Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

O ensino das funções exponenciais: uma proposta alternativa por meio de contextualização, modelagem matemática e recursos tecnológicos

Matheus Moreira Costa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Sidineia Barrozo

2016

510 Costa, Matheus Moreira
C837e O ensino das funções exponenciais: uma proposta alternativa por meio de contextualização, modelagem matemática e recursos tecnológicos/ Matheus Moreira Costa- Rio Claro: [s.n.], 2016.
113 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Sidineia Barrozo

1. Funções Exponenciais. 2. Aprendizagem por Modelagem. 3. Recursos Tecnológicos. 4. Contextualização do Conteúdo. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Câmpus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Matheus Moreira Costa

O ENSINO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS: UMA PROPOSTA ALTERNATIVA POR MEIO DE CONTEXTUALIZAÇÃO, MODELAGEM MATEMÁTICA E RECURSOS TECNOLÓGICOS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Sidineia Barrozo
Orientadora

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
DM - IGCE - UNESP

Prof. Dr. Daniel Fernando Bovolenta Ovigli
DECMT - ICENE - UFTM

Rio Claro, 05 de Agosto de 2016

Para Ariane.

Agradecimentos

À SBM e à CAPES pela organização e financiamento do programa.

À minha orientadora professora Sidineia pela paciência e pelos ensinamentos.

A todos os professores da UNESP pela dedicação e carinho com que sempre me trataram.

Aos meus amigos do IFSP: Ofélia, Marina, Cida, Renato, Vicente, Vágner, Paulo Massoni, Paulo Henrique, Lucélia, Ayumi, Orlando, Vinícius, André, Emanuel, Alberto, Jonny, Carol, Ragnar e todos os demais que tanto me ajudaram nesse período.

Aos amigos de infância e os de graduação: Guilherme, Borghi, Lelo, Pedro Henrique, Willi, Márcio, Henrique, Victor, Gustavo Duarte, Daniel, Ricardo Separovic.

Aos amigos do PROFMAT: Alessandro, Marcílio, Frank, Marcelo, Gabriel, Lima, Paulo e demais colegas que sempre me ajudaram e me incentivaram.

À minha tia Waléria por ter me acolhido e tanto me auxiliado nos anos que passei em São Paulo.

Aos meus pais Wilma e José Carlos por todo o sacrifício feito para que eu pudesse atingir os meus objetivos e pudesse ter educação e conforto. Por tudo que sempre fizeram por mim e por serem grandes pais.

À minha querida sogra e segunda mãe Mariland.

Ao Lino e à Glória pelo carinho de sempre.

À minha amada esposa Ariane, por sempre acreditar em mim, por toda a ajuda essencial que me deu no trabalho, por nunca me deixar desistir, pela paciência, amor e carinho. Amo muito você!

"Fácil é sonhar todas as noites.
Difícil é lutar por um sonho."
Carlos Drummond de Andrade

Resumo

A Matemática, apesar fazer parte do cotidiano do aluno, tanto explicitamente quanto de forma mais sutil, é normalmente taxada de difícil compreensão e aparece como vilã entre as componentes curriculares das escolas. Tentando compreender essa situação e seus motivos, estudamos trabalhos que tratam do ensino de Matemática, as dificuldades do processo e seus problemas. Focamos especialmente no tema dessa dissertação: as funções exponenciais. Com o intuito de elaborar uma proposta para um melhor aprendizado do tema, após essa revisão da bibliografia, decidimos por propor uma sequência de atividades que utilizasse como principais ferramentas os problemas contextualizados, a modelagem matemática e os recursos tecnológicos. Esperamos que o trabalho possa contribuir para o aprendizado de alunos e professores.

Palavras-chave: Funções Exponenciais, Aprendizagem por Modelagem, Recursos Tecnológicos, Contextualização do Conteúdo.

Abstract

Mathematics, nevertheless it's part of the student's routine, whether explicitly or in a more subtle way, is usually labeled as the abstruse one, the villain among the elements of the schools curriculum. Trying to understand this situations and its reasons, we've studied assignments regarding to the teaching of Mathematics, process difficulties and its matters. We've focused specially on the theme of this essay: exponential functions. In order to elaborate a proposal for a better learning of the theme, after the literature review, we've decided to propose a sequence of activities that using contextualized problems, the mathematical modeling and the technological resources as its main tools. We hope that the work can contribute to the learning of students and teachers.

Keywords: Exponential Functions, Modeling Learning, Technological Resources, Contextualization of the Contend.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A dificuldade que muitos estudantes brasileiros têm com o aprendizado da Matemática é bastante preocupante. Essa condição é facilmente verificada quando analisamos os resultados das mais diversas avaliações e pesquisas.

O resultado do último "Programa Internacional de Avaliação de Alunos" (PISA, na sigla em inglês), por exemplo, mostra o baixo rendimento dos jovens brasileiros na disciplina. Coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), o programa aplica de 3 em 3 anos uma prova a estudantes de 15 a 16 anos que estejam cursando do sétimo ao nono ano do ensino fundamental ou qualquer série do ensino médio, em várias partes do mundo, com questões de Matemática, leitura e Ciências. Na edição de 2012 (a última com resultados já divulgados), em Matemática, o Brasil ficou na 58ª posição, entre os 65 países participantes, sendo que 87,4% dos estudantes brasileiros que fizeram a prova tiveram um rendimento considerado insuficiente (OECD, 2013).

Algumas pesquisas mostram também que essa dificuldade é levada até a fase adulta. Mesmo depois concluir os estudos, os brasileiros ainda apresentam dificuldades em se relacionar com conteúdos ligados à Matemática, como afirma o instituto "O Ciclo da Matemática do Brasil", coordenado pelo professor Dr. Flávio Comim da UFRGS, que divulgou uma prévia de um estudo que fez no país com 2632 adultos (maiores de 25 anos), sobre Matemática. Nesta prévia, publicada por Paulo Saldaña em 01 de novembro de 2015 no jornal "O Estado de São Paulo", 65% dos entrevistados disseram ter tido dificuldades em Matemática quando estudavam e 60% do total disseram que não gostavam da disciplina. Mais ainda, 43% dos entrevistados consideram Matemática como a disciplina que mais odiavam. A pesquisa também mostrou que a maioria não consegue fazer operações matemáticas simples: 73% não conseguem fazer cálculo de média aritmética; 63% não conseguem resolver problemas envolvendo porcentagens; 75% não entendem frações e 69% não sabem fazer contas com taxas de juros (SALDAÑA, 2015).

A disciplina aparece como uma vilã entre as componentes da grade curricular das escolas e, ao que parece, também persiste como um grande empecilho na vida dos adultos. Afinal, qual é a importância da Matemática na vida das pessoas? O quanto este aprendizado insuficiente pode atrapalhá-las?

1.1 O cidadão, a Matemática e o fracasso escolar

Para responder estas perguntas é necessário lembrar que as primeiras concepções matemáticas surgem de registros arqueológicos em cavernas que remontam desde 2400 a. C. Nos primórdios, era uma ferramenta para organizar sua vida, que era basicamente agrícola (contar rebanho, planejar plantio, calcular divisões de terra e de colheita). Assim, a Matemática há muito tempo está presente na vida do homem (EVES, 2004).

Contudo, a relação do homem com a Matemática nem sempre foi a mesma. A medida que a sociedade adquiria conhecimentos sobre o meio em que estava inserida e começava a sistematizar essas informações, a sua relação com a Matemática aprimorava-se e adequava-se aos novos contextos. Inicialmente era utilizada apenas para servir às necessidades do cotidiano do homem. Hoje ela está inserida nas mais diversas áreas do conhecimento, com inúmeras aplicações. Podemos dizer que a Matemática está ligada intrinsecamente com tudo que fazemos ao nosso redor e a compreensão de sua linguagem é importante para que consigamos entender nossa realidade e interagir criticamente na sociedade que vivemos, ou seja, respondendo as perguntas deixadas no final da seção anterior, aprender Matemática é importante na formação de um cidadão crítico e sua aprendizagem insuficiente pode excluir o sujeito de partes importantes de sua vida como o trabalho, a cultura e a sociedade.

Para assegurar que todos os cidadãos tenham a mínima formação para desenvolver requisitos que levem a vivenciar plenamente o seu exercício da cidadania, é necessário um conjunto leis e normas para certificar que todos tenham as mesmas condições dentro de uma sociedade. A Lei nº 9.394, sancionada dia 20 de dezembro de 1996, denominada Leis de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), veio regulamentar o sistema educacional dentro dos princípios presentes na Constituição Brasileira.

No primeiro artigo, a LDB prevê que a educação executada através de ambientes formais de ensino devem compreender “os processos formativos que se desenvolvem na vida familiar, na convivência humana, no trabalho, nas instituições de ensino e pesquisa, nos movimentos sociais e organizações da sociedade civil e nas manifestações culturais”, isto é, a educação deve abranger aspectos relevantes do meio social e do mundo do trabalho, dando a formação necessária para o exercício da cidadania e, conforme o artigo 22, isso deve ser proporcionado dentro da educação básica (ensinos fundamental e médio).

O currículo trabalhado nas escolas deve proporcionar acesso de todos à totalidade dos recursos culturais relevantes para a intervenção e participação responsável na vida social (BRASIL, 1999). Dentre esses recursos, está presente a Matemática por desenvolver métodos que destacam a construção de estratégias, a comprovação e a justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia criada por sua capacidade de criar desafios.

> "A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. Esta visão opõe-se àquela presente na maioria da sociedade e na escola que considera a Matemática como um corpo de conhecimento imutável e verdadeiro, que deve ser assimilado pelo aluno. A Matemática é uma ciência viva, não apenas no cotidiano dos cidadãos, mas também nas universidades e centros de pesquisas, onde se verifica, hoje, uma impressionante produção de novos conhecimentos que, a par de seu valor intrínseco, de natureza lógica, têm sido instrumentos úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos da maior importância."(BRASIL, 1999, p. 24).

A Matemática, assim como tudo que é ensinado nas escolas, foi elaborada, estudada e pensada pelo homem, isto é, a Matemática é uma construção humana e, sendo assim, ela deve ser apresentada e entendida como tal. A orientação dos PCN é que todas as disciplinas da grade curricular do ensino fundamental e médio devem fazer parte de um currículo que valorize as situações cotidianas, desenvolvendo a criatividade e uma postura crítico-investigativa.

Contudo, aparentemente muitos dos pontos citados pelos PCN não estão sendo executados plenamente. Um dos indicativos DE que essa execução não é satisfatória é o baixo desempenho em Matemática. Um estudo que tenta explicar essa questão é o de Maia e Cruz (2006) os quais, em seu trabalho, fizeram entrevistas com 528 sujeitos (professores e alunos) com perguntas que levassem a descobrir quais eram os motivos que, em suas opiniões, os levava ao baixo desempenho em Matemática. As respostas foram englobadas em duas situações possíveis:

- Problemas intrínsecos aos alunos: a ausência de fatores genéticos e razões de natureza orgânica que auxiliariam no aprendizado da disciplina (genialidade e dom);

- Problemas externos aos alunos: questões sociais e econômica interferindo no êxito escolar.

Podemos perceber que essa dicotomia ainda prevalece no discurso dos atores do meio escolar, levando à criação de mitos que estão extremamente arraigados nas opiniões populares que podem influenciar no aprendizado de estudantes, fatores esses que podem diminuir suas autoestimas e consequentemente o seu rendimento na disciplina. É inconcebível que uma ciência como a Matemática, que sempre esteve lado-a-lado nas manifestações culturais e na realidade cotidiana do homem e que está inserida na escola por meio de um currículo planejado, seja inalcançável para alguns que sintam não possuir certas aptidões natas para tal, mas esse é infelizmente o pensamento de muitos alunos.

Não são só os alunos que pensam assim. Para muitos pais, a dificuldade do filho em aprender Matemática é normal, pois eles também tinham as mesmas dificuldades. Muitos pais assumem essa falácia com naturalidade diante dos filhos, como se o baixo desempenho, na disciplina, seja encarado como algo natural, fazendo com que a Matemática assuma o pódio do difícil e inacessível, que ultrapassa gerações e que nunca mudará, de acordo com essas concepções. Tudo isso faz com que os estudantes não consigam identificar se o que sentem é medo, gerado por esses mitos, ou se é apenas uma dificuldade em determinados conteúdos. Assim, muitas vezes, não conseguem superar essa dificuldade, nem tem motivação para tal, afinal sempre ouviram que é algo muito difícil e para poucos, e são levados ao fracasso escolar (ZACARIAS, 2008).

> “É um processo que só tende a se tornar crônico, devido ao fato de o indivíduo desenvolver uma resistência cada vez maior à decisão persuasiva como argumenta Ajzen (2001). Assim tornam-se vãos os esforços dos professores em tentar convencer os alunos de que a Matemática é importante. Em consequência, os alunos vão decair em seu aproveitamento nessa disciplina, ou vão procurar manter o rendimento habitual, motivados, todavia, por outros fatores, estranhos ao prazer de aprender Matemática. E com um custo emocional muito caro” (LOOS, 2003, p. 221)

Todavia, não são só apenas essas as dificuldades no aprendizado da Matemática. A seguir apresentaremos outros problemas neste processo.

1.2 Dificuldades no aprendizado da Matemática

Além das dificuldades já apresentadas, o professor de Matemática enfrenta outras dificuldades para o ensino da disciplina, por algumas características dela própria. Markarian (2004) cita algumas destas características:

a) **Prestígios do saber matemático e os temores que gera:** o bom desempenho em Matemática é geralmente associado com uma inteligência e sabedoria fora do normal, intrínseca à pessoa, e não uma aptidão desenvolvida na escola. O aluno que apresenta bom rendimento na disciplina é considerado especial, proprietário de um dom extraordinário e é prestigiado por seus colegas e professores. Por outro lado, os alunos que não obtém rendimento satisfatório já são taxados de incapazes e fracassados. Geralmente são mais retraídos e sentem que não poderão ocupar papel importante nas atividades ou ocupações de destaque;

b) **Memória com detalhes:** o conhecimento matemático exige uma memorização sistemática e detalhada de muitos dados: as tabuadas, os valores de algumas funções (como as logarítmicas e trigonométricas, por exemplo), o significado de alguns símbolos, equivalência entre diferentes unidades de medida, fórmulas de áreas e volumes, etc. Os alunos que possuem dificuldades de memorizar essas informações, com uma aula tradicional, dificilmente acompanharão raciocínios mais complexos e resolverá exercícios que envolvam essas ações;

c) **Procedimentos padronizados:** o saber matemático também exige a realização de um número muito grande de operações e rotinas que devem ser aplicadas na ordem correta e de forma precisa. Nessas operações incluem-se propriedades de uso sistemático. A falta dessa capacidade gera uma grande dificuldade em saber o que fazer com objetos matemáticos usuais e como resolver operações;

d) **Linguagens, símbolos e padrões:** o aprendizado da Matemática exige o conhecimento de uma linguagem e de símbolos próprios e específicos que não são presentes no cotidiano dos estudantes. Esses elementos que foram decisivos no progresso da ciência, paradoxalmente podem torná-la mais inacessível;

e) **Lógica e conceitos:** as cadeias de raciocínio são uma das questões principais que o aluno deve aprender para obter sucesso em Matemática. O seu bom aprendizado inclui raciocínios corretos, mas isso é impossível se os objetos de raciocínio não estiverem bem definidos. Por isso, um grau avançado de conceituação é essencial. A capacidade de resolver problemas está fortemente ligada a esses dois elementos: conceituação (intepretação do problema) e rigor lógico (em sua resolução);

f) **Necessariamente estimativo:** a resolução de problemas, além do aspecto lógico e de conceituação, exige também a necessidade de se estimar resultados e descartar soluções improcedentes;

g) **Caráter cumulativo:** o aprendizado matemático possui um caráter cumulativo do conhecimento. Esse aspecto é particularmente sentido pelos professores dos ciclos finais do ensino. As lacunas acumuladas, incluindo as carências de informação e sistemática, geram muitas dificuldades no ensino-aprendizado de novas ideias.

O professor de Matemática precisa enfrentar essas características e buscar alternativas para que seus estudantes consigam compreendê-la. Porém, muitas vezes, os docentes utilizam métodos que fazem com que essas dificuldades se acentuem.

Courant e Robbins (2000) consideram que alguns profissionais de Matemática são responsáveis pelas dificuldades de aprendizagem, por muitas vezes, utilizarem métodos repetitivos, problemas descontextualizados - que não conduzem a uma real compreensão ou maior independência intelectual - e pela ênfase excessiva em abstrações.

Santos (2010) destaca outro problema nos métodos de ensino de alguns docentes:

> "Observa-se que, geralmente, o ensino da Matemática se restringe ao uso do quadro, giz e livro didático. As aulas são meramente expositivas, sendo o assunto desenvolvido na seguinte sequência: definição, exemplos e exercícios, repetições dos exemplos. Acredita-se que este procedimento reduz a aprendizagem da Matemática à memorização de conceitos e algoritmos. O aluno é levado a conceber a Matemática como uma disciplina cujo único objetivo é aplicar regras logicamente organizadas e sem nenhuma utilidade prática" (SANTOS, 2010, p. 54).

Ainda falando sobre as dificuldades no aprendizado da Matemática, como o tema desse trabalho são as funções exponenciais, buscamos alguns autores que tentaram identificar quais são os maiores problemas na compreensão de funções. Sierpinska (1992), por exemplo, identificou que muitos estudantes têm dificuldades em fazer ligações entre as diferentes representações de funções (fórmulas, gráficos, diagramas, descrições verbais, etc).

Outro autor a ser destacado é Rezende (2003) que, em sua tese de doutorado, constatou que um dos grandes problemas no ensino de funções está relacionado com a ideia de variabilidade que, em sua opinião, deveria ser trabalhada na escola desde as séries iniciais tendo em vista a sua naturalidade, mas isso não ocorre. O autor destaca que compreender que a variação de uma grandeza depende da variação da outra é um aspecto importante no estudo do conceito de função, mas que se torna incompleto do ponto de vista epistemológico, se não estudarmos como ocorre esta variação, isto é, se não conseguimos dar qualidade e quantificar este processo de variação. O autor afirma que muitos professores apresentam o conceito de funções de forma a parecer ser apenas consequência do desenvolvimento de técnicas algébricas.

Feltes (2007) em sua dissertação de mestrado procurou entender as principais dificuldades dos estudantes no aprendizado de potências e funções exponenciais. A autora acredita que os principais problemas com as exponenciais estão diretamente ligados a um aprendizado insatisfatório de potenciação e radiciação. A autora destacou que as grandes dificuldades nesses temas ocorrem quando se trabalha com expoentes negativos, com as propriedades da potenciação e com problemas, pois em seu estudo ela verificou que muitos livros didáticos apresentam potências e raízes sem relacionar a parte algébrica com situações práticas.

Mas quais métodos um professor pode utilizar na tentativa de reduzir as dificuldades de aprendizado da Matemática, em especial no tema funções exponenciais? A seção a seguir traz algumas sugestões encontradas na literatura estudada, cujo objetivo é nos auxiliar na reflexão sobre o tema.

1.3 Métodos alternativos para o ensino da Matemática

Para que pudéssemos refletir sobre as melhores maneiras de se ensinar Matemática, em especial as funções exponenciais, buscamos os documentos oficiais e vários trabalhos sobre o tema.

Destacamos inicialmente os PCN (1999). O documento destaca a importância que a Matemática deve ter para os estudantes por ajudar a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo e, ao mesmo tempo, desempenhar um papel instrumental, já que é utilizada como ferramenta no cotidiano e em diversas tarefas das mais variadas atividades humanas. Assim, o professor deve explorar os problemas práticos e contextualizados ao dia a dia de seus alunos.

Os PCN+ (2002) também destacam a importância da contextualização:

> "Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compre-

> ender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação."
> (BRASIL, 2002, p. 111)

Magarinus (2013) em sua dissertação de mestrado também enfatiza essa importância. Para a autora, o aluno terá maiores condições de aprender Matemática quando for estimulado a pensar e fazer inferências sobre o objeto de estudo, isto é, quando ele participar ativamente do processo de contrução do conhecimento. Assim, o professor deve, sempre que possível, possibilitar em suas aulas situações envolventes, desafiadoras e siginificativas para o aluno, e uma ótima alternativa para isso é a utilização de situações bem contextualizadas.

Lima (2007) ressalta que, no cotidiano dos estudantes, as situações contextualizadas não aparecem acompanhadas de fórmulas. Nesse sentido, para se encontrar o instrumento matemático adequado para traduzir a situação, utiliza-se a modelagem matemática. O autor também define o que é, em sua opinião, uma situação bem contextualizada:

> "Para nós, boas contextualizações são as que, por meio da problematização, envolvam aplicações ou manipulações. Podem ou não vir acompanhadas de fórmulas que as modelem, desde que as informações contidas no problema sejam reais, ou simulem a realidade." (LIMA, 2007, p. 182).

A contextualização volta a aparecer nos PCN (1999) quando o assunto é mais especificamente, o ensino de funções. O documento destaca que o tema não é importante apenas na Matemática:

> "Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática." (BRASIL, 1999, p. 44).

Os PCN+ (2002) seguem a mesma linha, ressaltando que o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. O documento cita como exemplo as funções exponenciais e logarítmicas que são aplicadas em áreas do conhecimento como matemática financeira, crescimento de populações, intensidade sonora, pH de substâncias e outras.

Além da contextualização, outro método importante que os documentos oficiais destacam para o ensino da Matemática é o do uso de tecnologias. Os PCN (1999) colocam como uma das competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática, no ensino médio, a utilização adequada de calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades. O documento também destaca que, com o avanço tecnológico, o uso do computador exigirá do ensino de Matemática uma nova perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos para que o aluno possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.

Os PCN+ (2002) também ressaltam a importância, no ensino da Matemática, da utilização de calculadoras e do computador, por permitirem uma abordagem de problemas com dados reais ao mesmo tempo que o aluno pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os *softwares*.

Vários autores também destacam o uso de tecnologias no ensino. Feltes (2007) afirma que, atualmente, o professor deve buscar preparar aulas mais dinâmicas, que possuam a experimentação, a prática, a pesquisa, os seminários, enfim toda forma que se explore os conhecimentos de modo atrativo à atual geração de estudantes, acostumada com cores, movimento e imagem. Nesse sentido, as tecnologias como o computador e os vídeos não podem ser deixados de lado.

D'Ambrosio (2003) afirma que é necessária a substituição de processos de ensino que priorizam a exposição, que levam os estudantes a receber o conteúdo de forma passiva, que utiliza processos pouco estimulantes. A Matemática deve ser vista não mais como um produto acabado, cuja transmissão de conteúdos é um conjunto estático de conhecimentos e técnicas.

Zuffi e Pacca (2000) vão na mesma linha. Para as autoras, dentro da realidade escolar, não se pode desprezar a forte influência de elementos mediadores entre o aluno e o objeto de conhecimento, que passam pela linguagem do professor, do livro didático e também da utilização de recursos tecnológicos.

Contudo, Togni (2007) afirma que a tecnologia deve ser utilizada de maneira adequada.

> “A utilização de tecnologias, mais produtivamente e com mais significado, não acontecerá se estas forem utilizadas apenas como meio de distribuições de lições intrucionais. A tecnologia não pode ensinar os alunos; ao contrário, ela deve ser utilizada como parceira para que eles possam construir seu conhecimento ao se envolverem com ela no sentido de: construção do conhecimento e não reprodução, conversação e não recepção, articulação e não repetição, colaboração e não competição, reflexão e não prescrição. É nesta perspectiva que os alunos poderão se tornar autônomos, independentes e consequentemente pessoas com capacidade de discernir e tomar decisões” (TOGNI, 2007, p. 79).

Conforme Levy (1993), o desafio do professor é conseguir utilizar o computador como um elemento agregador no ensino aprendizado, indo além de uma ferramenta que é capaz de fazer cálculos com facilidade. Nesse sentido, a interatividade é um fator importante. O aluno deve ser um agente atuante de seu aprendizado. Por isso a importância de se utilizar ferramentas que o aluno possa modificar o modelo e compreender as mudanças que ocorrem quando os parâmetros são alterados (SIQUEIRA, 2013).

Um *software* que tem essas características e é muito utilizado por professores de Matemática é o *GeoGebra*. O programa trabalha com múltiplas representações, permite visualizar simultâneamente a representação gráfica e algébrica de uma função e observar o que acontece com o gráfico da função, quando se altera algum parâmetro de sua expressão algébrica. Além disso, o *GeoGebra* é disponível gratuitamente[1]. (CANDEIAS, 2010)

São inúmeros os trabalhos que utilizaram o *GeoGebra* no ensino e obtiveram resultados positivos. Catâneo (2011), por exemplo, em sua monografia de especialização, utilizou o programa em aulas de geometria plana do ensino fundamental. A autora concluiu que durante as aulas, a motivação e o estusiasmo dos alunos foram facilmente notados. Além disso, para ela ficou evidente a contribuição do *software* como uma ferramenta auxiliar no aprendizado da Matemática, já que os alunos conseguiram realizar suas próprias interpretações e reflexões, através da construção e visualização de cada resposta.

[1]https://www.geogebra.org/download acessado em 15/04/2016.

Pereira (2012) em seu trabalho de mestrado também utilizou o *GeoGebra* no ensino de tópicos de geometria. O autor acredita ter sido primordial o uso do programa para a consolidação de alguns conceitos estudados. "Os alunos tiveram a oportunidade de validar suas hipóteses, conjecturar sobre possíveis caminhos para a solução das tarefas e discutir de forma colaborativa suas soluções encontradas". O autor também destacou a mudança de postura dos alunos, em relação à motivação e interesse nas aulas com o uso do *software*.

Ferreira e colaboradores (2012) usaram o programa em seu trabalho para ensinar funções logarítmicas, em um curso de Licenciatura em Matemática. Segundo os autores, ficou evidente que o *software* foi de grande valia no ensino dessas funções.

Santos (2011) também utilizou o *GeoGebra* para o ensino de funções logarítmicas. A autora concluiu que o programa contribuiu para a aprendizagem dos alunos e que todos os estudantes destacaram a importância da visualização do gráfico da função e da possibilidade de testar outras funções de modo dinâmico e rápido, propiciado pelo *software*.

Outro recurso computacional muito usado nas aulas de Matemática são os programas de planilhas eletrônicas, como o *Microsoft Excel* ou o *LibreOffice Calc*. Flores (2004) ressalta que o *Microsoft Excel* é parte integrante de um *software* disponível em praticamente todos os computadores, mas muitas pessoas não o utilizam. Além disso, trata-se de um programa bastante amigável e portanto de rápida aprendizagem por qualquer pessoa. Assim, é uma ferramenta de ensino de fácil acesso e muito útil a qualquer professor de Matemática.

São muitos os trabalhos envolvendo o uso de planilhas no ensino de Matemática. Oliveira (2011), por exemplo, em seu trabalho usou planilhas para o ensino de matrizes. O autor relatou que os resultados foram muito positivos e que os alunos consideraram atraente a proposta metodológica.

Marchioni (2013), Stieler (2007) e Milan (2003) utilizaram a ferramenta para o ensino de Matemática Financeira. Todos eles observaram uma motivação e envolvimento muito grande dos alunos e o aproveitamento nas atividades foi satisfatório.

Assim, acreditamos que a contextualização e a utilização de tecnologias no ensino de Matemática podem ser maneiras interessantes de auxiliar em uma aprendizagem significativa dos alunos. Destacamos como metodologias a serem empregadas nesse presente trabalho a modelagem, o uso de situações problemas e de recursos tecnológicos, como calculadora, o *GeoGebra* e as planilhas eletrônicas.

1.4 Objetivos e apresentação do trabalho

Esse trabalho tem como objetivo principal apresentar uma sequência de atividades para o ensino das funções exponenciais. Para tal, o estruturamos de maneira que possa ser utilizado como suporte para o professor que lecionará o tema.

Assim, no capítulo 2, apresentaremos um breve referencial histórico. Nesse capítulo, o leitor pode tomar conhecimento de algumas particularidades do desenvolvimento de conhecimentos das potências, do número e e das funções ao longo da história humana.

Ardenghi (2008), em seu estudo sobre mapeamento de pesquisa que tratavam de funções, ressaltou a importância da descrição da evolução histórica, pois assim o professor pode entender as razões de alguns erros conceituais dos alunos, visto que isto pode ter ocorrido anteriormente. Além disso, o estudo da evolução de um dado conteúdo pode auxiliar na preparação de atividades mais eficientes para o seu aprendizado.

No capítulo 3, trazemos a definição, caracterização, gráficos e demais propriedades da função exponencial e de sua inversa (a função logaritmica), com suas respectivas demonstrações. Acreditamos que o leitor deve conhecer profundamente todas essas especificidades do conteúdo, antes da apresentação das atividades que proporemos.

O capítulo 4 trata de modelos matemáticos. Mais especificamente trazemos algumas situações cotidianas que envolvem funções exponenciais. Esses modelos e aplicações justificam o aprendizado do tema e podem servir de motivação para o seu estudo.

Por fim, apresentamos no capítulo 5, uma proposta de sequência didática para o ensino das funções exponenciais. Para isso, levamos em consideração todos os capítulos anteriores e buscamos utilizar modelagem matemática, situações problema bem contextualizadas e tecnologias, como os *softwares* gratuitos *Geogebra* e *LibreOffice Calc*.

Esperamos que o leitor tenha uma leitura agradável e que o trabalho possa contribuir com professores e pesquisadores da área.

2 Referencial histórico

Dieudonné (1990) diz não ser possível compreender a Matemática atual sem ter ideias, no mínimo sumárias, de sua história. Por esta razão e, procurando entender a construção dos conceitos matemáticos relacionados às funções exponenciais até a formalização de sua definição atual, este capítulo tem como objetivo apresentar aspectos históricos da Matemática, relacionados ao tema.

Desde as civilizações mais antigas, como a egípcia e a babilônica, pode-se identificar as primeiras ideias matemáticas de potência e, embora sob a ótica das funções, as potências se diferem das exponenciais, do ponto de vista operacional, possuem as mesmas propriedades e compartilham o mesmo conceito. Assim, podemos dizer que o germem da ideia das funções exponenciais é a ideia de potências.

Os egípcios, por exemplo, utilizavam símbolos para as diferentes potências de 10, que era a base por eles utilizada.

Símbolo Egípcio	Descrição do Símbolo	Notação
	Bastão	1
	Calcanhar	10
	Rolo de corda	10^2
	Flor de Lótus	10^3
	Dedo apontado	10^4
	Peixe	10^5
	Homem	10^6

Figura 2.1: Sistema de numeração egípcio (imagem adaptada de EVES (2004)).

Os sumérios, assim como os seus sucessores, os babilônios, utilizavam um sistema de numeração de base 60. É desses povos que se origina a convenção de dividirmos até hoje um círculo em 360 graus, a hora em 60 minutos e o minuto em 60 segundos (GARBI, 2010).

Os babilônios, percebendo que não era necessária uma grande repetição de seus símbolos para representar os números, desde que posicionados de forma sistematizada, criaram o que conhecemos até hoje como notação posicional. Nos documentos históricos da época existem tabletas do tempo da dinastia Hamurabi, contendo potências sucessivas de um dado número, tabelas exponenciais com as dez primeiras potências de algumas bases, resoluções de equações quadráticas e cúbicas e diversos outros problemas envolvendo potências (EVES, 2004).

Pode-se destacar também problemas relacionados a equações exponenciais. Há algumas tábuas no museu de Istambul que parecem ter sido originalmente tábuas de a^n, para a de 1 a 10 e para $n = 9$, 16, 100 e 225. Com essas tábuas, pode-se resolver equações exponenciais do tipo $a^x = m$, na variável x. Outro registro a se destacar encontra-se em uma tábua do museu do Louvre, de cerca de 1700 a.C., em que há o seguinte problema: "Por quanto tempo deve-se aplicar uma certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre?", que também é uma questão relacionada à equação exponencial (EVES, 2004).

No entanto, as tabletas mostram apenas alguns problemas e casos específicos, sem generalizações ou formalizações teóricas mais completas (BOYER, 1996).

Durante os primeiros 800 anos da era cristã houve um grande avanço da Matemática no Oriente Médio, incluindo o sistema de numeração indo-arábico, utilizado até hoje. Este sistema foi muito bem sucedido por ser muito simples, já que consegue representar qualquer número utilizando apenas 10 algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) e uma representação posicional decimal, utilizando potências de 10. Aqui novamente se observa a ideia de potências sendo utilizada. Os registros mais antigos desses símbolos encontram-se em algumas colunas de pedras erguidas na Índia, por volta de 250 a.C. pelo rei Açoka. Nesses primeiros registros não estão presentes o algarismo zero e a notação posicional, os quais provavelmente foram introduzidos por volta do ano 800 d.C., já que, em um livro de 825 d.C. o matemático persa al-Khowârizmî descreve este sistema de maneira completa (EVES, 2004).

No final da idade média, com o advento das grandes navegações e a consequente expansão comercial, houve a necessidade de se resolver cálculos mais elaborados e, neste contexto, surgem os logaritmos que, como veremos adiante, estão intimamente ligados às exponenciais.

Embora muitos estudiosos tenham trabalhado com os conceitos de logaritmos, como por exemplo o suiço Jobst Burgi, a invenção dessa importante ferramenta matemática é atribuída a John Napier, com a publicação do texto intitulado “Mirifici logarithmun canonis descriptio” (Descrição das maravilhosas leis dos logaritmos), em 1614. John Napier nasceu na Escócia em 1550 e, segundo Boyer (1996), não era um matemático profissional e sim um nobre escocês que administrava suas grandes propriedades e escrevia sobre vários assuntos.

A palavra “logaritmo” origina-se da composição de duas palavras gregas: logos (razão) e arithmos (números). Ela foi adota por Napier depois de ter usado inicialmente a expressão “número artificial” para definir sua invenção.

Como sabemos atualmente, o logaritmo é uma ferramenta de cálculo poderosa pelo fato de possuir propriedades capazes de reduzir multiplicações e divisões a simples adições e subtrações. Um primeiro passo importante, e que provavelmente influenciou a invenção de Napier, foi a criação do método da protasférese, pelo alemão Johannes Werner (1468-1528). Este método, criado para simplificar cálculos envolvendo comprimentos, em problemas de Astronomia, utiliza tabelas e algumas fórmulas trigonométricas, transformando multiplicações em somas e/ou subtrações (EVES, 2004).

Suponha, por exemplo, que se quer calcular o produto entre 122,71 e 19,104. Esse cálculo pode ser feito utilizando uma boa tabela trigonométrica e a fórmula:

$$cos(A) \cdot cos(B) = \frac{cos(A+B) + cos(A-B)}{2}.$$

Para isso, basta encontrar A e B (com o auxílio da tabela) tais que $cosA = 0,12271$ e $cosB = 0,19104$. Com os valores de A e B, o próximo passo é encontrar, também com a ajuda da tabela, os valores de $cos(A+B)$ e $cos(A-B)$. Substituindo esses valores na fórmula, seria calculado o valor do produto $0,12271 \cdot 0,19104$ que multiplicado por 10^5 resultaria no valor desejado.

A abordagem de Napier, para facilitar cálculos como o citado acima, tem grandes diferenças, em relação à protasférese. A ideia principal é fazer uma associação entre os termos de uma progressão geométrica

$$x, x^2, x^3, ..., x^p, ..., x^q, ...$$

com os da progressão aritmética $1, 2, 3, ..., p, ..., q, ...$

Assim, o produto $x^p \cdot x^q = x^{p+q}$ de dois termos da primeira progressão está associado à soma p+q dos termos da segunda (EVES, 2004).

Exemplo: Se quer calcular o produto entre 2,56 e 6,4 pode-se pensar na associação entre as progressões aritmética e geométrica, respectivamente:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ... \text{ e}$$
$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, ...$$

Neste caso, deve-se procurar os correspondentes a 256 e 64 na primeira progressão, que são 8 e 6, respectivamente. Assim, o cálculo desejado será o correspondente a $8+6 = 14$ da segunda progressão (16384) dividido por 10^3. Ou seja, $2,56 \cdot 6,4 = 16,384$.

Para conservar próximos os termos da progressão geométrica de potências inteiras do número x, Napier precisava utilizar um valor muito próximo de 1 e por isso escolheu $x = 1 - 10^{-7}$ ou $x = 0,9999999$. Para evitar decimais, resolveu ainda multiplicar cada potência por 10^7 e definiu que se $N = 10^7 \cdot (1 - \frac{1}{10^7})^L$ então L é o "logaritmo de Napier" do número N. Observe que L aparece no expoente, definindo a relação existente entre os logaritmos e às exponenciais (BOYER, 1996).

Utilizando a definição atual, L é o logaritmo de N na base $10^7 \cdot (1 - \frac{1}{10^7})$. Hoje temos conhecimento que o limite $\lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n = 1/e$. Assim, podemos observar que Napier trabalhava com a base $1/e$, ao contrário do pensamento frequente de que os logaritmos neperiamos tinham base e. No entanto, como salienta Boyer (1996), deve-se lembrar que ele não tinha o conceito de base. Além disso, Napier também trouxe uma definição geométrica para a ideia acima (ver Figura (2.2)), descrita por Boyer da seguinte forma (BOYER, 1996, p. 214):

> "Seja um segmento de reta AB e uma semirreta CDE, suponhamos que um ponto P parte de A e se move ao longo de AB com velocidade variável e proporcional a distância entre P e B; durante o mesmo tempo, suponhamos que um ponto Q parte de C e se move ao longo de CDE com velocidade uniforme igual a velocidade inicial de P. Napier chamava a distância CQ de logaritmo da distância PB".

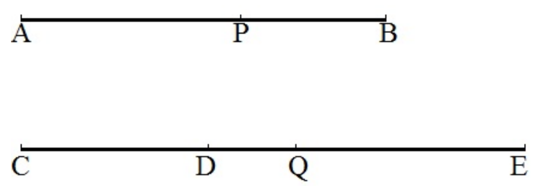


Figura 2.2: Definição geométrica de logaritmo.

O trabalho de Napier foi amplamente divulgado e despertou o interesse do inglês Henry Briggs (1561-1631). Em um encontro de ambos, concordaram que os logaritmos seriam mais úteis se alterados de forma que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns, com base 10 (EVES, 2004).

Briggs passou todo o restante de sua vida fazendo tábuas com esses logaritmos e, em 1624, publicou a obra "Arithmetica logarithmica" que continha uma tábua com logaritmos comuns, com quatorze casas decimais, dos números inteiros entre 1 e 20.000 e entre 90.000 e 100.000. A lacuna entre 20.000 e 90.000 foi preenchida posteriormente com a ajuda de Adriaen Vlacq (1600-1660) (EVES, 2004).

Embora o foco do trabalho de Napier fosse a simplificação de operações de multiplicação e divisão, o conceito de função logaritmica está implícito em toda a sua obra (BOYER, 1996).

2.1 A evolução da simbologia

Quando se trata da evolução da simbologia, alguns nomes não poderiam deixar de ser citados por suas contribuições significativas. Um deles, sem dúvida, é o francês François Viète (1540-1603). Ele, segundo Garbi (2010), começou a modernização da simbologia algébrica e difundiu o emprego de letras para representar genericamente os números, não apenas no caso das incógnitas, mas também dos coeficientes das expressões. Porém, ele só era moderno em alguns aspectos. Utilizava, por exemplo, para representar o quadrado de uma incógnita A, "A quadratus" e para o cubo, "A cubus".

Na mesma época de Viète viveu na Holanda um físico-matemático chamado Simon Stevin (1548-1620). Ele, embora ainda escrevesse algumas palavras, como para igualdade, assim como Viète, preferia uma notação diferente para as potências. Por exemplo, a expressão $2x^4 - 5x^2 + 3x$ era escrita como:

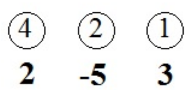


Figura 2.3: Exemplo de notação utilizada por Stevin (imagem adaptada de BOYER (1996)).

Além disso, Stevin propôs que tal notação fosse utilizada também para potências com expoentes fracionários. Embora, não haja registro de seu uso neste caso, ele dizia claramente que 1/2 dentro de um círculo indicaria a raiz quadrada e que 3/2 indicaria a raiz quadrada de um cubo (BOYER, 1996).

Aqui vale uma observação: a ideia de expoentes fracionários e irracionais apareceu de forma mais destacada quase três séculos antes. Em *"De proportionibus proportionum"* , escrito por volta de 1360, Nicole Oresme (1323-1382) generalizou as ideias de proporção de Thomas Bradwardine (1290-1349) incluindo potências de expoente racional, dando regras para combinar as suas proporções que são equivalentes às atuais leis de potenciação. Foi também de Oresme a sugestão (talvez a primeira da história da Matemática) de que era possível que os expoentes fossem irracionais (BOYER, 1996).

Mas voltando à evolução da simbologia, segundo Boyer (1996), o "construtor de notação mais bem-sucedido de todos os tempos" foi o suiço Leonhard Euler (1707-1783). As contribuições de Euler à Matemática são numerosas. Segundo Garbin (2010), ele escreveu em toda a sua vida cerca de 900 tratados, livros e estudos, com uma velocidade que os editores não conseguiram acompanhar. Cerca de 48 anos após a sua morte, ainda haviam publicações inéditas de Euler no jornal da Academia de Ciências de São Petesburgo, onde ele trabalhou por mais de 30 anos.

Em relação à simbologia, Euler foi o primeiro a utilizar a letra e para a base dos logaritmos naturais, o símbolo $f(x)$ para funções, a letra i para a unidade imaginária, entre outros. Também deve-se a ele a famosa e importante expressão:

$$e^{ix} = cosx + i\ sen, \text{ que, para } x = \pi \text{ se transforma em } e^{i\pi} + 1 = 0$$

uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da história da Matemática (EVES, 2004).

2.2 O número *e*

A origem do número e não é muita clara, porém ela pode ter ocorrido no final do século XVI e início do século XVII, quando Napier inventou os logarítmos como já mencionado. Aquele período foi marcado por um intenso crescimento das transações financeiras e do comércio internacional. Percebeu-se que a expressão $(1 + 1/n)^n$ que aparecia nos cálculos de juros compostos, à medida que o valor n aumentava, tendia para um certo valor limite: 2,71828. Assim, o número e tornou-se o primeiro a ser definido por um processo de passagem ao limite:

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e.$$

Porém, durante muito tempo esse número foi considerado apenas uma curiosidade (MAOR, 2005).

Apenas na metade do século XVII recebeu um nome. Leonard Euler resolveu chamá-lo de e. A escolha dessa representação não é um consenso entre os historiadores. Alguns acreditam que ele tenha escolhido a letra 'e' por ser a primeira da palavra "exponencial"; outros defendem a tese de que a escolha foi natural, por 'e' ser a primeira letra do alfabeto que não era muito utilizada em outras expressões matemáticas (já que 'a', 'b', 'c' e 'd' apareciam frequentente em outras expressões); uma minoria defende que a escolha tenha sido pelo fato da letra 'e' ser a inicial de seu nome, porém como Euler mostrou-se durante toda a sua vida um homem modesto e humilde, esta possibilidade é descartada pela maioria dos historiadores. O fato é que durante muito tempo acreditou-se que e fosse um número racional, já que apresentava uma possível dízima periódica: 2,718281828 (observe a repetição dos números 1828). Todavia, em 1737 Euler provou que e é um número irracional e sugeriu a letra **e** para representá-lo (MAOR, 2005; CRILLY, 2011).

Outro problema importante relacionado ao número e surgiu com o problema da quadratura da hipérbole. Na segunda metade do século XVII, o jesuíta belga Saint-Vicent (1584-1667) conseguiu resolver esse problema que, durante muito tempo, Fermat tentou, mas não conseguiu resolver. Saint-Vicent obteve uma função logarítmica para o cálculo da área sob a hipérbole, a partir de um ponto referencial fixo $x = 0$ até um ponto variável $x = t$, a área $A(t)$ poderia ser calculada pela expressão $A(t) = log(t)$. Mas ele não conseguiu determinar qual deveria ser a base desse logaritmo. Apenas com o aprimoramento das técnicas diferenciais - que levou a uma grande evolução do cálculo - realizado por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) no final do século XVII, é que foi demonstrado que essa base deveria ser também o número e (MAOR, 2005).

O desenvolvimento do cálculo permitiu também que fosse percebida uma nova propriedade importante desse número: a inversa da função logaritmica (que depois seria denotada por e^x) era igual à sua própria derivada. Foi nesse momento que o número e passou então a ocupar um papel central no ramo da Análise Matemática.

2.3 A evolução do conceito de função

Atualmente, em qualquer curso de cálculo, a definição de função precede a definição de derivada, contudo, o conceito de função só foi introduzido na Matemática após o aprimoramento das técnicas diferenciais. Apesar de algumas ideias sobre essa definição estarem presentes nos trabalhos de Newton e Leibniz, as definições explícitas do conceito de função só foram propostas posteriormente.

A primeira vez que Leibniz utilizou a palavra "função" foi no final do século XVII. Antes disso, ele já havia enunciado diversas regras para o cálculo de derivadas (de somas, diferenças, produtos, quocientes, raízes). Quando falou de função pela primeira vez, Leibniz fazia referência ao "Tratado dos senos do quarto de círculo", escrito por Pascal em 1659. Ele utilizou seus conceitos de cálculo infinitesimal, nesse problema, para dizer que a distância entre dois pontos poderia ser tão pequena até não ser mais possível atribuir um valor. Porém, ainda assim seria possível determinar um triângulo tendo esses dois pontos como vértices, pela semelhança de triângulos inicial do próprio tratado. Desta forma, ele reescreveu a relação dos lados desse triângulo como uma relação infinitesimal. Para designar a relação entre essa grandeza e o triângulo, Leibniz utilizava o termo "função" (ROQUE, 2012).

Posteriormente, em uma troca de correspondências com Leibniz, Johann Bernoulli (1667-1748) utilizou a palavra "função" relacionando-a de maneira indireta a "quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes". Apenas em 1718, em um artigo apresentado à Academia de Ciências de Paris, Bernoulli definiu explicitamente a noção de função de uma grandeza variável como sendo "uma quantidade composta, de um modo qualquer, desta grandeza variável e de constantes". Neste mesmo artigo, ele usou a notação φx, sem parênteses, para representar uma função na variável x. Alguns anos depois, Euler fez uma definição bem próxima, considerando uma função de uma grandeza variável como sendo "uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes". Euler foi o primeiro a usar a notação $f(x)$ para representar uma função na variável x (ROQUE, 2012).

A definição de Euler para funções se tornaria inadequada quando Joseph Fourier (1768-1830), em seus trabalhos, encontrou funções que não eram definidas por expressões analíticas e sim por séries geométricas. Essas séries se caracterizavam por possuir relações mais gerais entre as variáveis. Para que a definição fosse então mais ampla, Lejeune Dirichlet (1805-1859) chegou a seguinte formulação:

> "Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o *campo de definição da função* e os valores assumidos por y constituem o *campo de valores da função*".
> (EVES, 2004, p. 661).

Esse conceito seria ampliado nos anos seguintes, com a evolução da teoria dos conjuntos. O grande responsável por esse desenvolvimento foi Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918). Nessa nova definição, uma função f foi definida como um conjunto qualquer de pares ordenados de elementos, sujeitos a seguinte condição: se $(x_1, y_1) \in f$, $(x_2, y_2) \in f$ e $x_1 = x_2$ então $y_1 = y_2$. O conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares ordenados é chamado *domínio da função* e o conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados é chamado *imagem da função* (EVES, 2004).

3 Funções exponenciais

3.1 A Função exponencial

Neste capítulo vamos estudar as funções exponenciais, suas características, propriedades e sua inversa. Para isso, inicialmente devemos defini-la:

Definição: Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, chamamos de função exponencial de base a a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ que associa a cada x real o número a^x. Em símbolos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

Estamos assumindo aqui que a definição de potências com expoentes reais (racionais e irracionais) seja conhecida, porém, caso existam dúvidas, sugerimos a leitura dos livros de Iezzi e colaboradores (2013), Lima (2007) e Lima e colaboradores (2012).

Um aspecto importante a ser ressaltado é a sua base a. Porque ela deve ser positiva e diferente de 1?

- Se a base fosse negativa, a função não estaria definida em uma infinidade de pontos. Por exemplo, $f(x) = (-2)^x$ não está definida para todo $x = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$;

- Se a base fosse 1, teríamos uma função constante igual a 1, que possui aspectos totalmente diferentes das funções exponenciais com qualquer outra base positiva. Por isso, exclui-se também $a = 1$ como possível base;

- Se a base fosse igual a 0, a função seria constante para valores positivos, para $x = 0$ teríamos a indeterminação 0^0, e para valores negativos ela não estaria definida, já que para $x = -1$, por exemplo, $f(-1) = 0^{(-1)}$ e $0^{(-1)}$ não está definido em $\mathbb{R}$.

Assim, para que a função esteja bem definida em algum intervalo real, é necessário fazer algumas restrições na base. E como pode ser observado, tomando a base positiva e diferente de 1, a função exponencial se torna bem definida em todos os reais. Portanto, é a restrição mais conveniente a ser feita.

Outro aspecto importante a ser observado é que independente da base, $f(0) = 1$, pois $a^0 = 1$ para todo $a > 0$, ou seja, o gráfico de qualquer função exponencial passa pelo ponto (0;1).

A seguir apresentaremos algumas propriedades das funções exponenciais. Antes, porém, enunciaremos um lema que será importante para algumas de nossas demonstrações.

Lema 3.1: Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo I não vazio de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, em que r é um número racional.

Demonstração: Dados $0 < c < d$, devemos encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que o número a^r pertença ao intervalo $[c, d]$, ou seja, $c \leq a^r \leq d$. Para facilitar a demonstração, vamos supor que $a, c > 1$ (os demais casos são análogos). Como as potências de expoente natural de números maiores que 1 crescem acima de qualquer cota, é possível obter dois números naturais m e q tais que:

$$c < d < a^m \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{d-c}{a^m}\right)^q.$$

Na segunda relação, se elevarmos todos os membros a $1/q$ subtrairmos 1 e multiplicarmos por a^m, nesta ordem, obteremos:

$$0 < a^m(a^{1/q} - 1) < d - c.$$

Logo, dado um número racional $\frac{p}{q} \leq m$, se trocarmos, na expressão anterior, m por esse número a desigualdade se mantém:

$$0 < a^{\frac{p}{q}}(a^{1/q} - 1) < d - c \Leftrightarrow 0 < a^{\frac{p+1}{1}} - a^{\frac{p}{q}} < d - c.$$

Assim, as potências $a^0, a^{1/q}, a^{2/q}, ..., a^m$ são extremos de intervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que $d - c$ (comprimento do intervalo $[c, d]$). Como $[c, d] \subset [1, a^m]$, pelo menos um valor dessa lista, digamos $a^{p/q}$, está contido em $[c, d]$.

Agora sim, apresentaremos as propriedades das funções exponenciais.

3.2 Propriedades

Seja f uma função exponencial, como definida anteriormente:

Propriedade 1: Para qualquer valor de x no domínio da função, $f(x) > 0$.

Demonstração: Como, pela definição $a > 0$, utilizando as propriedades das potências:
i) se $x > 0$ então $a^x > 0$;
ii) se $x = 0$ então $a^x = 1 > 0$;
iii) se $x < 0$ então $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$. Como $-x > 0$, de (i) temos que $a^{-x} > 0$, logo $a^x = \frac{1}{a^{-x}} > 0$.

Portanto, $f(x) = a^x$ é sempre positiva.

Propriedade 2: Dados dois números reais distintos x e y, com $x < y$:
i) $f(x) < f(y)$, quando $a > 1$ e
ii) $f(y) < f(x)$, quando $0 < a < 1$.

Demonstração: De fato, considerando conhecidas as propriedades de potências envolvendo números reais, temos:

$$a^y - a^x = a^y\left(1 - \frac{a^x}{a^y}\right) = a^y\left(1 - a^{x-y}\right).$$

Como $x < y$ (por hipótese), segue que $x - y < 0$ e, portanto, podemos escrever

$$a^y - a^x = a^y\left(1 - \frac{1}{a^{y-x}}\right), \text{ com } y - x > 0.$$

Como $a^y > 0$ (propriedade 1), temos dois casos a considerar para estudar o sinal de $a^y - a^x$:

i) $a > 1 \Rightarrow a^{y-x} > 1$ (IEZZI e colaboradores, 2013). Logo,

$$\frac{1}{a^{y-x}} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{a^{y-x}} > 0.$$

Portanto, $a^y - a^x = a^y\left(1 - \frac{1}{a^{y-x}}\right) > 0$, uma vez que $a^y > 0$. Assim, temos que $a^y - a^x > 0$, isto é, $a^y > a^x$.

ii) $0 < a < 1 \Rightarrow a^{y-x} < 1$ (IEZZI e colaboradores, 2013). Logo,

$$\frac{1}{a^{y-x}} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{a^{y-x}} < 0.$$

Portanto, $a^y - a^x = a^y\left(1 - \frac{1}{a^{y-x}}\right) < 0$, ou seja, $a^y - a^x < 0$, isto é, $a^y < a^x$. Encerrando assim a demonstração.

Assim, se a base a da função exponencial for maior que 1, a função é monótona crescente. Caso contrário, é monótona decrescente. Isto pode ser observado na Figura (3.1).

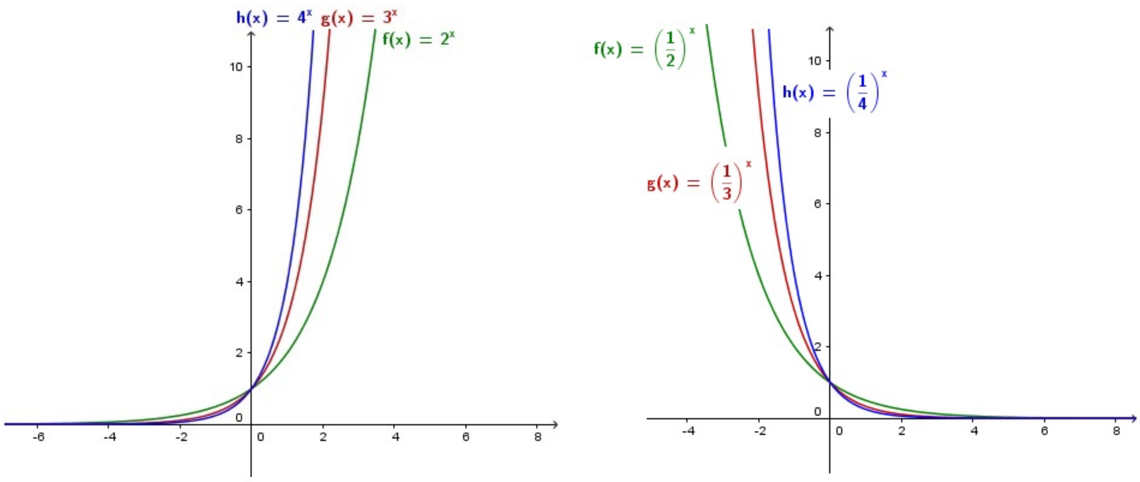


Figura 3.1: Gráficos de funções exponenciais: crescimento e decrescimento - imagem produzida pelo autor.

As exponenciais com bases $0 < a < 1$ são também conhecidas como exponenciais negativas, já que podemos escrever $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ como 2^{-x},$\left(\frac{1}{3}\right)^x$ como 3^{-x} e assim por diante.

Propriedade 3: f é ilimitada superiormente.

Demonstração: Como vimos na propriedade 2, quando $a > 1$ a função é crescente e quando $0 < a < 1$ a função é decrescente. Desta forma, temos que separar nossa demonstração em dois casos.

i) $a > 1$: Vamos iniciar mostrando que, seja n um número natural, a sequência formada pelas potências a^n é ilimitada superiormente. Dado um número real $c > 0$, vamos mostrar que, por maior que seja c, sempre conseguiremos encontrar um natural n_0 tal que $a^{n_0} > c$.

Para fazermos essa demonstração, vamos escrever $a = 1 + d$, sendo $d > -1$. Como n é natural, podemos usar a desigualdade de Bernoulli (LIMA e colaboradores, 2012):

$$a^n = (1 + d)^n > 1 + nd. \tag{3.1}$$

Logo, se tomarmos $n_0 > (c - 1)/d$ teremos $1 + n_0 d > c$, ou seja, teremos $a^{n_0} > c$. Mas como nesse caso a função é crescente, para todo **real** x maior que n_0, $a^x > c$. Simbolicamente, se $a > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty. \tag{3.2}$$

ii) $0 < a < 1$: Dessa vez vamos tomar uma sequência formada por potências de expoentes inteiros negativos m, em que $m = -n$, sendo n um natural. Novamente vamos mostrar que não há número real c maior que todas as potências a^m. Ou seja, sempre é possível encontrar um inteiro negativo m_0 tal que $a^{m_0} > c$. Para isso, temos encontrar um natural n_0 e tomar $m_0 = -n_0$. Seja $\frac{1}{a} = 1 + d$, sendo $d > -1$. Pela desigualdade de Bernoulli:

$$a^m = a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = (1+d)^n > 1 + nd. \tag{3.3}$$

Logo, se tomarmos $n_0 > (c-1)/d$ teremos $1 + n_0 d > c$, ou seja, se tomarmos $m_0 = -n_0$ teremos $\left(\frac{1}{a}\right)^{n_0} = a^{m_0} > c$. Mas como nesse caso a função é decrescente, para todo **real** x menor que m_0, $a^x > c$. Simbolicamente, se $0 < a < 1$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \tag{3.4}$$

concluindo a demonstração.

Propriedade 4: f é contínua.

Demonstração: Dizer que a função é contínua é o mesmo que dizer que dados $x, y \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^y|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja suficientemente próximo de y. Essa ideia pode também ser escrita por $\lim_{x\to y} a^x = a^y$.

Para que possamos fazer essa demonstração, mostraremos inicialmente que é possível tornar a^m tão próximo de 1 quanto desejemos, desde que $|m|$ seja escolhido suficientemente pequeno.

Para facilitar, suponhamos $a > 1$ e $m > 0$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, queremos demonstrar que, tomando m pequeno, teremos $a^m < 1 + \epsilon$.

Pela desigualdade de Bernoulli, se tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > (a-1)/\epsilon$, teremos $n\epsilon > a - 1$ o que implica em

$$a < 1 + n\epsilon = (1+\epsilon)^n \tag{3.5}$$

e assim, $a^{1/n} < 1 + \epsilon$.

Ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^{1/n} < 1 + \epsilon$, mais ainda:

$$1 < a^{1/n} < 1 + \epsilon. \tag{3.6}$$

Para todo m tal que $0 < m < 1/n$, teremos $1 < a^m < a^{1/n} < 1 + \epsilon$. Assim, faremos a^m tão próximo de 1 quanto desejemos. Escrevendo de outra forma: $\lim_{m\to 0+} a^m = 1$.

Agora, fixado $y \in \mathbb{R}$, tomamos $m = x - y$ e temos que

$$a^x - a^y = a^{m+y} - a^y = a^y(a^m - 1). \tag{3.7}$$

Assim, quando x tende a y, teremos que $m = x - y$ tende a zero, a^m tende a 1 e portanto o limite da diferença $a^x - a^y$ será zero:

$$\lim_{x \to y}(a^x - a^y = 0), \tag{3.8}$$

o que implica que

$$\lim_{x \to y} a^x = a^y, \tag{3.9}$$

ou seja, a função é contínua.

Propriedade 5: f é bijetiva.

Demonstração: Vamos demonstrar esta propriedade em duas etapas:
i)f é injetiva:
Vamos supor que a base a é maior que 1 (o caso em que $0 < a < 1$ é análogo). Dados x e y distintos no domínio: Se $x > y$ então $f(x) > f(y)$. Caso contrário, se $x < y$ então $f(x) < f(y)$. Ou seja, dados $x \neq y$ então $f(x) \neq f(y)$. Em outras palavras, tomados valores distintos no domínio, os valores da função também são distintos. Portanto, f é injetiva;

ii)f é sobrejetiva:
Isto é o mesmo que afirmar que para todo real $y > 0$ existe algum x real tal que $f(x) = a^x = y$. Para fazermos esta demonstração, utilizando o lema (3.1), vamos tomar para cada $n \in \mathbb{N}$ uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(y - \frac{1}{n}; y + \frac{1}{n})$, de modo que $|y - a^{r_n}| < 1/n$, ou seja: $\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = y$. Para facilitar, supomos $a > 1$. Escolhemos as potências a^{r_n} sucessivamente, tais que:

$$a^{r_1} < a^{r_2} < ... < a^{r_n} < ... < y.$$

Certamente, podemos fixar $L \in \mathbb{Q}$ tal que $y < a^L$. Então a monotonicidade da função exponencial nos garante que $r_1 < r_2 < ... < r_n < ... < L$.
Desta forma, (r_n) é uma sequência crescente, limitada superiormente por L. A completeza dos reais nos assegura então que os r_n são valores aproximados por falta de um número real x, ou seja, $\lim_{n \to \infty} a^{r_n} = x$. Como f é contínua, temos então que $a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = y$ como queríamos demonstrar.
Assim, como f é injetiva e sobrejetiva, é bijetiva.

A seguir apresentaremos o teorema de caracterização da função exponencial.

3.3 Caracterização da função exponencial

Teorema: Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) então as seguintes afirmações são equivalentes:
1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;
2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, em que $a = f(1)$;
3) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Vamos então demonstrar que as afirmações que caracterizam as funções exponenciais são equivalentes, isto é, que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Para isso, assumimos conhecidas as propriedades das potências.

(1) $\Rightarrow$ (2):
Inicialmente, mostraremos que a afirmação (1) pode ser extendida para expoentes racionais. Seja o número racional $m = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, como o número mx é real e como $p = mq$, podemos, da hipótese, escrever que:

$$f(mx)^q = f(mqx) = f(px) = f(x)^p. \tag{3.10}$$

Temos então de (3.10) que: $f(mx)^q = f(x)^p$.
Elevando ambos os lados dessa expressão a $1/q$, segue que:

$$f(mx) = f(x)^{p/q} = f(x)^m. \tag{3.11}$$

Assim, provamos que (1) é válida também para expoentes racionais.
Vamos tomar $f(1) = a$. Segue que, de (3.11), $f(m) = f(1)^m = a^m$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.
Para completarmos a demonstração, vamos supor que f é crescente. Ou seja, $1 = f(0) < f(1) = a$. Vamos admitir, por absurdo, que exista um número real x tal que $f(x) \neq a^x$. Suponhamos, por exemplo, $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ é análogo). Então, pelo lema (3.1), existe um número racional r tal que $f(x) < a^r < a^x$, o que implica que $f(x) < f(r) < a^x$. Pela primeira desigualdade da última expressão, temos que $f(x) < f(r)$ e como f é crescente concluímos que $x < r$. Por outro lado, pela segunda desigualdade da expressão, temos que $a^r < a^x$ e portanto $r < x$ o que contradiz a conclusão anterior, completando assim a prova que (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (3):
Da hipótese (2) temos que, para dois valores reais distintos x e y, $f(x) = a^x$ e $f(y) = a^y$.
Vamos usar a hipótese também para encontrarmos $f(x + y)$:
$f(x + y) = a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$, concluindo a demonstração.

(3) $\Rightarrow$ (1):
Vamos dividir essa demonstração em duas partes:

i) n é inteiro não negativo: Da hipótese (3), seja $m = nx = x + x + ... + x$ (n parcelas), $f(m) = f(x) \cdot f(x)...f(x)$ (n parcelas). Logo $f(nx) = f(m) = f(x)^n$.

ii) n é inteiro e negativo.
De (3) temos que:

$$f(nx + (-nx)) = f(nx) \cdot f(-nx). \tag{3.12}$$

Como $-n > 0$, de (i) temos que $f(-nx) = f(x)^{-n}$. Já vimos anteriormente também que $f(0) = 1$. Como $f(nx + (-nx)) = f(0)$. A expressão (3.12) pode ser reescrita por:

$$1 = f(nx) \cdot f(x)^{-n}. \tag{3.13}$$

Multiplicando ambos os lados de (3.13) por $f(x)^n$, como $f(x)$, da definição, é um número real positivo diferente de zero:

$$f(x)^n = f(nx) \cdot f(x)^{-n} \cdot f(x)^n = f(nx), \tag{3.14}$$

concluindo a demonstração.

3.4 A Função Inversa

Definição: Dizemos que a função $g : Y \to X$ é a inversa da função $f : X \to Y$ quando $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Escrevendo de outra maneira, $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Evidentemente, g é a inversa de f se, e somente se, f é a inversa de g (LIMA e colaboradores, 2012).

Por essa definição, sejam x_1 e $x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$, ou seja, f é injetiva.

Por outro lado, se $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$, então f é sobrejetiva pois, dado $y \in Y$ arbitrário, tomamos $x = g(y) \in X$ e temos $f(x) = y$.

Portanto, se a função $f : X \to Y$ possui inversa, então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, existe uma relação biunívoca entre X e Y.

Graficamente, se duas funções são inversas, elas são simétricas em relação à reta bissetriz dos quadrantes ímpares de $\mathbb{R}^2$, $y = x$.

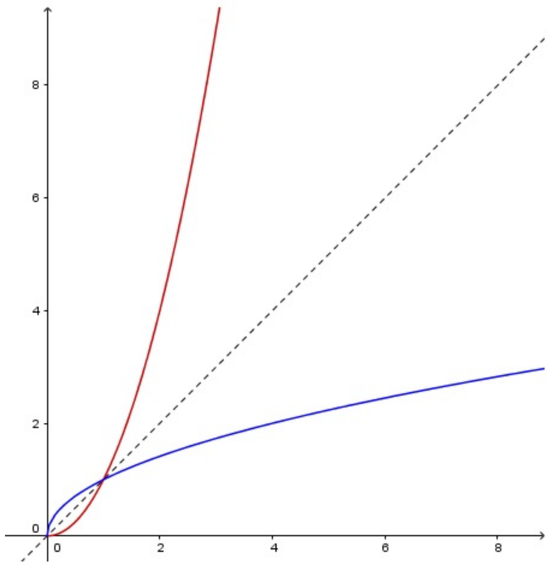


Figura 3.2: Gráfico de duas funções inversas - imagem produzida pelo autor.

3.4.1 A Função Logarítmica

A função inversa à exponencial é a função logarítmica, definida por:

Definição: Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$, chamamos de função logarítmica de base a a função f de $\mathbb{R}^+$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x real positivo o número $\log_a x$, chamado de *logaritmo* de x na base a. Em símbolos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$$

Pela definição de função inversa:

$$a^{\log_a x} = x \text{ e } \log_a(a^x) = x.$$

Portanto, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Simbolicamente:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x. \tag{3.15}$$

Assim como a exponencial, a função logarítmica é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Como $a^0 = 1$, tem-se que $\log_a 1 = 0$ e assim o ponto (1;0) pertence ao gráfico da função logarítmica, independente do valor da base a. Por essas propriedades, segue que, quando $a > 1$ os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo e os maiores que 1 têm logaritmo positivo. Ao contrário, se $0 < a < 1$, então $\log_a x$ é positivo quando $0 < x < 1$ e negativo quando $x > 1$. A figura a seguir mostra os gráficos das funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{1/2} x$.

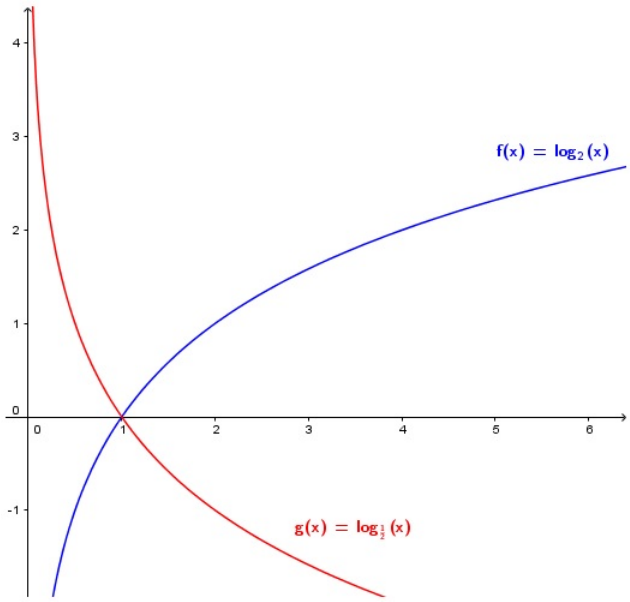


Figura 3.3: Gráfico de funções logarítmicas: crescimento e decrescimento - imagem produzida pelo autor.

Nesse gráfico também podemos observar outra propriedade desse tipo de função: a função logarítmica é ilimitada tanto inferior quanto superiormente.

Como já dito, se duas funções são inversas, seus gráficos são simétricos em relação à reta $y = x$ de $\mathbb{R}^2$. Portanto, isto ocorre com as funções $f(x) = a^x$ e $f(x) = \log_a x$ como pode ser observado na figura a seguir. Observe também que, quando a base é maior que 1, enquanto a função exponencial cresce muito rapidamente, a logarítmica cresce lentamente.

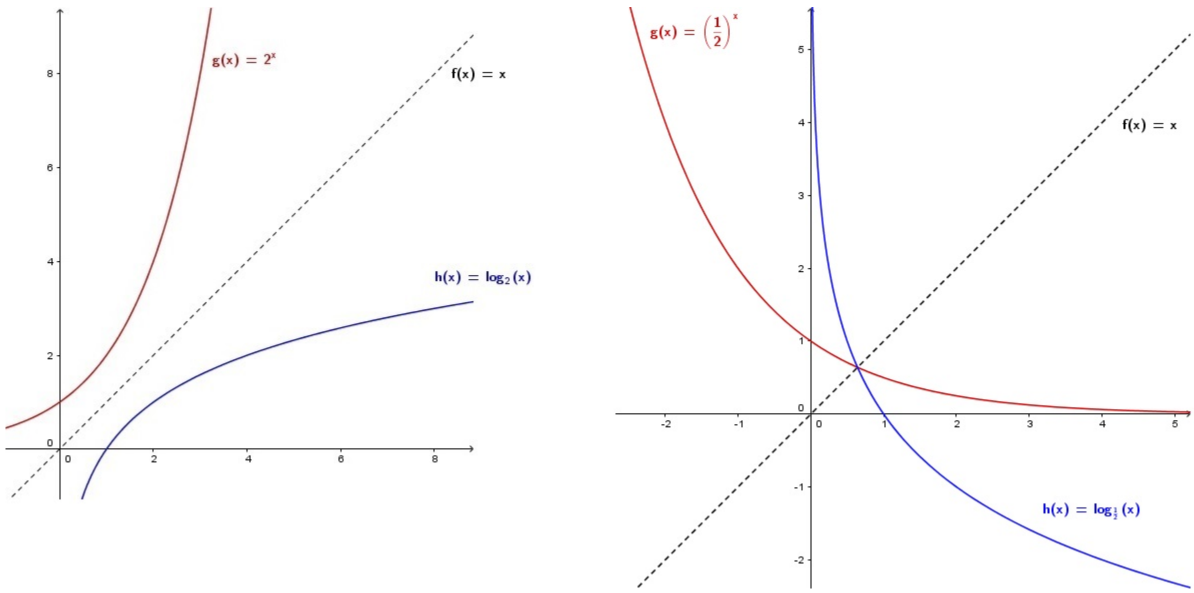


Figura 3.4: Gráfico: comparação entre função exponencial e logarítmica - imagem produzida pelo autor.

3.4.2 Caraterização da função logarítmica

A função logarítmica pode ser caracterizada pelo seguinte teorema:

Teorema: Seja $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$ para quaisquer x, $y \in \mathbb{R}^+$. Então existe $a > 0$ tal que $f(x) = \log_a x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$ (LIMA e colaboradores, 2012).

Demonstração: Para demonstrarmos este teorema, vamos inicialmente admitir que f é crescente (o outro caso é análogo). Temos que

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$$

Vamos inicialmente provar o teorema supondo que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$. Depois vamos generalizar, mostrando que isto sempre ocorre, logo não é uma hipótese adicional. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, temos que $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ podemos escrever:

$$f(a^m) = f(a \cdot a \cdot ... \cdot a) = f(a) + f(a) + ... + f(a) = 1 + 1 + ... + 1 = m$$
$$\text{e } f(a^m \cdot a^{-m}) = f(1) = 0 \Rightarrow f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}) = 0 \Rightarrow f(a^{-m}) = -m.$$

Logo $f(a^m) = m$ e $f(a^{-m}) = -m$.

Seja $r = m/n$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$, então $m = rn$. Assim:

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n). \tag{3.16}$$

Mas pela hipótese temos que $f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r)$. Segue então que

$$m = n \cdot f(a^r), \tag{3.17}$$

o que implica em

$$f(a^r) = \frac{m}{n} = r. \tag{3.18}$$

Seja x um número irracional entre r e s racionais, temos que:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow r < f(a^x) < s.$$

Portanto, todo número racional r, menor que x, é também menor que $f(a^x)$ e todo racional s, maior que x, é também maior que $f(a^x)$. Segue então que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(y) = \log_a y$ para todo $y > 0$.

Consideremos agora o caso geral (sem a suposição inicial que exista $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 1$) de uma função $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(xy) = g(x) + g(y)$.
Então, como no caso anterior, $g(1) = 0$ e como $2 > 1$, devemos ter $g(2) = b > 0$. Vamos definir uma nova função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = g(x)/b$. f é crescente, transforma produtos em somas e $f(2) = g(2)/b = 1$. Logo, pela primeira parte da demonstração, tem-se que $f(x) = \log_2 x$ para todo $x > 0$. Isto é, para qualquer valor de x maior que zero:

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)}, \tag{3.19}$$

com $a = 2^{1/b}$. Na igualdade $x = a^{g(x)}$, tomando $\log_a$ de ambos os membros, segue que: $g(x) = \log_a x$, como queríamos demonstrar.

3.4.3 A propriedade da mudança de base

Uma propriedade importante dos logaritmos é a da mudança de base: sejam a, b e c números reais positivos e b e c diferentes de 1:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Essa expressão nos diz como proceder se quisermos mudar o logaritmo da base a para a base c. A seguir, vamos demonstrá-la:

Demonstração: Vamos escrever:

$$\log_b a = x, \tag{3.20}$$

$$\log_c a = y \tag{3.21}$$

e

$$\log_c b = z. \tag{3.22}$$

Temos que provar que $x = \dfrac{y}{z}$ (note que de (3.22) $z \neq 0$).

Decorre de (3.20) que

$$b^x = a, \tag{3.23}$$

de (3.21)

$$c^y = a \tag{3.24}$$

e de (3.22)

$$c^z = b. \tag{3.25}$$

Substituindo (3.25) em (3.23) temos que

$$(c^z)^x = a \Rightarrow c^{zx} = a. \tag{3.26}$$

Substituindo (3.26) em (3.24) temos que

$$c^y = c^{zx} \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}. \tag{3.27}$$

Assim, concluimos a demonstração.

3.5 A função exponencial de base e

Do ponto de vista científico e de aplicações, a função exponencial mais importante é a aquela que tem como base o número e: $f(x) = e^x$. Essa função está relacionada à diversos problemas práticos de crescimento e decaimento (nesse caso a base é $1/e$ ou e^{-1}) contínuo, das mais variadas áreas como Economia, Biologia, Química, entre outras.

Toda função exponencial de base a pode ser transformada em uma função de base e, para isto, basta calcularmos k tal que $a = e^k$. A grande vantagem em fazer esta transformação reside no fato da derivada da função exponencial de base e ser ela própria: se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x$, propriedade que será demonstrada adiante.

Essa propriedade faz com que essa função tenha enorme importância nos cursos de cálculo. Além disso, a função e^x é usada na definição das funções hiperbólicas.

$$senh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

3.5.1 Logaritmos naturais

Como vimos anteriormente, a inversa da função exponencial de base a é a função logarítmica de base a, log_a. Logo, a função exponencial de base e terá como inversa a função logarítmica de mesma base. Esse logaritmo de base e é chamando de logaritmo natural.

A função logarítmica $f(x) = log_e x$ é mais comumente denotada por $f(x) = ln\ x$.

O logaritmo natural também está diretamente relacionado com inúmeras aplicações e tem grande importância nos cursos de cálculo, justamente pelo fato de ser a função inversa à exponencial de base e.

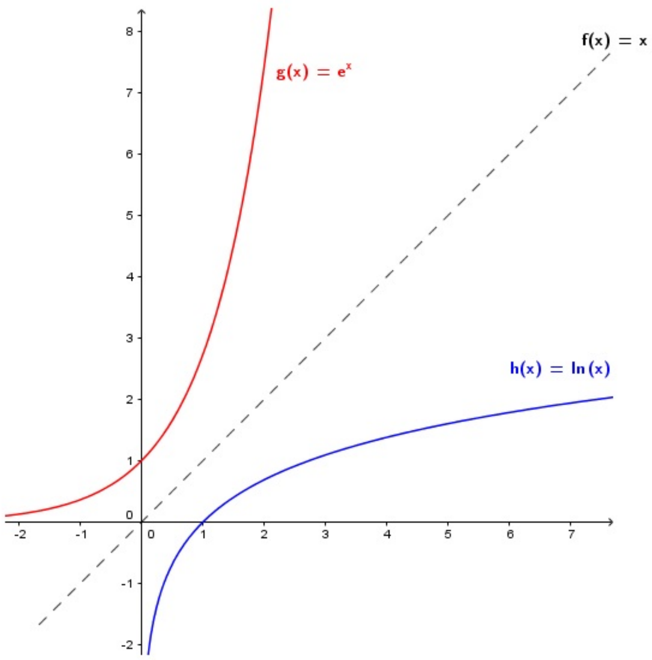


Figura 3.5: Gráfico das funções exponencial e logarítmica de base e - imagem produzida pelo autor.

Com a definição de $ln\ x$ podemos demonstrar a propriedade enunciada anteriormente: a derivada de uma função exponencial de base e é ela própria. Simbolicamente, se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$.

Para isto temos que lembrar a definição de derivada de uma função: Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definida em um intervalo aberto $I \subset D$ que contenha x_0, a derivada de f, denotada por f', no ponto x_0 é dada por:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \text{ se este limite existir.}$$

Como x_0 é um ponto arbitrário, podemos calcular a derivada para qualquer ponto x do domínio de f:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ se este limite existir.}$$

Assim, a derivada da função $f(x) = e^x$ é calculada por:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(e^h-1)}{h}. \tag{3.28}$$

Mas se fizermos, em (3.28) a mudança de variável: $u = e^h - 1$ ou $h = ln(1+u)$ temos que:

$$\frac{(e^h-1)}{h} = \frac{u}{ln(1+u)}. \tag{3.29}$$

Multiplicando o numerador e o denominador de (3.29) por $1/u$:

$$\frac{u}{ln(1+u)} = \frac{1}{\frac{1}{u}ln(1+u)} = \frac{1}{ln(1+u)^{1/u}}. \tag{3.30}$$

Desta forma,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(e^h-1)}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{ln(1+u)^{1/u}}. \tag{3.31}$$

Se fizermos, em (3.31) uma nova mudança de variável $t = \frac{1}{u}$ temos que esse limite é equivalente a:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{ln(1+\frac{1}{t})^t} = \frac{1}{\lim_{t\to\infty} ln(1+\frac{1}{t})^t} = \frac{1}{ln\left[\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t\right]} = \frac{1}{ln\ e} = 1.(3.32)$$

Substituindo o resultado de (3.32) em (3.28), segue que

$$f'(x) = e^x. \tag{3.33}$$

A seguir, estudaremos modelos matemáticos relacionados às funções exponenciais.

4 Modelos matemáticos

As funções exponenciais (foco deste trabalho) estão relacionadas a uma variedade de situações cotidianas, nas mais diversas áreas. Essas relações geralmente são representadas por meio de um conjunto de símbolos e relações matemáticas que generalizam os problemas, o que chamamos de modelo matemático. Neste capítulo, a modelagem matemática de situações envolvendo exponenciais será o eixo principal. Inicialmente apresentaremos modelos matemáticos mais simples e cotidianos para, na sequência, destacarmos modelos, do ponto de vista teórico, mais abstratos e complexos.

A modelagem matemática está presente na vida do homem desde os tempos mais remotos. Um dos primeiros modelos matemáticos produzidos foi a invenção da roda pelos sumérios por volta de 3000 a.C.. Existem vários outros exemplos de situações na história da Matemática relacionados à modelagem, como o cálculo de alturas de pirâmides por meio de semelhança de triângulos realizado por Tales de Mileto (636-568 a.C.), o modelo heliocêntrico de Nicolau Copérnico (1473-1543) que explicava o movimento dos corpos celestes, o modelo criado por Galileu Galilei (1564-1642) para compreender a queda dos corpos, entre outros. Porém, a evolução desse ramo da Matemática sofreu um grande avanço após o desenvolvimento do cálculo diferencial. (COSTA, 2009; BIEMBENGUT, 1990). Geralmente, os modelos matemáticos são formulados de acordo com a natureza e com interpretação do homem das propriedades do fenômeno envolvido na modelagem. A ideia é tentar matematizar uma situação, no intuito de fazer previsões daquele problema. Esse fenômeno pode estar relacionado com as mais diversas áreas de conhecimento.

Bassanezi (2004) destaca a relevância da modelagem matemática quando utilizada como instrumento de pesquisa:

- Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais;
- Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões;
- Pode sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
- Pode preencher lacunas onde existem falta de dados experimentais;

- Pode servir como recurso para melhorar o entendimento da realidade;
- Pode servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores de diversas áreas do conhecimento.

Entre as diversas áreas de conhecimento em que os modelos matemáticos podem ser extremamente úteis no desenvolvimento de pesquisas, podemos citar a Física, a Química, a Biologia, as Engenharias, a Educação, a Medicina, a Economia, a Arqueologia, as Artes, a Meteorologia, entre outras.

Na Física, por exemplo, a evolução e complexidade dos modelos matemáticos para a teoria dos campos impulsionou o desenvolvimento de sistemas de equações diferenciais ordinárias. As soluções desses sistemas fornecem respostas convenientes para um grande número de problemas específicos nas mais diversas sub-áreas da Física, como a Eletricidade, o Magnetismo, a Hidrodinâmica, a Elasticidade, entre outras. Além disso, o desenvolvimento de modelos fez com que conceitos da Teoria da Relatividade e da Física Quântica fossem re-examinados. Na Química é frequente o uso de equações diferenciais para modelar a velocidade de reações químicas, os processos difusionais e termodinâmicos, bem como a teoria das matrizes e grafos para descrever a estrutura das moléculas, entre outros. Na Biologia, alguns modelos que utilizam equações diferenciais ordinárias e parciais foram muito importantes para o desenvolvimento e a criação de uma sub-área da Matemática Aplicada: a Biomatemática. Com o surgimento de novas técnicas, como a Teoria do Caos e a Teoria Fuzzy, foi possível desenvolver modelos mais realísticos e capazes de simular e influir diversos fenômenos biológicos como: dinâmica de redes filamentares, difusão de insetos e poluentes, redes neurais, etc. Nas áreas de engenharia e da indústria, o uso de Lógica Fuzzy e de alguns métodos modernos para resolver equações diferenciais parciais com o auxílio de computadores, propiciou grande sofisticação na automação de máquinas, no estudo de fluxos, na biotecnologia, etc. Na meteorologia, os modelos matemáticos são extremamente importantes para a previsão do tempo. O desenvolvimento de modelos que consigam caracterizar todos os fenômenos que ocorrem na atmosfera levam a previsões cada vez mais precisas. Na área da Educação, mais especificamente na Educação Matemática, o uso da modelagem para motivar o ensino é defendido por vários autores, como Bassanezi (2004) e Meyer (2011). Como os modelos geralmente trazem fenômenos reais e aplicações contextualizadas ao dia a dia do aluno, essa ferramenta pode ser capaz de propiciar uma aprendizagem mais significativa.

Por esta razão e no intuito de motivar o ensino de funções exponenciais os modelos matemáticos estão presentes neste trabalho. Assim, apresentaremos a seguir alguns exemplos de modelos matemáticos relacionados a problemas cotidianos, envolvendo exponenciais.

4.1 Situações cotidianas relacionadas a exponenciais

4.1.1 Aplicação financeira

Suponhamos que uma pessoa deposite uma quantia inicial $Q_0 =$ R$ 100,00 em uma aplicação financeira com rendimento de 1% ao mês. Seja t o tempo de aplicação, em meses, e Q_n o valor após n meses. Temos:
$t = 0 \rightarrow Q_0$;
$t = 1 \rightarrow Q_1 = Q_0 + 0,01Q_0 = (1,01)Q_0$;
$t = 2 \rightarrow Q_2 = Q_1 + 0,01Q_1 = (1,01)Q_1 = (1,01)(1,01)Q_0 = (1,01)^2Q_0$
$t = 3 \rightarrow Q_3 = Q_2 + 0,01Q_2 = (1,01)Q_2 = (1,01)(1,01)^2Q_0 = (1,01)^3Q_0$
...
$t = n \rightarrow Q_n = Q_{n-1} + 0,01Q_{n-1} = (1,01)Q_{n-1} = (1,01)(1,01)^{n-1}Q_0 = (1,01)^nQ_0$

Deste modo, conseguiríamos calcular o capital, após n meses, para qualquer natural n. Por exemplo, após 7 meses, o novo capital será: $Q_7 = (1,01)^7 100,00 = 107,21$.

Outro questionamento que poderia ser levantado é: "após quantos meses de aplicação, o capital atingirá o dobro do investido?".

Nesse caso, $Q_n = 2Q_0$ e como $Q_n = (1,01)^nQ_0$, então $2Q_0 = (1,01)^nQ_0$. Se dividirmos ambos os lados por Q_0, descobriremos que o nosso problema é resolvido através da equação exponencial: $(1,01)^n = 2$, na variável n.

Utilizando a definição de logaritmo, conseguimos isolar n na equação anterior: $n = \log_{1,01} 2$. Se fizermos uma mudança para a base 10 (frequentemente utilizada e presente em qualquer calculadora científica), podemos escrever: $n = \frac{log\ 2}{log\ 1,01} = 69,66$ meses, ou seja, o capital atingiria o dobro do investido no 70° mês.

Poderíamos também resolver a questão, encontrando o valor de x em que a função $f(x) = (1,01)^x$ se encontra com a reta $r : y = 2$. Com a ajuda do *GeoGebra*, podemos visualizar a mesma solução (abscissa do ponto A da figura a seguir).

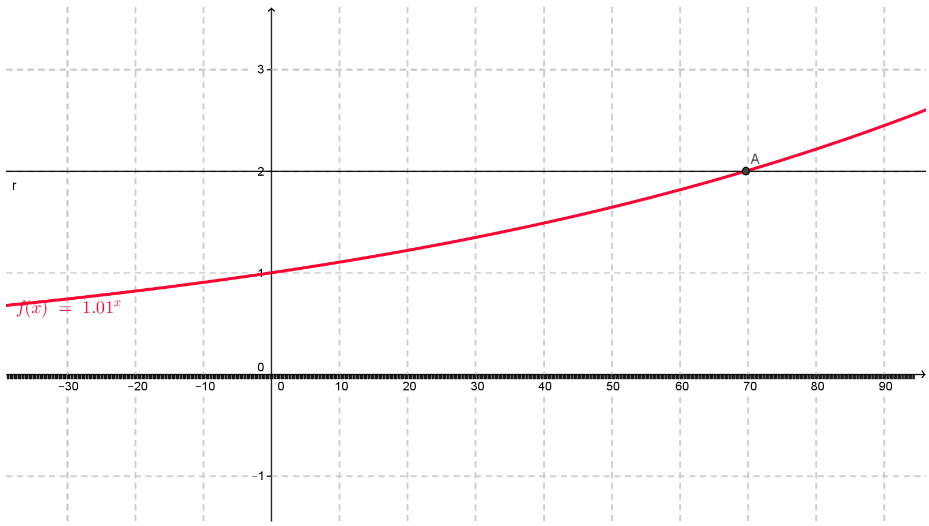


Figura 4.1: Aplicação financeira - imagem produzida pelo autor.

4.1.2 Datação arqueológica por Carbono-14

A datação arqueológica por Carbono-14 (C-14) é um método radiométrico de determinação da idade concreta dos objetos que contenham carbono. Esta técnica foi desenvolvida por Willard Frank Libby (1908 - 1980) por volta da década de 1940 e este desenvolvimento foi reconhecido com o prêmio Nobel de Química, em 1960, dado a ele.

O método consiste em medir a atividade de C-14 presente no organismo do qual se quer determinar a idade. Sabe-se que esse isótopo está presente em todo organismo vivo, os vegetais o absorvem durante a fotossíntese e os animais por meio da cadeia alimentar, a partir do consumo dos vegetais. Quando um ser vivo morre, ele deixa de repor C-14 que assim passa a se desintegrar, diminuindo a atividade do isótopo presente no organismo. Como a queda na atividade de C-14 ocorre com uma taxa instantânea de decaimento proporcional à atividade da substância no instante t, se tivermos uma certa atividade inicial C_0, podemos descrever matematicamente o fenômeno que queremos modelar através da equação diferencial:

$$\frac{dC}{dt} = -kC, \tag{4.1}$$

em que $C(t)$ representa a atividade de C-14 no instante t e k é um número real. Podemos reescrever esta equação (4.1):

$$\frac{1}{C}\frac{dC}{dt} = -k. \tag{4.2}$$

Como (4.2) é uma equação separável (mais informações sobre equações diferenciais e métodos de resolução podem ser encontrados no apêndice A), se integrarmos ambos os lados em relação a t temos que:

$$ln\ C = -kt + R \Rightarrow C(t) = e^{-kt}e^{R}, \tag{4.3}$$

em que R é uma constante. Pela condição inicial $C(0) = C_0$, temos que $e^R = C_0$. Logo, a solução da equação diferencial (4.2) é a função exponencial: $C(t) = C_0e^{-kt}$.

Sabe-se que a cada 5.730 anos o nível de C-14 se reduz à metade (meia-vida), $C(5.730) = \frac{C_0}{2}$. Assim, podemos encontrar o valor de k por:

$$\frac{C_0}{2} = C_0 \cdot e^{-5.730k} \Rightarrow e^{-5.730k} = \frac{1}{2} \Rightarrow -5.730k = ln(1/2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k = -\frac{ln(1/2)}{5.730} \Rightarrow k \approx 0,000121.$$

Assim, a função que descreve a atividade C de C-14 em função do tempo t, em um ser que perdeu a vida a t anos atrás é dada por:

$$C(t) = C_0e^{-0,000121t}. \tag{4.4}$$

Desta forma, podemos resolver problemas como: "Foi encontrada uma múmia e será realizada a datação por C-14 para determinar sua idade. Sabendo que um animal vivo emite em torno de 897 radiações de C-14 por grama/hora e que a atividade de C-14 na múmia é de 624 radiações por grama/hora, qual a idade aproximada desta múmia?

Substituindo os valores na função (4.4):

$$624 = 897 \cdot e^{-0,000121t} \Rightarrow e^{-0,000121t} = \frac{624}{897} \Rightarrow -0,000121t = ln(624/897) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = -\frac{ln(624/897)}{0,000121} \Rightarrow t \approx 3.000 \text{ anos}.$$

Podemos observar essa situação graficamente, com o auxílio do *GeoGebra*. Seja f a função da atividade de C-14 pelo tempo x, $f(x) = 897 \cdot e^{-0,000121x}$. O ponto A, cuja imagem é 624, tem abscissa 3.000.

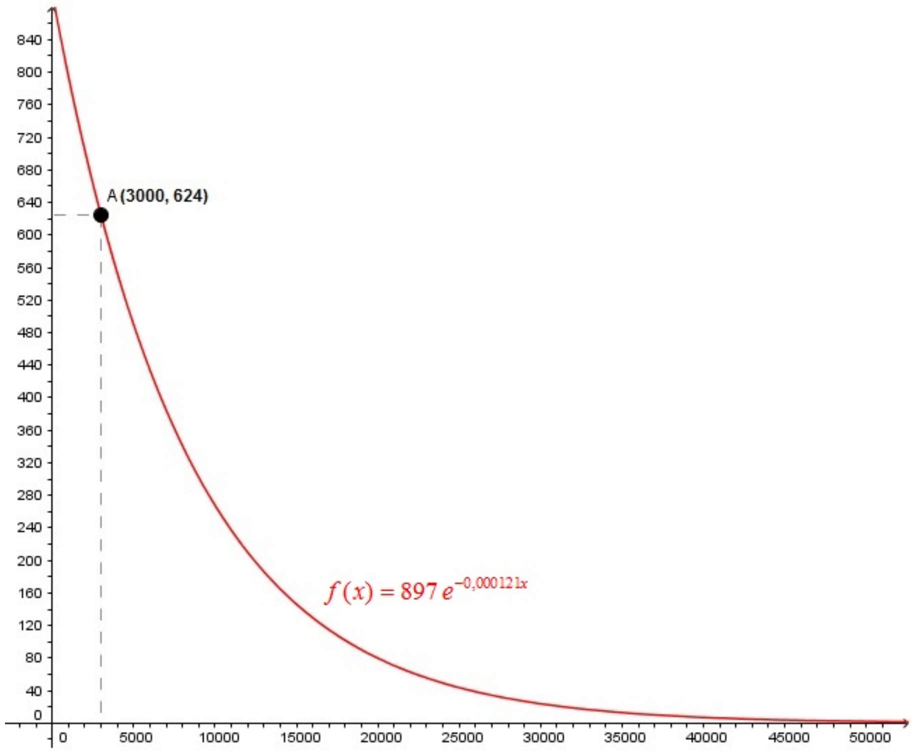


Figura 4.2: Datação por C-14 - imagem produzida pelo autor.

4.1.3 Circuitos RC

Um outro problema que podemos apresentar é na área de eletricidade. Analisaremos um circuito RC em série, ou seja, que tenha resistor e capacitor associados em série com uma bateria. Durante o **carregamento** desse capacitor, utilizaremos a lei das malhas de Kirchhoff para determinarmos uma expressão que trate do comportamento da diferença de potencial no circuito, durante um certo intervalo de tempo (HALLIDAY, 2012).

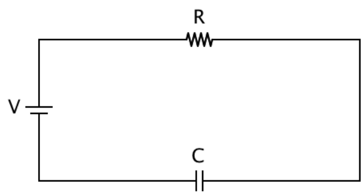


Figura 4.3: Representação de um circuito RC (confeccionado por meio do simulador online circuits, disponível em http://www.falstad.com/circuit/).

A diferença de potencial (ddp) no resistor pela lei de Ohm é Ri, em que R é sua resistência e i a corrente elétrica que passa por ele. Corrente elétrica, por definição, é a razão entre a variação de quantidade de carga (q) que atravessa uma secção transversal de um condutor e a variação do tempo (t). Desta forma, temos que a ddp no resistor pode ser expressa por: $R\frac{dq}{dt}$.

Para o capacitor temos, pela definição de capacitância (C), que a ddp pode ser calculada pela expressão: $\frac{q}{C}$.

A lei das malhas de Kirchhoff diz que a somatória da ddps dos componentes em uma malha deve ser zero. Assim, a expressão obtida por meio da análise será:

$$\epsilon - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0, \tag{4.5}$$

em que ϵ é a força eletromotriz da bateria.

Para encontrar a carga no capacitor em um instante de tempo t qualquer, devemos resolver a equação diferencial (4.5):

$$\epsilon - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\epsilon}{R}. \tag{4.6}$$

Por tratar-se de uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem com coeficientes constantes, cujo procedimento detalhado de resolução se encontra no apêndice A, para resolvê-la iremos multiplicá-la pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\frac{t}{RC}}$:

$$e^{\frac{t}{RC}}\frac{dq}{dt} + \frac{qe^{\frac{t}{RC}}}{RC} = \frac{\epsilon e^{\frac{t}{RC}}}{R} \Rightarrow \frac{d}{dt}[qe^{\frac{t}{RC}}] = \frac{\epsilon e^{\frac{t}{RC}}}{R} \tag{4.7}$$

Integrando ambos os lados de (4.7) em relação a t, segue que:

$$qe^{\frac{t}{RC}} = C\epsilon e^{\frac{t}{RC}} + K, \tag{4.8}$$

em que K é uma constante.

Como $q_0 = q(0) = 0$ então $k = -C\epsilon$. Assim a solução da equação (4.8) é dada por:

$$q = C\epsilon\left(1 - e^{\frac{t}{RC}}\right). \tag{4.9}$$

Com essa expressão podemos também encontrar a função que representa a voltagem (V_c) no capacitor, em função do tempo, durante seu carregamento. Como $V = q/C$, pela expressão (4.9), temos que:

$$V_c = \epsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \tag{4.10}$$

Durante o descarregamento não temos a bateria no circuito e assim a força eletromotriz (ϵ) é zero. Neste caso a equação será:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{4.11}$$

Dividindo toda a equação (4.11) por R, temos que:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0. \tag{4.12}$$

Vamos multiplicar (4.12) pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\frac{t}{RC}}$:

$$e^{\frac{t}{RC}}\frac{dq}{dt} + \frac{qe^{\frac{t}{RC}}}{RC} = 0 \Rightarrow \frac{d[e^{\frac{t}{RC}}q]}{dt} = 0 \tag{4.13}$$

Integrando ambos os lados de (4.13) em relaçao a t:

$$e^{\frac{t}{RC}}q = K \Rightarrow q = Ke^{-\frac{t}{RC}}, \tag{4.14}$$

em que K é uma constante. Denotando por q_0 a quantidade de carga inicial e considerando a situação em que o circuito carrega e descarrega sempre até o final da bateria, temos que $q_0 = C\epsilon$. Como $q_0 = q(0) = K$, temos a seguinte expressão para representar a quantidade de carga, durante o descarregamento total de um circuito RC:

$$q = C\epsilon e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{4.15}$$

Usando novamente que $V = \frac{q}{C}$ e denotando por V_d a voltagem no capacitor durante o descarregamento, em função do tempo, temos que:

$$V_dC = C\epsilon e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow V_d = \epsilon e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{4.16}$$

O comportamento das funções V_c e V_d podem ser observados graficamente pela Figura (4.4).

Podemos perceber que as funções apresentam comportamentos opostos. Porém há uma simetria entre os gráficos, em torno da reta $y = \frac{\epsilon}{2}$. Percebemos também que o tempo total de carregamento e descarregamento é o mesmo e a voltagem atinge o valor de metade da força eletromotriz da bateria no mesmo instante, tanto no carregamento quanto no descarregamento.

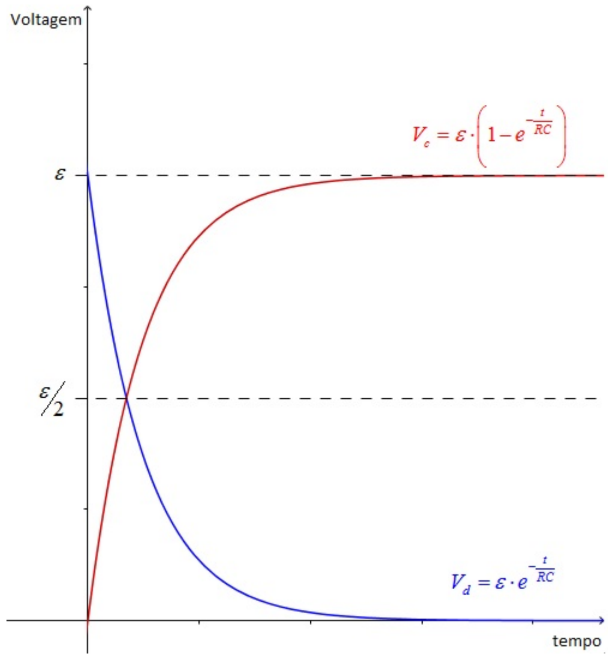


Figura 4.4: Gráfico de V x t em um circuito RC - carregamento e descarregamento - imagem produzida pelo autor.

4.2 Modelos de crescimento populacional

A seguir apresentaremos alguns modelos que são utilizados especificamente para modelar o crescimento de populações.

4.2.1 Modelo malthusiano contínuo

Um dos modelos matemáticos mais conhecidos, relacionado ao crescimento de uma população é o de Thomas Malthus (1766-1834). É dele a primeira proposta de utilização de Matemática para modelar o crescimento de uma população. Esta proposta está baseada em dois postulados:

1) "O alimento é necessário à subsistência do homem"

2) "A paixão entre os sexos é necessária e deverá permanecer aproximadamente em seu estado permanente" (BASSANEZI, 2004).

Supondo que ambos os postulados estejam garantidos, segundo Malthus a população, quando não obstaculizada, cresce a uma razão geométrica enquanto os seus meios de subsistência aumentam apenas a uma razão aritmética. Como o crescimento populacional é proporcional a própria população, em cada instante, ela deveria crescer sem nenhuma inibição (BASSANEZI, 2004).

O modelo de Malthus considerou um crescimento populacional otimizado, sem guerras, fome ou qualquer tipo de catástrofes; e indivíduos com o mesmo comportamento (idênticos). Por esse modelo, a população atingiria em um determinado instante valores astronômicos e assim o planeta se tornaria inabitável e superlotado. A previsão de Malthus estava equivocada. Além do erro em relação ao crescimento populacional, ele também se enganou em relação à produção mundial de alimentos, pois não supunha o grande salto ocorrido nessa produção na segunda metade do século XX (BASSANEZI, 2004).

Como uma das hipóteses do modelo de Malthus é que a variação da população é proporcional à própria população em cada período, a quantidade de indivíduos da população em um determinado instante (contínuo) pode ser expressa matematicamente pela equação diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P(t), \tag{4.17}$$

que é equivalente a:

$$\frac{1}{P(t)} \frac{dP}{P(t)} = \alpha. \tag{4.18}$$

Logo, trata-se de uma equação separável. Integrando ambos os lados de (4.18) em relação a t, obtemos:

$$ln(P(t)) = \alpha t + c \Rightarrow P(t) = e^{\alpha t + c} \Rightarrow P(t) = e^c e^{\alpha t}, \tag{4.19}$$

sendo c uma constante qualquer. Fazendo $k = e^c$, temos que:

$$P(t) = ke^{\alpha t}. \tag{4.20}$$

Se denotarmos a população inicial por P_0 temos que:

$$P_0 = P(0) = ke^0 \Rightarrow P_0 = k. \tag{4.21}$$

Desta forma, esse problema pode ser expresso pela seguinte função exponencial:

$$P(t) = P_0 e^{\alpha t}. \tag{4.22}$$

Se isolarmos, em (4.22), o parâmetro α, obteremos:

$$e^{\alpha t} = \frac{P(t)}{P_0} \Rightarrow \alpha t = ln \frac{P(t)}{P_0} \tag{4.23}$$

encontrando assim que:

$$\alpha = \frac{1}{t} ln \left(\frac{P(t)}{P_0} \right). \tag{4.24}$$

Portanto, se o crescimento de determinada população segue o modelo de Malthus, conhecida a população inicial P_0 e seu valor $P(t)$ após determinado período de tempo t, é possível estimar, por meio da expressão acima, o valor do parâmetro α para aquela população. Assim, podemos resolver exemplos como o seguinte: "O número de bactérias em uma cultura é observado e cresce segundo o modelo de Malthus. No início do experimento existem 1.000 bactérias e três horas depois existem 500.000. Qual foi o tempo necessário para triplicar o número de bactérias?"

Seja t o tempo, em horas, e vamos supor que no início do experimento se esteja considerando $t = 0$. Então $P(0) = P_0 = 1.000$ e após $t = 3$ horas, $P(3) = 500.000$. Pela expressão (4.22), $P(3) = P_0 e^{3\alpha}$ e assim:

$$500.000 = 1.000 e^{3\alpha} \Rightarrow e^{3\alpha} = 500 \Rightarrow 3\alpha = ln\ 500 \Rightarrow \alpha = \tfrac{ln\ 500}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha \approx 2,07154.$$

Logo, a função que representa essa situação é $P(t) = 1.000 e^{2,07154t}$ que esta representada graficamente pela Figura (4.5).

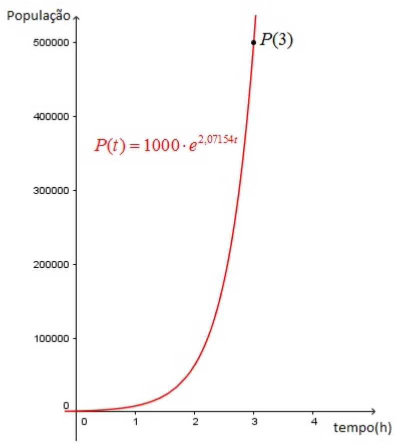


Figura 4.5: Crescimento populacional de bactérias - imagem produzida pelo autor.

Nosso problema é encontrar t tal que $P(t) = 3.000$, então:

$$3.000 = 1.000e^{2,07154t} \Rightarrow e^{2,07154t} = 3 \Rightarrow 2,07154 \cdot t = ln\ 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \frac{ln\ 3}{2,07154} \Rightarrow t \approx 0,53h \text{ ou } t \approx 32 \text{ minutos.}$$

4.2.2 Modelo logístico contínuo (Verhulst)

Tentando tornar o modelo malthusiano mais abrangente e realístico, Pierre François Verhulst (1804-1849) propôs, em 1838, alterações no modelo levando em conta as inibições naturais que toda população normalmente sofre. Desta forma, o número de indivíduos no planeta teria um valor limite constante, quando o tempo cresce. Do ponto de vista biológico e realístico, trata-se de um modelo mais significativo (BASSANEZI, 2004).

O modelo de Verhulst (ou modelo logístico) tem a essência do modelo de Malthus, com algumas modificações. Assim, considera a taxa de crescimento como sendo proporcial à própria população em cada instante, porém a razão de proporcionalidade não é mais considerada constante e, sim, dependente da população e da capacidade suporte do meio, conforme segue:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(P)P(t), \tag{4.25}$$

em que $\alpha(P) = r\left(\frac{K-P}{K}\right)$, $r > 0$ e K sendo o valor limite da população, também conhecido como capacidade suporte. Note que quando $P \to K$ a taxa de crescimento $\alpha(P) \to 0$, ou seja, quando a população atinge seu valor limite, para de crescer. Substituindo a expressão de α na equação (4.25) e considerando a população inicial com valor P_0 conhecido, temos o modelo logístico clássico:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = rP\left(1 - \dfrac{P}{K}\right) \\ P(0) = P_0 \end{cases} \tag{4.26}$$

Note que $P(t) = 0$ e $P(t) = K$ são soluções triviais da equação diferencial dada em (4.26), porém essas soluções não são de interesse para o estudo, pois significam que a população é inexistente ou sempre constante, o que não reflete a realidade. Vamos, portanto, encontrar a solução não trivial dessa equação diferencial que pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{P(1-P/K)}\frac{dP}{dt} = r. \tag{4.27}$$

Trata-se de uma equação separável. Integrando ambos os lados de (4.27), temos que:

$$\int \frac{dP}{P(1-P/K)} = \int r dt \tag{4.28}$$

Para resolvermos a integral do lado esquerdo da igualdade em (4.28) inicialmente vamos reescrever o integrando do lado esquerdo:

$$\frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{1}{P\left(\frac{K-P}{K}\right)} = \frac{K}{P\left(K-P\right)}. \tag{4.29}$$

Vamos usar o método das frações parciais. Para isso, devemos encontrar os valores de duas constantes A e B tais que:

$$\frac{K}{P\,(K-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{K-P}. \tag{4.30}$$

O lado direito de (4.30) é equivalente à:

$$\frac{A(K-P)+BP}{P(K-P)} = \frac{(B-A)P+AK}{P(K-P)}. \tag{4.31}$$

Assim, de (4.30) e (4.31) temos a igualdade:

$$\frac{K}{P\,(K-P)} = \frac{(B-A)P+AK}{P(K-P)}. \tag{4.32}$$

Portanto, A e B são tais que:

$$\begin{cases} AK = K \\ B - A = 0 \end{cases} \tag{4.33}$$

Da primeira equação de (4.33), temos que $A = 1$. Substituindo esse valor na segunda equação obtemos $B = 1$.

Dessa forma, a integral do lado esquerdo de (4.28) é equivalente à soma:

$$\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{K-P} = ln|P| - ln|K-P| + c_1 = ln\left|\frac{P}{K-P}\right| + c_1, \tag{4.34}$$

em que c_1 é uma constante.

Como a integral do lado direito de (4.28) é igual a $rt + c_2$, sendo c_2 também uma constante, substituindo esse resultado e a expressão (4.34) em (4.28) temos a igualdade:

$$ln\left|\frac{P}{K-P}\right| + c_1 = rt + c_2 \Rightarrow ln\left|\frac{P}{K-P}\right| = rt + c_3, \tag{4.35}$$

em que $c_3 = c_2 - c_1$.

Portanto, da expressão (4.35):

$$\left|\frac{P}{K-P}\right| = e^{c_3}e^{rt} = c_4e^{rt}, \tag{4.36}$$

em que $c_4 = e^{c_3}$.

Dessa expressão, temos que:

$$\frac{P}{K-P} = ce^{rt} \tag{4.37}$$

em que $c = \pm c_4$.

Se $P(0) = P_0$ podemos encontrar um valor para a constante c:

$$c = \frac{P_0}{K - P_0}. \tag{4.38}$$

Assim, podemos encontrar uma solução para (4.37):

$$\frac{P}{K-P} = ce^{rt} \Rightarrow P = Kce^{rt} - Pce^{rt} \Rightarrow P(1 + ce^{rt}) = Kce^{rt} \Rightarrow P = \frac{Kce^{rt}}{1 + ce^{rt}}. \tag{4.39}$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração do lado direito da igualdade (4.39) por ce^{rt} obtemos:

$$P(t) = \frac{K}{\frac{1}{c}e^{-rt} + 1}. \tag{4.40}$$

Como $\frac{1}{c} = \frac{K-P_0}{P_0}$, obtemos a solução:

$$P(t) = \frac{K}{\frac{K-P_0}{P_0}e^{-rt} + 1} = \frac{P_0 K}{(K - P_0)e^{-rt} + P_0}. \tag{4.41}$$

Essa função P pode ser representada pelas Figuras (4.6), quando $P_0 < K$, e (4.7), quando $P_0 > K$.

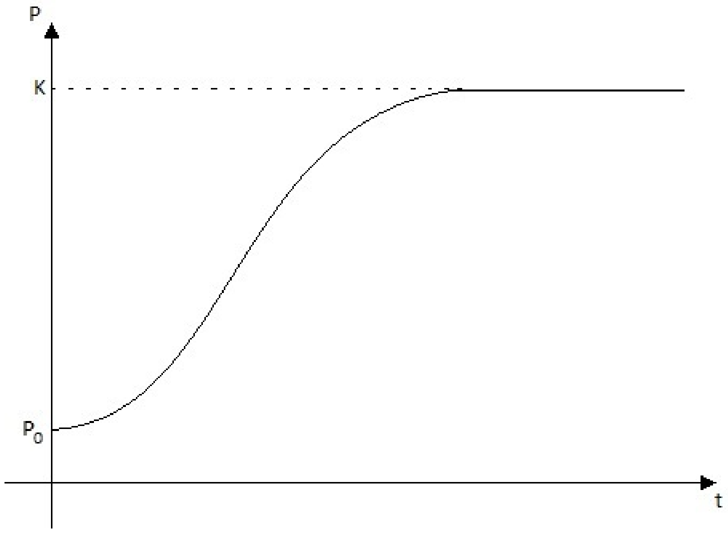


Figura 4.6: Curva Logística - população inicial menor que a capacidade suporte.

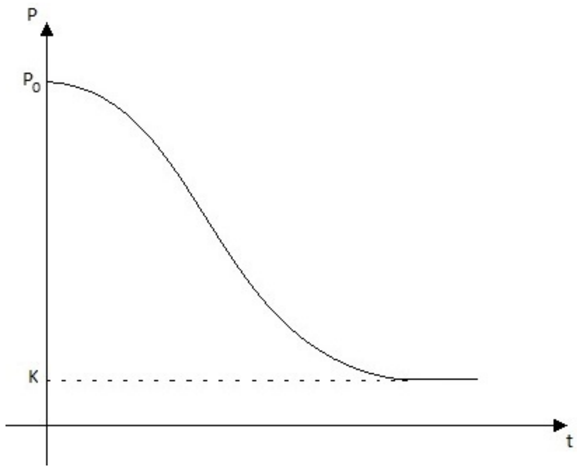


Figura 4.7: Curva Logística - população inicial maior que a capacidade suporte.

4.3 Ajuste de curvas

Quando estamos estudando um fenômeno experimental que relaciona duas ou mais variáveis e temos dados dessas variáveis, muitas vezes, é importante para o estudo tentar identificar se existe relação e qual é essa relação entre essas variáveis. Uma regressão ou ajuste de curvas é um mecânismo que faz justamente isso. O ajuste é um recurso que fornece uma relação funcional quando se tem uma relação estatística. Quando fazemos um ajuste, obtemos uma relação funcional que comporta em seus parâmetros (constantes dessa função) qualidades ou significados próprios do fenômeno em estudo (BASSANEZI, 2004).

Ao encontrarmos esses parâmetros, estamos interessados em saber se a função encontrada descreve de maneira satisfatória o fenômeno e com ela é possível se fazer previsões de uma variável dependente y quando a variável independente x não está no intervalo pesquisado. Um dos métodos mais usados para o ajuste linear de curvas é o denominado "método dos mínimos quadrados". Esse método utiliza para esse ajuste a condição de que a soma (S) dos quadrados das distâncias dos pontos à função procurada seja mínima.

Assim, por exemplo, quando a função que melhor ajusta os dados for da forma

$$y(x) = f(x; a, b) = a + bx.$$

o objetivo é encontrar os parâmetros a e b tais que a função S abaixo seja mínima.

$$S(a, b) = \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - (a + bx_i)\right]^2. \tag{4.42}$$

Como trata-se de uma função polinomial de segundo grau, S é derivável em todo ponto (a, b) do sistema cartesiano e assume sempre valores maiores ou iguais a zero. Quando a e b tendem ao infinito, S também tende ao infinito. Assim, S sempre assume um valor mínimo. Então, os parâmetros a e b que minimizam S são tais que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

Calculando a primeira derivada parcial, temos que:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - (a + bx_i)\right] = 0, \tag{4.43}$$

que é equivalente a

$$\Rightarrow 2 \sum_{i=0}^{n} a + 2 \sum_{i=0}^{n} bx_i = 2 \sum_{i=0}^{n} y_i. \tag{4.44}$$

Dividindo ambos os lados de (4.44) por 2, temos que:

$$na + b \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i. \tag{4.45}$$

Calculando a segunda derivada parcial, temos que:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=0}^{n} \left[y_i - (a + bx_i)\right] x_i = 0, \tag{4.46}$$

que é equivalente a

$$2 \sum_{i=0}^{n} ax_i + 2 \sum_{i=0}^{n} b(x_i)^2 = 2 \sum_{i=0}^{n} x_i y_i. \tag{4.47}$$

Dividindo ambos os lados de (4.47) por 2, temos que:

$$\sum_{i=0}^{n} ax_i + \sum_{i=0}^{n} b(x_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i. \tag{4.48}$$

Assim, o sistema que temos que resolver é o formado pelas equações (4.45) e (4.48).

$$\begin{cases} na + b\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i. \\ \sum_{i=0}^{n} ax_i + \sum_{i=0}^{n} b(x_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Se isolarmos a em (4.45), temos:

$$a = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i}{n} - b\frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n}. \tag{4.49}$$

Substituindo (4.49) em (4.48), segue que:

$$\left(\frac{\sum_{i=0}^{n} y_i}{n} - b\frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n}\right)\sum_{i=0}^{n} x_i + b\sum_{i=0}^{n}(x_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} y_i - b\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 + nb\sum_{i=0}^{n}(x_i)^2}{n} = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\left[n\sum_{i=0}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2\right] = n\sum_{i=0}^{n} x_i y_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} y_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{n\sum_{i=0}^{n} x_i y_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} y_i}{n\sum_{i=0}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2}.$$

Portanto, $S(a, b)$ de (4.42) será mínima quando:

$$a = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i}{n} - b\frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n} \text{ e } b = \frac{n\sum_{i=0}^{n} x_i y_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} y_i}{n\sum_{i=0}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2}.$$

Exemplo: Determine a função que melhor representa a relação entre as variáveis x: anos de estudo do trabalhador; e y: salário médio do trabalhador (em reais), cujos dados são expressos na tabela abaixo[1]:

x	y
6	1.000
8	1.200
10	1.450
11	1.500
12	1.620
14	2.000
15	2.020
16	2.210
18	2.500
20	3.000

[1] Os dados são hipotéticos

Para encontrarmos os parâmetros a e b, vamos acrescentar a essa tabela as colunas xy, x^2 e uma linha com as somas de cada coluna:

x	y	xy	x^2
6	1.000	6.000	36
8	1.200	9.600	64
10	1.450	14.500	100
11	1.500	16.500	121
12	1.620	19.440	144
14	2.000	28.000	196
15	2.020	30.300	225
16	2.210	35.360	256
18	2.500	45.000	324
20	3.000	60.000	400
130	18.500	264.700	1.866

Calculando os parâmetros:

$$b = \frac{10\sum_{i=0}^{10} x_i y_i - \sum_{i=0}^{10} x_i \sum_{i=0}^{10} y_i}{10\sum_{i=0}^{n}(x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{10} x_i\right)^2} = \frac{10 \cdot 264.700 - (130 \cdot 18.500)}{10 \cdot 1.866 - 130^2} = \frac{242.000}{1.760} = 137,5.$$

$$a = \frac{\sum_{i=0}^{10} y_i}{10} - b\frac{\sum_{i=0}^{10} x_i}{10} = \frac{18.500}{10} - 137,5 \cdot \frac{130}{10} = 1.850 - 1.787,5 = 62,5.$$

Assim a equação que descreve a relação entre x e y é dada por:

$$y = 62,5 + 137,5x. \tag{4.50}$$

Com ela poderíamos, por exemplo, calcular qual o salário previsto para uma pessoa que tem 17 anos de estudos. Para isto, basta fazer $x = 17$ em (4.50):

$$y = 62,5 + 137,5 \cdot 17 = 2.400 \text{ reais.}$$

É importante observar que a denominação ajuste linear se refere à linearidade da função em relação aos parâmetros que serão ajustados, a fim de que a função esteja o mais próximo possível dos valores experimentais. Portanto, o exemplo apresentado acima, com uma função afim, é apenas ilustrativo do método. Observa-se também que o método dos mínimos quadrados se estende à funções não lineares em relação aos parâmetros, como é o caso da função logística, que não é linear em relação ao parâmetro r. Porém, nestes casos, os cálculos se tornam bem mais complexos, dependendo de métodos iterativos, que fogem dos objetivos deste trabalho. No entanto, existem algumas estratégias de linearização dos problemas não lineares que possibilitam a utilização do raciocínio utilizado acima, como veremos na próxima seção.

4.3.1 O Ajuste linear do modelo logístico

Vamos agora utilizar o método dos mínimos quadrados para fazer um ajuste linear do modelo Logístico. Uma das formas de se fazer isso é utilizar o método apresentado por Silva(2010) em sua monografia de especialização. Escolhemos esse método por acreditarmos se tratar de um ajuste mais simples que os apresentados por outros autores e não menos eficiente.

Da equação do modelo logístico (4.26) temos que:

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \Rightarrow \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = r - \frac{r}{K}P.$$

Assim, podemos encontrar a e b utilizando o método dos mínimos quadrados para os pontos $(P(t_i), z(P))$ de tal forma que:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = z(P) = a + bP$$

em que $r = a$ e $-\frac{r}{K} = b$ ou $K = -\frac{a}{b}$.

Para determinarmos a derivada $\frac{dP}{dt}$ vamos considerar duas avaliações aproximadas:
- diferença finita para frente: $\frac{dP}{dt}(t_i) = g(t_i) := \frac{P(t_{i+1}) - P(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$;
- diferença finita para trás: $\frac{dP}{dt}(t_i) = h(t_i) := \frac{P(t_i) - P(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$;

Usaremos a aproximação $\phi(t_i) = \frac{g(t_i) + h(t_i)}{2}$ que é a média entre as diferenças finitas para frente e para trás. Assim, a nossa função z será dada por $z(P) = \frac{\phi(t_i)}{P(t_i)}$. E o método dos mínimos quadrados será realizado para ajustar os pontos $(P(t_i), \frac{\phi(t_i)}{P(t_i)})$.

Vamos então fazer um exemplo: “Seguem os dados da quantidade de Vitórias Régias em um grande lago, nos últimos 12 meses. Sabendo que o crescimento desta população é logístico, determine o valor limite e a função que descreve o crescimento dessa população” [2].

t_i (meses)	$P(t_i)$
1	11
2	51
3	88
4	214
5	501
6	712
7	977
8	1.020
9	1.031
10	1.039
11	1.045
12	1.077

Vamos calcular o valor das funções g, h, ϕ e z para esses pontos:

t_i (meses)	$P(t_i)$	$g(t_i)$	$h(t_i)$	$\phi(t_i)$	$z(P)$
1	11	40	-	-	-
2	51	37	40	38,5	0,75490
3	88	126	37	81,5	0,92614
4	214	287	126	206,5	0,96495
5	501	211	287	249	0,49701
6	712	265	211	238	0,33427
7	977	43	265	154	0,15763
8	1020	11	43	27	0,02647
9	1031	8	11	9,5	0,00921
10	1039	6	8	7	0,00674
11	1045	32	6	19	0,01818
12	1077	-	32	-	-

[2] Os dados são hipotéticos

Como ajustaremos os pontos $(P(t_i), z(P))$, vamos fazer uma nova tabela com essas variáveis e com os cálculos de $P(t_i) \cdot z(P)$ e $P(t_i)^2$, necessárias no método:

t_i	$P(t_i)$	$z(P)$	$P(t_i) \cdot z(P)$	$P(t_i)^2$
2	51	0,75490	38,5	2.601
3	88	0,92624	81,5	7.744
4	214	0,96495	206,5	45.796
5	501	0,49701	249,0	251.001
6	712	0,33427	238,0	506.944
7	977	0,15763	154,0	954.529
8	1020	0,02647	27,0	1.040.400
9	1031	0,00921	9,5	1.062.961
10	1039	0,00674	7,0	1.079.521
11	1045	0,01818	19,0	1.092.025
Soma	6678	3,69550	1030,0	6.043.522

Temos então que:

$$b = \frac{10 \cdot 1.030 - (6.678 \cdot 3,69550)}{10 \cdot 6.043.522 - (6.678^2)} = -0,00091 \text{ e}$$
$$a = \frac{3,69550}{10} - (-0,00091) \cdot \frac{6.678}{10} = 0,97725.$$

Assim, temos que nossos parâmetros são: $r = a = 0,97725$ e $K = -\frac{a}{b} = 1.073,9011$ é o valor limite da população. Assim a função procurada é:

$$P(t) = \frac{1.073,9011}{\left(\frac{1.073,9011}{11} - 1\right) e^{-0,97725t} + 1} = \frac{1.073,9011}{96,62737e^{-0,97725t} + 1}.$$

A situação pode ser representada graficamente, com o auxílio do *GeoGebra*.

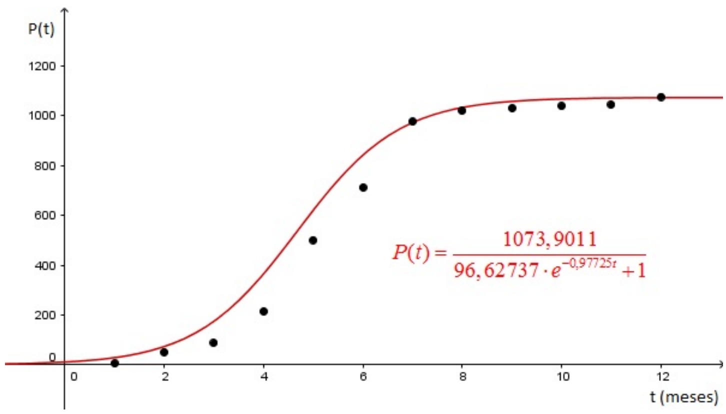


Figura 4.8: Ajuste Logístico do Problema - imagem produzida pelo autor.

Assim, encerramos este capítulo com os modelos matemáticos. No capítulo seguinte, trataremos sobre o ensino das funções exponenciais e proporemos uma sequência de atividades que julgamos serem importantes para o aprendizado do tema.

5 O ensino das funções exponenciais

Neste capítulo apresentaremos uma proposta para o ensino das funções exponenciais para estudantes do Ensino Médio. Tendo em vista o que foi apresentado na introdução, em especial sobre as dificuldades no aprendizado da Matemática e o que os trabalhos e documentos oficiais dizem sobre o tema, procuramos propor uma estratégia alternativa em que o aluno fosse sujeito ativo na construção do seu próprio conhecimento. Para isso, utilizaremos modelagem matemática, situações problemas bem contextualizadas e recursos tecnológicos.

5.1 Atividade 1

Nesta atividade, os alunos resolverão 3 problemas. A ideia é que por meio da situação apresentada, eles consigam escrever uma função que descreva o problema, ou seja, os alunos usarão a modelagem para descrever matematicamente o problema. Os problemas envolvem funções exponenciais, porém isso não será dito previamente aos alunos, pois a construção do conceito desse tipo de função será realizada posteriormente.

Problema 1: Um jovem de 15 anos recebeu ao final do ano R$ 500,00 referentes ao décimo terceiro salário de seu emprego de jovem aprendiz. No início do ano seguinte, ao ingressar no Ensino Médio, depositou todo o valor em uma caderneta de poupança, cujo saldo estava zerado. Supondo que o rendimento mensal de uma poupança é de aproximadamente $0,5\%$ ao mês e que ele não efetuou nenhum outro depósito nesta conta, qual será o capital desse jovem quando ele terminar o Ensino Médio, 36 meses depois?

Nesta primeira situação, os alunos provavelmente terão dificuldades em começar a modelagem. Nesse caso, sugerimos que o professor inicie com a turma o problema, denotando, por exemplo, por $C(t)$ a função que descreve o capital t meses após o depósito inicial. O professor então pode escrever os primeiros valores para essa função e pedir para que os alunos cheguem na função C para que, posteriormente, possam calcular o capital após 36 meses.

$C(0) = 500$.
$C(1) = C(0) + 0,005C(0) = 500 + 0,005 \cdot 500 = 500(1,005)$.
$C(2) = C(1) + 0,005C(1) = 500(1,005) + 0,005 \cdot 500(1,005) = 500(1,005)^2$.
$C(3) = C(2) + 0,005C(2) = 500(1,005)^2 + 0,005 \cdot 500(1,005)^2 = 500(1,005)^3$.

Neste momento é importante o professor destacar que o tempo t está se repetindo no expoente de $(1,005)$ e perguntar para os alunos, repetindo o mesmo raciocínio, como seria a função C após t meses. Espera-se que os alunos cheguem na função: $C(t) = 500 \cdot (1,005)^t$.

Com essa função, os alunos poderiam resolver o problema, calculando C quando $t = 36$:

$$C(36) = 500(1,005)^{36} \approx 598,34.$$

Assim, quando se formar no ensino médio, o jovem terá em sua poupança aproximadamente R\$ $598,34$. Para o cálculo da potência $(1,005)^{36}$, os alunos poderiam utilizar uma calculadora científica, hoje presente na maioria dos celulares.

Embora o objetivo principal de um problema como este seja motivar o surgimento da função exponencial a partir de uma situação real, ele contribui também para reforçar a importância da Matemática aos alunos, na medida em que propicia um conhecimento útil a ele. Ainda, permite que o professor aproveite a oportunidade para trabalhar alguns temas transversais, como educação financeira, por exemplo.

Problema 2: Uma criança, brincando de origami, pegou uma folha de papel e começou a dobrá-la ao meio, sucessivamente. Ela percebeu que a cada dobradura o número de partes em que o papel se dividia dobrava. Encontre uma função que descreva a quantidade de partes em que o papel se divide após n dobraduras.

Com a experiência da atividade anterior, espera-se que dessa vez os alunos consigam resolver o problema sem grandes auxílios do professor. A ideia é a mesma do problema anterior, ou seja, se denotarmos por Q a quantidade de partes em que o papel se divide, esperamos que os alunos utilizem o seguinte raciocínio:
$Q(0) = 1$.
$Q(1) = Q(0) \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$.
$Q(2) = Q(1) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 2^2$.
$Q(3) = Q(2) \cdot 2 = 2^2 \cdot 2 = 2^3$.
...
$Q(n) = 2^n$.

Assim, após n dobraduras, o papel se dividirá em 2^n partes.

Problema 3: Uma colônia de bactérias tem, inicialmente, 4096 organismos. Após a aplicação de um antibiótico, verificou-se que a cada minuto, o número de bactérias caía pela metade. Determine uma função $f(t)$ que determina a quantidade f de bactérias após t minutos.

Da mesma forma que nos problemas anteriores, os alunos vão modelar a situação pensando no que ocorre nos passos iniciais e generalizarão o problema, encontrando a função:
$f(0) = 4096.$
$f(1) = f(0) \cdot \frac{1}{2} = 4096 \cdot \frac{1}{2}.$
$f(2) = f(1) \cdot \frac{1}{2} = 4096 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4096 \left(\frac{1}{2}\right)^2.$
$f(3) = f(2) \cdot \frac{1}{2} = 4096 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 4096 \left(\frac{1}{2}\right)^3.$
...
$f(t) = 4096 \left(\frac{1}{2}\right)^t.$

Logo, a função que descreve a quantidade de bactérias após t minutos é $f(t) = 4096 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

Após esses três problemas, o professor deve questionar os alunos quanto às semelhanças entre as três situações, em especial, entre as três funções encontradas. Espera-se que os estudantes destaquem a presença da variável em um expoente. Nesse momento, o professor deve dizer que esse tipo de função, cuja variável está no expoente, é denominada exponencial e formalizar sua definição.

5.2 Atividade 2

Nesta atividade, os alunos irão trabalhar com os gráficos das funções dos problemas da atividade 1 e o objetivo é fazer com que eles compreendam melhor o comportamento das funções exponenciais e as especificidades das situações apresentadas.

Antes da construção, é importante o professor chamar a atenção de seus alunos para o domínio a ser considerado nos três casos. Apesar das três funções terem como domínio o conjunto dos reais, não faz sentido, na vida real, calculá-las para valores negativos.

Para a construção dos gráficos pode ser utilizado o *software GeoGebra*. Os próprios alunos podem plotar os gráficos das funções no *software*. Para isso, basta no campo "entrada" (destacado em vermelho na Figura (5.1)) escrever a função cujo gráfico quer construir. Caso queira já restringir o domínio da função, basta colocar uma vírgula, após a função digitada e colocar o intervalo que será considerado. Por exemplo, para a função do problema 1, deve ser digitado nesse campo "C(t)=500*(1.005)$^t, t > 0''$.

Para uma melhor visualização do gráfico, o professor pode orientar seus alunos que alterem a relação entre os eixos, clicando com o botão direito do mouse e acessando a opção "Eixo X:Eixo Y", como mostra a Figura (5.1).

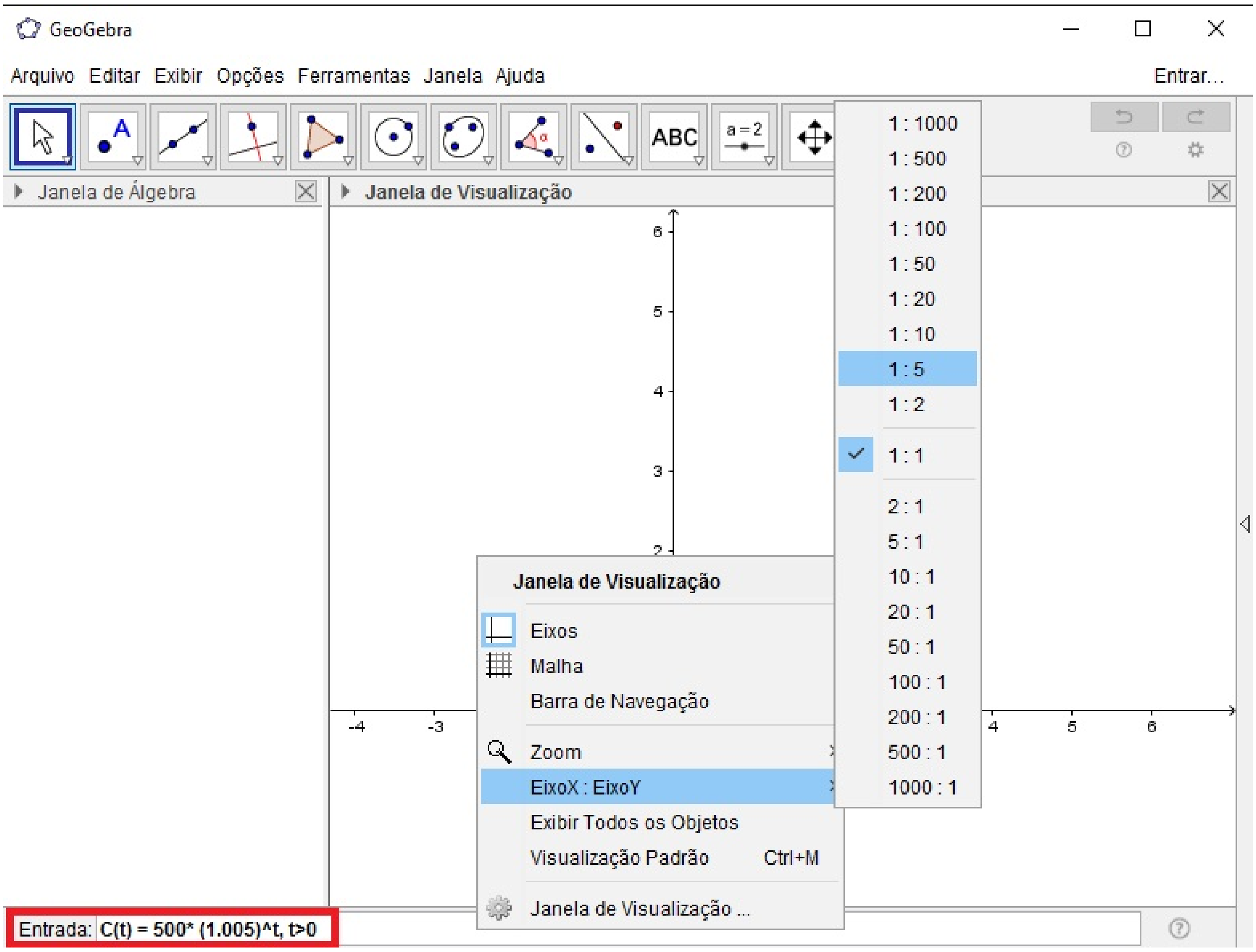


Figura 5.1: Construindo gráficos de funções no *GeoGebra*.

Nas Figuras (5.2), (5.3) e (5.4) são apresentados os gráficos das funções dos problemas 1, 2 e 3, respectivamente, construídos no *GeoGebra*.

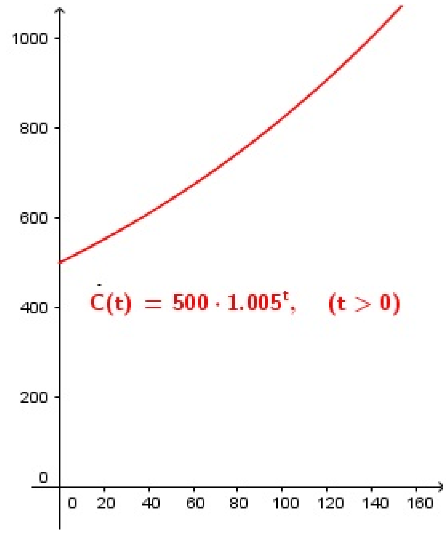


Figura 5.2: Gráfico do problema 1 - imagem produzida pelo autor.

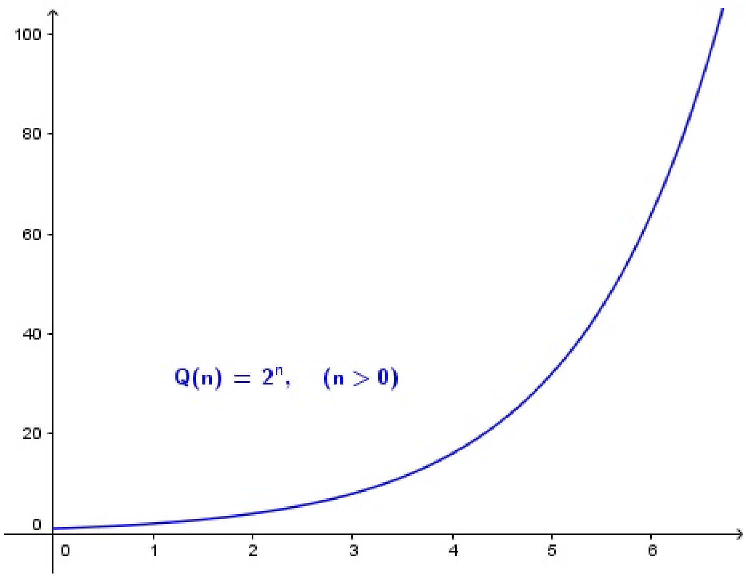


Figura 5.3: Gráfico do problema 2 - imagem produzida pelo autor.

A partir da construção do gráfico, o professor deve mediar uma discussão entre os alunos com algumas questões, como:
1) Qual a semelhança entre os gráficos dessas funções?
2) Por que será que a função do problema 3 decresce ao longo do tempo ao contrário do comportamento das outras?

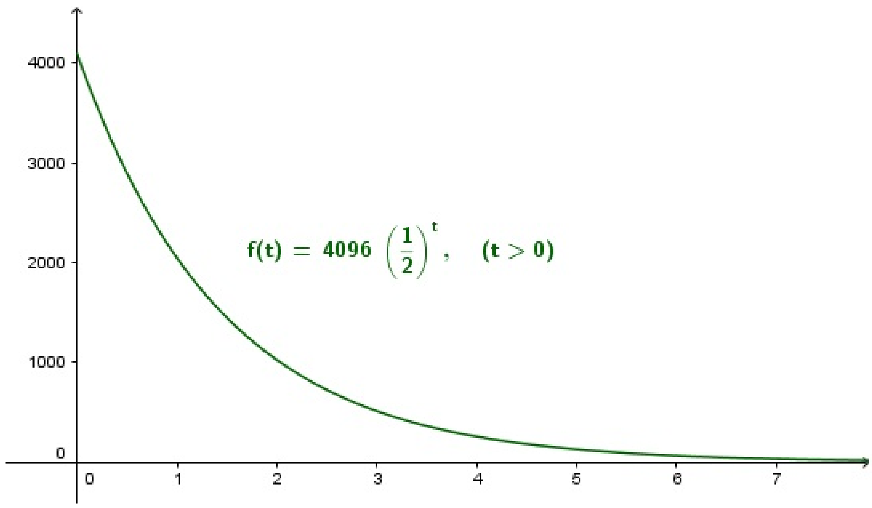


Figura 5.4: Gráfico do problema 3 - imagem produzida pelo autor.

Espera-se que com a visualização gráfica, o professor chame a atenção para a continuidade das curvas, o fato de, em um dos lados, a curva se aproximar sem nunca tocar o eixo das abscissas e o crescimento ou decrescimento muito rápido que ocorre em funções como essas.

Na questão 2, esperamos que os alunos percebam que a diferença na base da exponencial influencia em seu comportamento. Ou seja, quando a base é uma fração entre 0 e 1, a função vai decrescendo ao longo do tempo e o oposto ocorre quando a base é positiva maior que 1.

Assim, o professor encerraria essa atividade em que introduziu as propriedades dessas funções.

5.3 Atividade 3

Essa atividade de caráter exploratório-investigativo, tem como objetivo principal fazer com que os alunos compreendam as principais propriedades e características das funções exponenciais.

Primeira Etapa: O professor entregará aos alunos uma folha com as seguintes tabelas a serem preenchidas, com o auxílio de uma calculadora ou do *LibreOffice Calc*.

x	$(-2)^x$	x	0^x	x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	x	1^x	x	2^x	x	3^x
-2		-2		-2		-2		-2		-2		-2	
-1,5		-1,5		-1,5		-1,5		-1,5		-1,5		-1,5	
-1		-1		-1		-1		-1		-1		-1	
-0,5		-0,5		-0,5		-0,5		-0,5		-0,5		-0,5	
0		0		0		0		0		0		0	
0,5		0,5		0,5		0,5		0,5		0,5		0,5	
1		1		1		1		1		1		1	
1,5		1,5		1,5		1,5		1,5		1,5		1,5	
2		2		2		2		2		2		2	
3		3		3		3		3		3		3	
4		4		4		4		4		4		4	
5		5		5		5		5		5		5	

Segunda Etapa: A partir disso o professor iniciará uma discussão com os alunos, levando-os a perceber as características e propriedades das funções exponenciais. Seguem algumas sugestões de questões que o professor pode fazer:
- O que ocorreu quando a base foi negativa?
- O que ocorreu quando a base foi 1?
- O que ocorreu quando a base foi 0?
- O que ocorreu em todas as tabelas, em $x = 0$?
- Com exceção da primeira tabela (com base -2) em alguma outra você encontrou um resultado negativo?
- O que vocês notaram de diferente entre as tabelas com bases 2 e $\frac{1}{2}$? E com as bases 3 e $\frac{1}{3}$?

Espera-se que nas três primeiras questões, os estudantes percebam dos problemas que ocorrem quando a base é negativa, 0 e 1. Na quarta pergunta, os alunos deverão notar que, em todas as tabelas, em $x = 0$ a função resultou em 1 e, portanto, esse ponto está em todas as funções exponenciais. Na penúltima questão, os alunos deverão notar que a imagem da função é sempre positiva e na última espera-se que seja compreendido o crescimento da função (quando a base é maior que 1) e o decrescimento (quando a base é um número entre 0 e 10. Assim, espera-se que os alunos observem as propriedades das funções exponenciais e entendam seu domínio e imagem.

Terceira Etapa: O professor pedirá para os alunos contruirem no *GeoGebra* uma função $f(x) = a^x$. Assim que colocarem essa função na entrada do programa, o próprio *software* perguntará se o usuário quer criar um controle deslizante para "a". O professor deve pedir para que os alunos aceitem essa sugestão do programa. A seguir, os alunos com o auxílio desse controle deslizante, vão observar o que ocorre com o gráfico da função quando a base é: negativa, 0, fracionária (entre 0 e 1), 1 e maior que 1 e assim seria possível verificar se as conclusões que eles chegaram na segunda etapa se confirmam.

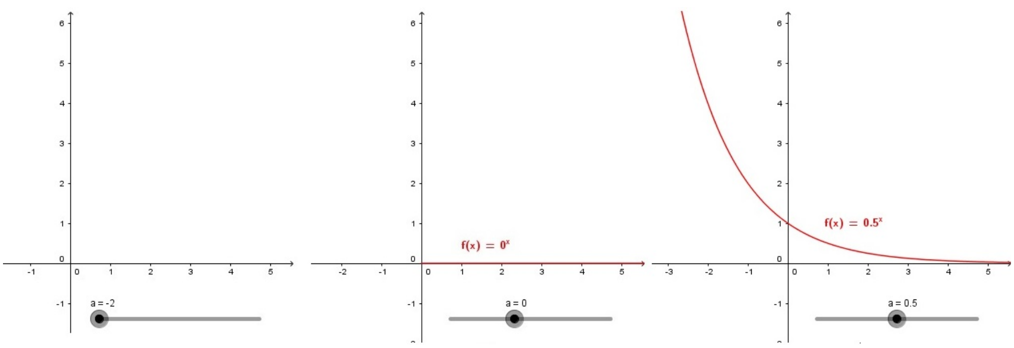


Figura 5.5: Figura da animação do *GeoGebra* - Atividade 3.

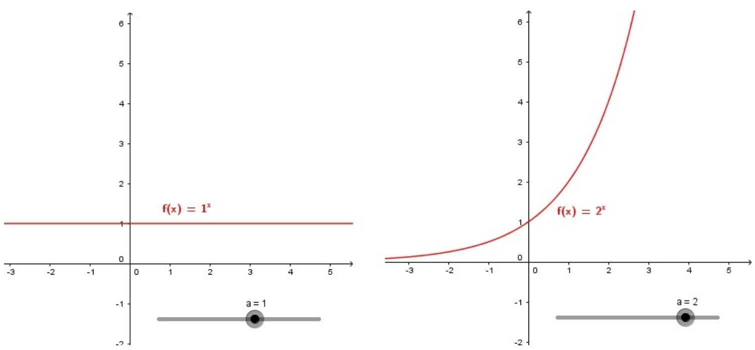


Figura 5.6: Figura da animação do *GeoGebra* - Atividade 3.

Após essa atividade, cabe ao professor formalizar as propriedades das funções exponenciais. Com a definição e as propriedades das exponenciais formalizadas, o professor irá, nas atividades a seguir, apresentar outras situações em que esse tipo de função aparece.

5.4 Atividade 4

Primeira Etapa: O professor deve iniciar a atividade apresentando o número irracional e, falando um pouco sobre a sua história (como na seção 2.2), seu valor, a função e^x, sua importância nas mais diversas áreas do conhecimento e seu gráfico e a sua inversa $ln(x)$ (mais informações podem ser encontradas na seção 3.5).

Segunda Etapa: A seguir, será apresentado o seguinte problema aos alunos (adaptado de Lima (2009)): "Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmam ser a famosa Távola Redonda do Rei Artur, soberano que, supostamente, teria vivido no século V. Por meio de um contador Geiger (instrumento que mede radioatividade) constatou-se que a emissão de radiações de carbono 14 na mesa é 0,897 vezes a emissão de um pedaço de madeira viva com o mesmo peso da mesa. Sabendo que a função que descreve a atividade C de C-14 em função do tempo t, em um material que perdeu a vida a t anos atrás é dada por: $C(t) = C_0e^{-0,000121t}$, em que C_0 é a atividade de C-14 do material com vida. Verifique se a mesa em questão pode ou não ser a Távola Redonda do Rei Artur".

Aqui vale uma observação: como os estudantes, nesse nível de ensino, não possuem as ferramentas matemáticas para encontrar a função, ela será somente apresentada. Admitiremos também que os alunos já tenham conhecimento dos logaritmos e suas propriedades e, caso o professor ache necesssário, deve fazer uma revisão prévia sobre o assunto.

Para resolver a questão o aluno utilizará a função apresentada e encontrará a solução de uma equação exponencial na variável t, como mostrado a seguir.

$$C(t) = C_0e^{-0,000121t} \Rightarrow \frac{C(t)}{C_0} = e^{-0,000121t} \Rightarrow e^{-0,000121t} = 0,897. \tag{5.1}$$

Para resolver essa equação (5.1) deve-se aplicar o logaritmo natural nos dois lados da equação e utilizar uma calculadora científica:

$$ln(e^{-0,000121t}) = ln(0,897) \Rightarrow -0,000121t = -0,108699 \Rightarrow t \approx 898,34 \text{ anos} .$$

Assim, a mesa não pode ser a Távola Redonda do Rei Artur, pois para tal ela deveria ter mais de 1.500 anos.

Nas atividades seguintes, como aplicação das funções exponenciais e servindo de motivação aos alunos, o professor apresentará os modelos matemáticos para cálculos de crescimento populacional.

5.5 Atividade 5

Primeira Etapa: O professor deve comentar um pouco mais profundamente sobre modelagem matemática (como a introdução do capítulo 4) e apresentar inicialmente o modelo Malthusiano contínuo e sua função para descrever o crescimento de uma população P ao longo do tempo t: $P(t) = P_0e^{\alpha t}$ (mais informações são encontradas na seção 4.2.2).

Segunda Etapa: Com o auxílio de calculadoras científicas ou de um *software* de planilhas como o *LibreOffice Calc*, os alunos calcularão as previsões para a população brasileira de acordo com o modelo malthusiano, completando a tabela abaixo (em negrito estão as respostas esperadas dos alunos). Para isso, eles podem usar a população de 1940 (41,236 milhões de habitantes) como população inicial e $\alpha \approx 0,03$. Eles podem também plotar, utilizando o *GeoGebra*, a função do modelo e comparar com os valores do IBGE, colocando-os como pontos do gráfico.

Ano	t	Dados do IBGE (milhões de hab)	Modelo (milhões de hab)
1940	0	41,236	—
1950	10	51,994	**55,663**
1960	20	70,992	**75,137**
1970	30	93,139	**101,424**
1980	40	119,003	**136,908**
1991	51	146,825	**190,435**
2000	60	169,799	**249,463**
2010	70	190,733	**336,740**
2020	80	—	**454,552**

A seguir o professor mediará um debate entre a turma sobre o quanto o modelo conseguiu ou não ajustar os dados reais. Além disso, o professor deve questionar a turma se esse tipo de modelo (com crescimento ilimitado) realmente é o mais correto para um problema como esse da população no Brasil. Na sequência, o professor irá falar da existência do Modelo de Verhulst e sua característica (possui um valor limite) que será o foco de uma atividade seguinte.

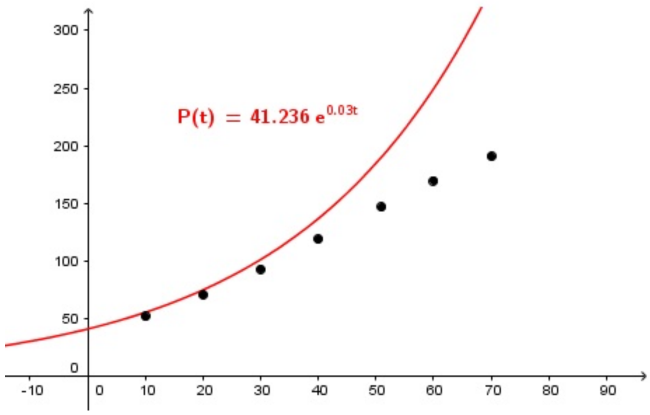


Figura 5.7: Gráfico do *GeoGebra* - Atividade 5.

5.6 Atividade 6

Essa atividade tem como objetivo apresentar o modelo de Verhulst (Logístico) para os alunos.

Primeira Etapa: O professor apresentará com mais detalhes o modelo de Verhulst, suas características, sua função e seu gráfico (como está na seção 4.2.3).

Segunda Etapa: O professor falará sobre o ajuste de curvas por meio do método dos mínimos quadrados e apresentará as fórmulas de acordo com o Método de Silva (2010). Como as deduções das fórmulas necessitam de ferramentas mais complexas de Cálculo Diferencial, recomendamos que as fórmulas sejam apenas apresentadas aos alunos. Após a apresentação das fórmulas é importante o professor apresentar um exemplo para que o método fique mais claro (mais informações são apresentadas na seção 4.3).

Terceira Etapa: Com o auxílio de um programa de planilhas como o *LibreOffice Calc*, os alunos farão uma rotina que faça o ajuste logístico, de acordo com o método de Silva, apresentando os parâmetros, um esboço da função e o valor limite da população. Uma sugestão é a que segue na Figura (5.8) (maiores informações sobre como ela foi confeccionada podem ser encontradas no apêndice B).

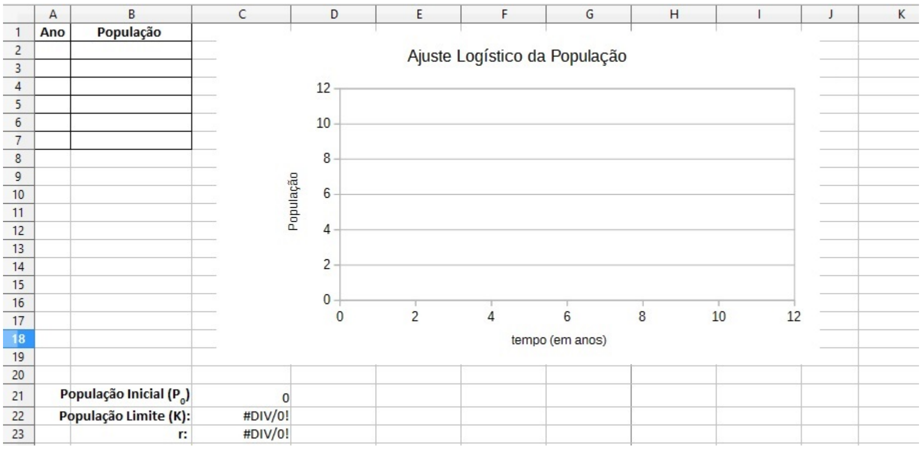


Figura 5.8: Imagem produzida pelo autor - Atividade 6.

Quarta Etapa: Com essa planilha pronta, os alunos fariam o ajuste logístico para os dados da população brasileira, mundial,entre outros. Sugere-se que antes da aula o professor peça para que os alunos tragam esses dados, o que pode ser feito em grupos também. Com o ajuste realizado, os parâmetros são determinados e o gráfico pode ser feito, como na Figura (5.9).

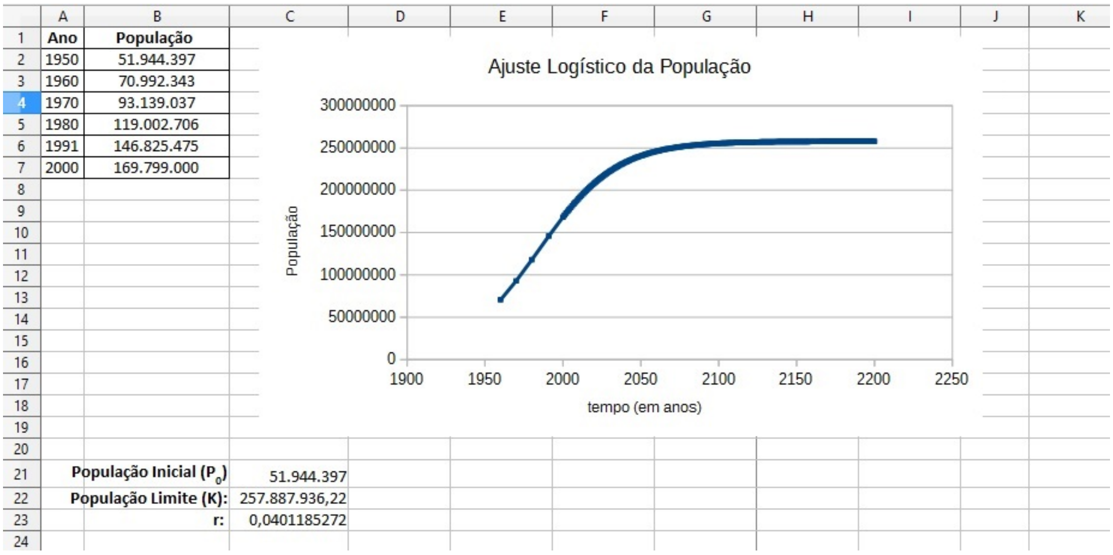


Figura 5.9: Imagem produzida pelo autor - Atividade 6.

5.7 Atividade 7

Essa atividade tem como objetivo fazer com que os alunos compreendam a diferença entre uma função exponencial e uma função potência, a fim de minimizar as frequentes confusões entre elas.

Primeira Etapa: Assim como na atividade 3, nesta etapa o professor entregará aos alunos uma folha com as algumas tabelas a serem preenchidas (as respostas esperadas estão destacadas):

x	x^2	2^x	x	x^3	3^x	x	x^4	4^x
-2	**4**	**1/4**	-2	**-8**	**1/9**	-2	**16**	**1/16**
-1	**1**	**1/2**	-1	**-1**	**1/3**	-1	**1**	**1/4**
0	**0**	**1**	0	**0**	**1**	0	**0**	**1**
1	**1**	**2**	1	**1**	**3**	1	**1**	**4**
2	**4**	**4**	2	**8**	**9**	2	**16**	**16**
3	**9**	**8**	3	**27**	**27**	3	**81**	**64**
4	**16**	**16**	4	**64**	**81**	4	**256**	**256**
5	**25**	**32**	5	**125**	**243**	5	**625**	**1.024**

Segunda Etapa: Novamente, será feita uma discussão para que os alunos, observando as diferenças de valores encontrados nas colunas adjacentes, percebam que tratam-se de funções completamente distintas.

Terceira Etapa: Os alunos contruirão um gráfico no *GeoGebra* para cada uma das tabelas, plotando na mesma tela as funções exponencial e potência correspondentes e espera-se que então fique ainda mais nítida a diferença entre as funções.

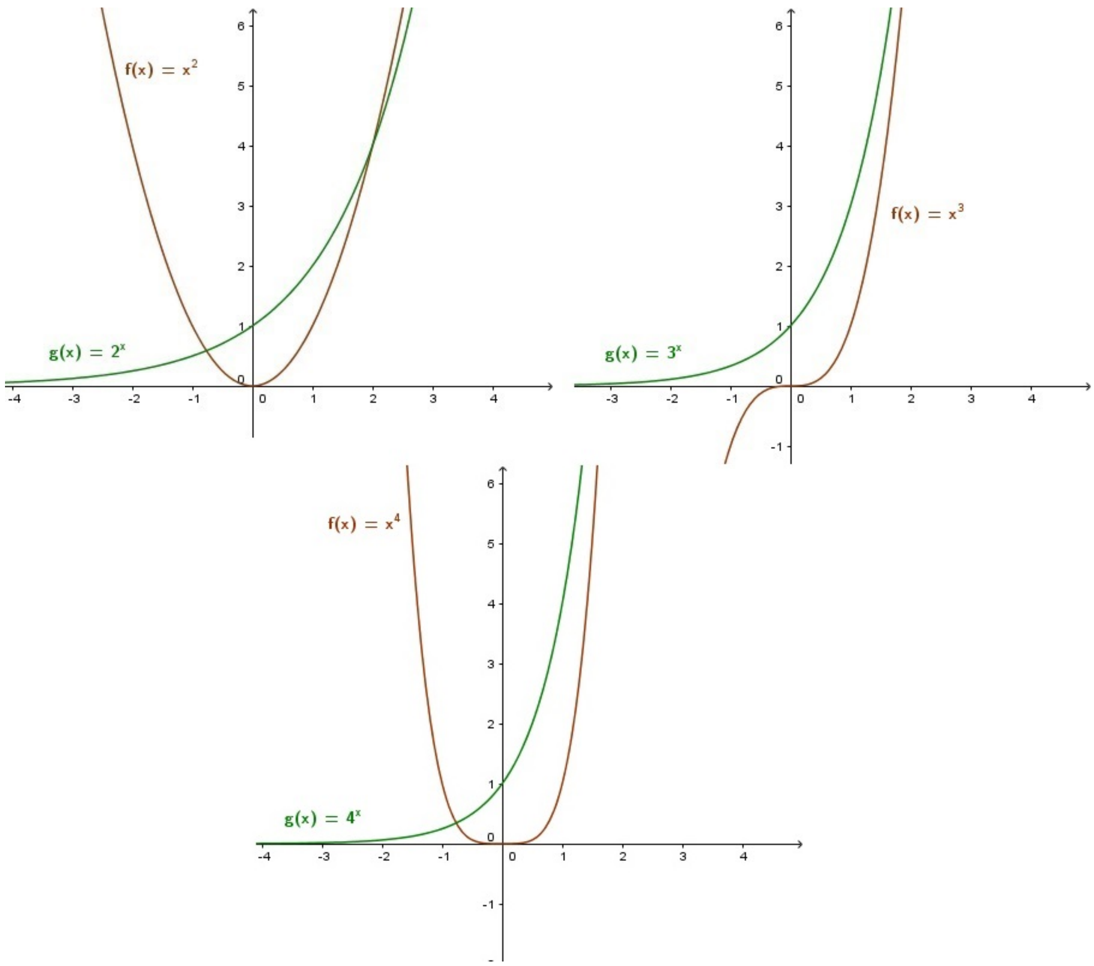


Figura 5.10: Gráficos do *GeoGebra* - Atividade 7

6 Considerações finais

As atividades propostas são apresentadas de forma que os alunos participem na construção dos conceitos, antes de suas formalizações. Esse tipo de proposta vem de encontro com as dificuldades apresentadas na introdução do trabalho. O professor de Matemática precisa buscar alternativas para que o processo de aprendizagem da disciplina se torne mais efetivo.

Acreditamos que propostas como essa, que colocam o aluno como agente atuante do seu conhecimento, sejam mais significativas aos estudantes. Além disso, os recursos utilizados nas atividades (contextualização, *softwares* e modelagem matemática buscam fazer com que o aluno perceba que a Matemática está diretamente inserida em seu cotidiano e, por isso, seu aprendizado é importante para a sua vida.

Esperamos que as atividades possam ser utilizadas nas salas de aula de Ensino Médio do país. Algumas delas, se adaptadas, podem ser utilizadas em aulas de disciplinas de graduação, como Pré-Cálculo e Cálculo Diferencial e Integral I, por exemplo, onde se constata grande dificuldade dos alunos com a função exponencial. Observa-se também que as atividades que evidenciam as propriedades de crescimento ou decrescimento e bijetividade da função exponencial podem também ser utilizadas no ensino de equações e inequações exponenciais, auxiliando graficamente na compreensão destes conceitos.

Desta forma, espera-se que o trabalho possa contribuir tanto para o aprendizado de alunos e professores, quanto já contribuiu para o do autor.

Referências

[1] AJZEN, I. Nature and operations of attitudes. *Annual Reviews Psychology*, v. 52, p. 27–58, 2001.

[2] ARDENGHI, M. J. *Ensino Aprendizagem do Conceito de Função: Pesquisas Realizadas no Período de 1970 à 2005 no Brasil (Dissertação de Mestrado).* Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

[3] BASSANEZI, R. C. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.* 2. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2004.

[4] BRASIL (Ministério da Educação). *Lei n. 9.394/96 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*, 1996.

[5] BRASIL (Secretaria da Educação Média e Tecnológica (Semtec)). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*, 1999.

[6] BRASIL (Secretaria da Educação Média e Tecnológica (Semtec)). *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, 2002.

[7] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[8] BOYER, C. B. *História da Matemática.* 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[9] CANDEIAS, A. F. F. *Aprendizagem das funções no oitavo ano com o auxílio do software GeoGebra.*

[10] CATANEO, V. I. *O uso do software GeoGebra como ferramenta que pode facilitar o processo ensino aprendizagem da Matemática no ensino fundamental séries iniciais (Monografia de Especialização).* Centro Universitário Barriga Verde, 2011.

[11] COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

[12] CRILLYI, T. *50 ideias de Matemática que precisa mesmo saber.* 1. ed. Lisboa: Dom Quixote, 2011.

[13] D'AMBROSIO, U. Stakes in Mathematics Education for the Societies of Today and Tomorow. *Monographies de L'Enseignement Math ́ematique*, Genebra, p. 301–316, 2003.

[14] DIEUDONNÉ, J. *A Formação da Matemática Contemporânea.* Lisboa: Dom Quixote, 1990.

[15] EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Campinas: Editora Unicamp, 2004.

[16] FELTES, R. Z. *Análise de erros em potenciação e radiciação: um estudo com alunos de ensino fundamental e médio (Dissertação de Mestrado).* Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2007.

[17] FERREIRA, L.; BARROSO, M. M.; FRANCO, V. S. O uso do software GeoGebra no trabalho com funçõe logarítmicas. *Conferencia Latonoamericana de GeoGebra*, Montevideu, 2012.

[18] FLORES, M. L. P. O uso do Excel para resolver problemas de operações financeiras. *Revista Renode: novas tecnologias na educação*, v. 2, 2004.

[19] GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática.* 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

[20] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de Física: Eletromagnetismo - Volume 3.* 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

[21] IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos da Matemática Elementar - Volume 2: Logaritmos.* 10. ed. Atual Editora, 2013.

[22] LEVY, P. *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.* Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

[23] LIMA, E. L. *Matemática e Ensino.* 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[24] LIMA, E. L. *Logaritmos.* 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[25] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1.* 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[26] LIMA, E. L. *Números e Funções Reais - Coleção PROFMAT.* 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[27] LOOS, H. *Atitude e desempenho em Matemática, crenças auto - referenciadas e família: uma path-analysis (Tese de Doutorado).* Universidade Estadual de Campinas, 2003.

[28] MAGARINUS, R. *Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem (Dissertação de Mestrado).* Universidade Federal de Santa Maria, 2013.

[29] MAIA, L. S. L.; CRUZ, F. M. L. O que dizem professores e alunos sobre o fracasso escolar em Matemática? Interface entre as representações sociais e o desempenho escolar. *Simpósio Internacional de Pesquisa em EducaçãoMatemática*, Recife, 2006.

[30] MAOR, E. *e: História de um Número.* 1. ed. Lisboa: Gradiva, 2005.

[31] MARCHIONI, A. P. R.; SOARES, M. J. O uso da tecnologia no ensino da Matemática Financeira. *VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática*, São Carlos, 2013.

[32] MARKARIAN, R. A Matemática na Escola: Alguns Problemas e Suas Causas. *Coleção Explorando o Ensino da Matemática*, Brasília, v. 1, p. 273–281, 2004.

[33] MILAN, A. C. *O ensino da Matemática Financeira: uma abordagem orientada a incorporação de recursos tecnológicos (Dissertação de Mestrado).* Universidade do Oeste Paulista, 2003.

[34] OECD (Organização para a Coperação do Desenvolvimento Econômico). *Programme for International Student Assessment (PISA) - Results from PISA 2012*, 2013.

[35] OLIVEIRA, H. A. *Planilha Eletrônica Excel e a Matemática - Desenvolvimento de Aplicativo para o Ensino deMatrizes (Dissertação de Mestrado).* Universidade Estadual da Paraíba, 2011.

[36] OLIVEIRA, M. N. A. *Análise da Contextualização da Função Exponencial e Logarítmica nos Livros Didáticos do Ensino Médio (Dissertação de Mestrado).* Universidade Federal de Campina Grande, 2014.

[37] ONUCHIC, L. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *Bicudo, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*, São Paulo, p. 199–217, 1999.

[38] PEREIRA, T. L. M. *O uso do software GeoGebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio (Dissertação de Mestrado).* Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012.

[39] POZO, J. I. *A Solução de Problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.* Porto Alegre: ArtMed, 1998.

[40] REZENDE, W. M. *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Episitemológica (Tese de Doutorado).* Universidade de São Paulo, 2003.

[41] ROQUE, T. *História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.* 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[42] SALDANA, P. Adultos não sabem Matemática Básica segundo pesquisa. *O Estado de São Paulo*, 1 nov. 2015.

[43] SANTOS, D. *Gráficos e animações: uma estratégia lúdica para o ensino-aprendizagem de funções (Dissertação de Mestrado).* Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

[44] SANTOS, A. T. C. *O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra (Dissertação de Mestrado).* Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2011.

[45] SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. *Dubinsky, E. Harel, G. (eds.), The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemolgyl*, v. 25, p. 25–58, 1992.

[46] SILVA, G. M. F. *Método dos Mínimos Quadrados para Determinação de Parâmetros no Modelo de Crescimento Logístico (Monografia de Especialização).* Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.

[47] SILVA, R. S. *Uma Proposta Alternativa para o Ensino de funções exponenciais e logarítmicas no Ensino Médio (Dissertação de Mestrado).* Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.

[48] SIQUEIRA, D. M. *Elaboração de atividades de ensino de funções utilizando recursos computacionais no Ensino Médio (Dissertação de Mestrado).* Universidade de São Paulo, 2013.

[49] STIELER, E. C. *Uso da tecnologia da informática no ensino superior: um estudo da aplicação da planilha eletrônica Excel na disciplina de Matemática Financeira (Dissertação de Mestrado).* Centro Universitário Franciscano, 2007.

[50] TOGNI, A. C. *Construção de funções em Matemática com o uso de objetos de aprendizagem no ensino médio noturno (Tese de Doutorado).* Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2007.

[51] ZACARIAS, S. M. Z. *A Matemática e o fracasso escolar: medo, mito ou dificuldade? (Dissertação de Mestrado).* 2008.

[52] ZUFFI, E. M.; PACCA, J. L. Sobre funções e linguagem matemática de professores do ensino médio. *Zetetiké*, Campinas, v. 8, p. 7–28, 2000.

A Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

Muitas das leis que ditam o comportamento do mundo físico são relações envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Em liguagem matemática, relações são equações e taxas são derivadas. Assim, **equações diferenciais** são equações que contém derivadas (BOYCE, 2006).

Uma equação diferencial pode depender de uma única variável independente ou de várias. No primeiro caso, a equação é denominada equação diferencial ordinária (EDO) e no segundo, equação diferencial parcial. Quando as derivadas da equação são todas de primeira ordem, dizemos que a EDO também é de primeira ordem. Por exemplo, a equação $\frac{dy}{dt} = -ay + b$ é uma EDO de primeira ordem. Generalizando, uma equação diferencial de primeira ordem pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \tag{A.1}$$

Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaça essa equação para todo t em algum intervalo é dita uma solução. Resolver uma equação diferencial é determinar se tais funções existem e, caso existam, utilizar um dos diversos métodos conhecidos para encontrá-las (BOYCE, 2006).

Se a função f na equação (A.1) depende linearmente da variável y, então a equação (A.1) é classificada como linear. Generalizando, uma equação linear de primeira ordem sempre pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t). \tag{A.2}$$

em que p e g são funções dadas da variável independente t.

O exemplo apresentado anteriormente ($\frac{dy}{dt} = -ay + b$) é linear. Podemos reescrever essa equação, fazendo algumas manipulações matemáticas:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -a(y - b/a) \Rightarrow \frac{dy/dt}{y - b/a} = -a.$$

Integrando os dois lados dessa equação em relação a t, obtemos:

$$ln|y - b/a| = -at + k,$$

em que k é uma constante arbitrária.

Assim, com mais algumas manipulações matemáticas, conseguimos resolver a equação:

$$ln|y - b/a| = -at + k \Rightarrow |y - b/a| = e^{-at} \cdot e^k \Rightarrow y - b/a = \pm e^{-at} \cdot e^k \Rightarrow y = b/a + ce^{-at},$$

em que $c = \pm e^k$ também é uma constante arbitrária.

Infelizmente, esse método não pode ser usado em todas as equações lineares. A equação (A.2) por exemplo, necessita de outras técnicas para ser resolvida.

A.0.1 Método dos Fatores Integrantes

Esse método consiste em encontrar uma função $\mu(t)$ denominada **fator integrante** tal que, quando multiplicamos a equação diferencial linear por essa função, encontramos expressões que são derivadas de outras funções particulares conhecidas e assim, através de integrações, a equação pode ser resolvida.

Exemplo A.1. Para resolver a equação diferencial linear:

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 2e^{3t} \tag{A.3}$$

,

iniciaremos multiplicando (A.3) por $\mu(t)$:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + 2\mu(t)y = 2\mu(t)e^{3t}. \tag{A.4}$$

Devemos então encontrar $\mu(t)$ para que a expressão a esquerda do sinal de igualdade em (A.4) seja a derivada de uma função conhecida. Note que a primeira parcela dessa expressão é parte da derivada do produto de $\mu(t)y$, cujo resultado é:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y. \tag{A.5}$$

Comparando a expressão a esquerda do sinal de igualdade de (A.4) e o resultado de (A.5), observamos que $\frac{d\mu(t)}{dt}$ deve ser igual $2\mu(t)$. Ou seja:

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = 2. \tag{A.6}$$

Integrando ambos os lados de (A.6), obtemos:

$$ln|\mu(t)| = 2t + k, \tag{A.7}$$

em que k é uma constante arbitrária.
Assim, com algumas manipulações matemáticas, obtemos:

$$|\mu(t)| = e^{2t} \cdot e^{k} \Rightarrow \mu(t) = \pm e^{k} \cdot e^{2t} \Rightarrow \mu(t) = ce^{2t}, \tag{A.8}$$

em que $c = \pm e^{k}$ também é uma constante arbitrária.

Como não precisamos de fator integrante mais geral, podemos escolher $c = 1$ na equação (A.8) e usaremos o fator integrante $\mu(t) = e^{2t}$. Substituindo em (A.4), obtemos:

$$e^{2t}\frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y = 2e^{5t}. \tag{A.9}$$

Como já queríamos, o lado esquerdo do sinal da igualdade de (A.9) é a derivada de $e^{2t}y$. Assim, podemos reescrever essa expressão como:

$$\frac{d}{dt}[e^{2t}y] = 2e^{5t}. \tag{A.10}$$

Integrando ambos os lados dessa equação, temos que:

$$e^{2t}y = \frac{2e^{5t}}{5} + C. \tag{A.11}$$

Portanto, a equação geral da equação é:

$$y = \frac{2e^{3t}}{5} + Ce^{-2t}.$$

Exemplo A.2. Utilizaremos o resultado do exemplo (A.1) para resolver a equação abaixo:

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t). \tag{A.12}$$

Como no exemplo anterior, devemos encontrar $\mu(t)$ tal que:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + a\mu(t)y = \mu(t)g(t). \tag{A.13}$$

Novamente, vamos comparar o lado esquerdo de (A.13) com a derivada de $\mu(t)y$. Assim, de maneira análoga, encontramos:

$$\mu(t) = e^{at}. \tag{A.14}$$

Substituindo (A.14) em (A.13) obtemos que:

$$\frac{d}{dt}[e^{at}y] = e^{at}g(t). \tag{A.15}$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t)dt. \tag{A.16}$$

Assim, podemos encontrar uma solução geral:

$$y = e^{-at}\int_{t_0}^{t} e^{as}g(s)ds + ce^{-at}, \tag{A.17}$$

em que c é uma constante arbitrária.

Note que utilizamos s para denotar a variável de integração para diferenciá-la da variável independente t e o limite inferior dessa integração será um valor conveniente denotado por t_0.

Vamos utilizar os resultados dos exemplos (A.1) e (A.2) para encontrar um resultado geral para o fator integrante $\mu(t)$ e para a solução geral y da equação (A.2), uma equação diferencial linear qualquer

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t).$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio dos dois exemplos anteriores, $\mu(t)$ será tal que:

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = p(t). \tag{A.18}$$

Assim, temos que uma expressão geral para o fator integrante de uma equação diferencial linear é dada por:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}. \tag{A.19}$$

Em relação a solução geral, temos pelos exemplos anteriores que:

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t). \tag{A.20}$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c. \tag{A.21}$$

Obtemos assim uma expressão geral para a solução de uma equação diferencial linear:

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + c\right]. \tag{A.22}$$

Novamente, denotamos a variável de integração por s para diferenciá-la da variável independete t, o limite inferior t_0 deve ser escolhido convenientemente e c é uma constante arbitrária.

Exemplo A.3. Para obter a solução geral da equação abaixo, sabendo que $y(0) = 3$

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = t$$

usamos, do resultado anterior, que $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$. Logo, para esse exemplo:

$$\mu(t) = e^{\int 2tdt} = e^{t^2}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$ temos que:

$$e^{t^2}\frac{dy}{dt} + 2e^{t^2}y = te^{t^2} \tag{A.23}$$

que é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}[e^{t^2}y] = te^{t^2}. \tag{A.24}$$

Assim:

$$e^{t^2}y = \int te^{t^2}dt = \frac{1}{2}e^{t^2} + c. \tag{A.25}$$

Logo, a solução é da forma:

$$y = \frac{1}{2} + ce^{-t^2}. \tag{A.26}$$

Substituindo a condição inicial $y(0) = 3$ em (A.26) temos que:

$$3 = \frac{1}{2} + ce^0 \Rightarrow c = \frac{5}{2}. \tag{A.27}$$

Substituindo (A.27) em (A.26) obtemos a solução do problema:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}e^{-t^2}.$$

A.0.2 Equações separáveis

Na seção anterior, apresentamos como resolver equações diferenciais lineares. Mas e se a equação não for linear, existe uma maneira universal, um único método capaz de resolver qualquer equação? A resposta é não. Porém, existem alguns tipos específicos de equações que têm sim seus métodos próprios de resolução. Nesta seção apresentaremos um destes tipos: as equações separáveis.

Uma equação diferencial qualquer

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

pode sempre ser escrita na forma:

$$G(t, y) + H(t, y)\frac{dy}{dt} = 0. \tag{A.28}$$

Isto pode ser feito, por exemplo, se definirmos $G(t, y) = -f(t, y)$ e $H(t, y) = 1$, mas podem existir, também, outras formas, dependendo da equação (BOYCE, 2006).

Quando a função G depende apenas de t e a função H apenas de y a equação (A.28) torna-se:

$$G(t) + H(y)\frac{dy}{dt} = 0. \tag{A.29}$$

Essa equação é denominada **separável**, pois, com algumas manipulações matemáticas, pode também ser escrita como:

$$G(t)dt + H(y)dy = 0. \tag{A.30}$$

Assim, as parcelas envolvendo cada uma das variáveis podem ser separadas pelo sinal de igualdade. Mas como resolver esse tipo de equação? Sejam as funções M e N primitivas, respectivamente, a G e H, ou seja $M'(t) = G(t)$ e $N'(y) = H(y)$, temos na equação (A.29):

$$M'(t) + N'(y)\frac{dy}{dt} = 0. \tag{A.31}$$

Pela Regra da Cadeia,

$$N'(y)\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}N(y). \tag{A.32}$$

Logo, podemos reescrever a equação (A.31) como:

$$\frac{d}{dt}[M(t) + N(y)] = 0. \tag{A.33}$$

Integrando ambos os lados dessa equação, obtemos:

$$M(t) + N(y) = c, \tag{A.34}$$

em que c é uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaça a equação (A.34) é solução da equação (A.29).

Exemplo A.4. A equação abaixo, sob a condição inicial $y(0) = 4$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-t}{y} \tag{A.35}$$

pode ser reescrita como:

$$y \cdot \frac{dy}{dt} = -t. \tag{A.36}$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + c \tag{A.37}$$

Se multiplicarmos a equação (A.37) por 2 e denominarmos $k = 2c$ uma constante, temos:

$$y^2 + t^2 = k. \tag{A.38}$$

Vamos agora utilizar a condição inicial $y(0) = 4$ para determinarmos o valor de k:

$$4^2 + 0^2 = k \Rightarrow k = 16.$$

Logo, as soluções da equação (A.35) são as funções $y = \phi(t)$ que satisfazem a expressão: $y^2 + t^2 = 16$.

Exemplo A.5. Para a equação abaixo, sob a condição inicial $y(1) = 1$,:

$$(1+t)\frac{dy}{dt} = y \tag{A.39}$$

temos que, integrando ambos os lados de (A.39)

$$ln|y| = ln|1+t| + c \Rightarrow y = e^{ln|1+t|} \cdot e^c \Rightarrow y = |1+t| \cdot e^c \Rightarrow y = \pm e^c(1+t). \tag{A.40}$$

Seja uma constante $k = \pm e^c$,chegamos em:

$$y = k(1+t). \tag{A.41}$$

Substituindo a condição inicial $y(1) = 1$ em (A.41) obtemos:

$$1 = k \cdot (1 + 1) \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Logo, para que que para uma função $y = \phi(t)$ seja solução de (A.39) deve satisfazer a expressão: $y = \dfrac{1}{2}(1 + t)$.

B Rotina no *LibreOffice Calc* para o ajuste Logístico

O ajuste apresentado segue a técnica detalhada no item (4.3.1) Nas colunas A e B da planilha 1 devem ser lançadas as informações sobre o ano, e a respectiva população, da cidade, estado ou país considerado no estudo. Como os censos são feitos a cada década, não há muitas medidas, por isso, escolhemos por utilizarmos as populações de seis censos. Então, para uma apresentação melhor, colocamos bordas nessas duas colunas.

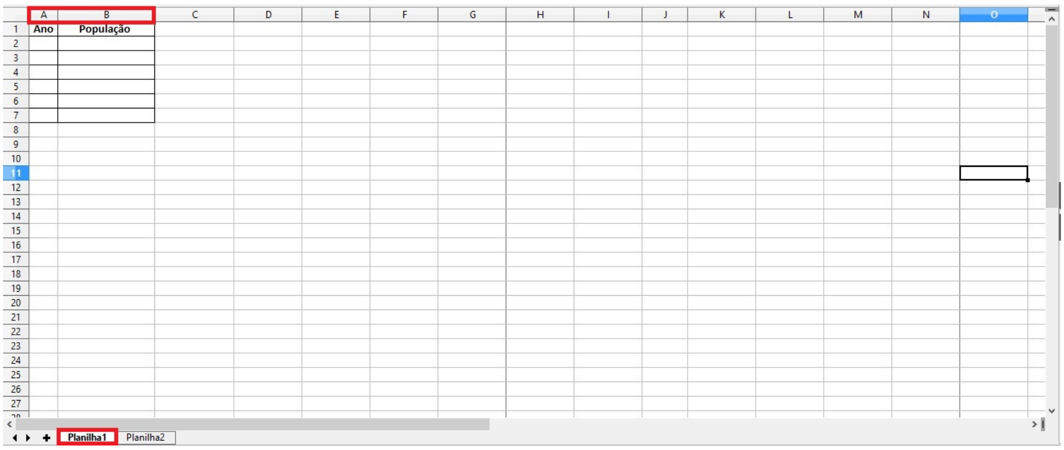


Figura B.1: Imagem produzida pelo autor.

Na planilha 2, Colocamos na coluna A o tempo (t) em anos iguais ao da primeira aba, ou seja, na célula A2 da segunda aba, colocamos "=Planilha1.A2" e repetimos o mesmo até a célula A6. Na segunda coluna, colocamos a população (P) iguais também aos da primeira aba, ou seja, na célula B2 dessa aba, atribuímos "=Planilha1.B2". Nas colunas seguintes deverão ser lançadas as expressões das funções utilizadas nos cálculos, ou seja, g, h, ϕ e z. Lembrando que:

$$g(t_i) := \frac{P(t_{i+1}) - P(t_i)}{t_{i+1} - t_i};$$

$$h(t_i) := \frac{P(t_i) - P(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}};$$
$$\phi(t_i) = \frac{g(t_i) + h(t_i)}{2}$$
$$z(P) = \frac{\phi(t_i)}{P(t_i)}$$

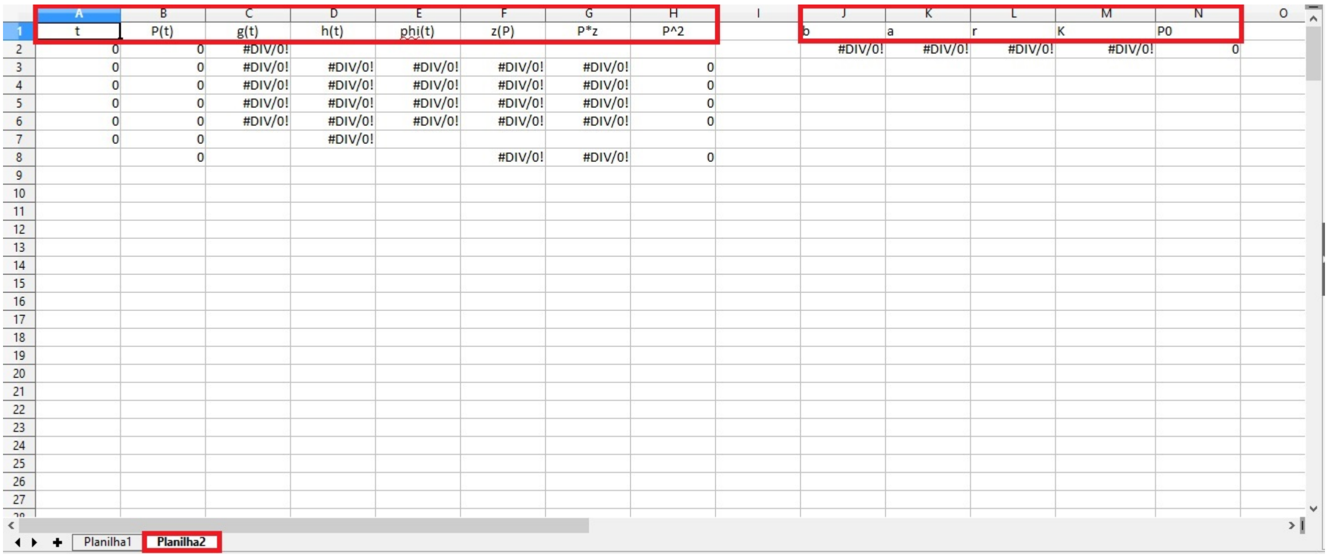
Desta forma, como os valores da função g vai na coluna C da planilha 2, na célula C2, colocamos "$= (B3 - B2)/(A3 - A2)$" e repetimos essa ideia até C6 ("$C6 = (B7-B6)/(A7-A6)$"). Como as células B8 e A8 não são preenchidas, não faria sentido usarmos o mesmo raciocínio para C7. A mesma ideia serve para D2, como a função h usa os dados anteriores não faz sentido preenchermos essa célula. Assim preenchemos a coluna D (em que está a função h) de 3 a 7, com "$D3 = (B3 - B2)/(A3 - A2)$" e o mesmo raciocínio nas demais.

Como a função ϕ (a ser colocada na coluna E) é a média entre g e h, não fazia sentido usarmos as linhas 2 e 7, por falta de uma delas em cada linha. Assim, a coluna E foi preenchida de 3 a 6, com "E3=MÉDIA(C3:D3)" e assim por diante nas demais células dessa coluna. A coluna F foi também preenchida apenas de 3 a 6, por z se tratar de um quociente de ϕ e P, assim "$F3 = E3/B3$" e arrastamos também essa fórmula para as linhas 4, 5 e 6.

Como devemos fazer o método dos mínimos quadrados para P e z foram incluídas as colunas $P \cdot z$ e P^2, em G e H, respectivamente, e uma linha com as somas das colunas (linha n° 8). Para as somas utilizamos apenas as linhas em que há dados de z, ou seja, de 3 a 6, assim "$B8 = SOMA(B3 : B6)$" e arrastamos essa fórmula para as colunas F, G e H.

Acrescentamos ainda as colunas b, a, r, K e P_0 em J, K, L, M e N, respectivamente. Em J2 colocamos a fórmula de b do método dos mínimos quadrados, ou seja, "$J2 = (4 * G8 - (B8 * F8))/(4 * H8 - (B8 * B8))$". Fizemos o mesmo em K2 ("$K2 = F8/4 - J2 * (B8/4)$"). Do nosso método sabemos que $r = a$, logo "$L2 = K2$" e $K = -a/b$, portanto, "$M2 = -K2/J2$". Como P_0 é a população inicial, "$N2 = B2$".

Para a confecção do gráfico, ainda na planilha 2, colocamos nas colunas P e Q os valores do tempo t e da população estimada com o ajuste P'. Para as primeiras linhas de t repetimos os 6 valores conhecidos, ou seja, "P2=A2" e assim sucessivamente até P7 e após isso fomos acrescentando de 1 em 1 até a linha 207 para que tivéssemos mais 200 medidas além das conhecidas. Para a coluna Q usamos a função logística. Como os valores necessários r, K e P_0 encontram-se respectivamente em L2, M2 e N2, tomamos o cuidado de fixarmos essas células nas fórmulas da coluna Q, usando L$2, M$2 e N$2. Assim, entre as linhas de Q só haverá variação do tempo t (coluna

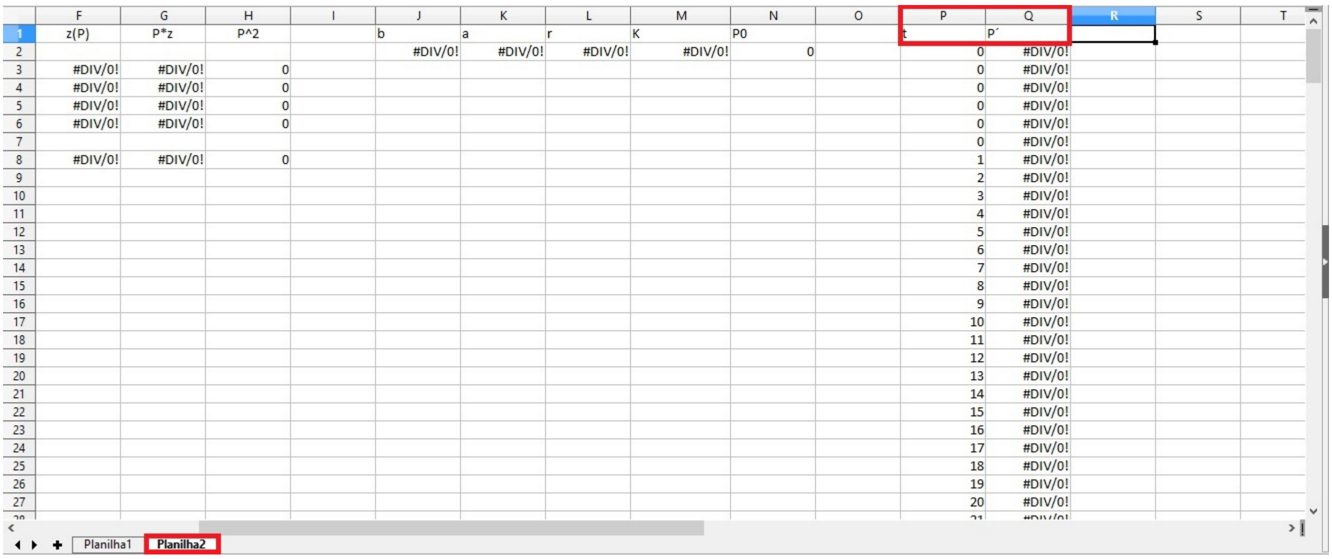


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	t	P(t)	g(t)	h(t)	phi(t)	z(P)	P*z	P^2		b	a	r	K	P0	
2	0	0	#DIV/0!							#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0	
3	0	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0							
4	0	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0							
5	0	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0							
6	0	0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0							
7	0	0		#DIV/0!											
8		0				#DIV/0!	#DIV/0!	0							
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															

Planilha1 Planilha2

Figura B.2: Imagem produzida pelo autor.

P). Portanto, “Q2=(M$2*N$2)/((M$2-N$2)*EXP(-L$2*(P2-A$2))+N$2)” e repetimos a mesma ideia para as demais linhas dessa coluna.



	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	z(P)	P*z	P^2		b	a	r	K	P0		t	P´			
2					#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	0		0	#DIV/0!			
3	#DIV/0!	#DIV/0!	0								0	#DIV/0!			
4	#DIV/0!	#DIV/0!	0								0	#DIV/0!			
5	#DIV/0!	#DIV/0!	0								0	#DIV/0!			
6	#DIV/0!	#DIV/0!	0								0	#DIV/0!			
7											0	#DIV/0!			
8	#DIV/0!	#DIV/0!	0								1	#DIV/0!			
9											2	#DIV/0!			
10											3	#DIV/0!			
11											4	#DIV/0!			
12											5	#DIV/0!			
13											6	#DIV/0!			
14											7	#DIV/0!			
15											8	#DIV/0!			
16											9	#DIV/0!			
17											10	#DIV/0!			
18											11	#DIV/0!			
19											12	#DIV/0!			
20											13	#DIV/0!			
21											14	#DIV/0!			
22											15	#DIV/0!			
23											16	#DIV/0!			
24											17	#DIV/0!			
25											18	#DIV/0!			
26											19	#DIV/0!			
27											20	#DIV/0!			

Planilha1 Planilha2

Figura B.3: Imagem produzida pelo autor.

Voltando à planilha 1, acrescentamos as informações dos parâmetros P_0, K e r, calculados na planilha 2, nas células B e C 21, 22 e 23. Além disso, acrescentamos um diagrama de dispersão, usando como intervalo de dados as colunas P e Q da planilha 2, entre as linhas 2 e 207 e editamos o gráfico inserindo título e rótulo nos eixos.

A rotina está pronta. Quando colocamos os dados da população brasileira, por

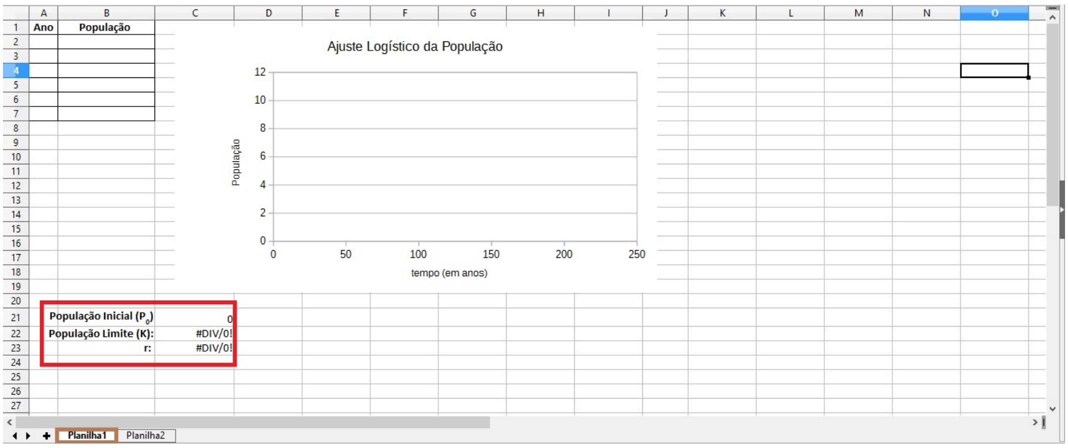
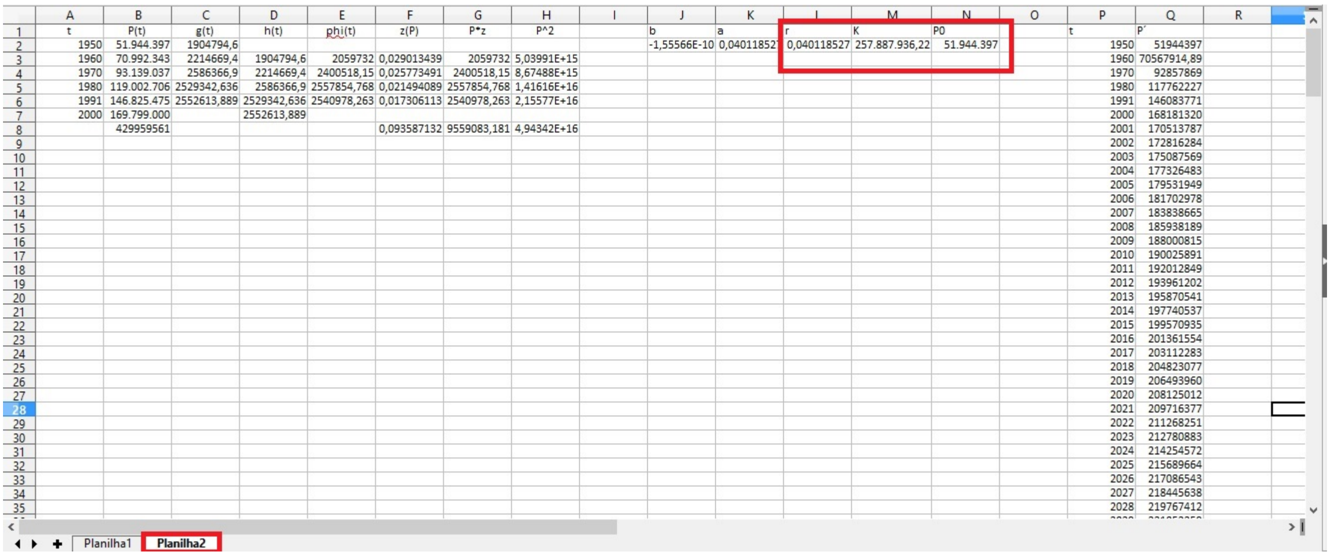


Figura B.4: Imagem produzida pelo autor.

exemplo, a planilha faz todo o ajuste, como nas imagens abaixo.



t	P(t)	g(t)	h(t)	phi(t)	z(P)	P*z	P^2
1950	51.944.397	1904794,6					
1960	70.992.343	2214669,4	1904794,6	2059732	0,029013439	2059732	5,03991E+15
1970	93.139.037	2586366,9	2214669,4	2400518,15	0,025773491	2400518,15	8,67488E+15
1980	119.002.706	2529342,636	2586366,9	2557854,768	0,021494089	2557854,768	1,41616E+16
1991	146.825.475	2552613,889	2529342,636	2540978,263	0,017306113	2540978,263	2,15577E+16
2000	169.799.000		2552613,889				
	429959561				0,093587132	9559083,181	4,94342E+16

b	a	r	K	P0
-1,55566E-10	0,04011852	0,040118527	257.887.936,22	51.944.397

t	P´
1950	51944397
1960	70567914,89
1970	92857869
1980	117762227
1991	146083771
2000	168181320
2001	170513787
2002	172816284
2003	175087569
2004	177326483
2005	179531949
2006	181702978
2007	183838665
2008	185938189
2009	188000815
2010	190025891
2011	192012849
2012	193961202
2013	195870541
2014	197740537
2015	199570935
2016	201361554
2017	203112283
2018	204823077
2019	206493960
2020	208125012
2021	209716377
2022	211268251
2023	212780883
2024	214254572
2025	215689664
2026	217086543
2027	218445638
2028	219767412

Figura B.5: Imagem produzida pelo autor.

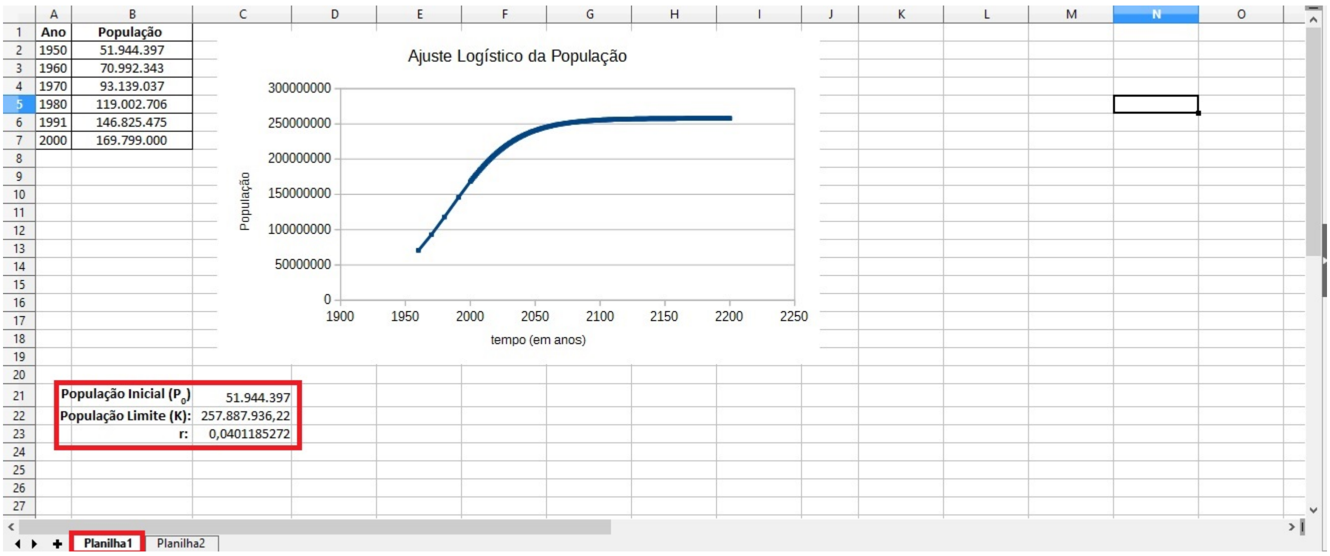


Figura B.6: Imagem produzida pelo autor.