = x^2$  e sua derivada  $f'(x) = 2x$

### 3.2.6 Função Trigonométrica

Considere a função trigonométrica  $f(x) = \text{sen } x$ . Temos, por definição, que sua derivada é dada da seguinte maneira:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x}{\Delta x}$$

Como  $\text{sen}(x + \Delta x) = \text{sen } x \cdot \cos(\Delta x) + \text{sen}(\Delta x) \cdot \cos x$ , temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x \cdot \cos(\Delta x) + \text{sen}(\Delta x) \cdot \cos x - \text{sen } x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x (\cos(\Delta x) - 1) + \text{sen}(\Delta x) \cdot \cos x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x (\cos(\Delta x) - 1) \cdot (\cos(\Delta x) + 1)}{\Delta x \cdot (\cos(\Delta x) + 1)} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x) \cdot \cos x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2(\Delta x)}{\Delta x \cdot (\cos(\Delta x) + 1)} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x) \cdot \cos x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\cos(\Delta x) + 1} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos x$$

Como  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1$  (limite trigonométrico fundamental) e  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\cos(\Delta x) + 1} = 0$  segue que

$$f'(x) = \cos x$$

Graficamente, isso pode ser verificado como na Figura 3.16 que mostra como o gráfico da função  $f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$  se aproxima do gráfico de  $g(x) = \cos x$ , à medida que  $\Delta x$  se aproxima de zero.

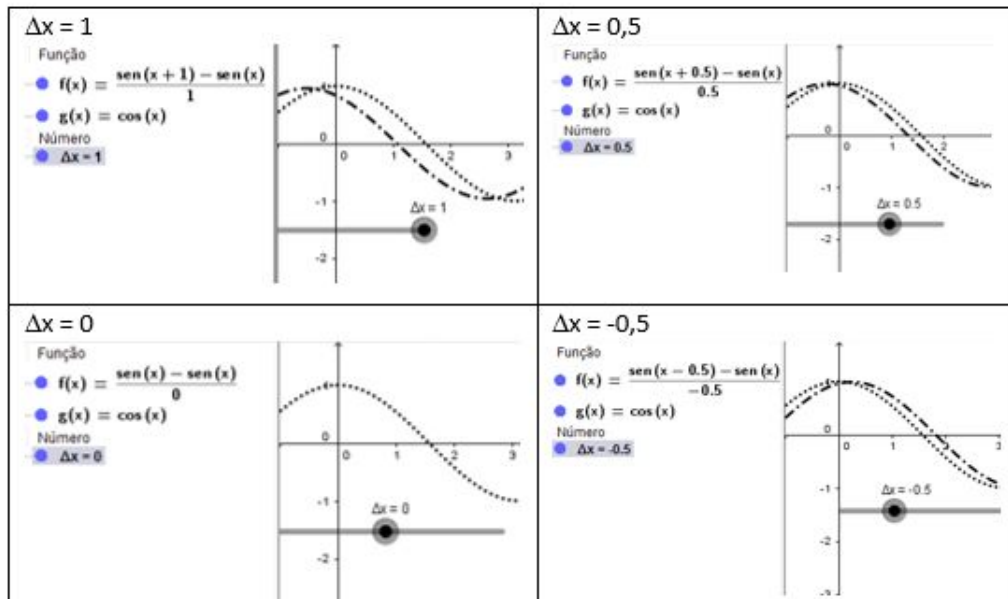


Figura 3.16: Função  $f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$  e  $f'(x) = \cos x$

A simulação pode ser feita com o auxílio do Geogebra, utilizando o controle deslizante para os valores de  $\Delta x$ , verificando-se assim, como o gráfico de  $f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$

se aproxima do gráfico de  $f'(x) = \cos x$ , quando  $\Delta x$  se aproxima de 0, como mostra a Figura 3.17, mostrando que a derivada de  $f(x) = \sin x$  é  $g(x) = f'(x) = \cos x$ .

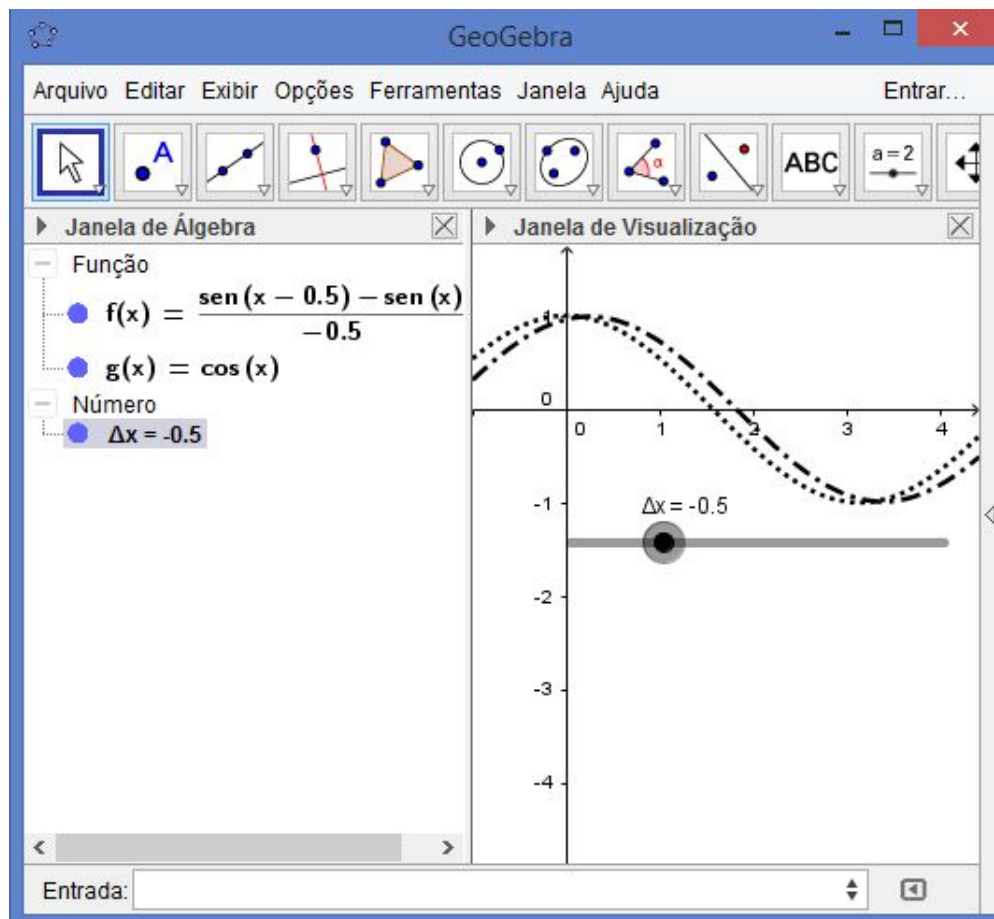


Figura 3.17: Função  $f'(x) = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$  e  $f'(x) = \cos x$

Analogamente, podemos mostrar que a derivada de  $f(x) = \cos x$  é  $f'(x) = -\sin x$ . A simulação também pode ser feita com o auxílio do Geogebra, utilizando o controle deslizante para os valores de  $\Delta x$ , verificando-se assim, como o gráfico de  $f'(x) = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$  se aproxima do gráfico de  $g(x) = f'(x) = -\sin x$ , quando  $\Delta x$  se aproxima de 0, como mostra a Figura 3.18, mostrando que a derivada de  $f(x) = \cos x$  é  $f'(x) = -\sin x$ .



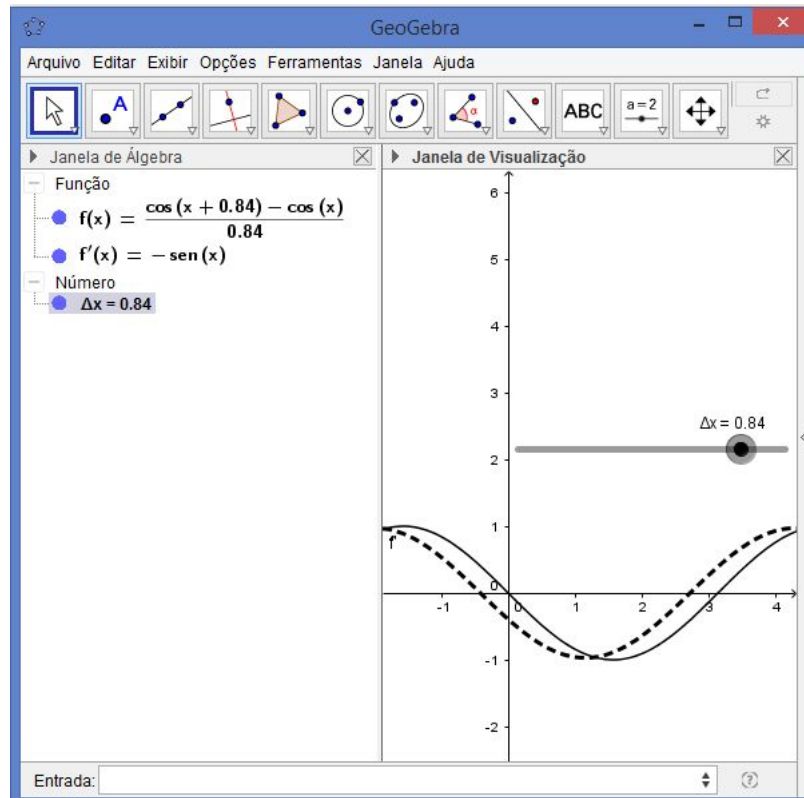


Figura 3.18: Função  $f(x) = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$  e  $f'(x) = -\text{sen } x$

### 3.2.7 Derivação da Função Composta

Considere uma função composta  $y = f(g(x))$ . Mostremos que  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ .

Seja  $y = f(g(x))$ , onde  $f$  e  $g$  são funções deriváveis. Chame de  $u = g(x)$ , então  $y = f(u)$ . Assim, chamando de  $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$ , e como  $g$  é derivável, temos

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Agora, chamando de  $\Delta f = f(u + \Delta u) - f(u)$ , e como  $f$  é derivável, temos

$$f'(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}$$

Observe que se  $f(g(x))$  é derivável, então

$$(f(g(x)))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Mas  $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ , e da a continuidade de  $g$ , temos  $\Delta x \rightarrow 0 \implies \Delta u \rightarrow 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} (f(g(x)))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &\stackrel{\Delta x \rightarrow 0 \implies \Delta u \rightarrow 0}{=} \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= f'(u) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Como  $u = g(x)$ , segue que

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Como esta demonstração é muito técnica, sugere-se que seja trabalhado com os alunos do Ensino Básico a identificação da função composta  $y = f(g(x))$ , como  $u = g(x)$  e  $y = f(u)$ , e assim usar a notação de Leibniz para derivadas,

$$\frac{dy}{dx} = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Vejamos um exemplo. Considere a função  $y = \text{sen}(2x)$ . Chamando de  $u = 2x$ , temos que  $y = \text{sen } u$ . Assim,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\text{sen } u)' \cdot (2x)' = \cos u \cdot 2 = 2\cos(2x)$$

Outro exemplo, que será estudado na seção sobre Movimento Harmônico Simples, em que a elongação  $x$  varia com o tempo  $t$  de acordo com a função  $x = A \cdot \cos(\varphi_0 + \omega t)$ , na qual  $A$  é a amplitude,  $\varphi_0$  é a fase inicial e  $\omega$  é a pulsação. A velocidade desse movimento é dada pela função derivada da elongação

$$v = x'(t) \text{ I}$$

Chamando de  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ , temos que  $x = A \cos \varphi$ , e assim

$$\begin{aligned} v = x'(t) &= A(\cos \varphi)' = A \cdot (-\text{sen } \varphi) \cdot (\varphi)' \\ &= -A \cdot \text{sen } \varphi \cdot (\varphi_0 + \omega t)' \\ &= -A \cdot \text{sen } \varphi \cdot \omega \end{aligned}$$

Isto é,

$$v = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\varphi_0 + \omega t)$$

### 3.2.8 Crescimento e decrescimento das Funções

Considere uma função  $f(x)$  definida num intervalo  $I$ . A função  $f(x)$  é **crecente** num subconjunto  $A$  de  $I$ , se para quaisquer dois pontos  $x_1$  e  $x_2$  de  $A$ , tais que  $x_1 < x_2$ , tem-se que  $f(x_1) < f(x_2)$ . Por outro lado, a função é dita **decrecente** em  $A$  se para quaisquer dois pontos  $x_1$  e  $x_2$  de  $A$ , tais que  $x_1 < x_2$ , tem-se que  $f(x_1) > f(x_2)$ . Em notações gerais,

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in A \text{ se } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) &\implies f(x) \text{ é crescente.} \\ \forall x_1, x_2 \in A \text{ se } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) &\implies f(x) \text{ é decrescente.} \end{aligned}$$

Isso significa que aumentando o valor de  $x$ , se o correspondente valor de  $f(x)$  também aumentar, a função será crescente, e se ao aumentar o valor de  $x$ , o correspondente valor de  $f(x)$  diminuir, a função será decrescente.

Se a função  $f(x)$  for derivável no intervalo, essas informações podem ser obtidas através de sua derivada, pois o valor que a função derivada assume num ponto, é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $f(x)$  no referido ponto. Assim, se a derivada é positiva, a função será crescente e, se for negativa, a função será decrescente.

A Figura 3.19 mostra as retas tangentes à parábola  $f(x) = -x^2 + 4$  nos pontos  $Q = (-1, 3)$  e  $P = (1, 3)$ , cujos coeficientes angulares (derivadas de  $f(x)$ ) são positivo e negativo, respectivamente. De fato, como  $f'(x) = -2x$ , tem-se  $f'(-1) = 2$  e  $f'(1) = -2$ , a função é crescente em  $Q$  ( $f'(x) > 0$ ) e decrescente em  $P$  ( $f'(x) < 0$ ).

### 3.2.9 Máximos e Mínimos

**Definição 3.2.2** Considere uma função  $f(x)$  definida num intervalo  $I$ . Denomina-se vizinhança de um ponto  $x_0$ , o intervalo  $V = ]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ , onde  $\epsilon$  é um número real positivo.

Se para todo  $x_0 \in V$  temos que  $f(x) \leq f(x_0)$ , diz-se que  $x_0$  é um **ponto de máximo local** de  $f$ , e  $f(x_0)$  é **máximo local** de  $f(x)$ .

Se para todo  $x_0 \in V$  temos que  $f(x) \geq f(x_0)$ , diz-se que  $x_0$  é um **ponto de mínimo local** de  $f$ , e  $f(x_0)$  é **mínimo local** de  $f(x)$ .

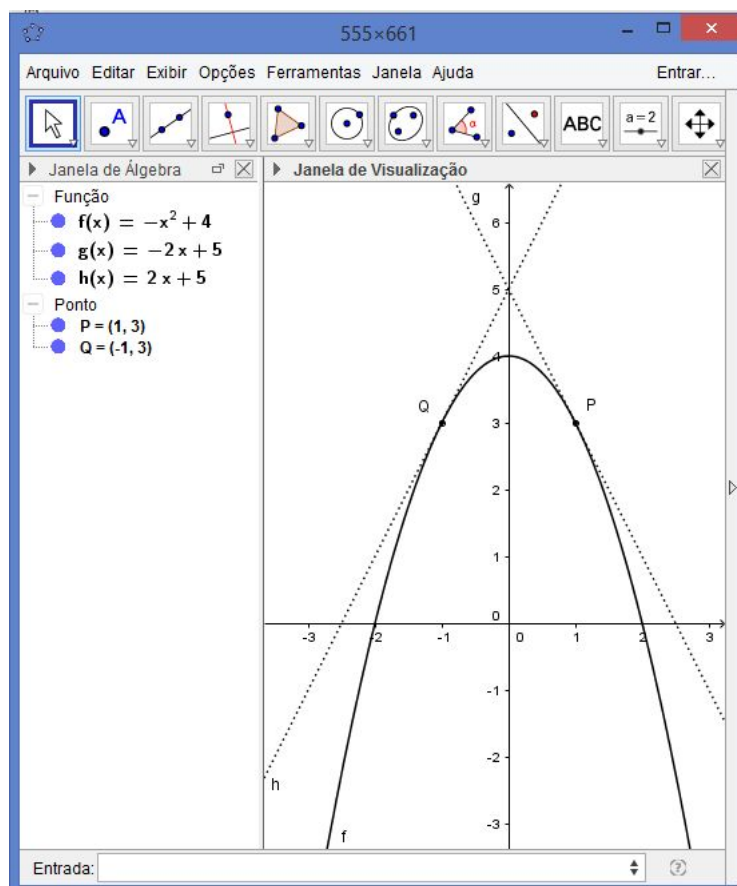


Figura 3.19: Crescimento e decrescimento das funções

Como essas definições referem-se às vizinhanças de um ponto, pode-se ter um máximo local num ponto  $x_1$  menor que um mínimo local em outro ponto  $x_2$ .

A Figura 3.20 mostra o gráfico de uma função onde o ponto mínimo local  $A$  é maior que o máximo local  $B$ .

Por outro lado, tomando o maior valor de  $f(x)$  em todo o seu domínio, e não apenas nas vizinhanças de um determinado ponto, tem-se o **máximo absoluto** ou simplesmente **máximo** de  $f$ . Ao menor valor assumido por  $f(x)$  em todo o domínio, chamamos de **mínimo absoluto** ou simplesmente **mínimo**.

Como agora essas definições se referem a todo o domínio, deve-se considerar domínios como intervalos do tipo  $[a, b]$  e os do tipo  $[a, \infty[$ ,  $] - \infty, a]$  ou  $] - \infty, \infty[$ .

No primeiro caso, determina-se o maior dos máximos locais no intervalo e o compara com os valores de  $f(a)$  e  $f(b)$ , obtendo-se o máximo absoluto no domínio. Comparando-se

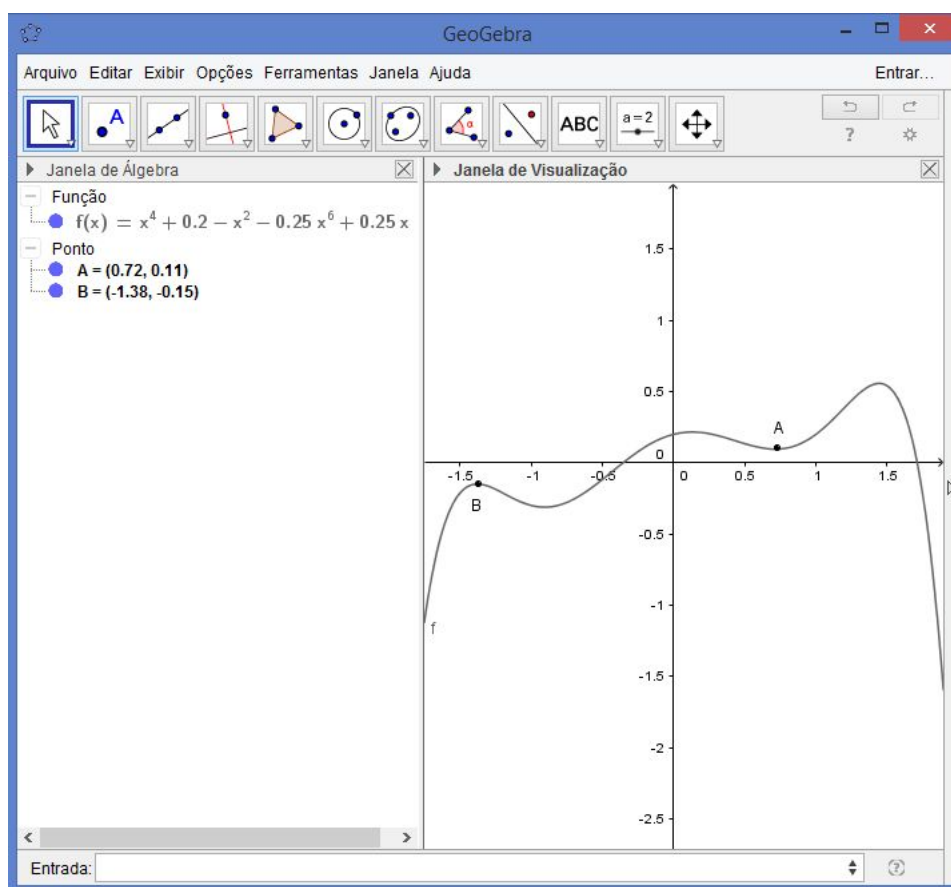


Figura 3.20: Máximo e mínimo locais

o menor dos mínimos locais do intervalo com  $f(a)$  e  $f(b)$ , obtém-se o mínimo absoluto no domínio.

Nos demais casos, os pontos de máximo e mínimo absolutos podem existir ou não. Por exemplo, para a função  $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ , tem-se um máximo absoluto no intervalo  $[-0.71, 0.71]$ , mas no intervalo  $]-\infty, \infty[$ , não há ponto de máximo, conforme mostra o gráfico da figura 3.21.

**Observação 3.2.3** *Se uma função é derivável nos pontos de máximo e mínimo, locais ou absolutos, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função será nulo, pois a reta é paralela ao eixo  $OX$ . Conforme visto, esse coeficiente angular é o valor que a função derivada assume no ponto.*

Assim para determinar os pontos de máximos e mínimos (**pontos críticos**), basta verificar os pontos onde a função derivada primeira se anula ( $f'(x) = 0$ ). No entanto, há funções,

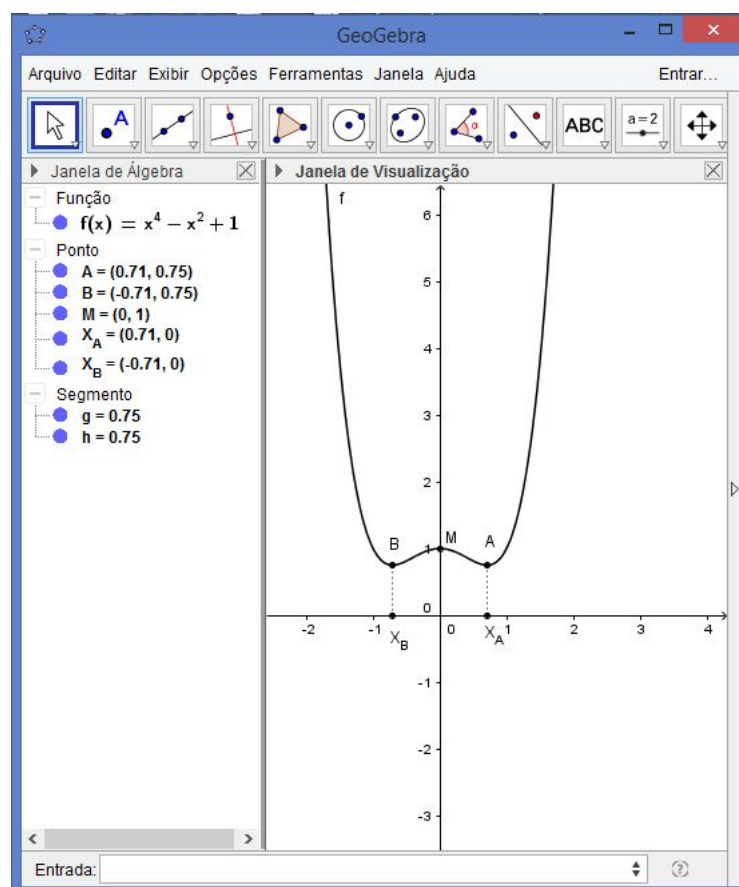


Figura 3.21:  $M$  é ponto de máximo no intervalo  $[X_B, X_A]$ , mas não no intervalo  $] - \infty, \infty[$

como por exemplo  $f(x) = x^3$ , cuja derivada é  $f'(x) = 3x^2$  e se anula em  $x = 0$ , mas não admite ponto de máximo ou mínimo nesse ponto, pois ela é crescente no intervalo  $] - \infty, \infty[$ , ou seja, à esquerda e à direita do referido ponto, conforme mostra a figura 3.22. Esse ponto crítico é denominado ponto de inflexão.

Nesses casos, se a função admitir derivada de segunda ordem (derivada da função derivada ( $f''(x) = (f'(x))'$ ), essa segunda derivada representa a inclinação do gráfico da função derivada primeira. Assim se para pontos à esquerda e à direita do ponto crítico, os valores da primeira derivada passam de positivos para negativos, respectivamente, esse representa um máximo e derivada segunda é negativa na vizinhança do ponto. Se passam de negativos para positivos, temos um mínimo e a derivada segunda é positiva na vizinhança do ponto, se o sinal não se altera, temos o ponto de inflexão e a derivada segunda muda de sinal na vizinhança do ponto.

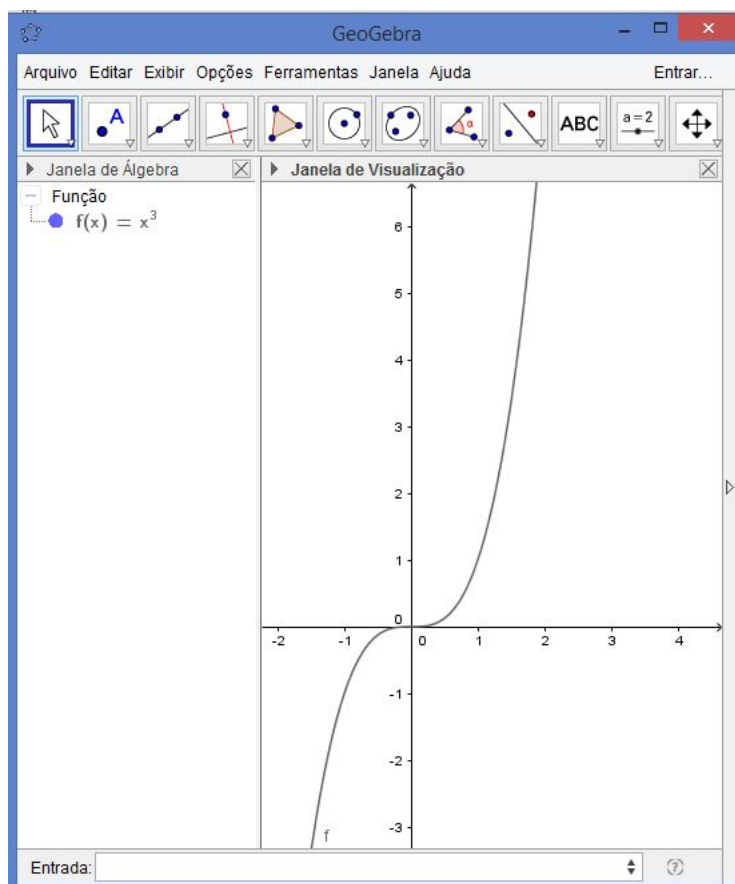


Figura 3.22: Função  $f(x) = x^3$

Então, para um ponto  $x$  na vizinhança do ponto crítico  $x_0$  da função  $f(x)$ , derivável nesse ponto:

$f'(x) < 0$  para  $x < x_0$ ,  $f'(x_0) = 0$  e  $f'(x) > 0$  para  $x > x_0 \implies f''(x) > 0$  e  $f'(x)$  é crescente e  $f(x)$  assume um mínimo local.

$f'(x) > 0$  para  $x < x_0$ ,  $f'(x_0) = 0$  e  $f'(x) < 0$  para  $x > x_0 \implies f''(x) < 0$  e  $f'(x)$  é decrescente e  $f(x)$  assume um máximo local, conforme a figura 3.23.

Lembrando que o que foi dito se refere a uma função derivável, pois há funções como  $f(x) = |x|$ , Figura 3.24, cujo gráfico é anguloso em  $x = 0$ , passando de decrescente para crescente (ponto mínimo), mas não é derivável por não admitir uma única reta tangente nesse ponto, condição de derivabilidade.

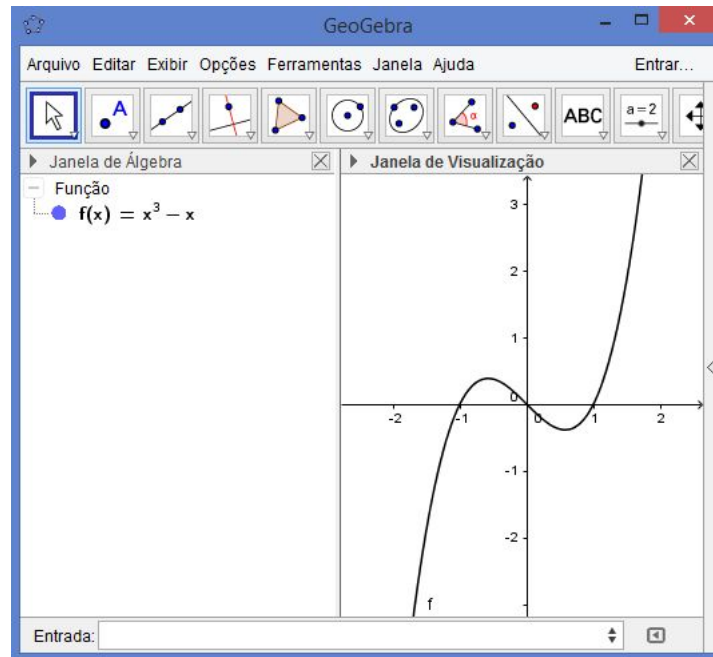


Figura 3.23: Função  $f(x) = x^3 - x$ . Máximo e Mínimo Local

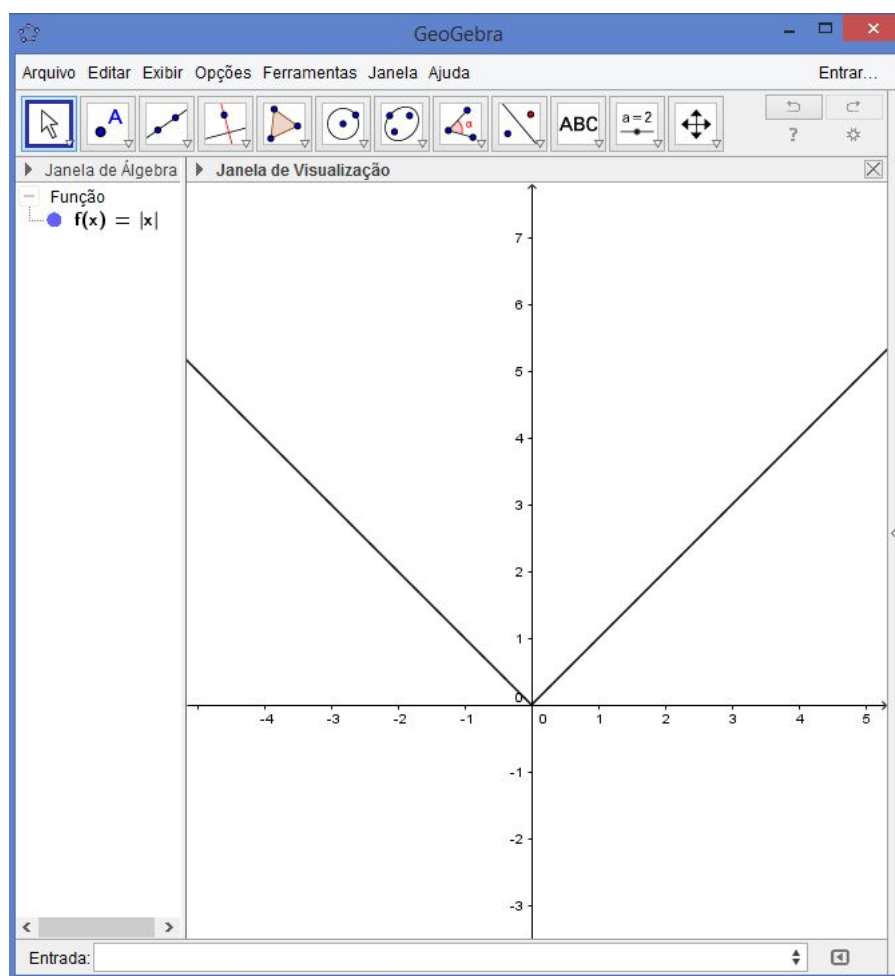
No programa Geogebra, pode-se obter máximo e mínimo de uma função num intervalo determinado, com a entrada "máximo, função, limite inferior e limite superior do intervalo".

### 3.3 Integral

Nesta parte serão introduzidas as definições de Integral Indefinida e Integral Definida. Para tanto, sejam as funções  $F_1(x) = 2x^3$ ,  $F_2(x) = 2x^3 - 1$ ,  $F_3(x) = 2x^3 + 2$  e  $F_4(x) = 2x^3 + \text{sen}\frac{\pi}{2}$ . Como a derivada da função  $F(x) = c$  é nula, segue que  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  e  $F_4$  apresentam a mesma derivada  $F'_i(x) = f(x) = 6x$ , com  $i = 1, 2, 3$  e  $4$ .

A Figura 3.25, comprova como a constante  $c$  translada  $F_i$  ao longo do eixo  $OY$  e como todas têm a mesma derivada, que representa a inclinação da reta tangente em cada ponto do gráfico de  $F_i$ , todas essas retas têm o mesmo coeficiente angular, sendo portanto, paralelas. Assim, qualquer função da forma  $F(x) = 2x^3 + c$ , em que  $c$  é uma constante, apresenta a mesma derivada  $f(x) = 6x$ .



Figura 3.24: Função  $f(x) = |x|$ 

Com o Geogebra, é possível simular, com auxílio de controle deslizante, como a variação da constante  $c$  não altera a inclinação da reta tangente e consequentemente, da derivada, conforme mostra a Figura 3.26.

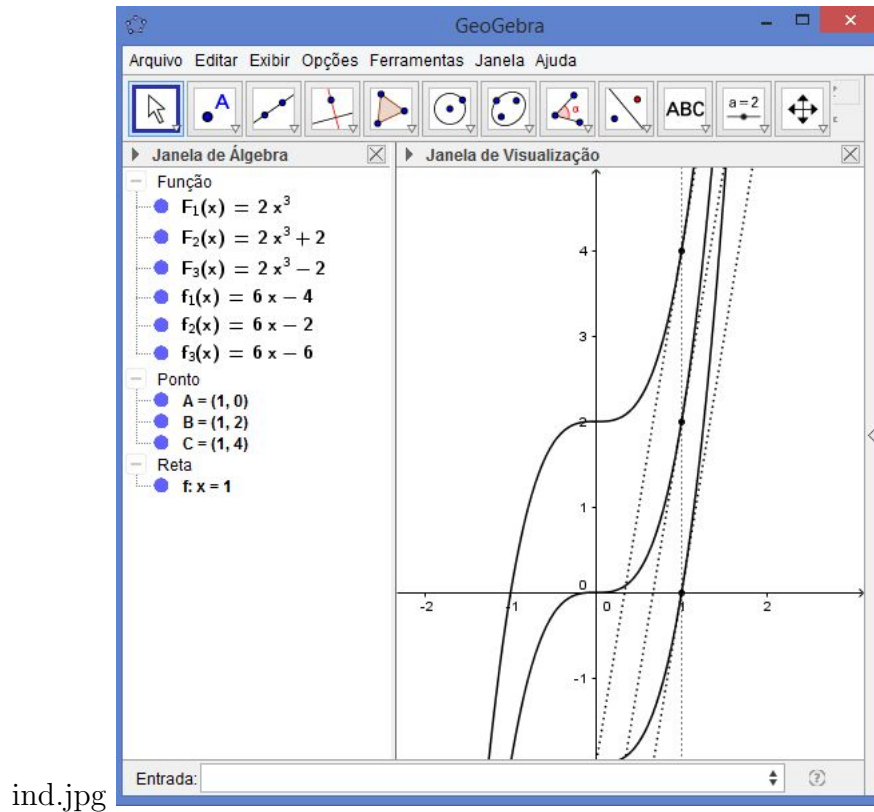


Figura 3.25: Integral indefinida

### 3.3.1 Integral Definida e Integral Indefinida

A Integral Indefinida da função  $f(x)$  é uma função  $F(x)$  que tem como derivada a função  $f(x)$ , podendo ser então representada por qualquer função da forma  $F(x)+c$ , com  $c$  constante.

Em símbolos:

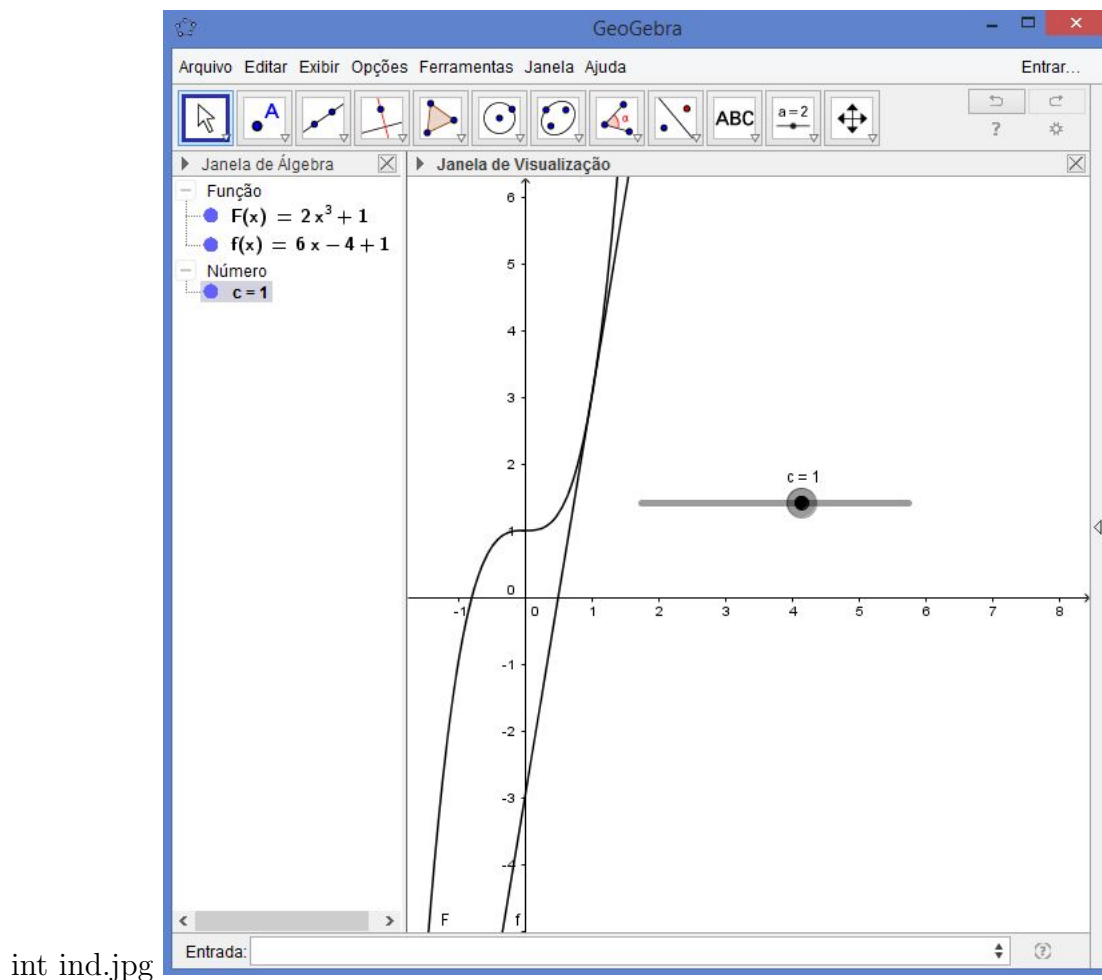
$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Exemplos:

a)  $\int 5x^4 dx = 5 \int x^4 + c = 5 \frac{x^5}{5} + c = x^5 + c$ , pois a função  $F(x) = x^5 + c$  tem como derivada a função  $F'(x) = 5x^4$ .

b)  $\int \cos x dx = \sin x + c$ , pois a função  $F(x) = \sin x + c$  tem como derivada  $F'(x) = \cos x$ .

c)  $\int 2\sin x \cdot \cos x dx = \sin^2 x + c$ , pois a função  $F(x) = \sin^2 x + c$  tem como derivada a função  $F'(x) = 2\sin x \cdot \cos x$



int ind.jpg

Figura 3.26: Animação da Integral Indefinida

Sendo a função  $f(x)$  contínua num intervalo  $[a, b]$ , a variação da Integral Indefinida independe da constante  $c$  e é denominada Integral Definida de  $f(x)$  no referido intervalo e é um número que representa a área do gráfico de  $f(x)$  com o eixo  $OX$ .

Em símbolos:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemplo: As Figuras 3.27 e 3.28 a seguir mostram a Integral Definida da função  $f(x) = \frac{1}{x}$  no intervalo  $[1, 2]$ . A ideia é que a área sob o gráfico pode ser calculada como a soma de áreas de retângulos. Quanto maior o número de retângulos, mais a área calculada se aproxima do valor real, já que com esse procedimento, sempre falta (figura 3.27) ou sobra (figura 3.28) uma parte sob e sobre a curva, respectivamente.

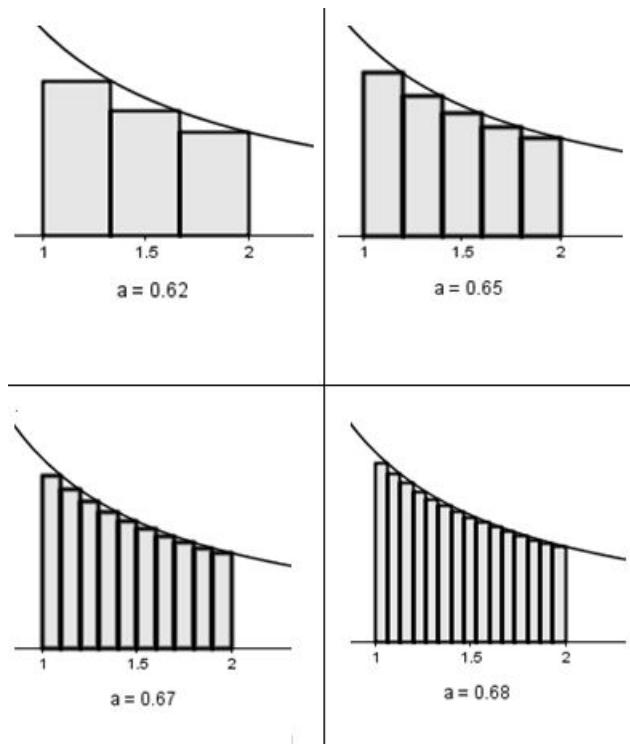


Figura 3.27:  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  por falta

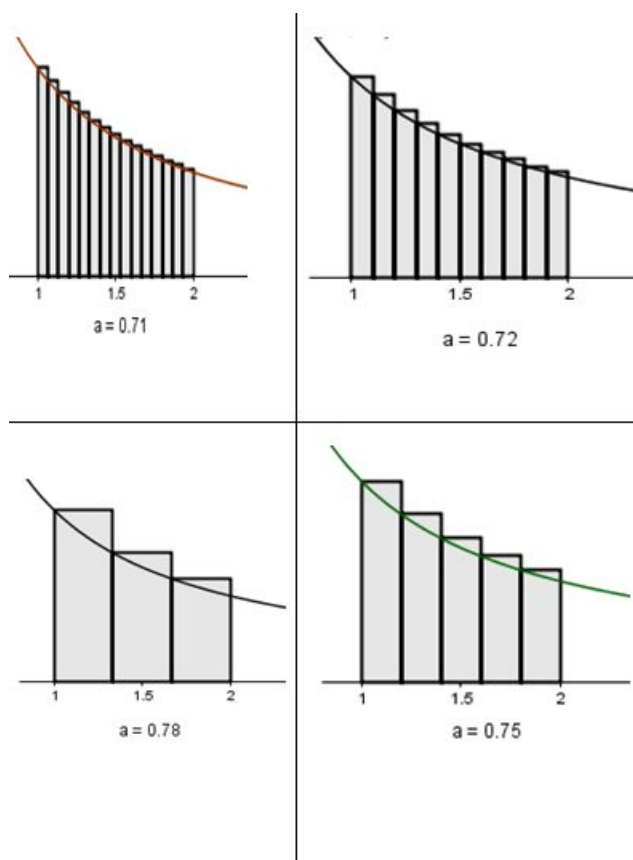


Figura 3.28:  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  por excesso

Na Cinemática, essa propriedade pode ser utilizada para o cálculo do espaço percorrido e da variação de velocidade através das áreas dos gráficos da velocidade e da aceleração em função do tempo, respectivamente.

### 3.3.2 Propriedades da Integral

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções contínuas num certo intervalo e que apresentam integrais indefinidas. Tem-se que:

1. A integral da soma é a soma das integrais.

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx + c,$$

onde  $c$  é constante, e é a soma das constantes das integrais de  $f(x)$  e  $g(x)$ .

Exemplo:

$$\int (x^3 + x^2 + x - 4)dx = \int 2x^3 dx + \int 4x^2 dx + \int x dx + \int (-4)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x + c$$

2. A integral de uma constante multiplicada por uma função é igual a constante multiplicada pela integral da função.

$$\int K \cdot f(x)dx = K \int f(x)dx + c$$

Exemplo:

$$\int 2x^4 dx = 2 \int x^4 dx = 2 \frac{x^5}{5} + c$$

3. Substituição em integrais indefinidas.

Consiste em introduzir uma nova variável  $u$ , com o objetivo de transformar  $\int f(x)dx$  numa integral mais simples, do tipo  $\int g(u)du$ , conforme o exemplo.

$$\int (x^2 + 1)^3 x dx$$

Fazendo  $u = x^2 + 1$ , tem-se  $du = 2x dx$  e  $\frac{du}{2} = x dx$ .

$$\int (x^2 + 1)^3 x dx = \int (u^3) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int (u^3) du = \frac{1}{2} \left( \frac{u^4}{4} + c \right) = \frac{u^4}{8} + c' = \frac{(x^2 + 1)^4}{8} + c'$$

# Capítulo 4

## Aplicação à Física

Neste capítulo faremos uso dos conceitos do cálculo no estudo de alguns fenômenos físicos. As referências utilizadas são Yamamoto(2013)e Halliday(2005).

### 4.1 Movimento Uniforme (MU)

#### 4.1.1 Características

O movimento de um objeto qualquer é dito uniforme quando a velocidade escalar é constante e não nula( $v = cte \neq 0$ ). Como consequência, as distâncias percorridas em intervalos de tempo iguais e sucessivos são iguais.

Como não ocorre acontece variação da velocidade escalar, a aceleração escalar é nula( $a = cte = 0$ ).

Quando o movimento se desenvolve sobre uma trajetória reta, o movimento é denominado Movimento Retilíneo Uniforme(MRU).

Observações:

1) ao definir o Movimento Uniforme, a utilização do termo escalar nas grandezas físicas velocidade e aceleração é importante porque:

- a) nos movimentos curvilíneos o vetor velocidade varia em direção;
- b) a aceleração vetorial não é nula, apresentando o componente normal (centrípeta) que é o responsável pela variação da direção do vetor velocidade.

2) No dia a dia, pode-se encontrar movimentos uniformes, como o movimento dos ponteiros de um relógio, mas dificilmente movimentos retilíneos e uniformes podem ser admitidos ou encontrados.

### 4.1.2 Função Horária

Considere o deslocamento de um móvel com velocidade escalar constante  $v$  sobre uma determinada trajetória, observado a partir do instante  $t_0 = 0$ , no qual a posição ocupada é  $S(0) = S_0$ . A posição num instante posterior  $t > 0$  será  $S(t) = S$  e pode ser obtida através da definição da velocidade instantânea  $v(t)$ .

$$v(t) = \frac{dS(t)}{dt}$$

Integrando ambos os membros da equação em relação ao tempo, no intervalo  $[0, t]$ , segue:

$$\int_0^t v(t).dt = \int_0^t \frac{dS(t)}{dt}, \text{ onde } v(t) = ct e = v$$

$$v \int_0^t dt = dS(t)|_0^t$$

$$v.t|_0^t = dS(t)|_0^t$$

$$v.t - v.0 = S(t) - S(0), \text{ com } S(t) = S \text{ e } S(0) = S_0$$

$$v.t = S - S_0$$

$$S = S_0 + v.t$$

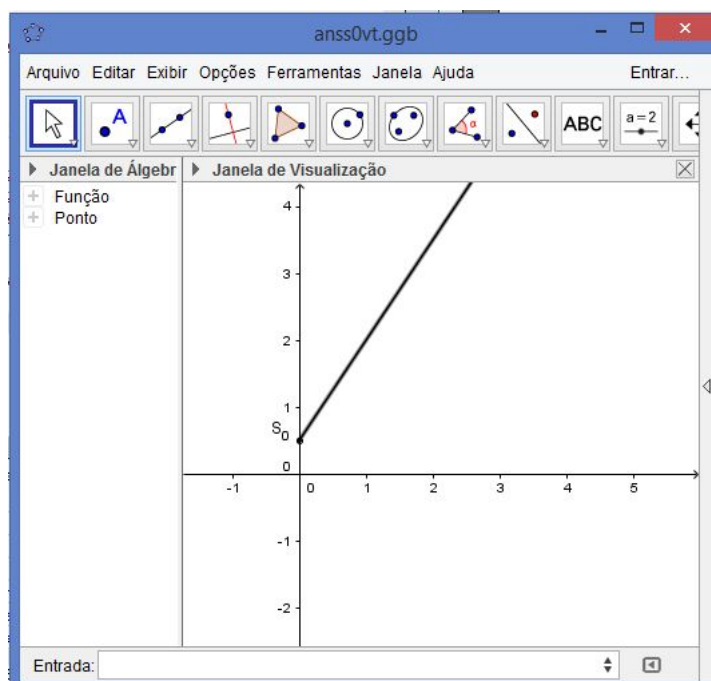
Esta função é denominada função horária do espaço do Movimento Uniforme.

### 4.1.3 Representação Gráfica

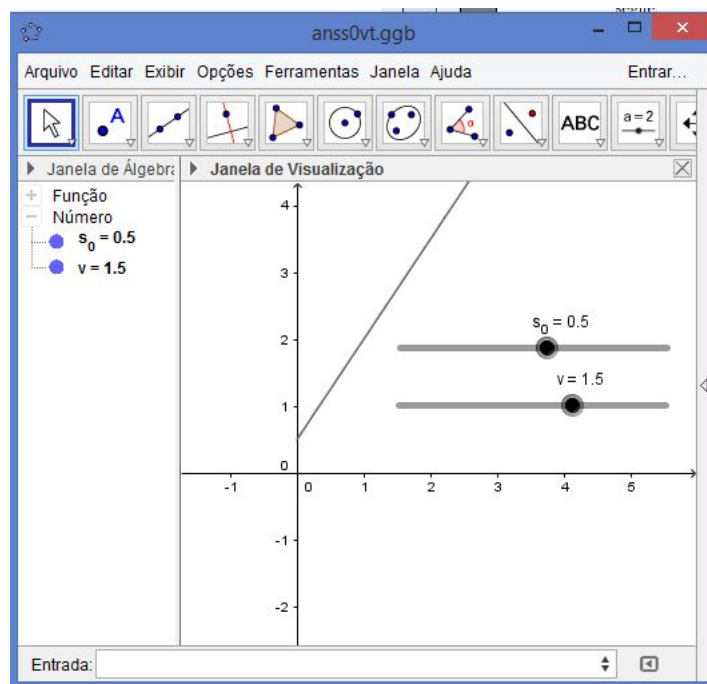
a) Gráfico  $S = f(t)$

Como a função horária do movimento uniforme,  $S = S_0 + v.t$  é do primeiro grau, seu gráfico é uma reta inclinada, cuja inclinação é a velocidade, já que  $v = \frac{dS(t)}{dt}$ .



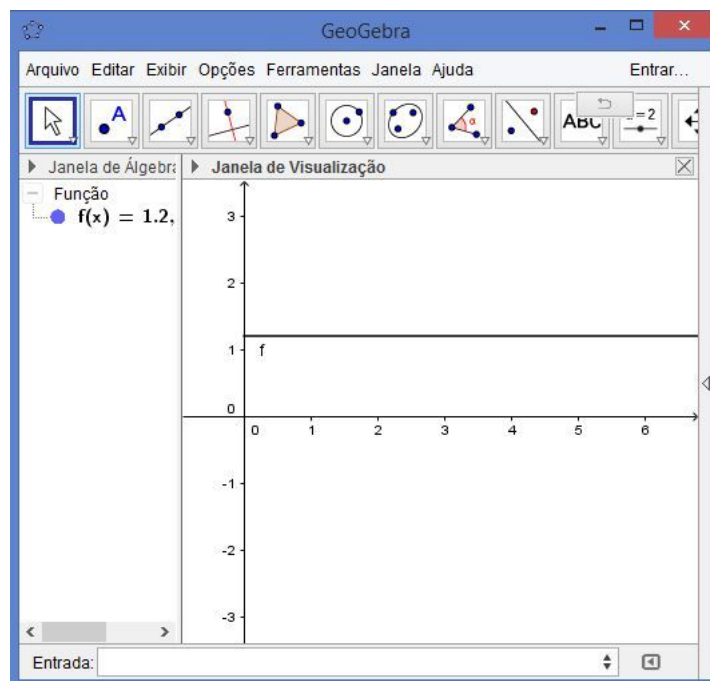
Figura 4.1: Função  $S(t) = S_0 + v.t$ 

A simulação de que a velocidade representa a inclinação do gráfico, pode ser feita com o Geogebra, utilizando controles deslizantes para a velocidade e a posição inicial, no intervalo  $[-5, 5]$ , por exemplo, mostrando movimentos progressivos ( $v > 0$ ) e retrógrados ( $v < 0$ ) como mostrado na Figura 4.2.

Figura 4.2: Animação da Função  $S(t) = S_0 + v.t$ 

b) Gráfico  $v = f(t)$

A Figura 4.3 mostra a velocidade escalar do movimento uniforme de um móvel, em função do tempo. Uma reta paralela ao eixo do tempo, já que é constante.

Figura 4.3:  $v(t) = \frac{dS(t)}{dt} = cte$ 

c) Gráfico  $a = f(t)$

No movimento uniforme a aceleração escalar é nula, portanto, o gráfico é uma reta sobre o eixo dos tempos, conforme a Figura 4.4.

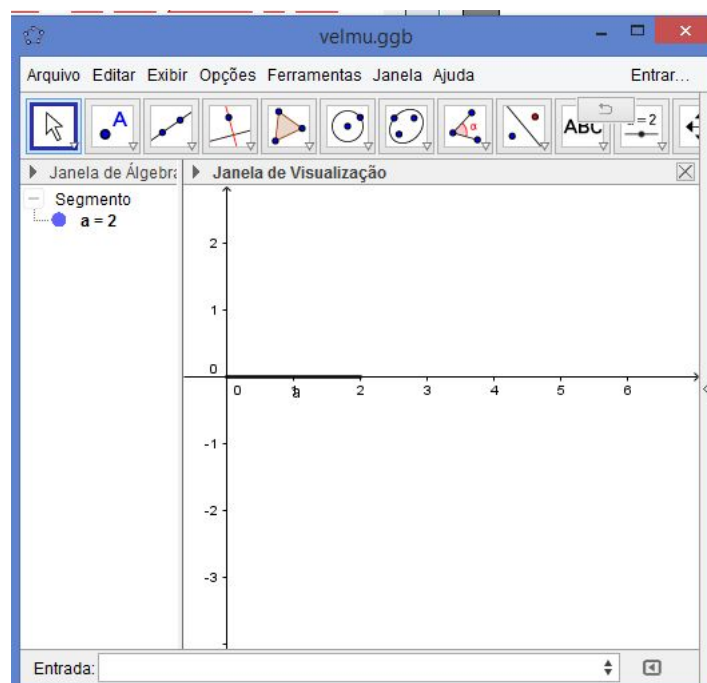


Figura 4.4: Função  $a = cte = \frac{dv(t)}{dt} = 0$

Com o Geogebra, podemos instigar os alunos a inferir sobre um problema clássico da Cinemática, que é o do encontro de móveis, no qual, a partir das posições iniciais e das velocidades constantes de dois móveis sobre uma mesma trajetória, pode-se determinar o instante e a posição de encontro dos mesmos. E ainda, os movimentos podem ser no mesmo sentido ou em sentidos contrários, bastando que nesse último, adotemos as velocidades com sinais contrários. A Figura 4.5 mostra as posições iniciais de uma moto e um carro sobre uma trajetória, com posições medidas em metro e suas velocidades de  $3 \frac{m}{s}$  e  $2 \frac{m}{s}$ , respectivamente. O controle deslizante  $t$  indica o tempo decorrido. A moto alcança o carro no instante  $t = 3$  s, na posição  $X = 9$  m.

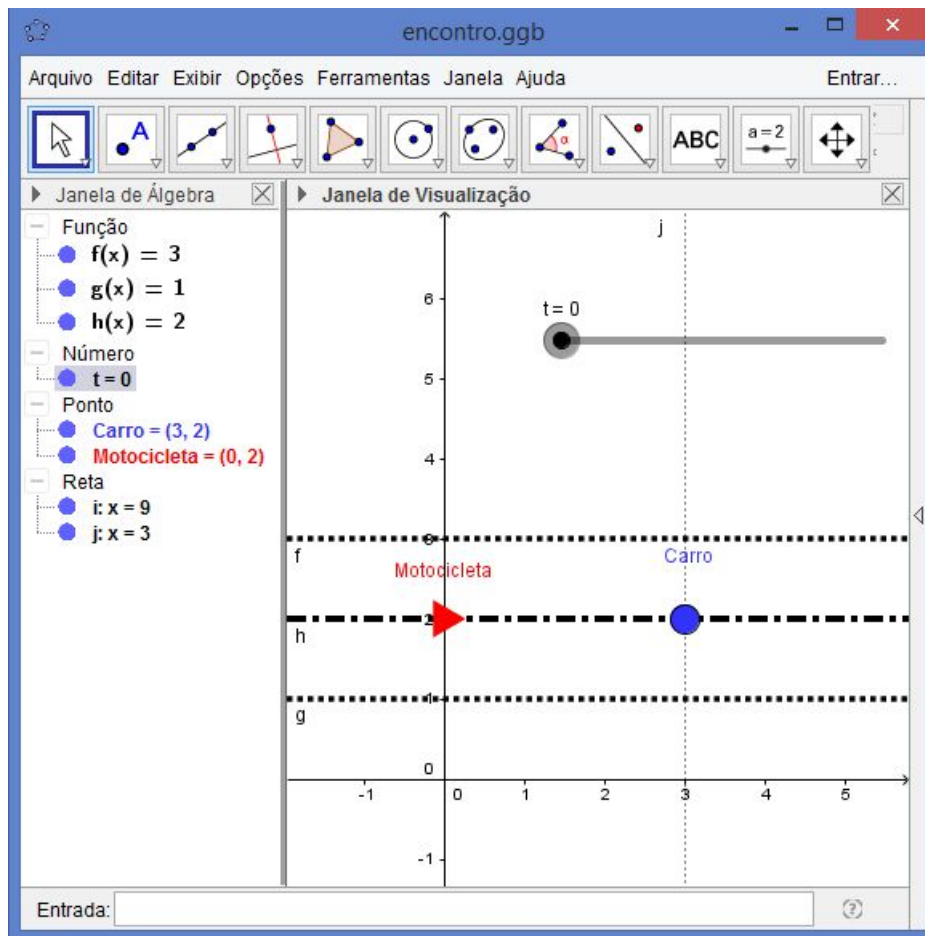


Figura 4.5: Encontro de dois móveis

Posteriormente, o encontro pode ser determinado algebricamente através das funções que caracterizam os movimentos que, nesse exemplo, são: da moto,  $X_M = 0 + 3t$  e do carro,  $X_C = 3 + 2t$ . Como no encontro,  $X_M = X_C$ , pode-se obter facilmente que o encontro acontece no instante  $t = 3$  s e na posição  $X = 9$  m.

## 4.2 Movimento Uniformemente Variado (MUV)

### 4.2.1 Características

O Movimento Uniformemente Variado tem como principal característica, o fato da aceleração escalar ser constante e não nula ( $a = cte \neq 0$ ) e, como consequência, a velocidade

escalar sofre variações uniformes, daí o termo "uniformemente variado". Em intervalos de tempo iguais e sucessivos, o móvel que desloca com MUV percorre distâncias cada vez maiores ou menores, dependendo do movimento ser acelerado ou retardado, respectivamente. Como há variação de velocidade e de posições, uma única função não é suficiente para caracterizar esse movimento.

### 4.2.2 Funções horárias da velocidade e da posição

A aceleração de um movimento mede a taxa de variação da velocidade no tempo sendo, portanto, a derivada da velocidade em relação ao tempo. Analogamente, a velocidade mede a taxa de variação da posição no tempo ou é a derivada da posição em relação ao tempo. No MUV a aceleração é constante (por definição) e a velocidade cresce linearmente com o tempo, como será mostrado a seguir.

Considere o deslocamento de um móvel com aceleração escalar constante  $a$  sobre uma determinada trajetória, observado a partir do instante  $t_0 = 0$ , no qual a velocidade é  $v(0) = v_0$  e a posição é  $S(0) = S_0$ . A velocidade e a posição num instante posterior  $t > 0$  serão  $v(t) = v$  e  $S(t) = S$ , respectivamente, e podem ser obtidas através da definição da aceleração instantânea  $a(t)$  e da velocidade instantânea  $v(t)$ .

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Integrando ambos os membros da equação em relação ao tempo, no intervalo  $[0, t]$ , segue:

$$\int_0^t a(t).dt = \int_0^t \frac{dv(t)}{dt}, \text{ em que } a(t) = \underline{cte} = a$$

$$a \int_0^t dt = dv(t)|_0^t$$

$$a.t|_0^t = dv(t)|_0^t$$

$$a.t - a.0 = v(t) - v(0), \text{ com } v(t) = v \text{ e } v(0) = v_0$$

$$a.t = v - v_0$$

Finalmente,

$$v = v_0 + a.t \quad \text{I}$$

Essa expressão é denominada função horária da velocidade do Movimento Uniformemente Variado.

Integrando ambos dessa equação em relação ao tempo, no intervalo  $[0, t]$ , tem-se:

$$\int_0^t v \cdot dt = \int_0^t (v_0 + a \cdot t) \cdot dt,$$

como  $v \cdot dt = dS$  e  $V_0$  e  $a$  são *ctes*, vem:

$$dS|_0^t = \int_0^t v_0 \cdot dt + \int_0^t a \cdot t \cdot dt$$

$$S(t) - S(0) = v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t \cdot dt$$

$$S - S_0 = v_0 \cdot t|_0^t + a \cdot \frac{t^2}{2} |_0^t$$

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \quad \text{II}$$

Esta é a função horária da posição do Movimento Uniformemente Variado.

Isolando o tempo na equação I e substituindo em II, obtém-se a Equação de Torricelli, que relaciona diretamente a velocidade instantânea com a posição.

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S$$

### 4.2.3 Representação gráfica

a) Gráfico  $S = f(t)$

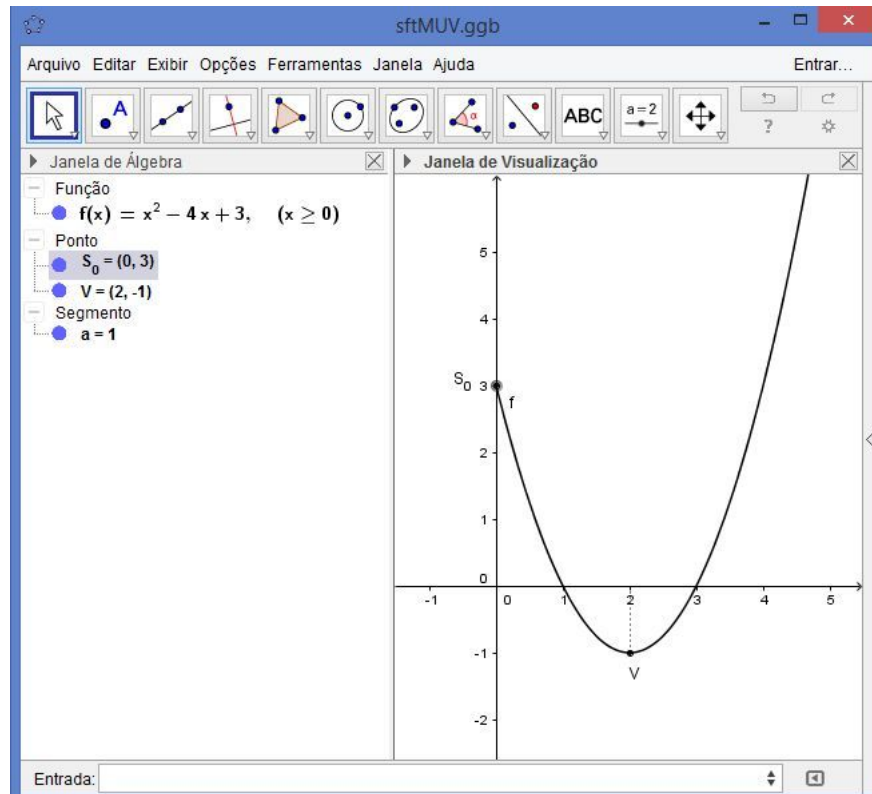


Figura 4.6: Função  $S = s_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$

Pela análise do gráfico, pode-se inferir que a posição inicial é  $S_0 = 3m$ , que ocorre inversão do sentido do movimento em  $t = 2s$  e portanto, a velocidade nesse instante é nula. No intervalo de 0 a  $2s$ , o movimento é retrógrado e retardado e após  $2s$ , o movimento é progressivo e acelerado.

b) Gráfico  $v = f(t)$



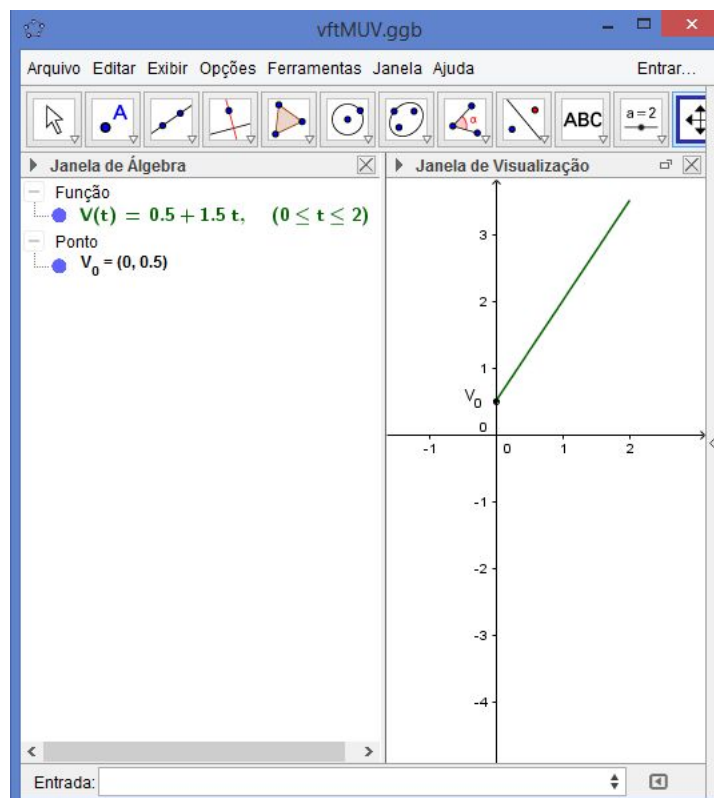


Figura 4.7: Função  $V = f(t) = V_0 + at = \frac{dS(t)}{dt}$

c) Gráfico  $a = f(t)$  No MUV, como a aceleração escalar é constante, seu gráfico é uma reta paralela ao eixo OX.

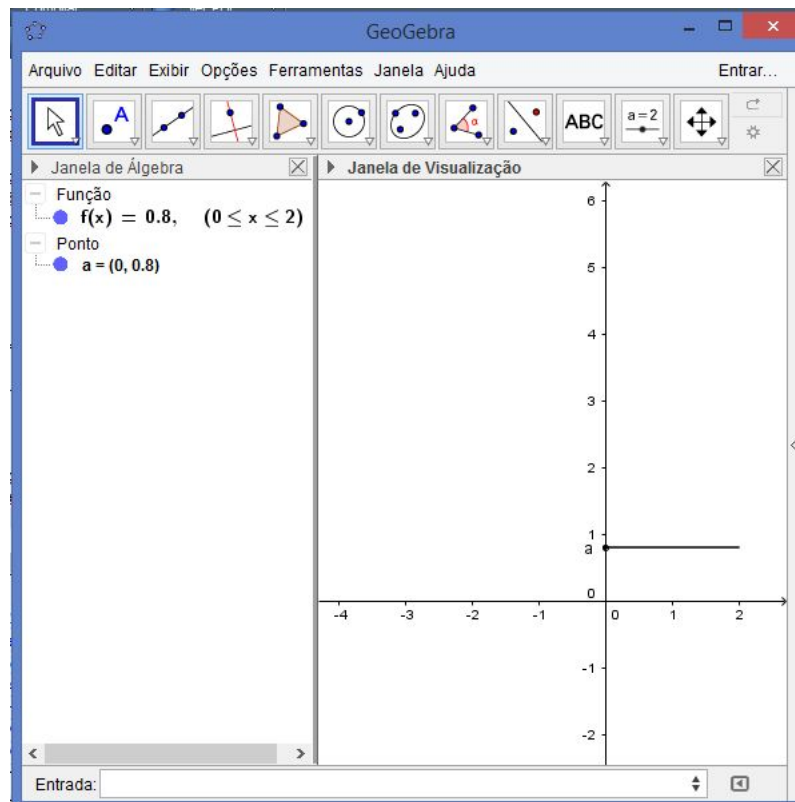


Figura 4.8: Função  $a = cte = \frac{dv(t)}{dt}$

#### 4.2.4 Movimentos verticais no vácuo

Um caso particular de movimento uniformemente variado é o movimento vertical de projéteis próximo à superfície da Terra, estudado e descrito por Galileu Galilei (1564-1642). Considerando pequenas altitudes, a aceleração da gravidade ( $a = g$ ) pode ser considerada constante e, se a resistência do ar puder ser desprezada, o movimento é uniformemente variado e é denominado queda livre. Nesse movimento, se uma partícula for abandonada ( $v_0 = 0$ ) de uma altura  $h$  ( $S_0 = 0$  e  $S = h$ ), em relação ao solo, o tempo de queda é dado por:

$$S = S_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2}$$

$$h = 0 + 0.t + \frac{g.t^2}{2}$$

$$2.h = g.t^2$$

$$\frac{2.h}{g} = t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2.h}{g}}$$

Outra característica desse movimento de queda livre é que tomando intervalos de tempo iguais e sucessivos ( $t$ ) tem-se as distâncias percorridas até os instantes  $t, 2t, 3t, \dots$ , iguais a:

$$S_1 = \frac{g.t^2}{2} \text{ até o instante } t$$

$$S_2 = \frac{g.4t^2}{2} = \frac{4g.t^2}{2} \text{ até o instante } 2t$$

$$S_3 = \frac{g.9t^2}{2} = \frac{9g.t^2}{2} \text{ até o instante } 3t$$

A distância percorrida de 0 a  $t$  é  $S_1 - S_0 = \frac{g.t^2}{2}$ ;

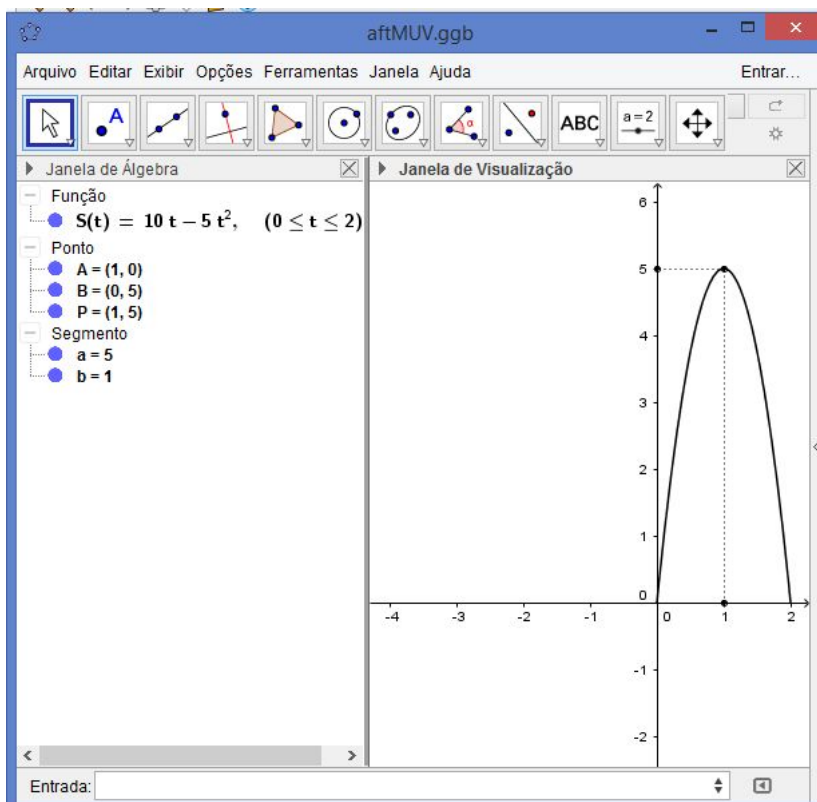
de  $t$  a  $2t$  é  $S_2 - S_1 = \frac{3g.t^2}{2}$ ;

de  $2t$  a  $3t$  é  $\frac{5g.t^2}{2}$

...

Assim, as distâncias percorridas em intervalos iguais e sucessivos para os corpos em queda livre são  $\Delta S$  no primeiro intervalo,  $3\Delta S$  no segundo,  $5\Delta S$  no terceiro etc.

A seguir está representado graficamente ( $S = f(t)$  (figura 4.9),  $V = f(t)$  (figura 4.10) e  $a = f(t)$  (Figura 4.11)) o movimento de um projétil lançado verticalmente para cima, a partir do solo, com velocidade inicial de  $10\frac{m}{s}$  num local onde a resistência do ar pode ser desprezada e a aceleração da gravidade considerada constante e igual a  $10\frac{m}{s^2}$ . Nesse movimento, a altura máxima atingida em relação ao solo é  $5m$ , no instante  $t = 1s$ .

Figura 4.9: Função  $S = f(t)$

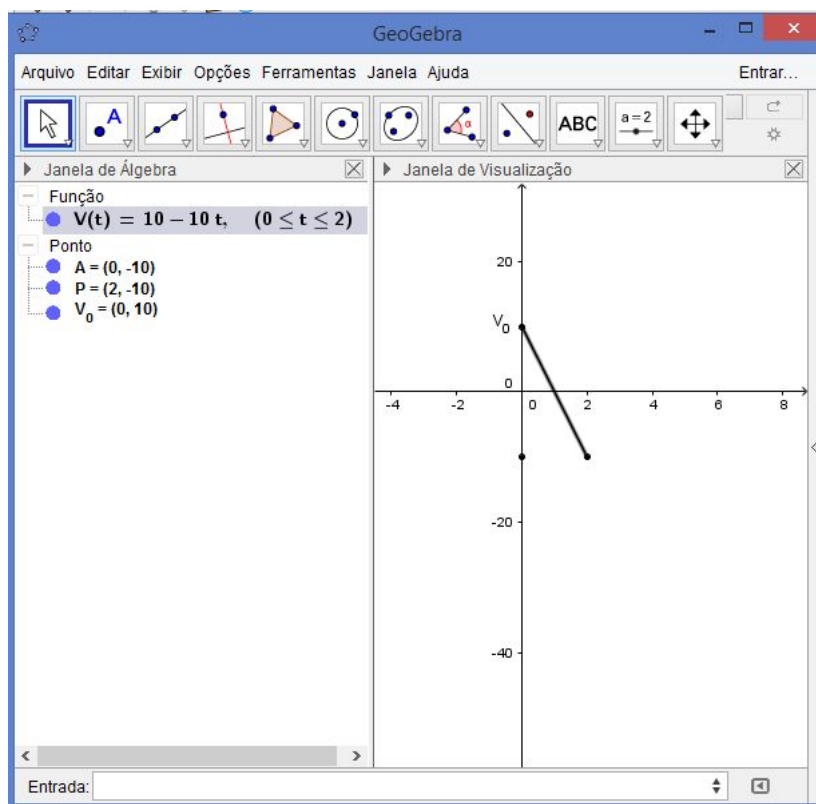


Figura 4.10: Função  $V = V_0 + gt$

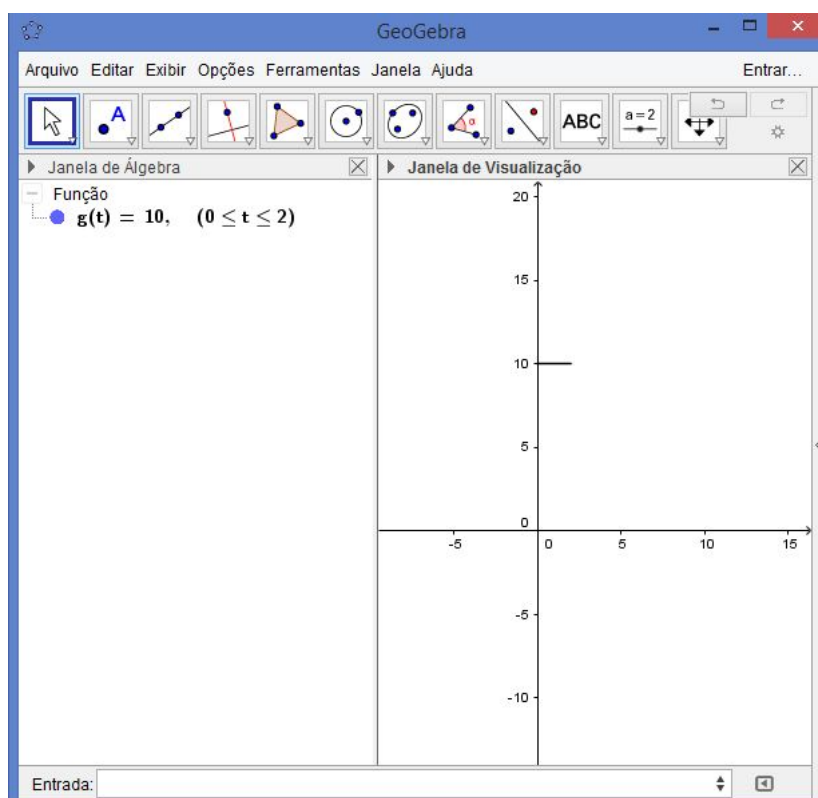


Figura 4.11: Função  $g = cte = 10 \frac{m}{s^2}$

Pode-se ilustrar os movimentos Uniforme e Uniformemente Variado utilizando o Geogebra, como na figura 4.12, para a simulação do Lançamento de uma bomba de um avião, com velocidade constante em voo horizontal, situação em que a influência do ar sobre o movimento da bomba pode ser desprezada. Esse movimento é a composição de um movimento horizontal uniforme e um vertical uniformemente variado, sob a ação da gravidade. Pode-se observar que a projeção do avião sobre o solo segue em MU com a mesma velocidade do avião, de modo que, quando a bomba atinge o alvo, o avião está exatamente acima, na vertical que passa pelo alvo. Os comandos necessários são, a criação do controle deslizante  $a$  variando no intervalo  $[0, 10]$ , por exemplo, os pontos Avião  $(a, 5)$ , Bomba  $(a, 5 - 0.2a^2)$  e Projeção  $(a, 0)$ . Esses pontos são inseridos com uma letra maiúscula qualquer e depois, na opção renomear, alterar para avião, bomba e projeção, respectivamente.

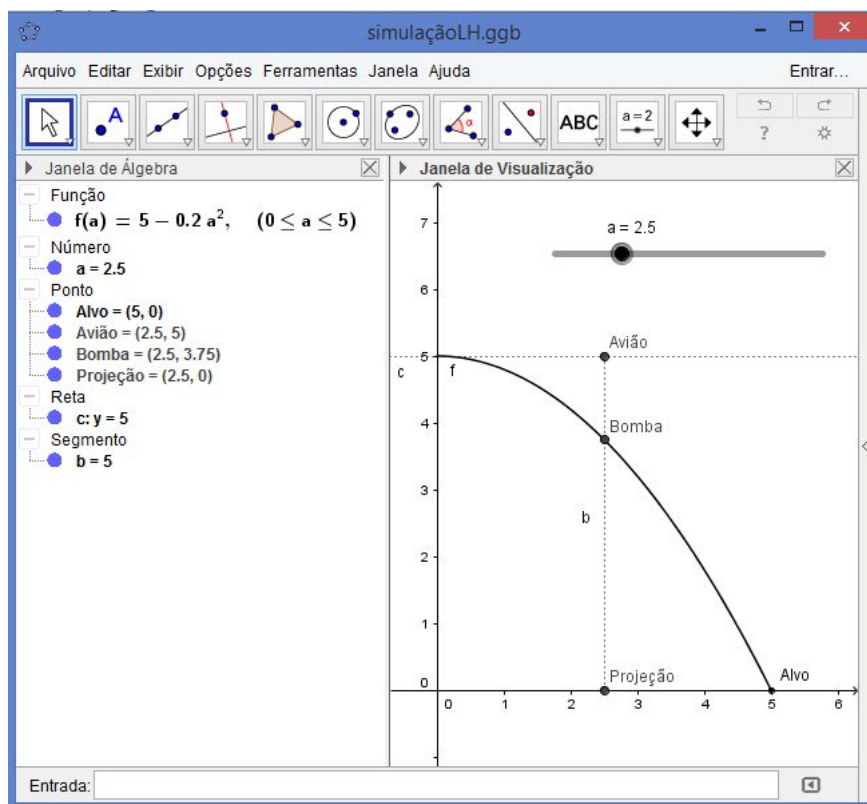


Figura 4.12: Lançamento Horizontal

Podemos simular também, como o tempo de queda, em situações que a resistência do ar é desprezível, é o mesmo para corpos abandonados em repouso de uma certa altura em relação ao solo e corpos arremessados horizontalmente da mesma altura e com diferentes velocidades iniciais. Essas só alteram o alcance horizontal. A Figura 4.13 mostra o movimento dos corpos  $P_1$ , abandonado e  $P_2$  e  $P_3$ , lançados horizontalmente do mesmo ponto, sendo que  $P_3$  com maior velocidade inicial, portanto, atingindo maior alcance.

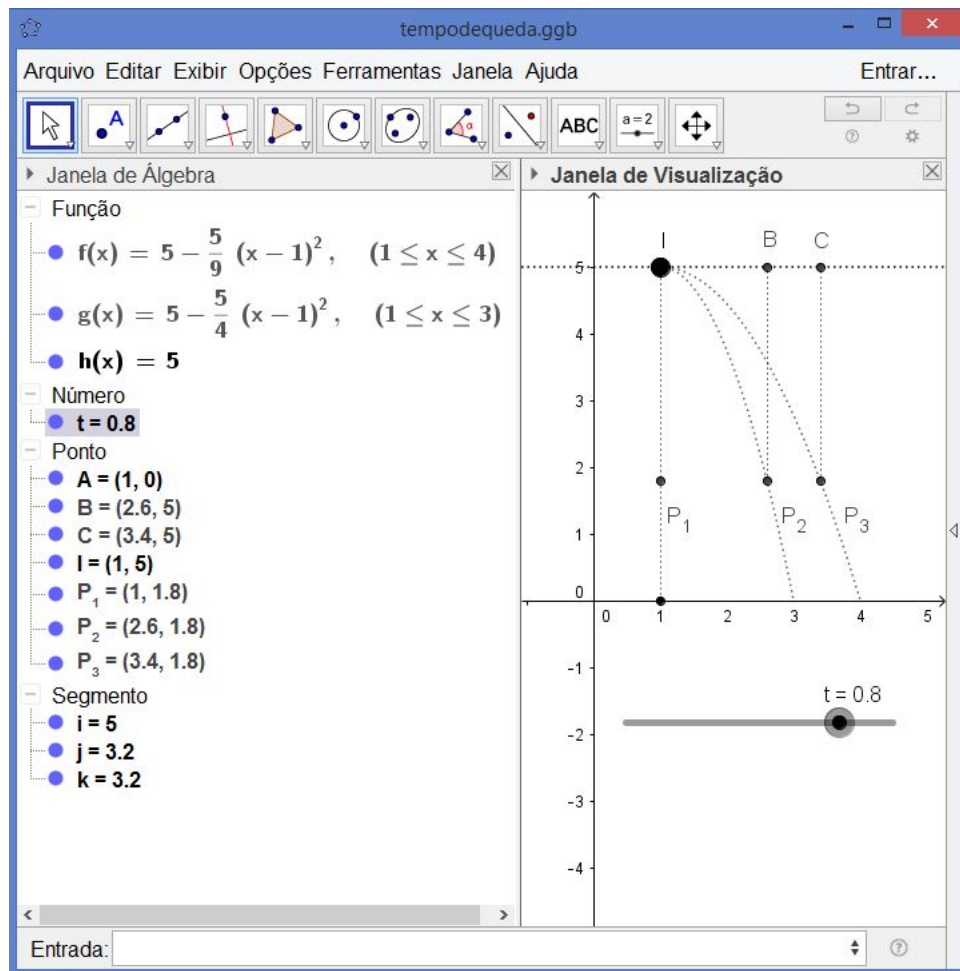


Figura 4.13: Tempo de queda

## 4.3 Movimento Harmônico Simples(MHS)

### 4.3.1 Características

Fenômenos que se repetem em intervalos de tempos iguais são denominados fenômenos periódicos, como as estações do ano, o movimento dos ponteiros de um relógio etc.

Se um corpo desloca para frente e para trás, em intervalos de tempo iguais, sobre uma mesma trajetória, seu movimento é periódico e é denominado oscilatório ou vibratório. Como exemplos, pode-se citar o movimento de um ponto marcado sobre uma corda de violão



vibrando em torno de uma posição de equilíbrio quando a mesma é posta a oscilar, a massa oscilante de um pêndulo e um corpo posto a vibrar preso a uma mola etc.

Esses movimentos periódicos podem ser expressos pelas funções trigonométricas seno e cosseno por isso são denominados harmônicos. Se for mantido indefinidamente, tem-se o Movimento Harmônico Simples (MHS). Na prática, uma corda de violão posta a vibrar, cessa rapidamente seu movimento devido às forças dissipativas (principalmente o atrito). Esses movimentos reais são harmônicos amortecidos. No caso do pêndulo de um relógio, para compensar essa dissipação, utiliza-se uma mola ou corpos suspensos, de modo que o movimento se mantém enquanto há o fornecimento dessa energia extra.

Nos fenômenos periódicos, o tempo gasto para ocorrer uma repetição é denominado período e o número de repetições que ocorrem por segundo, por minuto, por hora etc é denominado frequência. Frequência é, então, o número de repetições de um fenômeno na unidade de tempo. Por exemplo, frequência do batimento cardíaco.

A unidade de medida de frequência no Sistema Internacional (SI) é o hertz (Hz), medindo então o número de repetições por segundo. Uma homenagem a Heinrich Hertz (1857-1894).

Pode-se estabelecer as funções do MHS fazendo uma analogia com um Movimento Circular Uniforme (MCU).

Considere um ponto  $P$  descrevendo um MCU no sentido anti-horário, de raio  $R$  e centro  $O$  num plano vertical, com período  $T$ , frequência  $f$ , velocidade escalar constante  $v$  e velocidade angular constante  $\omega$ , dada em  $\frac{\text{radianos}}{\text{segundo}}$ , ângulo fase  $\varphi$ , conforme a Figura 4.14.

Simultaneamente ao movimento de  $P$ , pode-se considerar o movimento de sua projeção (sombra)  $P'$  sobre o segmento de reta  $\overline{A'A}$ , indo para frente e para trás entre  $A'$  e  $A$ , ou seja, executando um Movimento Harmônico Simples (MHS).

A tabela a seguir apresenta uma analogia entre os dois movimentos, enfatizando as grandezas que são comuns, o que auxilia o estudo do MHS.

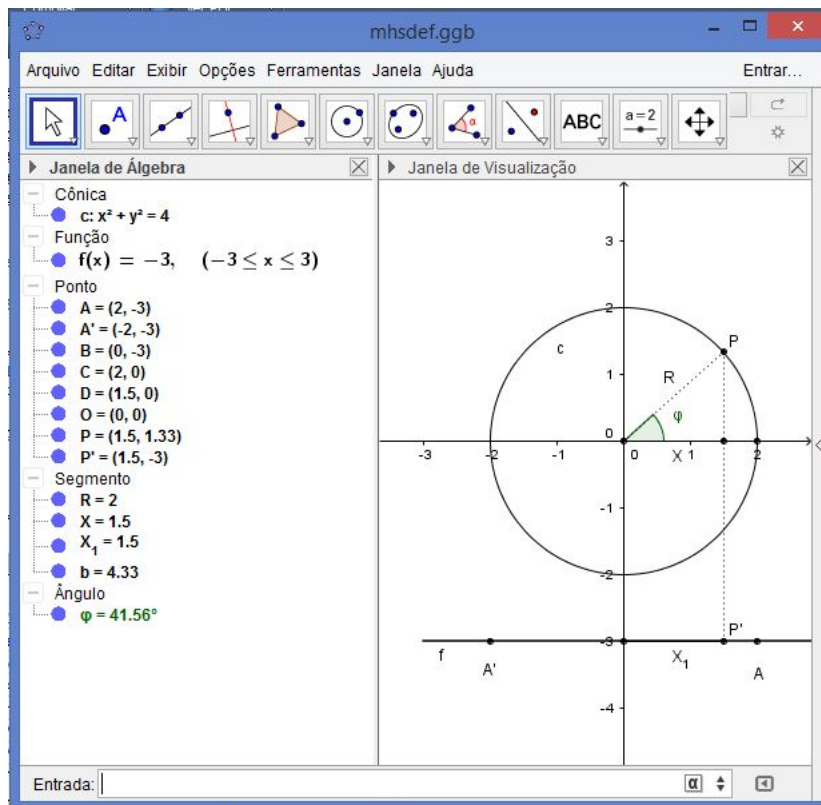


Figura 4.14: MCU e MHS

### 4.3.2 Funções Horárias

Seja  $x = f(t)$ ,  $v = f'(t)$  e  $a = f''(t)$  do MHS

Na Figura 4.14, tem-se que  $\cos \varphi = \frac{x}{R}$

$$x = R \cdot \cos \varphi, \text{ com } R = A \text{ e } \varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t$$

Assim,

$$x = A \cdot \cos(\varphi_0 + \omega \cdot t) \quad \text{I}$$

Que é a equação da elongação em função do tempo ( $x = f(t)$ ). Como  $v = \frac{dS}{dt} = \frac{dx}{dt}$ , vem:

$$v = x' = \omega \cdot A \cdot (-\text{sen}(\varphi_0 + \omega \cdot t))$$

ou

Grandeza	MCU	MHS
período( $T$ ) = tempo gasto:	numa volta	numa vibração (oscilação)
frequência( $f$ ) = $\frac{1}{T}$ = número de:	voltas por segundo(Hz)	vibrações por segundo(Hz)
$R$ = raio	Raio	$A = R$ = amplitude
$\omega = \frac{2\pi}{T}$	Velocidade angular	pulsação
$V = \omega \cdot R$	Velocidade escalar = cte	$V_x = ?$ (Variável)
$a = \frac{V^2}{R} = \omega^2 \cdot R$	Aceleração centrípeta	$a_x = ?$ (variável)
$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t$	Função horária	Função horária
$x$	-	Elongação

Tabela 4.1: MCU e MHS

$$v = -\omega \cdot A \cdot \text{sen}(\varphi_0 + \omega \cdot t) \quad \text{II}$$

Denominada função horária da velocidade do MHS ( $v = f(t)$ ). Finalmente, como  $a = \frac{dv}{dt}$ , obtém-se:

$$a = v' = -\omega \cdot A \cdot \omega \cdot \text{cos}(\varphi_0 + \omega \cdot t)$$

ou

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \text{cos}(\varphi_0 + \omega \cdot t) \quad \text{III}$$

De I e III, obtém-se a equação da aceleração em função da elongação.

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

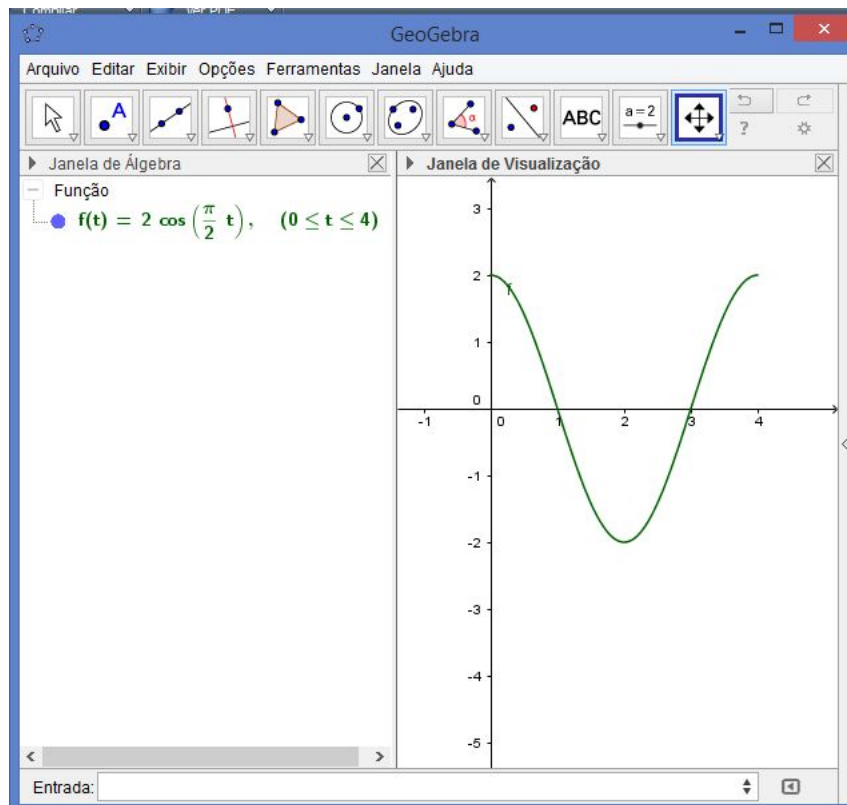
De I e II e pela relação fundamental da trigonometria,  $\text{cos}^2\varphi + \text{sen}^2\varphi = 1$ , pode-se mostrar que:

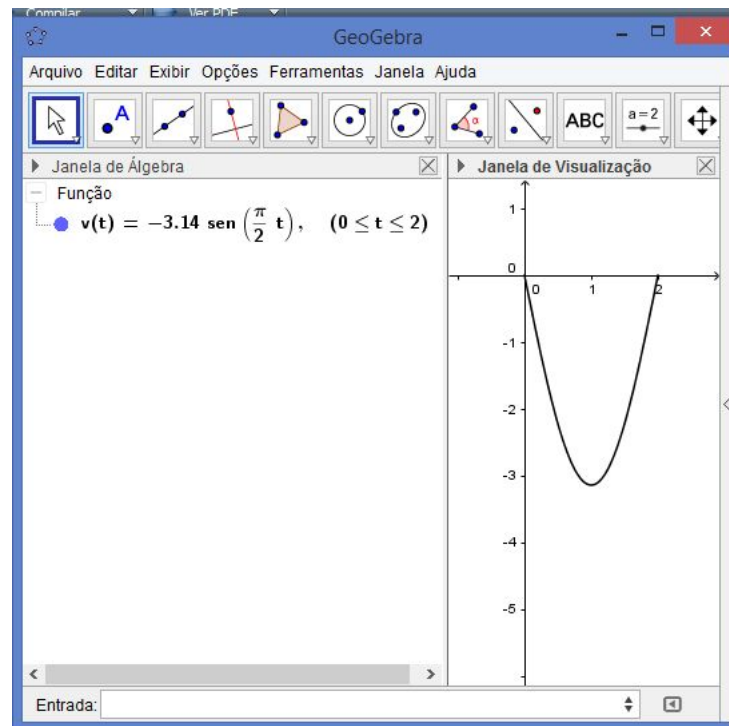
$$v = \pm\omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

### 4.3.3 Representação Gráfica

A seguir, está representado graficamente o MHS executado por uma partícula que oscila entre dois pontos da reta,  $A$  e  $-A$ , conforme a Figura 4.14, separados pela distância de 4 cm. Saindo de  $A$ , em  $t = 0$ , a partícula desloca até  $-A$  e retorna a  $A$  em 4 segundos. Assim, a fase inicial é  $\varphi_0 = 0$ , o período é  $T = 4$  s, a amplitude, 2 cm (0,02 m) e a pulsação é  $\omega = \frac{\pi \text{ rad}}{2 \text{ s}}$ .

Portanto, a equação horária da elongação é  $x = 2.\cos(\frac{\pi}{2}.t)$  (gráfico da Figura 4.15), da velocidade é  $v = -\pi.\text{sen}(\frac{\pi}{2}.t)$  (gráfico da Figura 4.16 ) e da aceleração é  $a = \frac{\omega^2}{2}.\cos(\frac{\pi}{2}.t)$  (gráfico da Figura 4.17).

Figura 4.15: Função  $x = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$

Figura 4.16: Função  $v = -\pi \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$

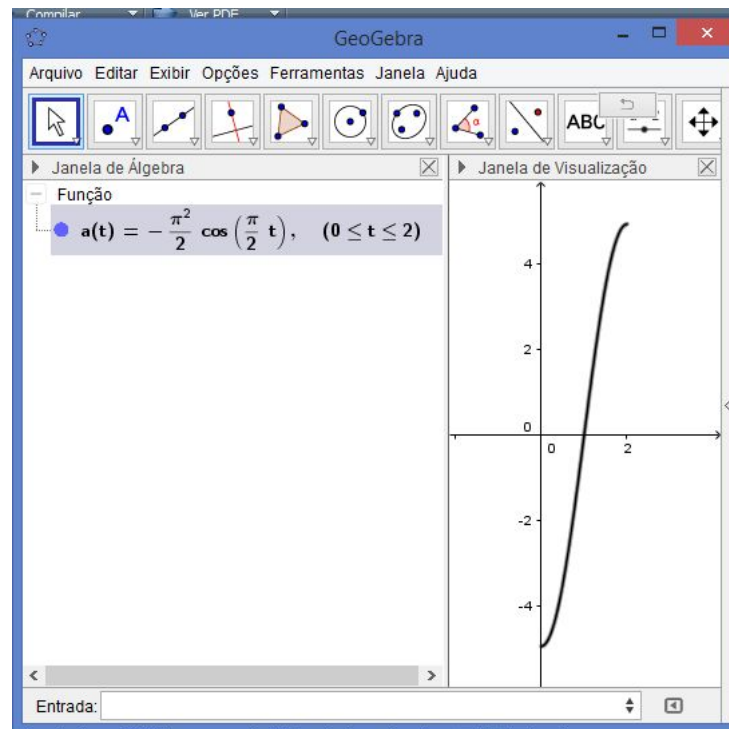


Figura 4.17: Função  $a = \frac{\omega^2}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$

Podemos simular o MHS com uma animação de um sistema massa-mola no Geogebra e ainda mostrar a representação gráfica da velocidade e da aceleração como no exemplo apresentado na Figura 4.18, bastando inserir as entradas: controles deslizantes  $a$   $[0.12, 0.94]$  e  $K$   $[0, 1]$ , Função  $[0.25 \sin(2\pi a/k), 0, 3k], k = |\sin(2\pi a)|, 0 \leq K \leq 1$  e os pontos  $A = (3k, 0)$ ,  $B = (3k, 0.5)$ ,  $C = (3k, -0.5)$ ,  $D = (3k + 1, -0.5)$  e  $E = (3k + 1, 0.5)$  e as funções da velocidade e da aceleração.

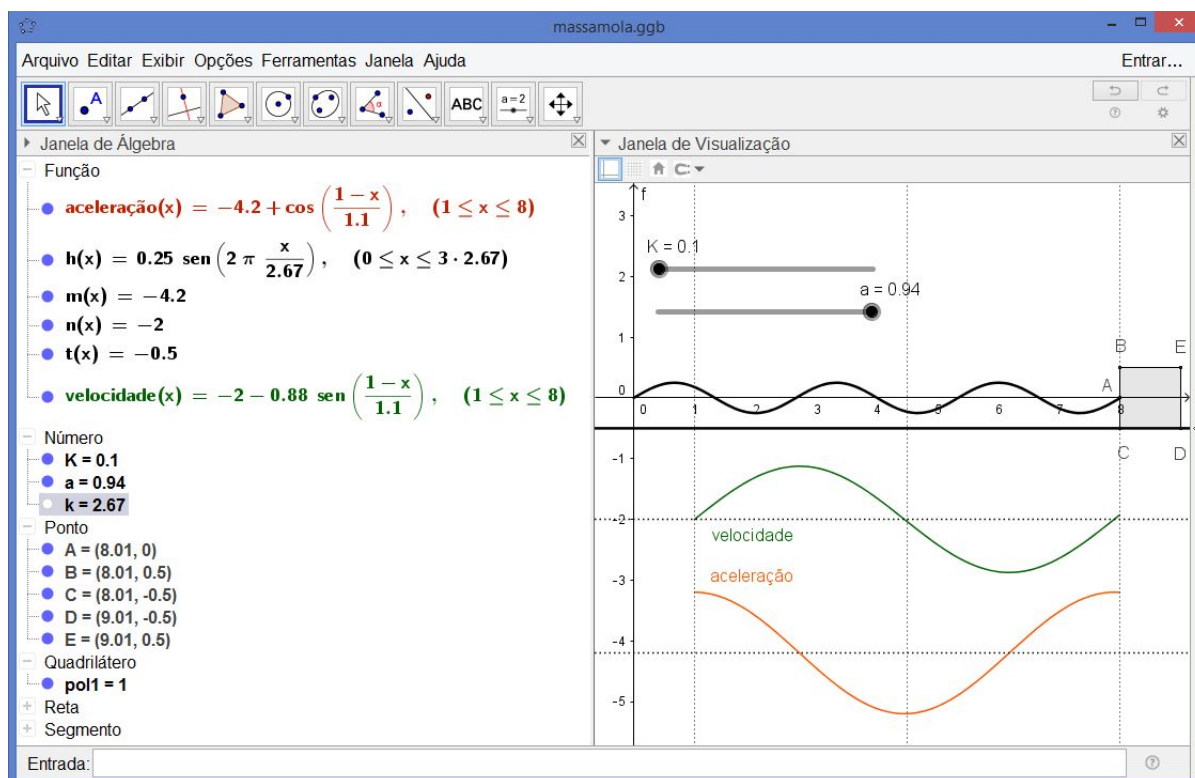


Figura 4.18: Sistema massa-mola



# Capítulo 5

## Considerações Finais

Este trabalho foi proposto com o objetivo de apresentar uma proposta de abordagem para o ensino da Física no Ensino Médio, almejando melhores índices de aproveitamento dos alunos nessa disciplina e também em Matemática, devido ao carácter interdisciplinar das atividades a serem desenvolvidas. Compreendemos que a interdisciplinaridade auxilia o professor nas frequentes indagações dos alunos frente as necessidades de se estudar determinadas ciências, em especial a Matemática. Buscamos uma abordagem que auxilie no processo de aprendizagem da Física, de maneira que seus conceitos sejam priorizados e a Matemática apareça como uma ferramenta que auxilie na compreensão.

Diante da ideia de se utilizar a abordagem proposta neste trabalho, esperamos que a aprendizagem ocorra por parte dos alunos e que abordagens nessa direção sejam utilizadas por professores nesse nível escolar.

A utilização de softwares de geometria dinâmica, como o Geogebra, permite analisar o comportamento de funções em determinados pontos. Essa característica, por exemplo, auxilia na compreensão da ideia de limite de uma função de maneira simples e interessante. Nessa perspectiva, conceitos podem ser compreendidos sem que se utilize de fórmulas ou demonstrações teóricas difíceis de serem compreendidas por alunos do Ensino Básico.

Nesse caminho, se o professor buscar estratégias que relacionem os conteúdos às situações mais concretas, a partir das quais os alunos realizem uma reflexão e criem sentido, acreditamos que um dos obstáculos ao estudo de Física será vencido. No entanto, há outro fator preponderante nesse estudo: o preparo do professor que ministra o conteúdo em Ensino Médio. Nessa direção, ressaltamos a necessidade de se investir na formação desse profissional, com objetivo de melhorar a qualidade do ensino de Física.

Por fim, acreditamos que a abordagem de trabalho aqui apresentada, para o ensino de

Física, a qual é aliada à experimentação e à visualização e que utiliza ferramenta computacional, haverá boa aceitação pelos estudantes, por ser um recurso dinâmico e repleto de aplicabilidade para os conceitos matemáticos, conseqüentemente auxiliará na aprendizagem de fenômenos físicos.

Acreditamos ainda que por meio de aplicações e experimentações, tem-se que pode haver reversão do quadro de dificuldades que os estudantes apresentam em relação às disciplinas que envolvem cálculos, tanto para o Ensino Médio quanto para o Superior.

# Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, G. **Limites e Derivadas no Ensino Médio?** - Revista do Professor de Matemática nº 60. Lopes, 1999.
- [2] ÁVILA, G. **Por que não ensinamos Cálculo?** p 1 – RPM - 1991.
- [3] AZEVEDO, M. M. **Uma introdução do cálculo no ensino da física** – Profmat – Universidade Federal do Tocantins – Palmas – 2013.
- [4] BRASIL. Ministério da Educação. Lei 9394/96. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário oficial da União, 23 de dezembro de 1996.
- [5] FRESCKI, F.B. – PIGATTO, P. **Dificuldades na aprendizagem de cálculo diferencial e integral na educação tecnológica: proposta de um curso de nivelamento** - I Simpósio Nacional de Ensino de Ciências e Tecnologia – UTFPR – 2009.
- [6] IEZZI, G.; DOLCE, O.; TEIXEIRA, J.C.; MACHADO, N. J.; GOULART, M. C. C., SILVEIRA, L.R.; MACHADO, A. Santos - **Matemática** – 2<sup>o</sup> grau – Atual Editora Ltda – São Paulo – Brasil – 1980.
- [7] LEWIS, K. **Cálculo e Álgebra Linear**. LTC – 1972.
- [8] LOPES, A. **Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, n.26/27, p.123-146, jun./dez. 1999. (Matemática Universitária)
- [9] PENTEADO, M.G. Redes de trabalho: expansão das possibilidades da informática na educação matemática da escola básica. In: BICUDO, M.A.V. ; BORBA, M.C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 283-295, 2004.

- [10] RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; WALKER, J. / LTC . **Fundamentos de Física I** - 2005 - 7ª edição.
- [11] SANTOS, D. A. T. **A Inclusão do Cálculo Diferencial e Integral no Currículo do Ensino Médio** - 2006.
- [12] SANTAROSA, M. C. P.; MOREIRA, M. A. **O Cálculo nas aulas de Física na UFRGS: Um Estudo Exploratório** – Rio Grande do sul - 2011.
- [13] SANTAROSA, M. C. P. - **Investigações em Ensino de Ciências** – V18(1), pp. 215-235, 2013.
- [14] SANTAROSA, M. C. P. **Os lugares da Matemática na Física e suas dificuldades contextuais: Implicações para um sistema de ensino integrado.** (Relations between Mathematics and Physics and their contextual difficulties: implications for integrated education system) [maria.cecilia@ufrgs.br] Pós-Graduação em Ensino de Física, Instituto de Física Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Porto Alegre, Brasil. Volume 18 número 1.
- [15] SILVA, G. H. G.. **Que possibilidades pedagógicas os professores consideram ao se trabalhar com o software Geogebra no ensino da Matemática em uma abordagem investigativa?** - Rio Claro – SP.
- [16] SPINA. C. O. C. **Modelagem Matemática no processo de ensino aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 117p., 2002.
- [17] STEWART, J. **Cálculo.** Vol 1 – Ed Saraiva - 7ª edição – 2013.
- [18] YAMAMOTO, Kazuhito; FUKU, Luiz Felipe. **Física para o Ensino Médio.** Vol 1- Ed. Saraiva - 3ª edição - 2013 - São Paulo.