UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE – UFAC

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT)

FRANCISCO AMARILDO ANDRADE DE SOUSA

UTILIZANDO O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DE PARAMETRIZAÇÃO DAS CÔNICAS

RIO BRANCO – ACRE

2016

FRANCISCO AMARILDO ANDRADE DE SOUSA

UTILIZANDO O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DE PARAMETRIZAÇÃO DAS CÔNICAS

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao programa de Pós-Graduação de Mestrado profissional em Matemática em Rede nacional (PROFMAT), do Centro de ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Acre, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edcarlos Miranda de Souza

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meus amigos e colegas. Em especial a minha mãe Sebastiana, meu pai Magalhães *(in memoriam)* e minha filha Sheli.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela saúde e disposição para enfrentar semanalmente o percurso de 400 km de estrada de Tarauacá a Rio Branco.

A meu cunhado Lázaro e colegas de trabalho pela gentileza de sempre estarem me deixando e pegando na rodoviária, muitas das vezes na madrugada.

A minha esposa, pela compreensão e dedicação que teve durante todo este período, cuidando de nossa filha enquanto eu estudava.

A minha mãe, que sempre torceu e orou para que eu concluísse com êxito este curso.

Ao professor Dagoberto por ter me apresentado e informado sobre o PROFMAT e a data de inscrição para o exame de acesso.

Aos colegas de curso, que mesmo estando longe, muitas das vezes, não deixamos de trocar ideias e materiais de estudo, sem contar, as brincadeiras que sempre descontraiam o grupo.

Aos professores do PROFMAT, em especial a meu orientador Dr. Edcarlos Miranda de Souza.

Obrigado a todos vocês!

“Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura”. (Hermann Hankel)

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade apresentar um resumo sobre as cônicas (elipse, hipérbole e parábola) e suas equações, em especial as equações paramétricas, utilizando relações trigonométricas básicas e verificando as condições que um ponto deve satisfazer para pertencer a uma curva plana dada.

Utilizaremos o software GEOGEBRA como ferramenta de visualização no ensino da parametrização das cônicas, facilitando o processo de aprendizagem. Faremos uma breve apresentação desse software e de como usar as ferramentas necessárias para a construção das figuras sugeridas.

Todo o processo de construção e animação das figuras cônicas parametrizadas será descrito passo a passo, servindo como um suporte ou atividade didática a ser desenvolvida por professores e alunos, para que assim seja suprida a necessidade do uso de tecnologias na educação, em especial no ensino da Matemática.

Por fim, observaremos que para algumas das equações paramétricas vistas, existe um motivo algébrico para tal equação.

Palavras-chaves: Cônicas; equações paramétricas das cônicas; curva plana; Tecnologias na educação.

ABSTRACT

This work aims to present a summary of the Conic Sections (ellipse, Hyperbola and parabola) and his equations, in particular the parametric equations, using basic trigonometric relations and checking the conditions that a point should satisfy to belong to a given plane curve.

We will use the software GEOGEBRA as a visualization tool in the teaching of parameterization of conics, facilitating the learning process. We will make a brief presentation of this software and how to use the tools needed for the construction of the figures suggested.

The whole process of construction and animation of the figures will be parameterized conical described step by step, serving as a prop or didactic activity to be developed for teachers and students, to be met the need of the use of technologies in education, especially in the teaching of mathematics.

Finally, we'll take a look at that for some of the parametric equations views, there is a reason for such an algebraic equation.

Keywords: Conics; parametric equations of Conic Sections; plane curve; Technologies in education.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No ensino da Matemática, em geral, o professor é cobrado a apresentar aos alunos, conteúdos contextualizados e a trabalhar com materiais didáticos concretos, principalmente nas séries iniciais, sempre que possível. Gestores e Coordenadores exigem do professor aulas que despertem o interesse dos alunos, mas nem sempre lhe é dado condições e materiais adequados para tal fim. Esse é o maior desafio para o docente, fazer da matemática um instrumento de interação entre o aluno e seu cotidiano.

O que vivenciamos hoje é uma juventude fazendo um uso cada vez maior e mais cedo das TIC`s (Tecnologias de Informação e Comunicação), em especial da internet, como mostra o relatório de pesquisa TIC Kids Online Brasil[1] 2014, apresentado pelo Comitê Gestor da Internet no Brasil – CGI.br, realizada em 2013, onde 77% dos jovens brasileiros de 10 a 17 anos de idade têm acesso à internet e 68% deles usam para realizar trabalhos escolares.

Nesse contexto, evidenciamos que o uso de TIC's deve ser incorporado ao ensino da Matemática como elemento essencial na aprendizagem dos diversos conteúdos, pois a utilização destas tecnologias suprem os anseios dessa nova geração, fornecendo novos conhecimentos e experiências dentro desse espaço virtual em que vivem os jovens, tornando esse processo mais dinâmico e prazeroso, dessa forma, a escola passa a ser um ambiente atraente e interativo.

Particularmente, em Geometria Analítica[2], o software GEOGEBRA[3] apresenta-se como sendo a ferramenta ideal para o ensino das Cônicas, pois ele junta geometria, álgebra e o cálculo em uma única interface, sem contar que seu acesso é livre, gratuito e de fácil utilização, disponível para download na internet.

Como objetivo principal desse trabalho, utilizaremos o software GEOGEBRA para a construção de figuras cônicas no *Plano Cartesiano*[4] (R^2), demonstrando as parametrizações destas, através de figuras coloridas e animadas, facilitando assim o seu entendimento.

---

[1] Livro eletrônico de pesquisa sobre o uso da internet por crianças e adolescentes no Brasil.
[2] É o estudo da Geometria por meio de um sistema de coordenadas e dos princípios da álgebra e da análise.
[3] Download disponível em: https://www.geogebra.org.
[4] Esquema reticulado, composto por dois eixos (retas) perpendiculares, sendo o horizontal chamado de eixo das abscissas e o vertical de eixo das ordenadas, usados para localizar ou especificar pontos num determinado

1. CÔNICAS

1.1 - História das Cônicas

Historicamente, as cônicas e seus estudos surgiram na antiga Grécia com as tentativas de solucionar o problema da *duplicação do cubo*[5]. Hipócrates de Chio (440 a.C.) foi o primeiro a realizar avanços a respeito do problema, ele o reduziu a achar duas meias proporcionais entre dois segmentos de comprimento s e $2s$, ou seja, achar x e y de maneira que $\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s}$. Como $x^2 = sy$ e $y^2 = 2sx$, a eliminação de y leva a $x^3 = 2s^3$. Assim, o volume de um cubo de aresta x é duas vezes o de um cubo de aresta s. De modo geral, achar duas meias proporcionais entre a e b, equivale, achar x e y de maneira que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Como $x^2 = ay$ e $y^2 = bx$, a eliminação de y leva a $x^3 = ba^3$. Assim, o volume de um cubo de aresta x é b vezes o de um cubo de aresta a. Más, Hipócrates foi criticado por substituir um problema difícil por outro igualmente difícil, pois, na época usava-se apenas como método de resolução, régua e compasso, não sendo possível encontrar tais meias proporcionais.

Tempos depois, Arquitas de Tarento (400 a.C.) apresentou uma solução geniosa ao problema, usando a intersecção de três superfícies de revolução[6] (tronco de *cilindro*, *cone* reto de base circular e *toro* de raio interno nulo), mas, que ainda não poderia ser feita por régua a compasso. Menaecmus (350 a.C.), provavelmente em busca de apresentar um lugar geométrico para as meias proporcionais apresentadas por Hipócrates, e seguindo o caminho de Arquitas utilizando seções cônicas, apresentou duas soluções para o problema, uma envolvendo a intersecção de duas parábolas e a outra a intersecção de uma hipérbole com uma parábola.

A partir daí, Menaecmus passou a estudar as cônicas e percebeu que havia uma família de curvas que poderiam ser obtidas seccionando um *cone circular reto*[7] de uma folha com um

---

"espaço" com dimensões, onde cada ponto é representado por um par ordenado (x, y), onde x é a abscissa e y a ordenada.

[5] O problema consistia em obter um método para, dada a aresta de um cubo, construir, com régua e compasso, a aresta do cubo cujo volume fosse o dobro do cubo inicial.

[6] Superfície no espaço gerada por uma rotação de uma curva (geratriz) em torno de uma reta fixada (eixo).

[7] Cone gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de seus catetos.

plano perpendicular a uma geratriz[8] do cone, classificando-as de acordo com o ângulo do vértice, em três tipos:

- *Oxitomo* (elipse) – intersecção de um plano com a superfície de um cone circular reto oxigonal (cone de vértice agudo);
- *Ortotomo* (parábola) – intersecção de um plano com a superfície de um cone circular reto ortogonal (cone de vértice reto);
- *Amblitomo* (hipérbole) – intersecção de um plano com a superfície de um cone circular reto ambligonal (cone de vértice obtuso).

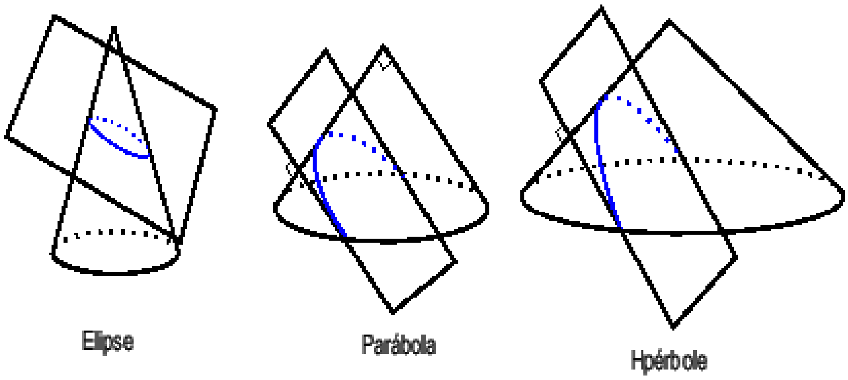

Figura 1: Elipse, Parábola e Hipérbole (definidas po Manaecmus).

Apesar da descoberta das seções cônicas ter sido atribuída a Menaecmus, foi Apolônio de Perga (225 a.C.), através de a sua obra prima *Seções Cônicas*, trabalho composto por oito livros, quem mostrou sistematicamente que pode-se obter todas as três espécies de seções cônicas a partir de um único cone de folha dupla, não necessariamente reto, simplesmente variando a inclinação do plano que o secciona, façanha esta que lhe rendeu o título de “o grande geômetra[9]”. Foi também Apolônio quem introduziu os nomes *elipse, hipérbole e parábola*, termos estes já utilizados pelos pitagóricos[10] na solução de equações quadráticas por aplicação de áreas, sendo agora aplicados num contexto novo para definir as seções planas.

Cabe ainda lembrar que vários outros estudos sobre as cônicas, dentre eles, merecendo destaque a obra *As Cônicas* de Euclides, foram todos superados, na época, por Apolônio, donde devido a sua “inferioridade” (comparando-se a obra de Apolônio) e ao fato de que era

[8] Todo segmento que passa pelo vértice e tem extremidade na base do cone.
[9] Matemático que realiza estudos relacionados com a Geometria.
[10] Seguidores das doutrinas e discípulos da escola de cunho religioso e filosófico, fundada pelo matemático Pitágoras.

muito caro a reprodução destes livros, pois, eram escritos à mão, foram todos perdidos com o tempo.

Traduzindo para a linguagem atual, Apolônio define as cônicas da seguinte maneira:

- *Elipse* - É a curva que se obtém ao cortar uma superfície cônica circular com um plano que não é paralelo a nenhuma das geratrizes e corta apenas uma das folhas;
- *Parábola* - É a curva que se obtém ao cortar uma superfície cônica circular com um plano paralelo a uma geratriz;
- *Hipérbole* - É a curva que se obtém ao cortar uma superfície cônica circular com um plano paralelo a duas geratrizes, cortando ambas as folhas;

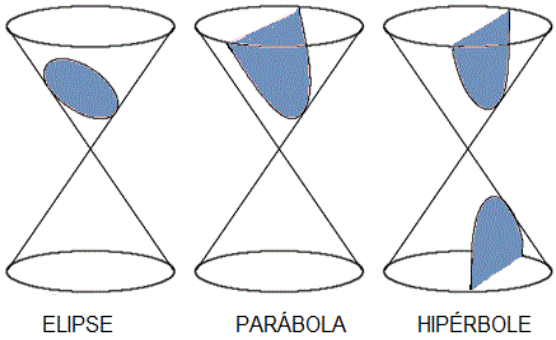

Figura 2: Elípse, Parábola e Hipérbole (definidas por Apolônio).

Assim, surgiram as cônicas. Devemos ainda lembrar que na época, todas as demonstrações eram expressas geometricamente, numa linguagem denominada *álgebra geométrica grega*, onde não se utilizava expressões algébricas, como se usa hoje na Geometria Analítica.

Segundo (Boyer, 1974), “Apolônio deu importante contribuição à Geometria, mas não foi tão longe quanto poderia ter ido na generalidade. Poderia igualmente bem ter partido de um cone elíptico[11]– ou de qualquer outro cone quádrico[12] – e ter ainda obtido as mesmas curvas. Isto é, qualquer secção plana do cone “circular” de Apolônio, poderia servir como a curva de “base” em sua definição, e a restrição “cone circular” é desnecessária”.

Após Apolônio, até o século XVI, nada de novidade se descobriu sobre cônicas, mas a história e o estudo das cônicas não param por aí. A partir do século XVII, vários estudos e

[11] Cone que tem como base uma elipse.
[12] Cone de duas folhas que tem como base uma curva cônica (elipse, parábola ou hipérbole), também chamada de curva diretriz do cone.

teoremas[13] sobre as cônicas foram realizados, na qual podemos destacar a maneira inovadora de tratar e apresentar as cônicas, feita pelo matemático francês Philippe de La Hire. Em sua obra "*Novos Elementos das Seções Cônicas"* (1679), Philippe de La Hire aborda as curvas isoladamente no plano, desvinculando-as totalmente do cone (espaço), passando a defini-las a partir de propriedades relativas às distâncias dos pontos pertencentes às curvas aos focos[14] (caracterização bifocal), forma na qual utilizamos nos dias atuais.

Por fim, citamos o grandioso trabalho de Pierre de Fermat (1601 – 1665), que por volta de 1636, escreveu um pequeno texto intitulado "*Introdução aos Lugares Planos e Sólidos",* que usando uma linguagem analítica, passa a definir as cônicas através de equações algébricas, obtidas de forma irredutível a partir de uma *equação geral do segundo grau com duas variáveis*: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Muitos outros autores e obras relevantes para a história das curvas cônicas foram aqui omitidos, por não se relacionarem diretamente com o nosso objetivo principal de estudo.

Os estudos das cônicas em geral, têm contribuído para descobertas importantes em vários ramos do conhecimento, dentre elas podemos citar como exemplos de aplicação:

- *Parábola* – Galileu (1604) descobriu que, lançando-se um projétil horizontalmente do topo de uma torre, supondo que a única força atuante sobre ele seja a da gravidade, sua trajetória é uma parábola;
- *Elipse* – Kepler (1610) descobriu que a trajetória dos planetas é uma elipse e que o sol se encontra em um dos focos;
- *Hipérbole* – Cassegrain (1672) propôs a utilização de um espelho hiperbólico na fabricação de telescópios, sendo hoje utilizado também em radiotelescópios[15].

A seguir, apresentaremos separadamente cada uma das cônicas, assim como suas definições, propriedades, equações e casos particulares. Nosso objetivo aqui será o estudo das cônicas de equação geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde $B = 0$, ou seja, apenas cônicas que têm o eixo focal paralelo às coordenadas do Sistema Cartesiano.

---

[13] É uma afirmação que pode ser provada como verdadeira através de outras afirmações já demonstradas.
[14] São pontos especiais que definem como certo conjunto de curvas é desenhado.
[15] Aparelho dotado de antenas ultrassensíveis, que recebe as ondas eletromagnéticas emitidas por corpos celestes.

1.2 - Elipse

1.2.1 - Definição: Dados dois pontos F_1 e F_2 do plano, de modo que a distância entre F_1 e F_2 seja constante e igual a $2c \geq 0$, chamamos de Elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$ o conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$, cuja soma das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é uma constante $2a > 2c$, ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{P | d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$$

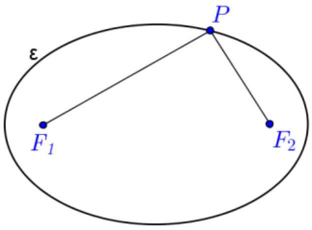

Figura 3: Elipse (definição).

1.2.2 - Elementos da Elipse

Aplicando o Teorema de Pitágoras[16] no triângulo retângulo B_2CF_2 (figura 4), obtemos a relação: $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$.

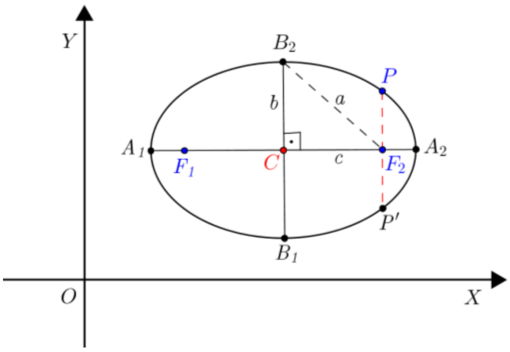

Figura 4: Elementos da Elipse.

Focos: pontos F_1 e F_2.

Centro: C; é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

Eixo Focal: $\overline{A_1A_2}$, onde $d(A_1, A_2) = 2a$, também chamado de eixo maior.

Eixo não focal: $\overline{B_1B_2}$, onde $d(B_1, B_2) = 2b$, também chamado de eixo menor.

Distância Focal: $d(F_1, F_2) = 2c$; distância entre os pontos F_1 e F_2 .

Reta Focal: $\overleftrightarrow{F_1F_2}$, reta que passa pelos focos.

Reta não Focal: $\overleftrightarrow{B_1B_2}$, reta que passa pelos pontos B_1 e B_2 e é a mediatriz de $\overline{F_1F_2}$.

[16] Teorema aplicado ao triângulo retângulo, que relaciona os comprimentos de seus lados, onde afirma que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Vértices sobre a reta focal: A_1 e A_2; pontos de intersecção entre a elipse e a reta focal.

Vértices sobre a reta não focal: B_1 e B_2; pontos de intersecção entre a elipse e a reta não focal.

Excentricidade[17]**:** $e = \frac{c}{a}$ $(0 \leq e < 1$; se $e = 0$, temos um círculo).

Latus Rectum: $\overline{PP'}$, onde $d(P, P') = \frac{2b^2}{a}$; segmento perpendicular à reta focal que passa por um dos focos (F_1 ou F_2) e tem como extremidades dois pontos da elipse.

1.2.3 - Distância entre dois pontos no Plano

Dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ no plano cartesiano (figura 5), para calcular a distância entre A e B, basta calcular o comprimento do segmento AB. Com as coordenadas destes pontos obtemos a seguinte construção.

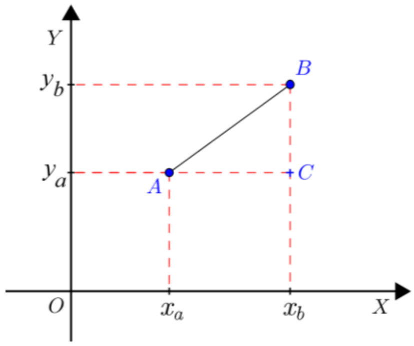

Figura 5: Distância entre dois pontos no plano.

Analisando a construção acima, podemos observar que $\overline{AB}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$[d(A,B)]^2 = [d(A,C)]^2 + [d(B,C)]^2$$

Como

$$[d(A,C)]^2 = |x_b - x_a|^2 = (x_b - x_a)^2$$

$$[d(B,C)]^2 = |y_b - y_a|^2 = (y_b - y_a)^2$$

Então:

$$[d(A,B)]^2 = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

[17] A excentricidade mede a abertura da cônica, ou seja, quanto mais próxima de 1, mais achatada (alongada) é a elipse e, quanto mais próximo de zero, mais arredondada ela será.

1.2.4 - Equação Canônica (ou reduzida) da Elipse de Centro na Origem do Sistema

1º Caso: A reta focal da Elipse coincide com o eixo *OX*

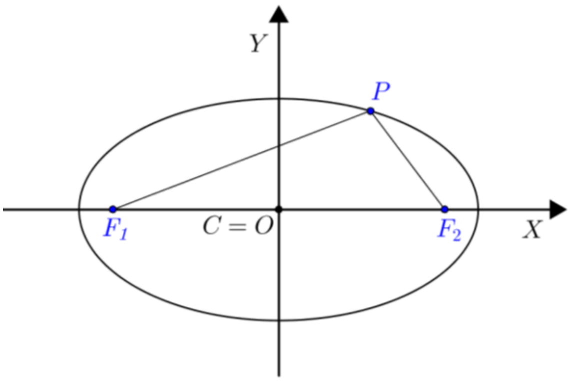

Figura 6: Elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo *OX.*

Pela definição de elipse

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \qquad \textbf{(I)}$$

Onde, neste caso temos que:

$$P = (x, y)$$
$$F_1 = (-c, 0)$$
$$F_2 = (c, 0)$$

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos que:

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} \qquad \textbf{(II)}$$
$$d(P, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \quad \textbf{(III)}$$

Substituindo II e III em I, obtemos:

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, desenvolvendo os produtos notáveis e simplificando, obtemos:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+\ y^2}\right)^2 = \left(2a-\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+\ y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}+(x-c)^2+\ y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+\ y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}+x^2-2xc+c^2+\ y^2$$

$$4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2} = 4xc$$

$$4a^2-4xc = 4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por 4 e elevando ao quadrado novamente, obtemos:

$$\frac{4a^2-4xc}{4} = \frac{4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}}{4}$$

$$a^2-xc = a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}$$

$$(a^2-xc)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}\right)^2$$

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2 = a^2((x-c)^2+\ y^2)$$

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2 = a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$$

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2 = a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^4+x^2c^2 = a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Da relação $a^2 = b^2 + c^2$, temos que $a^2 - c^2 = b^2$, substituindo na igualdade acima temos:

$$x^2b^2+a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por a^2b^2, obtemos:

$$\frac{x^2b^2+a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que representa a equação canônica (ou reduzida) da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo *OX* (figura 6).

2^{o} Caso: A reta focal da Elipse coincide com o eixo *OY*

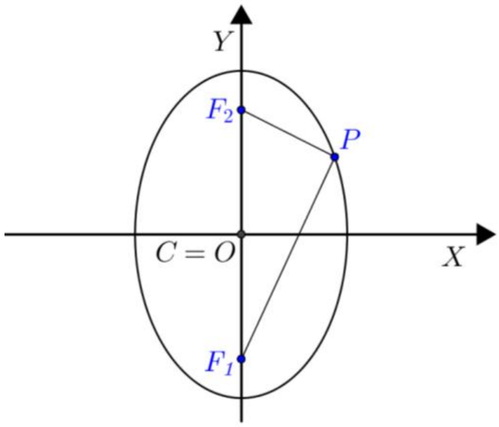

Figura 7: Elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo *OY*.

Na figura ao lado, temos que:

$$P = (x, y)$$
$$F_1 = (0, c)$$
$$F_2 = (0, -c)$$

De forma análoga ao 1^{o}caso, temos que:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

1.2.5 - Translação dos eixos das Coordenadas do Plano Cartesiano

Seja *OXY* um sistema de eixos ortogonais e seja $\bar{O} = (x_0, y_0)$ um ponto no plano.

Seja $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ um novo sistema, tal que $\bar{O}$ seja a nova origem e, cujos eixos $\bar{O}\bar{X}$ e $\bar{O}\bar{Y}$ são paralelos aos eixos *OX* e *OY* e têm, respectivamente, os mesmos sentidos destes eixos.

Dizemos que o novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ foi obtido por uma translação do antigo sistema *OXY*. Em ambos os sistemas conservamos as mesmas unidades de medidas.

Sejam $(\bar{x}, \bar{y})$ as coordenadas do ponto *P* no sistema de eixos $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ e sejam (*x*, *y*) as coordenadas de *P* no sistema de eixos *OXY* (figura 8). Então, as coordenadas do ponto *P* nos sistemas *OXY* e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ são relacionadas por:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases}$$

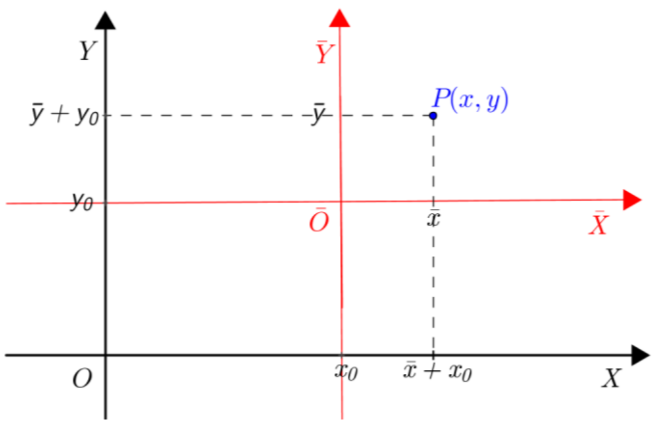

Figura 8: Translação dos eixos das coordenadas

1.2.6 - Equação Canônica (ou reduzida) da Elipse de Centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e cuja reta focal é paralela aos eixos das coordenadas.

1º Caso: A reta focal da Elipse é paralela ao eixo *OX*

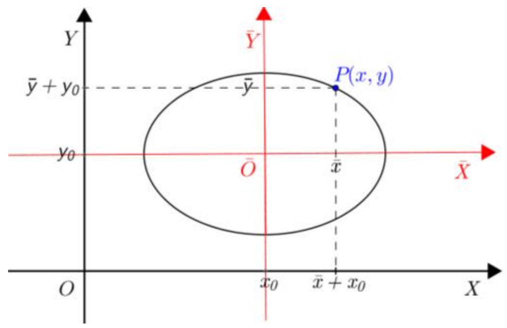

Figura 9: Elipse de Centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo *OX*.

Por meio de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, cuja origem $\bar{O} = (x_0, y_0)$ coincida com o centro da elipse (figura 9). Daí, a equação canônica (ou reduzida) da elipse referente ao novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, é:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(I)}$$

No entanto, da relação de translação das coordenadas entre os sistemas *OXY* e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$:

$$\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases} \text{, temos que } \begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases} \qquad \textbf{(II)}$$

Substituindo II em I, obtemos:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{, onde } a^2 = b^2 + c^2$$

Que representa a equação canônica (ou reduzida) da elipse de centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e cuja reta focal é paralela ao eixo *OX*.

2º Caso: A reta focal da Elipse é paralela ao eixo *OY*

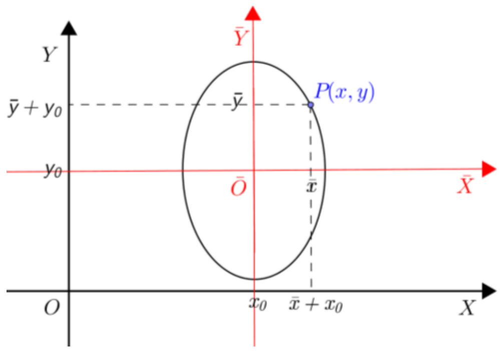

Figura 10: Elipse de Centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo *OY*.

De maneira análoga ao 1º caso, se uma elipse tem o centro no ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo *OY* (figura 10), sua equação relativa ao sistema *OXY* é: $\frac{(x-x_o)^2}{b^2} + \frac{(y-y_o)^2}{a^2} = 1$, onde $a^2 = b^2 + c^2$

1.2.7 - Circunferência (caso particular da Elipse)

A Circunferência é um caso particular da elipse, em que os focos são coincidentes (figura 11).

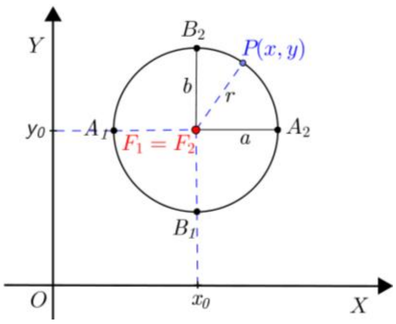

Figura 11: Circunferência (caso particular da elipse)

Note que se $F_1 = F_2$, então $c = 0$, sendo que da relação $a^2 = b^2 + c^2$, temos que $a = b$ e que a excentricidade $e = \frac{c}{a} = 0$. O semieixo $r = a = b$ é chamado de raio e, o eixo $2r$, de diâmetro da circunferência, ou seja, para todo ponto $P(x, y)$ pertencente à circunferência, a distância de P ao centro é r.

A equação reduzida da elipse é da forma:

$$\frac{(x - x_o)^2}{b^2} + \frac{(y - y_o)^2}{a^2} = 1$$

Substituindo a e b por r, obtemos:

$$\frac{(x - x_o)^2}{r^2} + \frac{(y - y_o)^2}{r^2} = 1$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por r^2, temos que:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2$$

Que é a equação reduzida da circunferência de centro (x_0, y_0), que pode ser definida como uma elipse de eixos focais e não focais com as mesmas medidas.

1.2.8 - Elipse Degenerada

1º Caso: Dizemos que uma elipse é degenerada, quando os focos coincidem com os vértices A_1 e A_2 (figura 12), ou seja, quando $a = c$**.** Note que, se $a = c$, então, da relação $a^2 = b^2 + c^2$, temos $b = 0$, ou seja, os vértices B_1 e B_2 coincidem com o centro C da elipse, que neste caso passa a ser um segmento de comprimento F_1F_2.

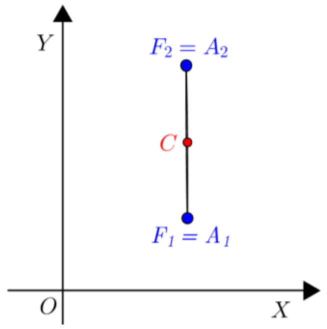

Figura 12: Elipse degenerada (segmento de reta)

Note que a excentricidade $e = \frac{c}{a} = 1$.

Observe que, se fixarmos a medida de a, quanto menor é a distância entre os focos, mais a elipse se aproxima de uma circunferência, e quanto maior é a distância entre os focos, mais achatada fica a elipse (figura 13).

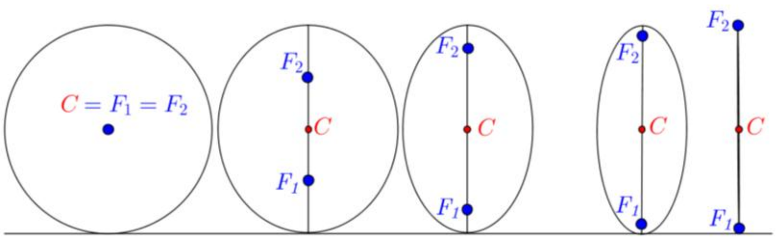

Figura 13: Elipses (comparativo em relação à distância entre os focos)

2º Caso: Chamamos também de degenerada, a elipse em que $a = b = 0$. Note que se $a = b = 0$, então, tanto pela definição, que diz que $2a \geq 2c$, quanto pela relação $a^2 = b^2 + c^2$, temos que $c = 0$. Neste caso a elipse se restringe a um único ponto, também chamada de *puntiforme*.

Geometricamente, este caso pode ser interpretado como a intersecção de um plano obliquo que corta a superfície cônica apenas no vértice, ou seja, o único ponto em comum entre o plano e o cone é o vértice (figura 14).

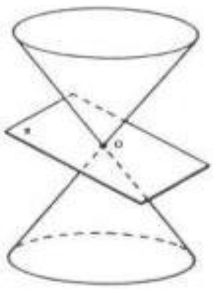

Figura 14: Elipse degenerada (ponto)

1.2.9 - Simetria da Elipse

A elipse é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro. De fato, se (x_1, y_1) satisfaz a equação canônica, então, os pontos $(-x_1, y_1)$, $(x_1, -y_1)$ e $(-x_1, -y_1)$ também a satisfazem, ou seja, para cada ponto P pertencente à elipse existem: um ponto P' equidistante da reta focal, que também pertence à elipse; um ponto P'' equidistante da reta não focal, que também pertence à elipse; e um ponto P''' equidistante do centro, que também pertence à elipse (figura 15).

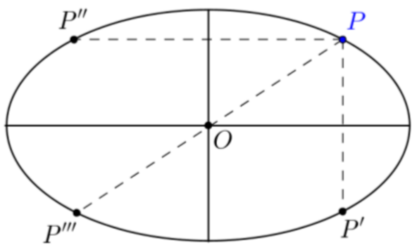

Figura 15: Simetria da elipse

1.3 - Hipérbole

1.3.1 - Definição: Dados dois pontos F_1 e F_2 do plano, de modo que a distância entre F_1 e F_2 seja constante e igual a $2c > 0$, chamamos de Hipérbole $\boldsymbol{h}$**,** o conjunto de todos os pontos $P = (x, y)$, cujo valor absoluto da diferença das distâncias aos pontos F_1 e F_2 é uma constante $2a < 2c$, ou seja, sendo $0 < a < c$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\boldsymbol{h} = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

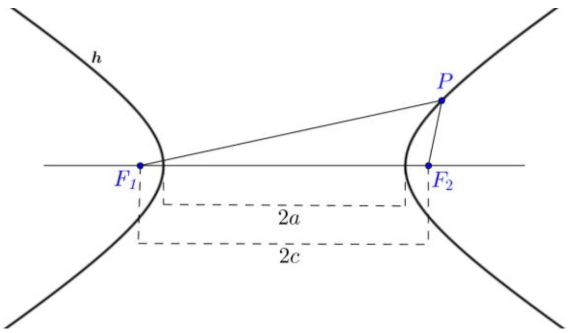

Figura 16: Hipérbole (definição)

Observe que a hipérbole tem dois *ramos* (figura 16), onde o valor absoluto pode ser desconsiderado desde que adotemos a diferença entre a maior e a menor distância.

1.3.2 - Elementos da Hipérbole

Consideremos uma circunferência de raio *c* e centro no ponto médio de $\overline{F_1F_2}$;

Tomemos um valor qualquer para a e marquemos os pontos A_1 e A_2;

Por estes pontos tracemos cordas (de comprimento *2b*) perpendiculares a F_1F_2;

As quatro extremidades destas cordas, são os vértices de um retângulo inscrito nesta circunferência.

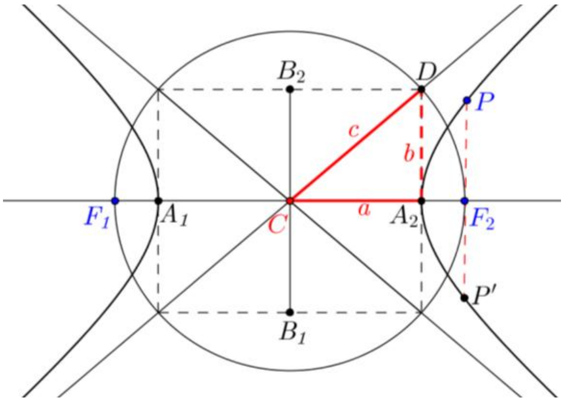

Figura 17: Elementos da hipérbole

Do triângulo retângulo CDA_2 (figura 17), obtemos a relação notável:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Focos: pontos F_1 e F_2.

Centro: *C*; é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$.

Eixo real (ou transverso): $\overline{A_1A_2}$, onde $d(A_1, A_2) = 2a$.

Eixo imaginário (ou conjugado): $\overline{B_1B_2}$, onde $d(B_1, B_2) = 2b$.

Distância Focal: $d(F_1, F_2) = 2c$; distância entre os pontos F_1 e F_2 .

Reta Focal: $\overleftrightarrow{F_1F_2}$, reta que passa pelos focos.

Reta não Focal: $\overleftrightarrow{B_1B_2}$, reta que passa pelos pontos B_1 e B_2 e é a mediatriz de $\overline{F_1F_2}$.

Vértices da Hipérbole: A_1 e A_2; pontos de intersecção entre a hipérbole e o eixo real.

Vértices imaginários da Hipérbole: B_1 e B_2; pontos sobre o eixo imaginário.

Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$ ($e > 1$, pois $c > a$); quanto maior a excentricidade, maior a abertura da hipérbole.

Retângulo de Base: é o retângulo que tem os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios de seus lados.

Assíntotas: retas que contêm as diagonais do retângulo de base ($y = \pm\frac{b}{a}x$). Quanto mais afastados dos focos estão os pontos da hipérbole, mais se aproximam das assíntotas, de tal forma que a tendência da hipérbole é tangenciar suas assíntotas no infinito.

Latus Rectum: $\overline{PP'}$, onde $d(P, P') = \frac{2b^2}{a}$; segmento perpendicular à reta focal que passa por um dos focos (F_1 ou F_2) com extremidades em dois pontos da hipérbole.

1.3.3 - Equação Canônica (ou reduzida) da Hipérbole de Centro na Origem do Sistema

1º Caso: A reta focal da Hipérbole coincide com eixo *OX*

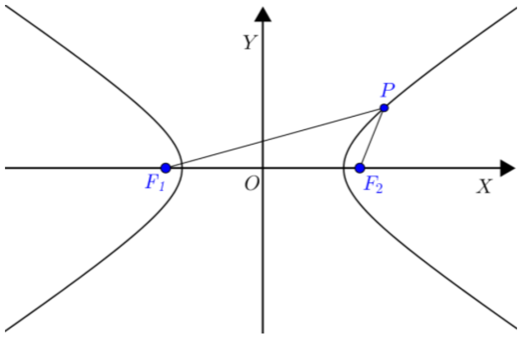

Figura 18: Hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo *OX*.

Da definição de Hipérbole, temos que:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a \qquad \textbf{(I)}$$

Onde

$$P = (x, y)$$
$$F_1 = (-c, 0)$$
$$F_2 = (c, 0)$$

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos que:

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} \qquad \textbf{(II)}$$
$$d(P, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \qquad \textbf{(III)}$$

Substituindo II e III em I, obtemos:

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, desenvolvendo os produtos notáveis e simplificando, obtemos:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+\ y^2}\right)^2 = \left(2a+\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+\ y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}+(x-c)^2+\ y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+\ y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}+x^2-2xc+c^2+\ y^2$$

$$4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2} = 4xc$$

$$4a^2-4xc = -4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por 4 e elevando ao quadrado novamente, obtemos:

$$\frac{4a^2-4xc}{4} = \frac{-4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}}{4}$$

$$a^2-xc = -a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}$$

$$(a^2-xc)^2 = \left(-a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}\right)^2$$

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2 = (-a)^2((x-c)^2+\ y^2)$$

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2 = a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$$

$$a^4-2a^2xc+x^2c^2 = a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^4+x^2c^2 = a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Da relação $c^2=a^2+b^2$, temos que $a^2-c^2=-b^2$, substituindo na igualdade acima temos:

$$-x^2b^2+a^2y^2 = -a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por $-a^2b^2$, obtemos:

$$\frac{-x^2b^2+a^2y^2}{-a^2b^2} = \frac{-a^2b^2}{-a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que representa a equação canônica (ou reduzida) da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo *OX* (figura 18).

2º Caso: A reta focal da Hipérbole coincide com eixo *OY*

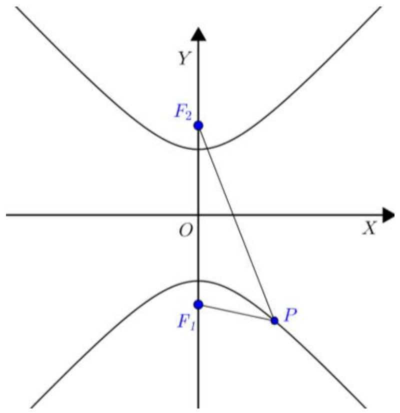

Figura 19: Hipérbole de centro na origem e reta focal coincidentente com o eixo *OY.*

Na figura ao lado, temos que:

$$P = (x, y)$$

$$F_1 = (0, c)$$

$$F_2 = (0, -c)$$

De forma análoga ao 1ºcaso, temos que:

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

1.3.4 - Equação Canônica (ou reduzida) da Hipérbole de Centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e cuja reta focal é paralela aos eixos das coordenadas.

1º Caso: A reta focal da Hipérbole é paralela ao eixo *OX*

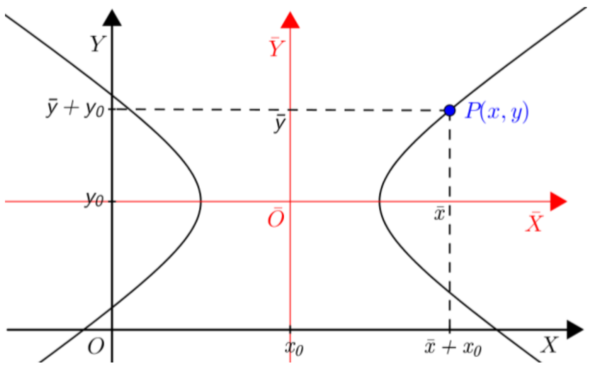

Figura 20: Hipérbole de Centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo *OX.*

Assim como vimos no caso da elipse, por meio de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, cuja origem $\bar{O} = (x_0, y_0)$ coincida com o centro da hipérbole (figura 20). Daí, a equação canônica (ou reduzida) da hipérbole referente ao novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, é:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

De maneira análoga ao caso da elipse, substituindo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ na equação, obtemos:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{, onde } \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Que representa a equação canônica (ou reduzida) da hipérbole de centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e cuja reta focal é paralela ao eixo *OX*.

2º Caso: A reta focal da Hipérbole é paralela ao eixo *OY*

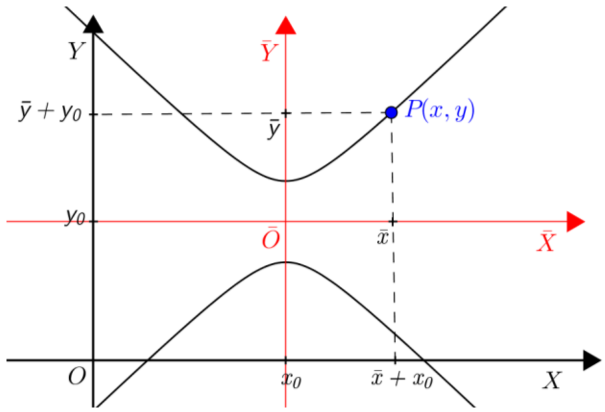

Figura 21: Hipérbole de Centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo *OY*.

De maneira análoga ao 1º caso, se uma hipérbole tem o centro no ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo *OY* (figura 21), sua equação relativa ao sistema *OXY* é:

$$\frac{(x - x_o)^2}{b^2} - \frac{(y - y_o)^2}{a^2} = 1, \text{onde} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

1.3.5 - Hipérbole Degenerada

Dizemos que uma Hipérbole é degenerada, quando os focos coincidem com o centro da hipérbole, ou seja, quando $a = b = c = 0$**.** Note que, os vértices também coincidem com o centro, e os ramos da hipérbole passam a serem duas retas concorrentes (figura 22).

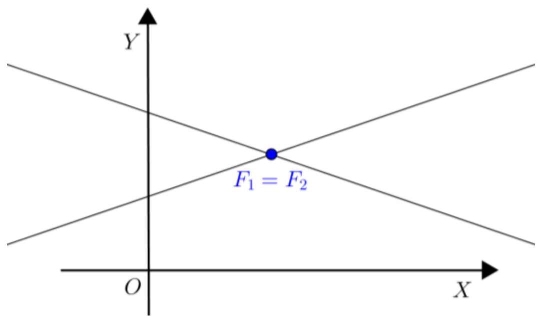

Figura 22: Hipérbole degenerada (par de retas concorrentes).

Observação: Neste caso, como $c = 0$, não existe excentricidade.

Geometricamente, este caso pode ser interpretado como a intersecção de um plano com uma superfície cônica, de tal forma que este plano corte suas duas folhas passando pelo vértice (figura 23).

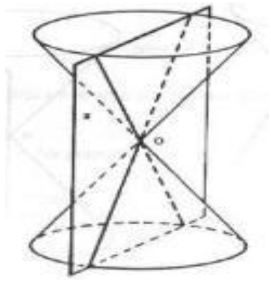

Figura 23: Hipérbole degenerada (interpretação geométrica).

1.3.6 - Simetria da Hipérbole

Assim como a elipse, a hipérbole também é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro (figura 24).

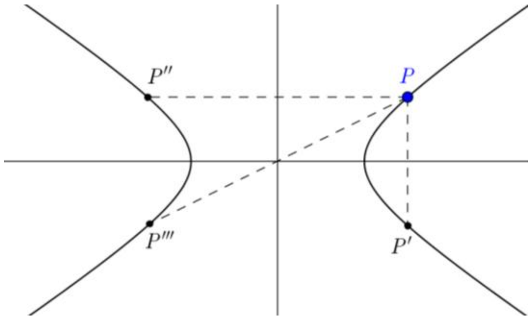

Figura 24: Simetria da hipérbole

1.4 - Parábola

1.4.1 - Definição: Dados no plano, um ponto F e uma reta r, tal que F não pertença a r, chamamos de Parábola $\boldsymbol{p}$**,** o conjunto de todos os pontos P, cuja distância entre P e r é igual à distância entre P e F.

$$\boldsymbol{p} = \{P|\ d(P,r) = d(P,F)\}$$

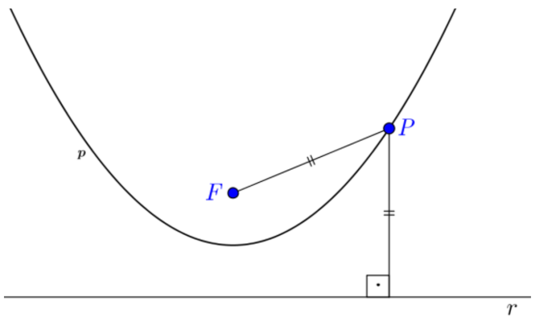

Figura 25: Parábola (definição)

1.4.2 - Elementos da Parábola

Consideremos o ponto A, como sendo a intersecção da reta que passa pelo ponto F e é perpendicular a reta r. Assim, denominamos os elementos da Parábola:

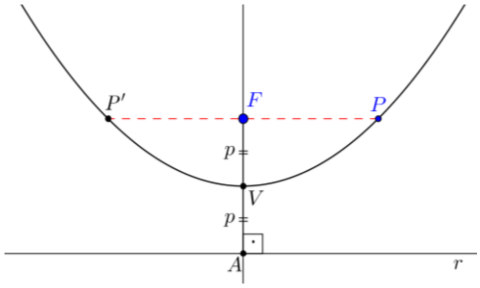

Figura 26: Elementos da parábola

Foco: ponto F.

Diretriz: reta r.

Reta focal: reta que passa pelo foco F e é perpendicular à diretriz r.

Vértice: V; ponto de intersecção entre a parábola e a reta focal, que também é ponto médio do segmento FA (por definição).

Parâmetro: $2p$; distância entre o foco F e a diretriz r.

Excentricidade: $e = 1$

Latus Rectum: $\overline{PP'}$, onde $d(P, P') = 4p$; segmento perpendicular à reta focal que passa pelo ponto F (foco) e tem como extremidades dois pontos da parábola.

1.4.3 - Equação Canônica (ou reduzida) da Parábola de vértice na Origem do Sistema

1º Caso: A reta focal da Parábola coincide com eixo *OX* e o foco está à direita da origem (concavidade voltada para a direita)

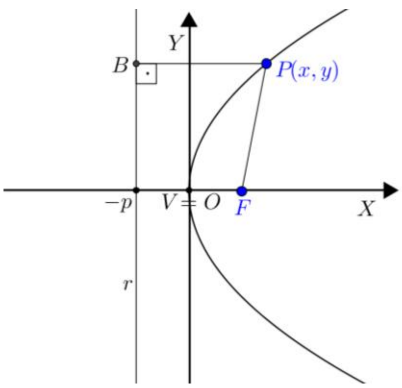

Figura 27: Parábola de vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo *OX* e foco à direita da vértice.

Pela definição de Parábola, temos que:

$$d(P,F) = d(P,B) \quad \textbf{(I)}$$

Onde, neste caso:

$$P = (x,y)$$

$$F = (p,0)$$

$$B = (-p,y)$$

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, temos que:

$$d(P,F) = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} \qquad \textbf{(II)}$$

$$d(P,B) = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2} \qquad \textbf{(III)}$$

Substituindo II e III em I, obtemos:

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, desenvolvendo os produtos notáveis e simplificando, obtemos:

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+p)^2}\right)^2$$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px$$

Que representa a equação canônica (ou reduzida) da parábola de vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo *OX*, onde o foco está à direita da origem (figura 27).

2^{o} Caso: A reta focal da Parábola coincide com eixo *OX* e o foco está à esquerda da origem (concavidade voltada para a esquerda)

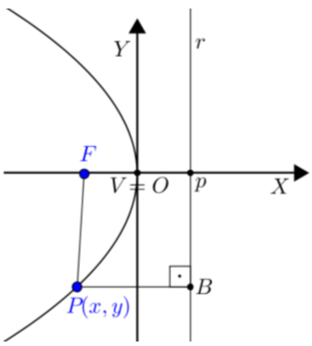

Figura 28: Parábola de vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo *OX* e foco à esquerda do vértice.

Na figura ao lado, temos que:

$$P = (x,y)$$

$$F = (-p,0)$$

$$B = (0,-p)$$

De forma análoga ao 1^{o}caso, temos que:

$$y^2 = -4px$$

3º Caso: A reta focal da Parábola coincide com eixo OY e o foco está acima da diretriz (concavidade voltada para cima)

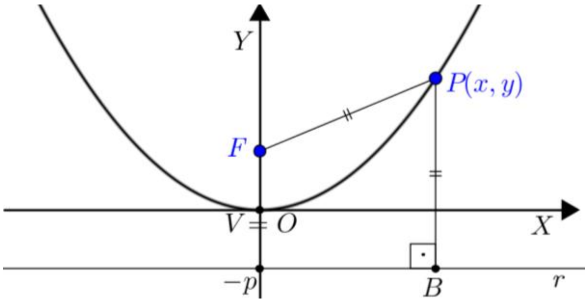

Figura 29: Parábola de vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo *OY* e foco acima da vértice.

Neste caso, temos que:

$$P = (x, y)$$
$$F = (0, p)$$
$$B = (x, -p)$$

Para $d(P,F) = d(P,B)$, temos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}$$
$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, desenvolvendo os produtos notáveis e simplificando, obtemos:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$
$$x^2 = 4py$$

Que representa a equação canônica (ou reduzida) da parábola de vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo *OY*, onde o foco está acima da diretriz (figura 29).

4º Caso: A reta focal da Parábola coincide com eixo OY e o foco está abaixo da diretriz

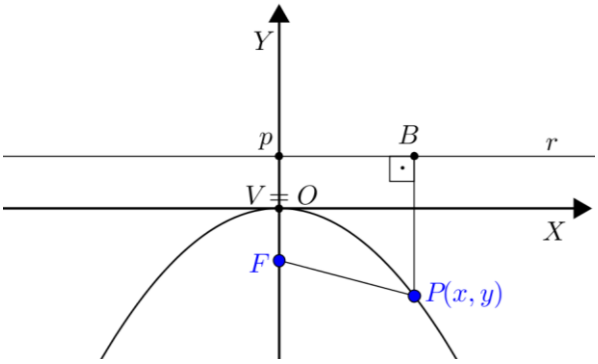

Figura 30: Parábola de vértice na origem, reta focal coincidente com o eixo *OY* e foco abaixo direita da vértice.

Na figura ao lado, temos que:

$$P = (x, y)$$

$$F = (0, -p)$$

$$B = (x, p)$$

De forma análoga ao 3ºcaso, temos que:

$$x^2 = -4py$$

1.4.4 - Equação Canônica (ou reduzida) da Parábola de vértice $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e cuja reta focal é paralela aos eixos das coordenadas.

1º Caso: A reta focal da Parábola é paralela ao eixo *OX* e o foco está à direita do vértice (concavidade voltada para a direita)

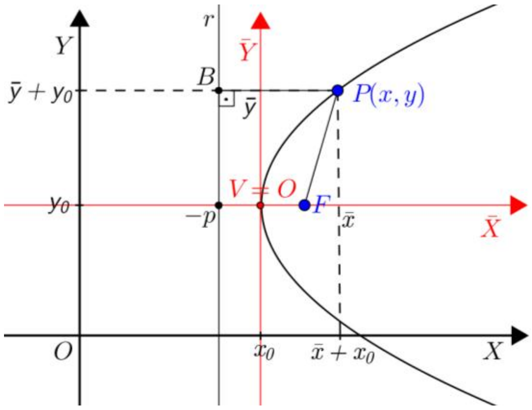

Figura 31: Parábola de vértice $\bar{O} = (x_0, y_0)$, reta focal paralela ao eixo *OX* e foco à direita do vértice .

Assim como no caso da elipse e da hipérbole, por meio de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, cuja origem $\bar{O} = (x_0, y_0)$ coincida com o vértice da parábola. Daí, a equação canônica (ou reduzida) da parábola referente ao novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, é:

$$\bar{y}^2 = 4p\bar{x}$$

Substituindo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ na equação, obtemos:

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

Que representa a equação canônica (ou reduzida) da parábola de vértice $\bar{O} = (x_0, y_0)$, cuja reta focal é paralela ao eixo *OX*, e o foco está à direita do vértice (figura 31).

2º Caso: A reta focal da Parábola é paralela ao eixo *OX* e o foco está à esquerda do vértice (concavidade voltada para a esquerda)

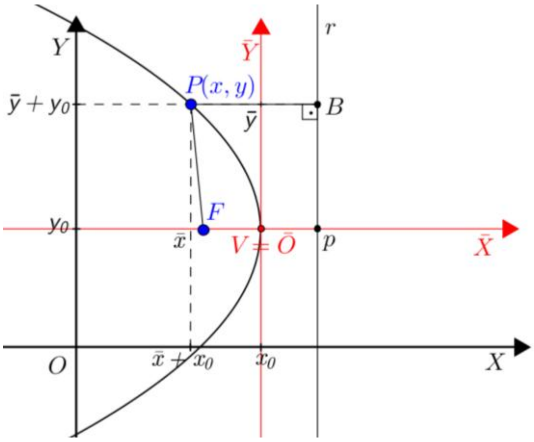

Figura 32: Parábola de vértice $\bar{O} = (x_0, y_0)$, reta focal paralela ao eixo *OX* e foco à esquerda do vértice .

De forma análoga ao 1ºcaso, temos que:

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$$

É a equação canônica (ou reduzida) que representa a Parábola de vértice $\bar{O} = (x_0, y_0)$, cuja reta focal é paralela ao eixo *OX* e o foco está à esquerda do vértice (figura 32).

3º Caso: A reta focal da Parábola é paralela ao eixo *OY* e o foco está acima do vértice (concavidade voltada para cima)

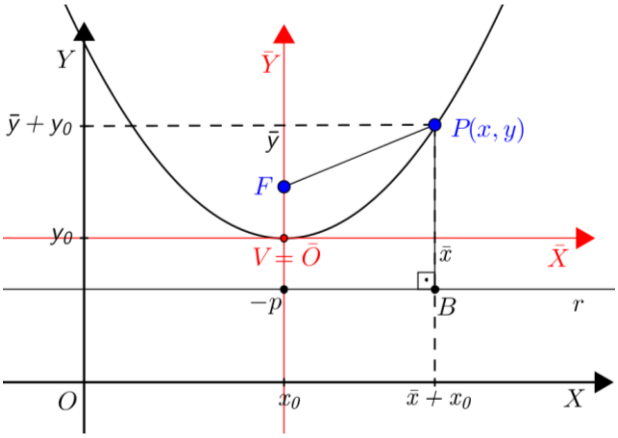

Figura 33: Parábola de vértice $\bar{O} = (x_0, y_0)$, reta focal paralela ao eixo *OY* e foco acima do vértice .

Assim como nos primeiros casos, por meio de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, cuja origem $\bar{O} = (x_0, y_0)$ coincida com o vértice da parábola. Daí, a equação canônica (ou reduzida) da parábola referente ao novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, como vimos no terceiro caso do item 1.4.2, é dada por:

$$\bar{x}^2 = 4p\bar{y}$$

Substituindo $\bar{x}$ e $\bar{y}$ na equação, obtemos:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

Que representa a equação canônica (ou reduzida) da parábola de vértice $\bar{O} = (x_0, y_0)$, cuja reta focal é paralela ao eixo *OY*, e o foco está acima do vértice (figura 33).

4º Caso: A reta focal da Parábola é paralela ao eixo OY e o foco está abaixo do vértice (concavidade voltada para baixo)

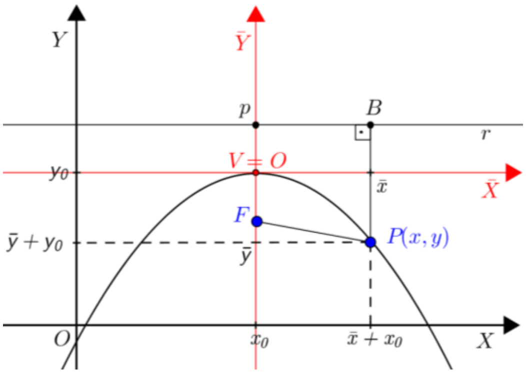

Figura 34: Parábola de vértice $\overline{\boldsymbol{O}} = (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$, reta focal paralela ao eixo OY e foco abaixo do vértice .

Com base na equação dada no quarto caso do item 1.4.2, e fazendo as substituições análogas ao caso anterior, obtemos:

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$$

Que representa a equação da parábola, cuja reta focal é paralela ao eixo OY e o foco está abaixo do vértice (figura 34).

Observação: Note que, quando p é positivo, a parábola tem concavidade voltada para cima ou para a direita, e quando p é negativo, a parábola tem concavidade voltada para baixo ou para a esquerda.

1.4.5 - Parábola Degenerada

1º Caso: Dizemos que uma Parábola é degenerada, quando o foco coincide com o vértice, ou seja, quando $p = 0$. Neste caso, a parábola passa a ser uma *reta* perpendicular à diretriz r e coincidente à reta focal (figuras 35 e 36).

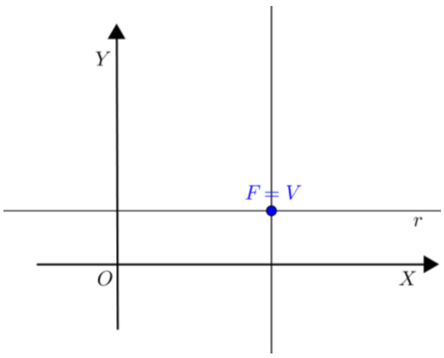

Figura 35: Parábola degenerada (reta paralela ao eixo OY).

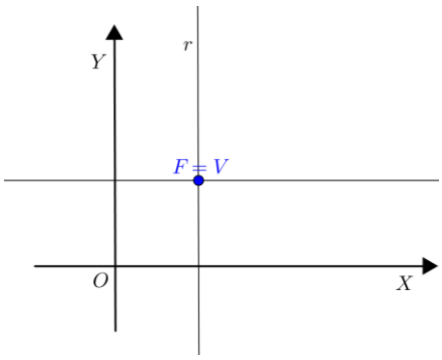

Figura 36: Parábola degenerada (reta paralela ao eixo OX).

Geometricamente, este caso degenerado da parábola, pode ser interpretado como a intersecção de um plano que tangencia a superfície cônica, ou seja, os pontos em comum entre o plano e o cone é uma *reta* geratriz do cone (figura 37).

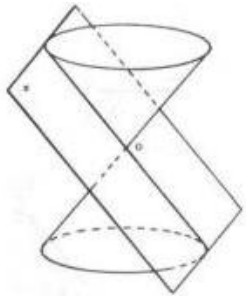

Figura 37: Parábola degenerada (interpretação geométrica).

2º Caso: Como caso particular de uma Parábola degenerada, podemos ter um *par de retas paralelas*, que, geometricamente, pode ser obtido da intersecção entre uma superfície cilíndrica circular (considerada uma superfície cônica de vértice impróprio) com um plano paralelo ao seu eixo (figura 38).

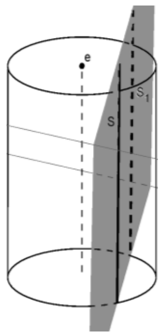

Figura 38: Parábola degenerada (par de retas paralelas).

Observação: Geometricamente, uma cônica é considerada degenerada, quando em particular o plano corta o cone em seu vértice. No caso da elipse, hipérbole e parábola, o plano que corta o cone não passa pelo vértice, portanto, são chamadas de cônicas não degeneradas.

1.4.6 - Simetria da Parábola

Assim como a elipse e a hipérbole, a parábola também é simétrica em relação à reta focal, ou seja, dado um ponto p qualquer da parábola, existe outro ponto p', que também pertence à parábola, tal que p e p' equidistam da reta focal. Por este motivo, a reta focal é também chamada de *eixo de simetria* da parábola (figura 39).

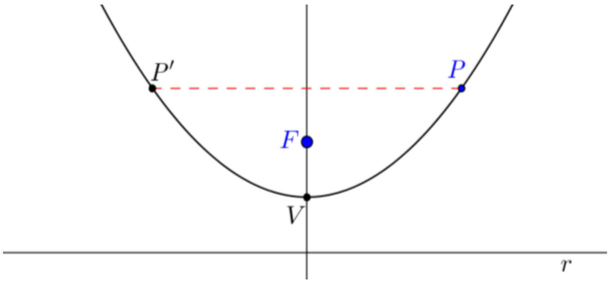

Figura 39: Simetria da parábola

1.5 - Equação geral das cônicas

Todas as cônicas podem ser representadas por uma equação geral do segundo grau com duas variáveis:

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$.

- Ax^2, By^2 e Cxy – são os termos do 2º grau (ou quadráticos);
- Dx e Ey – são os termos do 1º grau (ou lineares);
- F – é o termo independente.

A partir das equações canônicas, vejamos como cada cônica pode ser representada:

1.5.1 - Equação geral da Elipse

Tomemos o caso em que a elipse tem o centro em (x_0, y_0) e cuja reta focal é paralela ao eixo *OX*. Nesse caso, vimos que a elipse é representada pela equação:

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_o)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{, onde} \quad a^2 = b^2 + c^2$$

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$b^2(x-x_o)^2 + a^2(y-y_o)^2 = a^2b^2$$

$$b^2(x^2 - 2x_ox + x_o^2) + a^2(y^2 - 2y_oy + y_o^2) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2x_ox + b^2x_o^2 + a^2y^2 - 2a^2y_oy + a^2y_o^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2x_ox + b^2x_o^2 + a^2y^2 - 2a^2y_oy + a^2y_o^2 - a^2b^2 = 0$$

Reorganizando, temos que:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_ox - 2a^2y_oy + b^2x_o^2 + a^2y_o^2 - a^2b^2 = 0$$

Que é da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde:

$A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_o$, $E = -2a^2y_o$ e $F = b^2x_o^2 + a^2y_o^2 - a^2b^2$.

Observe que $B = 0$ e $AC > 0$, pois A e C têm o mesmo sinal. O mesmo vale para a equação da elipse de centro (x_0, y_0), cuja reta focal é paralela ao eixo OY, como também para os casos degenerados ou em que a elipse tem centro na origem do sistema, onde neste ultimo caso, a equação geral é da forma $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$, ou seja, $B = D = E = 0$, pois, $x_o = y_o = 0$.

1.5.2 - Equação geral da Hipérbole

De maneira análoga, tomando o caso em que a hipérbole tem o centro em (x_0, y_0) e cuja reta focal é paralela ao eixo OX, representada pela equação:

$$\frac{(x - x_o)^2}{a^2} - \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1 \qquad ,\text{onde} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_ox + 2a^2y_oy + b^2x_o^2 - a^2y_o^2 - a^2b^2 = 0$$

Que é da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde:

$A = b^2,\ B = 0,\ C = -a^2,\ D = -2b^2x_o,\ E = 2a^2y_o$ e $F = b^2x_o^2 - a^2y_o^2 - a^2b^2$.

Observe que $B = 0$ e $AC < 0$, pois A e C têm sinais diferentes. O mesmo vale para a equação da hipérbole de centro (x_0, y_0), cuja reta focal é paralela ao eixo OY, como também para os casos degenerados ou em que a hipérbole tem centro na origem do sistema, onde neste ultimo caso, a equação geral é da forma $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$.

1.5.3 - Equação geral da Parábola

Tomemos o caso em que a parábola tem o vértice em (x_0, y_0) e cuja reta focal é paralela ao eixo OX, onde é representada pela equação:

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)$$

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$y^2 - 2y_oy + y_o^2 = \pm 4px \mp 4px_o$$

Reorganizando, temos que:

$$y^2 \mp 4px - 2y_oy + y_o^2 \pm 4px_o = 0$$

Que é da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde:

$A = 0,\ B = 0,\ C = 1,\ D = \mp 4p,\ E = -2y_o$ e $F = y_o^2 \pm 4px_o$.

Observe que $B = 0$ e $AC = 0$.

Analogamente, Tomemos a equação no caso em que a parábola tem o vértice em (x_0, y_0) e cuja reta focal é paralela ao eixo OY.

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)$$

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$x^2 - 2x_o x + x_o^2 = \pm 4py \mp 4py_o$$

Reorganizando, temos que:

$$x^2 \mp 4py - 2x_o x + x_o^2 \pm 4py_o = 0$$

Que é da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (*), onde:

$A = 1,\ B = 0,\ C = 0,\ D = -2x_o,\ E = \mp 4p$ e $F = x_o^2 \pm 4py_o$.

Observe que, assim como no primeiro caso, $B = 0$ e $AC = 0$. O mesmo vale para os casos degenerados ou em que a parábola tem o vértice na origem do sistema, onde, neste ultimo caso, teríamos a equação geral da forma $Cy^2 + Dx = 0$ ou $Ax^2 + Ey = 0$, pois, $x_o = y_o = 0$.

Resumindo:

Se	A equação (*) é do tipo:
$B = 0\ e\ AC > 0$	Elíptico
$B = 0\ e\ AC < 0$	Hiperbólico
$B = 0\ e\ AC = 0$	Parabólico

Observação: A expressão acima "é do tipo" é usada porque além das cônicas não degeneradas, incluem-se também na regra os casos degenerados.

1.6 - Identificação das cônicas

Veremos como determinar uma cônica (ou um caso degenerado de cônica), a partir de uma equação geral dada. Lembrando que aqui apresentaremos apenas as equações onde $B = 0$, ou seja, as equações do tipo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. **(I)**

Reorganizando e completando quadrados da equação geral **(I)**, obtemos:

$$(Ax^2 + Dx) + (Cy^2 + Ey) = -F$$

$$A\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+C\left(y^2+\frac{E}{C}y+\frac{E^2}{4C^2}\right)=-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}$$

$$A\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2=-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C} \qquad \textbf{(II)}$$

- Suponhamos que $AC > 0$. Então, da equação **(II)** temos três possibilidades:

$$-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}=0$$

$$-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}>0$$

$$-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}<0$$

- Se $-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}=0$, a equação representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$.
- Se $-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}>0$, com A e C positivos, a equação representa uma elipse de centro $\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$. Sendo A e C negativos, a equação representa o conjunto vazio.
- Se $-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}<0$, com A e C positivos, a equação representa o conjunto vazio. Sendo A e C negativos, a equação representa uma elipse de centro $\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$.

Observação: Nos casos acima mencionados, em que a equação representa o conjunto vazio, são também considerados como casos de elipses degeneradas.

- Suponhamos que $AC < 0$. Então, da equação (II) temos duas possibilidades:

$$-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}=0$$

$$-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}\neq 0$$

- Se $-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}=0$, a equação representa o par de retas concorrentes:

$$y=+\sqrt{\frac{-A}{C}}\left(x+\frac{D}{2A}\right)-\frac{E}{2C} \quad \text{e} \quad y=-\sqrt{\frac{-A}{C}}\left(x+\frac{D}{2A}\right)-\frac{E}{2C}.$$

- Se $-F+\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4C}\neq 0$, a equação representa uma hipérbole de centro $\left(-\frac{D}{2A},-\frac{E}{2C}\right)$.

- Suponhamos agora que $AC = 0$, onde $A = 0$ e $C \neq 0$. Então, da equação geral temos:

$$Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Reorganizando e completando quadrado, obtemos:

$$(Cy^2 + Ey) + Dx + F = 0$$

$$C\left(y^2 + \frac{Ey}{C} + \frac{E^2}{4C^2}\right) + Dx + F - \frac{E^2}{4C} = 0$$

$$C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -Dx - F + \frac{E^2}{4C}$$

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}x - \frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2}$$

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}x - \frac{D}{C}\left(\frac{CF}{CD} - \frac{CE^2}{4C^2D}\right)$$

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \left(\frac{CF}{CD} - \frac{CE^2}{4C^2D}\right)\right)$$

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}\right) \qquad \text{(III)}$$

- Se $D \neq 0$, então, a equação (III) representa uma parábola de vértice $V = \left(-\frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C}\right)$.

- Se $D = 0$, a equação $Cy^2 + Ey + F = 0$ representa:

- Um par de retas paralelas ao eixo *OX*, $y = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C}$ e $y = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C}$, se $(E^2 - 4CF) > 0$.
- Uma reta paralela ao eixo *OX*, $y = -\frac{E}{2C}$, se $(E^2 - 4CF) = 0$.
- O conjunto vazio, se $(E^2 - 4CF) < 0$. Este caso é também considerado como sendo uma parábola degenerada.

Observação: O mesmo vale para os casos em que $C = 0$ e $A \neq 0$, trocando "paralelo ao eixo *OX* " por "paralelo ao eixo *OY* ".

1.7 - Exemplos

Verificando as equações abaixo, identifique que tipo de cônica cada uma representa, determine seus principais elementos e esboce o gráfico:

a) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$

Solução:

Reorganizando e completando os quadrados da equação geral dada, obtemos:

$$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 2y) = 124$$

$$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 + 2y + 1) = 124 + 36 - 16$$

$$9(x - 2)^2 - 16(y + 1)^2 = 144$$

Dividindo por 144, temos:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Que representa a equação da hipérbole de centro $(x_0, y_0) = (2, -1)$ e eixo focal paralelo a OX, onde $a^2 = 16 \rightarrow a = 4$, $b^2 = 9 \rightarrow b = 3$ e da relação $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $c = 5$. Daí segue os demais elementos:

Focos: $F_1 = (x_0 - c, y_0) = (-3, -1)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0) = (7, -1)$.

Eixo real (ou transverso): $2a = 8$.

Eixo imaginário (ou conjugado): $2b = 6$.

Distância Focal: $2c = 10$.

Vértices: $A_1 = (x_0 - a, y_0) = (-2, -1)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0) = (6, -1)$.

Vértices imaginários: $B_1 = (x_0, y_0 - b) = (2, -4)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b) = (2,2)$.

Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

Assíntotas: $(y - y_0) = \pm\frac{b}{a}(x - x_0) \rightarrow (y + 1) = \pm\frac{3}{4}(x - 2) \rightarrow y = \pm\left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{2}\right)$.

Esboço do gráfico:

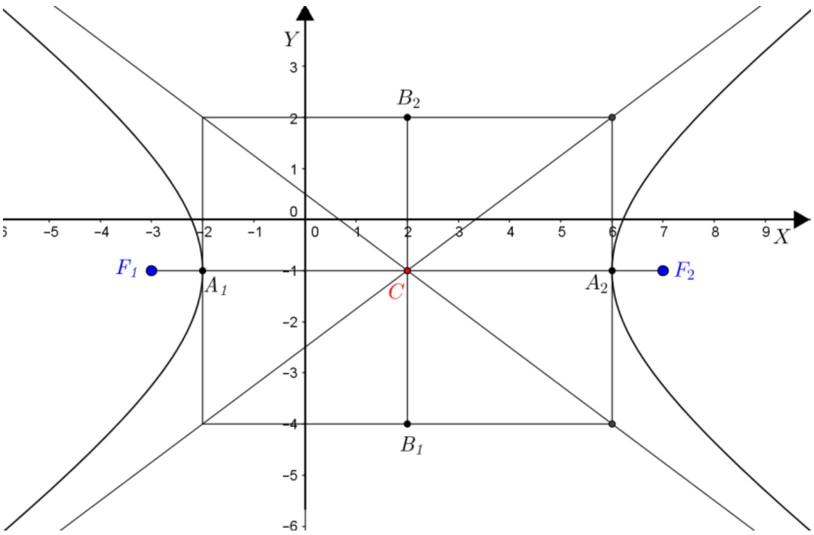

Figura 40: Exemplo a) - Hipérbole de centro $(\mathbf{2}, -\mathbf{1})$ e eixo focal paralelo a OX.

b) $2y^2 + 4x + 16y - 4 = 0$

Solução:

Reorganizando e completando os quadrados da equação geral dada, obtemos:

$$2(y^2 + 8y) = -4x + 4$$

$$2(y^2 + 8y + 16) = -4x + 4 + 32$$

$$2(y + 4)^2 = -4x + 36$$

$$2(y + 4)^2 = -4(x - 9)$$

Dividindo por 2, temos:

$$(y + 4)^2 = -2(x - 9)$$

Que representa a equação da parábola de vértice $V = (x_0, y_0) = (9, -4)$, cujo eixo focal é paralelo a *OX* e o foco está à esquerda do vértice. Daí, temos que:

Parâmetro: $2p = 1 \left(\rightarrow p = \frac{1}{2}\right)$.

Foco: $F = (x_0 - p, y_0) = \left(9 - \frac{1}{2}, -4\right) = \left(\frac{17}{2}, -4\right)$.

Reta focal: $y = -4$

Diretriz *r*: $x = x_0 + p = 9 + \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$.

Esboço do gráfico:

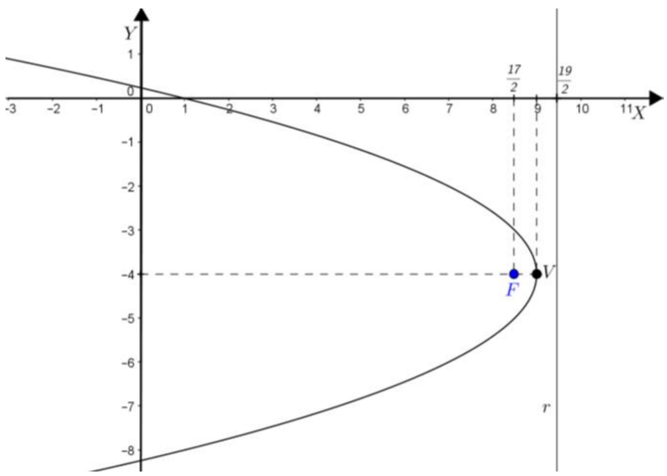

Figura 41: Exemplo b) – Parábola de vértice (9,-4), reta focal paralela a *OX* e foco à esquerda do vértice.

c) $4x^2 + 3y^2 - 24x + 54y + 231 = 0$

Solução:

Reorganizando e completando os quadrados, obtemos:

$$4(x^2 - 6x) + 3(y^2 + 18y) = -231$$

$$4(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 18y + 81) = -231 + 36 + 243$$

$$4(x-3)^2 + 3(y+9)^2 = 48$$

Dividindo por 48, temos:

$$\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(y+9)^2}{16} = 1$$

Que representa a equação da elipse de centro $(x_0, y_0) = (3, -9)$ e eixo focal paralelo a OY, onde $a^2 = 16 \rightarrow a = 4$, $b^2 = 12 \rightarrow b = 2\sqrt{3}$ e da relação $a^2 = b^2 + c^2$, temos que $c = 2$. Daí segue os demais elementos:

Focos: $F_1 = (x_0, y_0 - c) = (3, -11)$ e $F_2 = (x_0, y_0 + c) = (3, -7)$.

Reta Focal: $x = x_0 = 3$.

Reta não Focal: $y = y_0 = -9$.

Vértices sobre a reta focal: $A_1 = (x_0, y_0 - a) = (3, -13)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a) = (3, -5)$.

Vértices sobre a reta não focal: $B_1 = (x_0 - b, y_0) = \left(3 - 2\sqrt{3}, -9\right)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0) = (3 + 2\sqrt{3}, -9)$.

Excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

Esboço do gráfico:

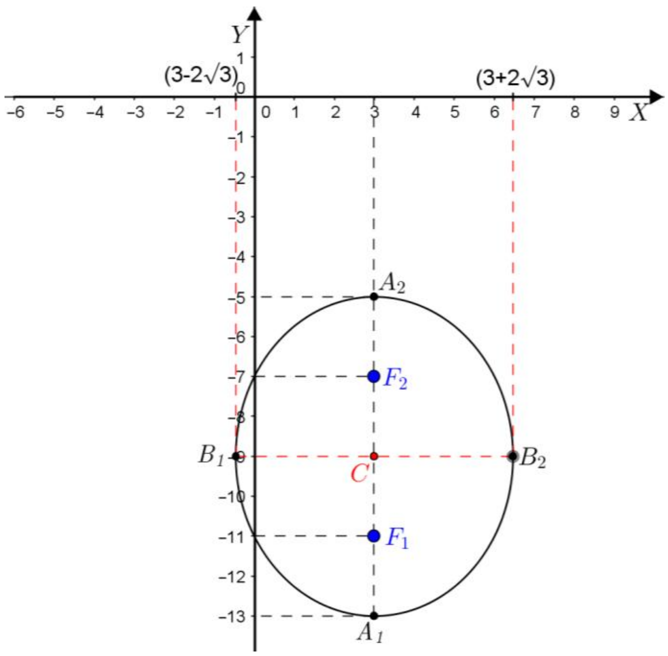

Figura 42: Exemplo c) - Elipse de centro (3,-9) e reta focal paralela a *OY*.

d) $4x^2 - 16y^2 + 24x - 96y - 108 = 0$

Solução:

Reorganizando e completando os quadrados, obtemos:

$$4(x^2 + 6x) - 16(y^2 + 6y) = 108$$

$$4(x^2 + 6x + 9) - 16(y^2 + 6y + 9) = 108 + 36 - 144$$

$$4(x + 3)^2 - 16(y + 3)^2 = 0$$

$$4(x + 3)^2 = 16(y + 3)^2$$

$$2(x + 3) = \pm 4(y + 3)$$

Que representa uma hipérbole degenerada, ou seja, um par de retas concorrentes, $y = \frac{x-3}{2}$ e $y = \frac{-x-9}{2}$, que se intersectam no ponto $(-3, -3)$. Observe também que $AC < 0$ e $-F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} = 0$.

Esboço do gráfico:

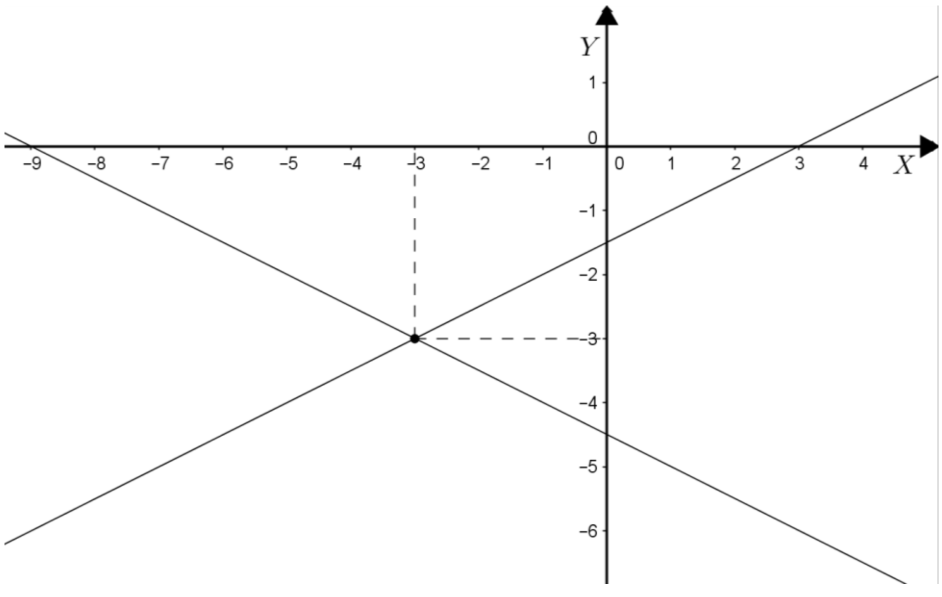

Figura 43: Exemplo d) - Hipérbole degenerada (par de retas concorrentes que se intersectam no ponto (-3,-3)).

2. GEOGEBRA

O GEOGEBRA é um software gratuito de matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo em um único ambiente. Desenvolvido por Markus Hohenwarter[18] e uma equipe internacional de programadores, o GEOGEBRA permite realizar construções geométricas a partir de uma série de comandos, que podem ser dados tanto no campo de *entrada* (localizado na parte inferior da tela inicial), através de equações, funções, pontos, retas, segmentos, vetores, secções cônicas e etc., como utilizando as diversas ferramentas disponíveis na parte superior da tela principal (ver figura 44).

No GEOGEBRA, as apresentações geométricas e algébricas podem ser visualizadas simultaneamente na tela principal, sendo que estão interligadas dinamicamente, ou seja, a cada modificação realizada pelo usuário em alguma das estruturas (algébrica ou geométrica) a outra se adapta automaticamente, independentemente da forma como elas foram inicialmente criadas (construídas).

2.1 - Download e Instalação do GEOGEBRA

Para fazer download e instalação do GEOGEBRA de forma segura, sigamos corretamente as instruções:

1- Acesse o site www.geogebra.com.org;
2- Clique na opção *Downloads*;
3- Em seguida selecione a opção de acordo com o sistema operacional do computador em uso (se o seu sistema for o Windows, clique em *Windows*);
4- Depois de concluído o Download, abra o arquivo com dois cliques;
5- Clique na opção SIM, caso seja perguntado se deseja permitir que o programa faça alterações no computador;
6- Selecione o idioma e clique na opção PRÓXIMO;
7- Leia os termos de contrato de licença e clique em EU CONCORDO;
8- Selecione a opção STANDARD e clique em INSTALAR;
9- Aguarde a instalação;

[18] Matemático austríaco, professor na Universidade Johannes Kepler (JKU) em Linz (Áustria) e presidente do Instituto de Educação Matemática.

10- Clique em TERMINAR;

11- Aparecerá a tela inicial do GEOGEBRA (figura 44).

Observação: Automaticamente o sistema realiza o Download da última versão do programa (GEOGEBRA 5.0).

Depois de instalado o GEOGEBRA, ao abrirmos o programa (com dois cliques), aparecerá a seguinte *tela inicial* (figura 44).

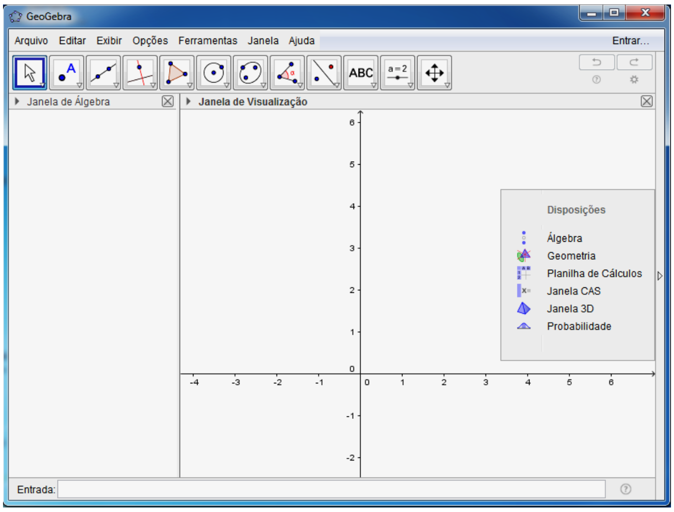

Figura 44: Tela inicial do GEOGEBRA

Observação: Para executar o programa GEOGEBRA (após ter instalado) é necessário que o computador tenha o programa *Java* (1.4.2 ou superior) que pode ser obtido gratuitamente no site: http://www.java.com/pt_BR.

2.2 - Elementos Básicos

Aqui faremos uma breve apresentação dos principais elementos que compõem o programa GEOGEBRA 5.0, sendo que faremos uma descrição mais detalhada apenas das ferramentas, ícones e estruturas que estão diretamente ligadas ao objetivo deste trabalho.

2.2.1 - Janela de Álgebra

Localizada na parte central esquerda, a *Janela de Álgebra* (figura 45) exibe as coordenadas, equações, medidas e outros atributos referentes aos objetos construídos, sendo possível também fazer modificações nas estruturas desses objetos.

Figura 45: Janela de Álgebra

2.2.2 - Janela de Visualização

A *Janela de Visualização* (figura 46) é a área em que os objetos são apresentados (ou representados) geométricamente, podendo serem desenhados com o auxilio dos ícones da *Barra de Ferramentas* (ver 2.2.5), com comandos digitados na caixa de *Entrada* (ver 2.2.3) ou até mesmo inseridos de outros documentos pela *Área de tranferência* (ver 2.2.5).

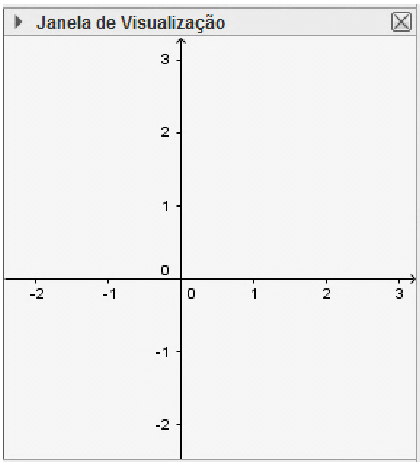

Figura 46: Janela de Visualização

2.2.3 - Entrada

No Campo de *Entrada* (figura 47) são digitados vários comandos que, ao tocar na tecla *Enter*, serão representados tanto na *Janela de Álgebra*, quanto na *Janela de Visualização.* Você também pode estar selecionando um comando na lista disponível no ícone *Ajuda*, situado ao lado direito do Campo de *Entrada*.

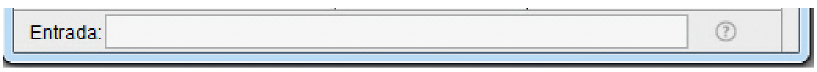

Figura 47: Campo de Entrada

2.2.4 - Barra de Menus

Situada na parte superior da *tela inicial*, a *Barra de Menus* (figura 48) é composta pelos ícones: *Arquivo, Editar, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda.*

Figura 48: Barra de Menus

2.2.4.1 - Arquivo

Ao clicar no Menu *Arquivo* (figura 49), o usuário terá como opção:

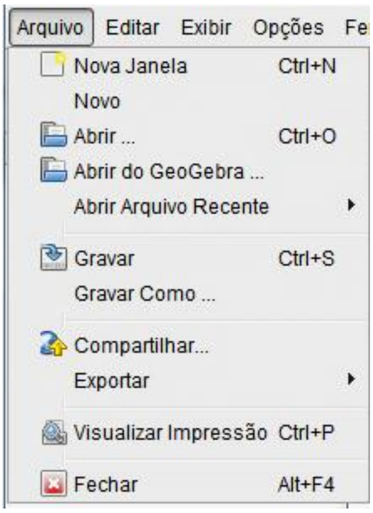

Figura 49: Menu Arquivo

 **Nova Janela (Ctrl+N)** - Abre uma nova tela (a cada clique) com as mesmas configurações da tela inicial, ficando ambas simultaneamente abertas;

Novo - Abre uma nova tela, sendo que a janela aberta anteriormente fecha-se automaticamente após optar por *gravar* ou *não gravar* o que estava sendo construído. Podendo ainda desistir de abrir uma nova janela optando por *cancelar*;

 **Abrir... (Ctrl+O)** - Abre um arquivo que está gravado no GEOGEBRA;

Abrir Arquivo Recente › - Abre um arquivo que foi recentemente fechado, dentre os últimos arquivos gravados;

 **Gravar (Ctrl+S)** - Ao clicar neste ícone, abrirá uma caixa de diálogo onde se deve colocar um nome para o arquivo construído ou modificado (neste último caso, o arquivo anterior é substituído pelo atual) e confirmar a gravação na opção *gravar*, ou até mesmo desistir de gravar na opção *cancelar*;

Gravar Como... - Diferencia-se do ícone anterior apenas pelo fato de que ao salvar um arquivo modificado, o arquivo anterior não é substituído, ou seja, passam a ter dois arquivos, sendo que para isto, é necessário colocar outro nome para este novo arquivo;

Compartilhar... - Permite que seja enviada a sua construção através da internet, sendo necessário para isto, abrir uma conta no site do GEOGEBRA;

Exportar › - Permite copiar e enviar suas construções em diversos formatos, podendo ser coladas em outros documentos;

Visualizar Impressão (Ctrl+P) - Permite que se tenha uma ideia de como ficará a impressão, tanto da *janela de álgebra* quanto da *janela de visualização* (ou ambas). Podendo ainda optar pelo tipo de impressão (*retrato* ou *paisagem*), *imprimir* e incluir *Título*, *Autor*, *Data* e *Escala*;

Fechar (Alt+F4) - Fecha o programa. Caso não tenha gravado a sua construção antes de clicar em *fechar*, abrirá uma caixa de diálogo perguntando se deseja *gravar* ou *não gravar* as modificações, podendo ainda desistir de fechar, clicando na opção *cancelar*.

Observação: O programa também pode ser fechado clicando no ícone, localizado no canto superior direito da tela principal (ver figura 44).

2.2.4.2 - Editar

Clicando no menu *editar* (figura 50), temos as seguintes opções:

Figura 50: Menu Editar

Desfazer (Ctrl+Z) - Desfaz os comandos dados (a partir do último comando). Este ícone também está disponível no canto superior direito da tela principal (ver figura 44).

Refazer (Ctrl+Y) - Refaz os comandos desfeitos (a partir do último comando). Este ícone também está disponível no canto superior direito da tela principal (ver figura 44).

Copiar (Ctrl+C) - Copia o objeto selecionado, para ser colado na *janela de visualização*.

Colar (Ctrl+V) - Cola o objeto copiado da *janela de visualização*.

Copiar para Área de Transferência (Ctrl+Shift+C) - Copia a construção feita na *janela de visualização* para a área de transferência, para que seja colada em outro documento do computador ou inserida na mesma janela ou em outra.

Inserir Imagem de › - Insere imagens de outros arquivos ou da *Área de Transferência*.

Propriedades... (Ctrl+E) - Permite fazer modificações das estruturas dos componentes, tanto das janelas (e/ou planilha) abertas, tais como: exibir ou ocultar *eixos*, *malhas* e *Plano de Fundo*; quanto dos objetos criados, como: inserir ou modificar *nomes*, *legendas*, *cores*, *unidades de medida*, *rastros*, *animação*, *estilos* e etc.. O usuário também pode ter acesso a estas opções na função *Redefinir*, (dando dois cliques no objeto ao qual pretende fazer as modificações), no ícone *Preferências* (localizado na tela principal, logo abaixo do ícone *desfazer* (ver figura 44)), em *Layout...* (no menu *Exibir* (ver 2.2.4.3)), em *Avançado* (no menu Opções (ver 2.2.4.4)) ou clicando com o botão direito do mouse na janela ou objeto desejado.

Selecionar Tudo (Ctrl+A) - Seleciona todos os objetos da *Janela de Visualização*.

2.2.4.3 - Exibir

Ao clicar no menu *Exibir* (figura 51), o usuário tem a opção de mostrar ou ocultar varias janelas disponíveis no programa, *Campo de Entrada*, bem como também outras ferramentas que podem lhe ajudar na construção e interpretação de dados referentes às estruturas algébricas e geométricas dos objetos.

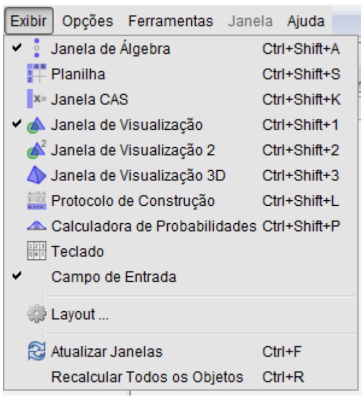

Figura 51: Menu Exibir

Janela de Álgebra (Ctrl+Shift+A) - Permite mostrar ou ocultar a *Janela de Visualização*.

Planilha (Ctrl+Shift+S) - Permite mostrar ou ocultar uma *Planilha* (constituída por células, linhas e colunas), onde em cada célula podem ser inseridos comandos que serão representados e exibidos nas *Janelas de Visualização*, de *Álgebra*, ou de *Protocolo de Construção* (sétimo ícone do menu *Exibir*), podendo ainda fazer cálculos e resolver equações.

Janela CAS (Ctrl+Shift+K) - Permite mostrar ou ocultar a *Janela CAS* (Sistema de álgebra computacional). Composta por células que possuem um campo de entrada no visor superior e de saída na parte inferior, ela conta ainda com uma Barra de Ferramentas exclusiva para ajudar nas operações de cálculos (numéricos e simbólicos), equações, sistemas e funções, que poderão ser representados e exibidos nas demais *janelas de Álgebra* e *de Visualização;*

Janela de Visualização (Ctrl+Shift+1) - Permite mostrar ou ocultar a *Janela de Visualização*.

Janela de Visualização 2 (Ctrl+Shift+2) - Permite mostrar ou ocultar uma segunda *Janela de Visualização* na mesma tela.

Janela de Visualização 3D (Ctrl+Shift+3) - Permite mostrar ou ocultar a *Janela de Visualização 3D*. Nela, você conta com uma Barra de Ferramentas exclusivas, onde pode construir figuras espaciais tridimensionais (podendo para isso também, usar o campo de *Entrada*).

Protocolo de Construção (Ctrl+Shift+L) - Permite mostrar ou ocultar uma tabela de *Protocolo de Construção*, que mostra ordenadamente todas as etapas de construção. Ela também conta com uma *Barra de Navegação*, onde se podem animar as apresentações das figuras por etapas de construção.

Calculadora de Probabilidades (Ctrl+Shift+P) - Exibe (em outra tela) uma *Calculadora de Probabilidades*, onde podem ser feitos uma série de cálculos estatísticos e representados graficamente em distribuições de probabilidade.

Teclado - Exibe (em outra tela) um *Teclado* virtual opcional, que contém alguns caracteres e símbolos matemáticos mais usuais.

Campo de Entrada - Permite mostrar ou ocultar o Campo de *Entrada*.

Layout... - Tem as mesmas funções do ícone *Configurações* do menu *Editar* (ver 2.2.4.2).

Atualizar Janelas (Ctrl+F) - Permite eliminar qualquer rastro deixado por pontos ou figuras, nas janelas de visualização.

Recalcular Todos os Objetos (Ctrl+R) - Permite recalcular todos os objetos usados em seu arquivo GEOGEBRA.

Observação: Todas as janelas, *planilha* ou *Protocolo de Construção* do menu *Exibir*, abertas na tela principal, podem ser ocultadas (fechadas) clicando no botão ☒, localizado ao lado direito do título (ver figuras 45 e 46).

2.2.4.4 - Opções

No menu *Opções* (figura 52), o usuário pode modificar (permanentemente ou não) algumas das configurações padrões do GEOGEBRA, tais como: *Arredondamento*, *Rótulo*, *Tamanho da fonte*, *Idioma* e outras (disponíveis ao clicar na opção *Avançado...*).

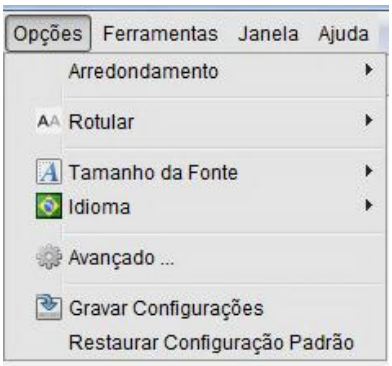

Figura 52: Menu Opções

2.2.4.5 - Ferramentas

No menu *Ferramentas* (figura 53), o usuário pode modificar algumas das configurações padrões da *Barra de Ferramentas* (figura 79), inserindo novas ferramentas, que podem ser sugeridas pelo programa ou criadas (tomando como base uma construção já existente), ou removendo as já existentes, bem como alterar nomes e ícones.

Figura 53: Menu Ferramentas

2.2.4.6 - Janela

No menu *Janela* (figura 54), o usuário tem como opção abrir uma nova janela (ver 2.2.4.1 -  *Nova Janela*), permitindo que se alterne entre elas;

Figura 54: Menu Janela

2.2.4.7 - Ajuda

O menu *Ajuda* (figura 55) traz uma série de informações sobre licença e de como operar o programa GEOGEBRA, disponibilizando *Tutoriais* e *Manual* (tecla de atalho - F1). Através dele o usuário pode estar participando de um Fórum (*Fórum do GeoGebra*), onde pode postar perguntas, respostas e comentários relacionados ao GEOGEBRA, como também relatar problemas que venham a ocorrer.

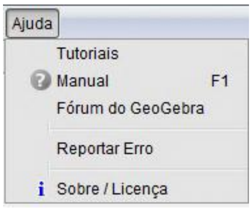

Figura 55: Menu Ajuda

Observação: Para que os quatro primeiros itens do menu *Ajuda* funcionem, é necessário que o usuário tenha acesso a internet.

2.2.5 - Barra de Ferramentas

Localizada na parte superior do GEOGEBRA, logo abaixo da *Barra de Menus*, a *Barra de Ferramentas* (figura 56) é composta por doze ícones, que servem com uma espécie de *caixa de ferramentas*, que contêm outras opções (ícones) com funções relacionadas com o desenho de cada ícone. Clicando na seta, que fica localizada na parte inferior direita do ícone, ele se expande, oferecendo assim uma variedade de opções que servirão como ferramentas para a construção (ou modificação) dos objetos na *Janela de visualização*.

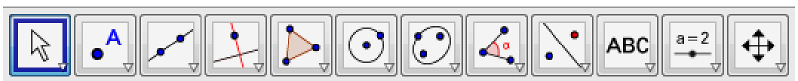

Figura 56: Barra de Ferramentas

Após escolhida uma das ferramentas, o ícone que ela representa ficará visível (substituindo o ícone anterior) na *Barra de Ferramentas*, ganhando destaque em contornos azuis (ver figura 56), indicando que a ferramenta está ativa. Dessa forma, clicando na *Janela de Visualização* ou digitando comandos (caso abra um campo de entrada) você constrói o objeto sugerido pela ferramenta.

Para obter informações sobre cada uma dessas ferramentas (de forma individual), estando ela ativa, basta clicar no ícone *Ajuda* localizado no canto superior direito da tela principal, logo abaixo do ícone *Desfazer* (ver figura 44).

No capítulo 3 faremos algumas construções utilizando varias dessas ferramentas, onde mostraremos na prática alguns dos passos descritos acima.

Agora apresentaremos as principais ferramentas (da esquerda para a direita), algumas de suas funções e suas classificações. Para fazer esta classificação, tomamos como referencial o texto *Interface e Ferramentas* (www.ogeogebra.com.br) e o *manual* do GEOGEBRA, disponível no menu *Ajuda* (figura 55).

2.2.5.1 - Ferramentas de Movimentação

Com estas ferramentas (figura 57), segurando o botão esquerdo do mouse, poderemos selecionar e mover objetos da *Janela de Visualização*, bem como mover os eixos das coordenadas e rotacionar objetos em torno de um ponto.

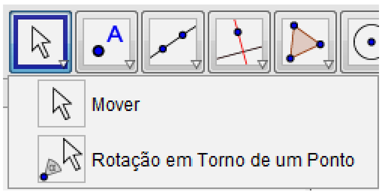

Figura 57: Ferramentas de Movimentação

2.2.5.2 - Ferramentas de Pontos

Estas ferramentas (figura 58) nos dão varias opções para inserir, e de como inserir pontos na *Janela de Visualização*. Selecionada a ferramenta *Extremum*, é possível localizarmos (caso exista) os pontos de máximos e mínimos locais de um gráfico qualquer da

Janela de Visualização, bastando para isto, um clique no gráfico desejado, podendo ainda determinar seus pontos de intersecção com o eixo *X*, optando pela ferramenta *Roots.*

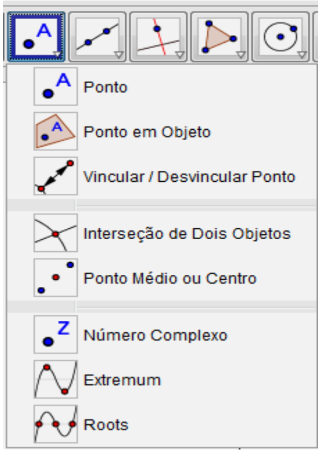

Figura 58: Ferramentas de Pontos

2.2.5.3 - Ferramentas de Linhas Retas

Com as *Ferramentas de Linhas Retas* (figura 59) podemos construir retas, segmentos, semirretas, vetores e caminhos poligonais (polígonos abertos) na *Janela de Visualização*.

Figura 59: Ferramentas de Linhas Retas

2.2.5.4 - Ferramentas de Retas Especiais e Lugar Geométrico

Estas ferramentas (figura 60) permitem ao usuário traçar reta *perpendicular, paralela, mediatriz, bissetriz, tangente, polar, diametral* e *de regressão linear*, bem como desenhar um *lugar geométrico* que pode ser descrito pela trajetória de dois pontos dependentes.

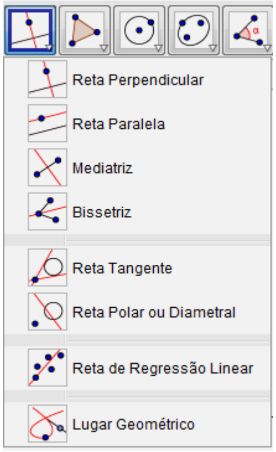

Figura 60: Ferramentas de Retas Especiais e lugar Geométrico

2.2.5.5 - Ferramentas de Polígonos

Estas ferramentas (figura 61) permitem ao usuário construir polígonos regulares ou não.

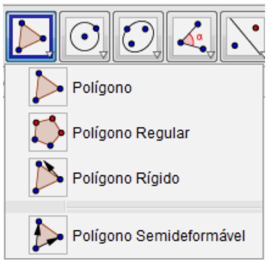

Figura 61: Ferramentas de Polígonos

2.2.5.6 - Ferramentas de Formas Circulares

As ferramentas de *Formas Circulares* (figura 62) permitem ao usuário construir círculos, semicírculos, arcos e setores.

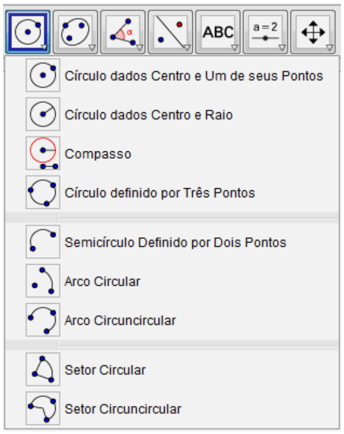

Figura 62: Ferramentas de Formas Circulares

2.2.5.7 - Ferramentas de Cônicas

Com essas ferramentas (figura 63) o usuário poderá construir as cônicas: Elipse, Hipérbole e Parábola.

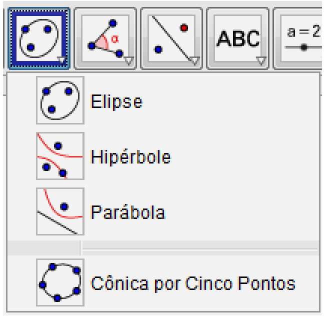

Figura 63: Ferramentas de Cônicas

2.2.5.8 - Ferramentas de Ângulos e Medidas

Com essas ferramentas (figura 64) o usuário poderá traçar ângulos, medir distâncias e comprimentos, calcular perímetros, áreas (de polígonos, círculos e elipses) e inclinação de retas. Com a ferramenta {1,2} *Lista*, ao clicar em um ponto qualquer, pertencente a um objeto da *Janela de Visualização*, aparecerá uma lista na *Janela de Álgebra*, relacionando todos os objetos aos qual este ponto esta vinculados diretamente, incluindo o próprio ponto (essa lista também pode ser criada arrastando e marcando um retângulo em torno dos objetos).

Figura 64: Ferramentas de Ângulos e Medidas

2.2.5.9 - Ferramentas de Transformações

As *Ferramentas de Transformações* (figura 65) permitem que se possam realizar reflexões, inversões (reflexão sobre um círculo), rotações, translações e cópias (ampliadas, reduzidas e invertidas) dos objetos.

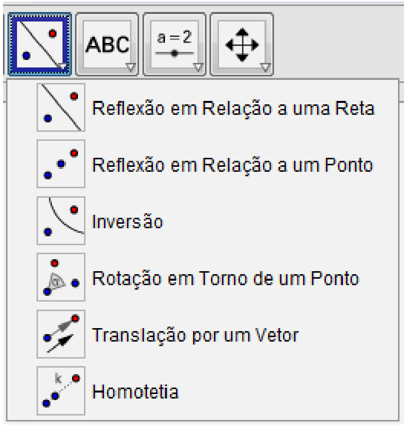

Figura 65: Ferramentas de Transformações

2.2.5.10 - Ferramentas Gráficas

Com as *Ferramentas Gráficas* (figura 66), o usuário poderá inserir em suas construções: textos, símbolos, caracteres especiais e figuras, podendo ainda escrever e desenhar funções e objetos geométricos, segurando e arrastando o mouse. Selecionando dois objetos e clicando na ferramenta  *Relação*, o programa nos mostrará qual é a relação existente entre eles, como por exemplo, se existem alguma relação de pertinência, perpendicularidade, paralelismo, tangência, igualdade e intersecção.

Nesse conjunto de ferramentas ainda temos o ícone  *Inspetor de funções*, que a partir de uma determinada função selecionada, podemos encontrar todas as suas propriedades, tais como: máximos e mínimos, raízes, derivada, integral e etc.

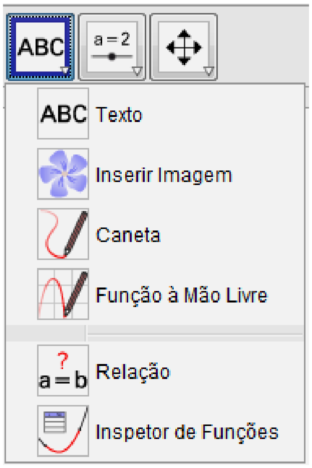

Figura 66: Ferramentas Gráficas

2.2.5.11 - Ferramentas de Controles

Com as *Ferramentas de Controles* (figura 67), o usuário poderá controlar movimentos, ordens de apresentação, exibição e ocultação de determinados objetos. Pode-se ainda inserir campos de entrada (vinculados a objetos) diretamente na *Janela de visualização.*

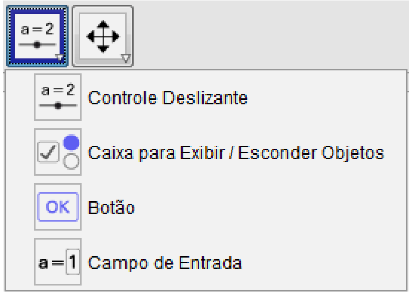

Figura 67: Ferramentas de Controles

2.2.5.12 - Ferramentas de Exibição

Com as *Ferramentas de Exibição* (figura 68), o usuário poderá mover, ampliar e reduzir a área de trabalho da *Janela de Visualização*, deslocar eixos, exibir e esconder objetos e rótulos, copiar estilo visual de um objeto e aplicar em outro, ou até mesmo apagar o objeto.

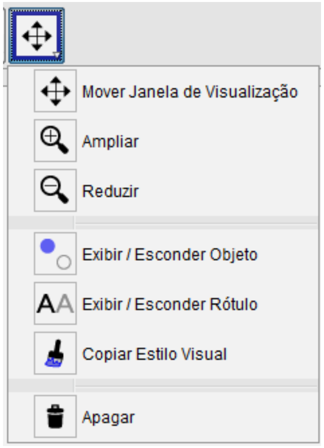

Figura 68: Ferramentas de Exibição

2.2.6 - Menu de Disposições

Clicando na seta localizada na barra direita da tela principal do GEOGEBRA, abrimos o *Menu de Disposições* (ver figura 69), que nos permite alternar de maneira fácil e rápida entre diferentes disposições de tela principal (ver 2.2.4.3).

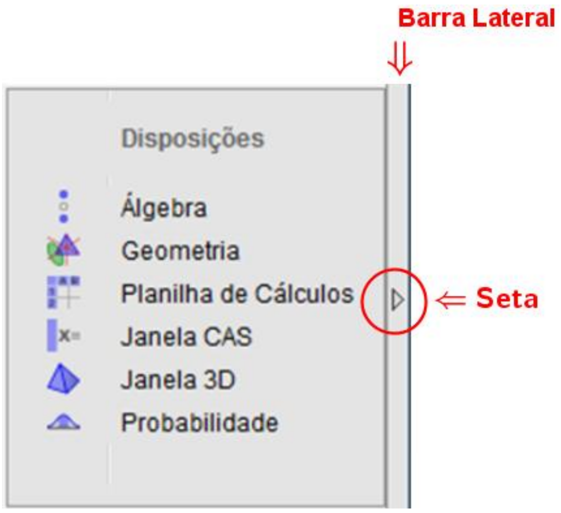

Figura 69: Menu de Disposições

Álgebra - Exibe a *Janela de Álgebra* e a *Janela de Visualização* com os eixos.

Geometria - Exibe a *Janela de Visualização* sem os eixos.

Planilha de Cálculos - Exibe uma *Planilha* e a *Janela de Visualização*.

Janela CAS - Exibe a *Janela CAS* e a *Janela de Visualização*.

Janela 3D - Exibe a *Janela de Álgebra* e a *Janela de Visualização 3D*.

Probabilidades - Exibe a *Calculadora de Probabilidades*.

3. PARAMETRIZAÇÃO DAS CÔNICAS

3.1 - Definição: Sendo $\mathcal{C}$ uma Cônica. A aplicação γ: $G \rightarrow R^2$, $\gamma = (x(t), y(t))$, é uma *Parametrização* de $\mathcal{C}$ se o conjunto imagem $\gamma(G)$ coincide com $\mathcal{C}$, ou seja,

$$\mathcal{C} = \gamma(G) = \{ (x(t), y(t)) \mid t \in G\},$$

onde G (geralmente é um intervalo ou uma reunião finita de intervalos) é um subconjunto de R (conjunto dos números reais).

Em outras palavras, parametrizar uma cônica significa achar equações que expressem os valores das coordenadas cartesianas x e y de um ponto qualquer da cônica em função de apenas uma variável, a variável t, denominada *parâmetro*.

A parametrização de uma cônica (ou uma curva plana qualquer) também pode ser vista como a trajetória de uma partícula móvel que se desloca em um intervalo de tempo. Neste caso, $\gamma = (x(t), y(t))$ nos daria, em coordenadas, a posição em que o móvel ocupa em cada instante t, bem como o sentido de percurso ou até mesmo a sua velocidade.

Na parametrização, o conjunto imagem $\gamma(G) \subset R^2$ é chamado de *Traço* de γ. A representação geométrica de $\gamma(G)$ no plano cartesiano não pode ser chamada de gráfico (como é definido em outras funções), pois, não há um terceiro eixo para t.

Veremos como determinar equações paramétricas para o circulo, elipse, hipérbole e parábola, usando por exemplo *razões trigonométricas*, e para cada parametrização, utilizando o software GEOGEBRA, faremos passo a passo a construção das respectivas figuras, mostrando assim de maneira bem prática, que tomando t num determinado intervalo, podemos descrever toda a cônica, bem como parte dela.

3.2 - Razões Trigonométricas

Dado um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, de lados a, b e c (figura 70), no qual:

- a é a *hipotenusa* (cateto oposto ao ângulo reto[19] $B\hat{A}C$);

[19] Ângulo que mede 90 graus (°).

- b é o *cateto oposto* ao ângulo $A\hat{B}C$ (e adjacente ao ângulo $A\hat{C}B$);
- c é o *cateto adjacente* ao ângulo $A\hat{B}C$ (e oposto ao ângulo $A\hat{C}B$).

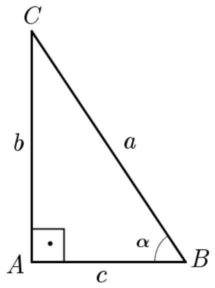

Figura 70: Triângulo retângulo ABC

Seja α a medida do ângulo $A\hat{B}C$, onde $0° < \alpha < 90°$, podemos identificar seis possíveis razões entre os lados a, b e c, que são assim denominadas:

***Seno de α* -** É a razão entre o *cateto oposto* (ao ângulo α) e a *hipotenusa*;

***Cosseno de α* -** É a razão entre o *cateto adjacente* (ao ângulo α) e a *hipotenusa*;

***Tangente de α* -** É a razão entre o *cateto oposto* (ao ângulo α) e o *cateto adjacente* (ao ângulo α);

***Cossecante de α* -** É a razão inversa de *seno de α*, ou seja, é a razão entre a *hipotenusa* e o *cateto oposto*;

Secante de α - É a razão inversa de *cosseno de α*, ou seja, é a razão entre a *hipotenusa* e o *cateto adjacente*;

***Cotangente de α* -** É a razão inversa de *tangente de α*, ou seja, é a razão entre *cateto adjacente* e o *cateto oposto*.

Tomando como base o triângulo *ABC* (figura 70) e fazendo abreviações, temos que:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha} = \frac{cat.\ op.}{hip.} = \frac{b}{a} \qquad \textbf{(I)}$$

$$\boldsymbol{cos\ \alpha} = \frac{cat.\ adj.}{hip.} = \frac{c}{a} \qquad \textbf{(II)}$$

$$\textbf{tg}\ \boldsymbol{\alpha} = \frac{cat.\ op.}{cat.\ adj.} = \frac{b}{c} \qquad \textbf{(III)}$$

$$\boldsymbol{cossec\ \alpha} = \frac{1}{sen\ \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\boldsymbol{sec\ \alpha} = \frac{1}{cos\ \alpha} = \frac{a}{c}$$

$$\boldsymbol{cotg\ \alpha} = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{c}{b}$$

De **(I)** e **(II),** temos respectivamente que:

$$b = a\, sen\, \alpha \quad \text{e} \quad c = a\, cos\, \alpha \qquad \textbf{(IV)}$$

Substituindo **(IV)** em **(III)**, obtemos que:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{a\ sen\ \alpha}{a\ cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no mesmo triângulo *ABC*, temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \textbf{(V)}$$

Substituindo **(IV)** em **(V)**, obtemos:

$$a^2 = (a\ sen\ \alpha)^2 + (a\ cos\ \alpha)^2 = a^2\ sen^2\alpha + a^2 cos^2\alpha = a^2(sen^2\alpha + cos^2\alpha)$$

Logo, $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (*Relação Fundamental da Trigonometria).*

A seguir, baseado na apostila "Geometria Analítica II: Aula I – Equações Paramétricas das Cônicas" (Disponível em pdf no site: http://www.professores.uff.br/katia_frensel/aulasga2 /ga2-aula1.pdf), dos autores Jorge J. Delgado Gómez e Kátia Rosenvald Frensel (2008), com algumas adaptações, determinaremos as equações paramétricas das cônicas. Em seguida descreveremos as construções das figuras, mensionadas anteriormente.

3.3 - Parametrização do Círculo

Seja $\boldsymbol{C}: x^2 + y^2 = r^2$ o círculo de centro na origem do sistema e raio $r > 0$. (figura 71)

Seja t a medida, em radianos[20], do ângulo formado pelo semieixo positivo *OX* e o segmento *OP* de comprimento r, tomado no sentido anti-horário, onde *O* é o centro do círculo e $P = (x, y)$ um ponto qualquer pertencente (∈) a $\boldsymbol{C}$. (figura 71).

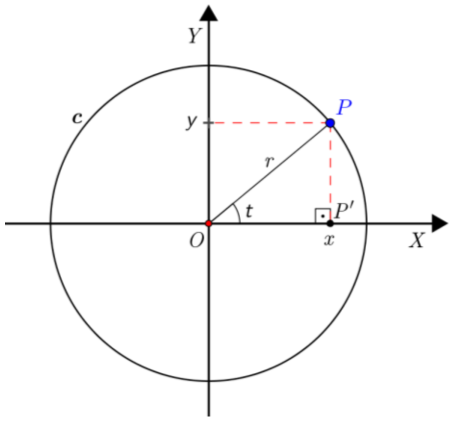

Figura 71: Círculo $\boldsymbol{C}: \boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$

[20] Radianos é a unidade padrão de medida angular, obtida pela razão entre o comprimento de um arco e o seu raio, que pode variar de 0 a 2π. Isto significa que uma volta completa num círculo corresponde a $2\pi\ rad$, onde rad é a representação simbólica de radianos.

Considerando o ponto $P' = (x, 0)$, obtemos o triângulo *OPP'* (figura 71), retângulo em *P'*, de lados r, x e y, no qual:

- r é a *hipotenusa*;
- y é o *cateto oposto* ao ângulo t;
- x é o *cateto adjacente* ao ângulo t.

Do triângulo *OPP'*, em relação ao ângulo t, temos as seguintes razões trigonométricas:

$$sen\ t = \frac{cat.\ op.}{hip.} = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\ sen\ t$$

$$cos\ t = \frac{cat.\ adj.}{hip.} = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\ cos\ t$$

Portanto, as expressões das coordenadas x e y, em função do parâmetro t, são:

$$x = r\cos t \qquad \text{e} \qquad y = r\ sen\ t.$$

Fazendo t percorrer os valores do intervalo $[0, 2\pi)$ [21], obtemos todos os pontos do círculo.

Se quisermos, podemos considerar t percorrendo também todos os valores reais. Isto implica realizar um número infinito de voltas sobre o círculo. Portanto, uma parametrização para o círculo $\boldsymbol{C}$ é:

$$\boldsymbol{C}: \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\ sen\ t \end{cases} \quad ; \quad t \in R.$$

Que também pode ser expressa da forma

$$\boldsymbol{C}(t) = (r\cos t, r\ sen\ t) \quad ; t \in R.$$

Observe que, para quaisquer valores reais a e b, com $a \neq 0$, as equações

$$x = r\cos(at + b) \qquad \text{e} \qquad y = r\ sen(at + b),$$

também são equações paramétricas para o círculo $\boldsymbol{C}$, pois:

$$x^2 + y^2 = r^2cos^2(at + b) + r^2sen^2(at + b) = r^2 \underbrace{[cos^2(at + b) + sen^2(at + b)]}_{\substack{=\mathbf{1} \\ (Relação\ Fund.da\ Trigonometria)}} = r^2;$$

para todo $t \in R$, e conforme t percorre todos os valores do intervalos $\left[-\frac{b}{a}, \frac{2\pi - b}{a}\right)$, o ponto $P = (r\cos(at + b),\ r\ sen(at + b))$ percorre todos os pontos do círculo.

[21] Intervalo $[0, 2\pi)$ corresponde ao intervalo de $[0°, 360°)$, ou seja, $\pi = 180°$. Em valores reais, o Intervalo $[0, 2\pi)$ corresponde ao intervalo de $[0,\ 6{,}28\ rad)$ aproximadamente, pois π vale aproximadamente 3,14.

Seja agora $\boldsymbol{C}$: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ o círculo de centro (x_0, y_0) e raio $r > 0$.

Por meio de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, cuja origem $\bar{O} = (x_0, y_0)$ é o centro do círculo. Daí, a equação canônica (ou reduzida) do círculo referente ao novo sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, é $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2$.

Sendo $\bar{x} = r\cos t$ e $\bar{y} = r\,sen\,t$, $t \in R$, equações paramétricas para $\boldsymbol{C}$ nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$. Da relação de translação das coordenadas dos sistemas OXY e $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ (ver 1.2.5): $\begin{cases} x = \bar{x} + x_0 \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases}$, temos que

$$\boldsymbol{C}: \begin{cases} x = r\cos t + x_0 \\ y = r\,sen\,t + y_0 \end{cases}; \qquad t \in R,$$

São equações paramétricas para $\boldsymbol{C}$ nas coordenadas x e y.

Exemplo:

Encontre equações paramétricas para o círculo $\boldsymbol{C}$: $x^2 + y^2 - 16x + 10y + 8 = 0$

Solução:

Completando os quadrados, obtemos:

$$(x - 8)^2 + (y + 5)^2 = -8 + 64 + 25 = 81 = 9^2$$

Onde $x_0 = 8$, $y_0 = -5$ e $r = 9$. Substituindo na equação acima, temos que:

$$\boldsymbol{C}: \begin{cases} x = 9\cos t + 8 \\ y = 9\,sen\,t - 5 \end{cases} \qquad ; t \in R,$$

É uma parametrização do círculo $\boldsymbol{C}$.

3.3.1 - Parametrizando o Círculo $\boldsymbol{C}$: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$ com o Software GEOGEBRA

Agora, apresentaremos um roteiro, que sugere uma maneira para a construção do círculo $\boldsymbol{C}$: $x^2 + y^2 = r^2$ de centro na origem do sistema, de tal forma que possamos mostrar a relação (descrita anteriormente) entre o ponto *P* e o ângulo *t* (figura 71), através do programa GEOGEBRA.

Roteiro de Construção (se preferir clique aqui para assistir o vídeo)

1° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Formas Circulares*, selecione a ferramenta  *Círculo dados Centro e um de seus Pontos* e construa um círculo (c), clicando na origem do sistema e na coordenada $x = 3$ (por exemplo). (figura 72).

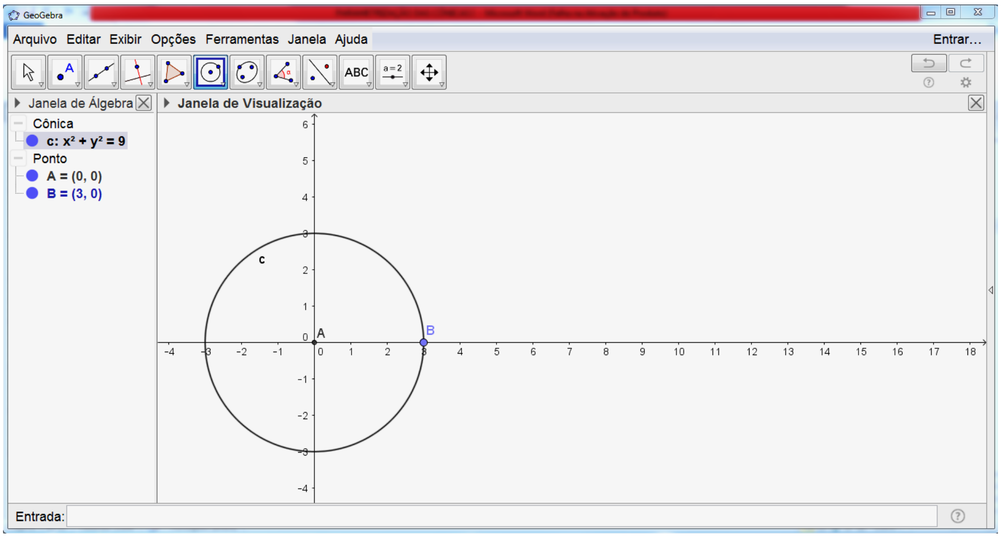

Figura 72

2° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Controles*, selecione a ferramenta  *Controle Deslizante*, clique na área em branco da *Janela de Visualização*, selecione a opção *ângulo* e *Ok* (figura 73). Aparecerá um segmento com o ponto $\alpha = 45°$ sobre ele, chamado de "controle deslizante" (figura 74).

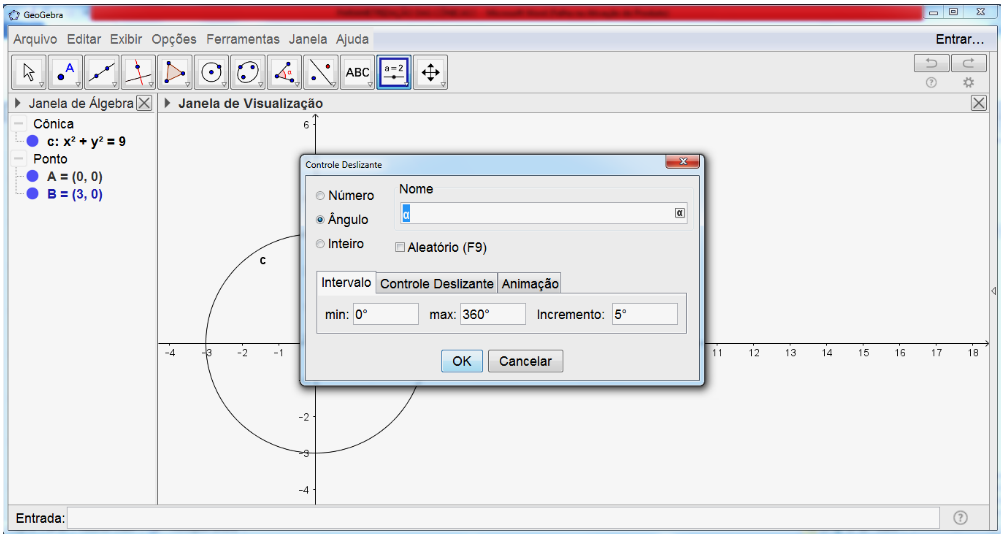

Figura 73

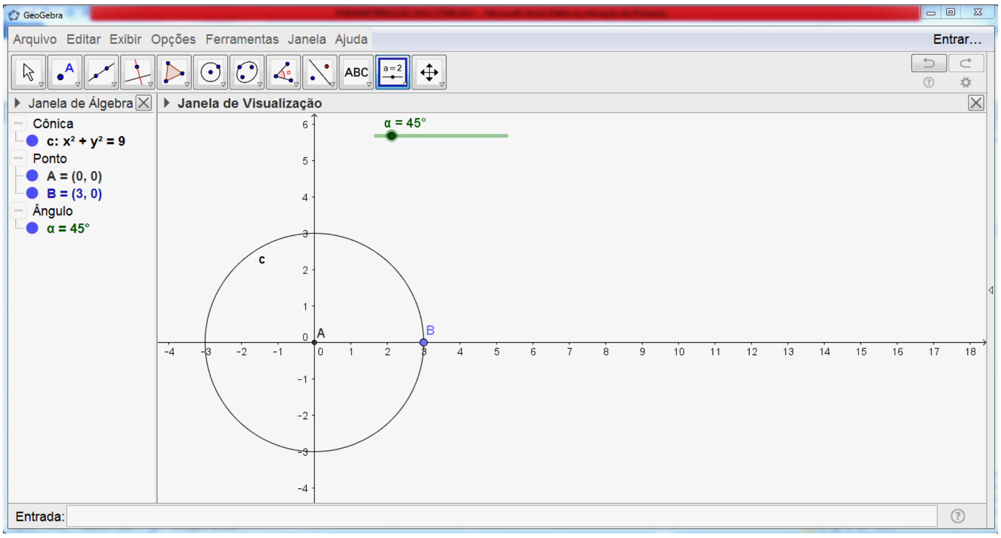

Figura 74

3° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Ângulos e Medidas*, selecione a ferramenta  *Ângulo com Amplitude Fixa* e clique nos pontos B e A, respectivamente. Em seguida, substitua *45°* por *α* (com a opção *Sentido Anti-horário* selecionado) e clique em *Ok* (ver figura 75).

Note que aparecerá o ângulo *β* (BÂB’) com a mesma medida de *α* (figura 76).

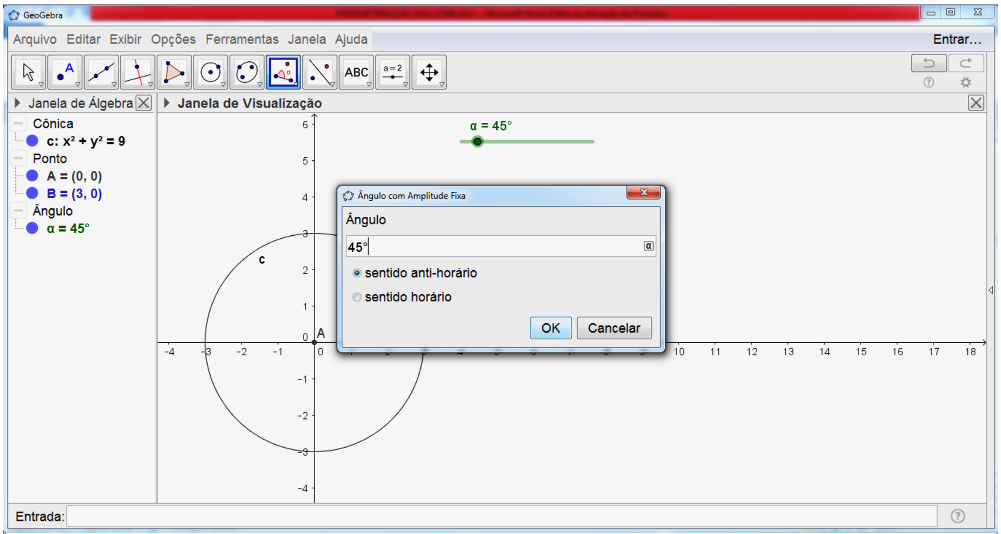

Figura 75

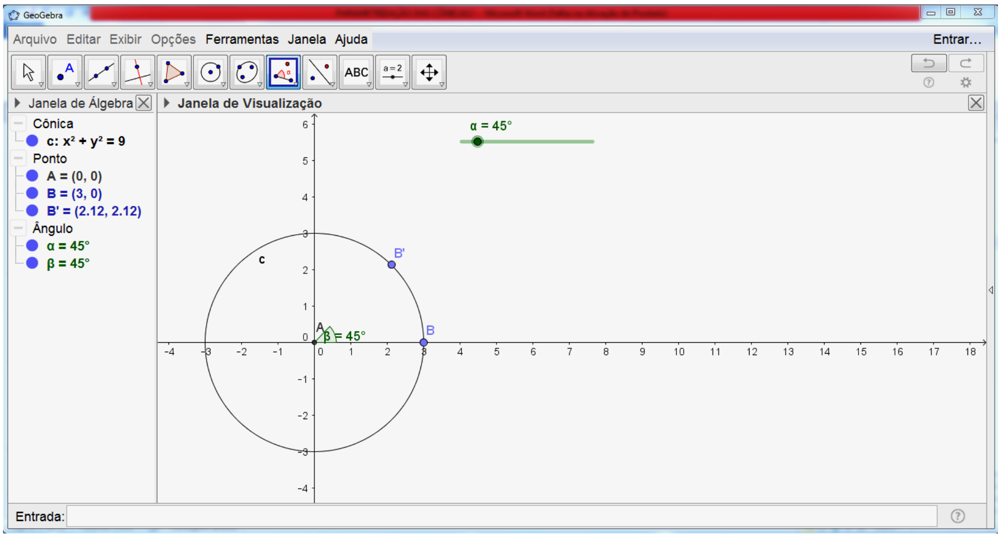

Figura 76

4° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Retas Especiais e Lugar geométrico*, selecione a ferramenta  *Reta Perpendicular* e clique no ponto B' e no eixo *OX*. Em seguida clique novamente no ponto B' e no eixo *OY* (ou vice-versa), criando assim, as retas f e g, respectivamente. (figura 77).

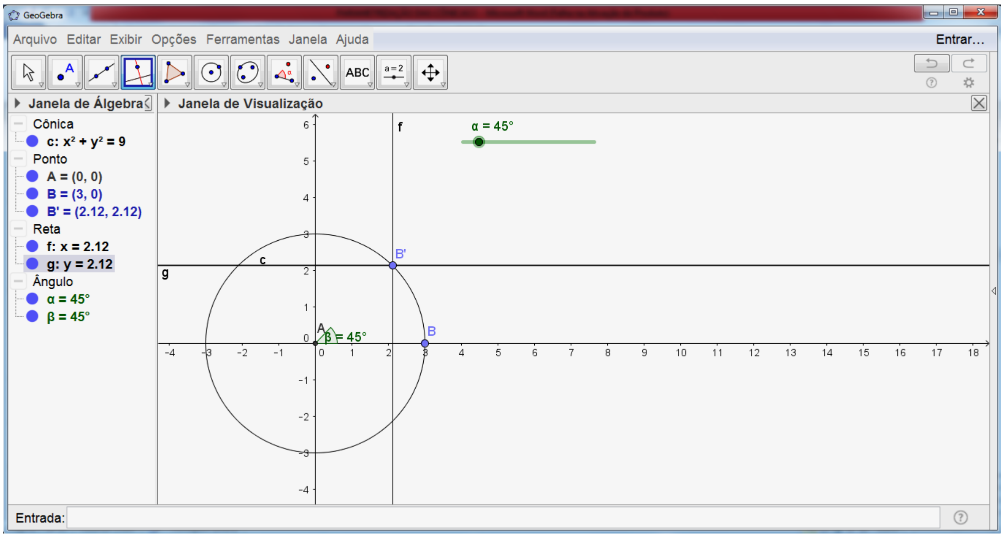

Figura 77

5° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Linhas Retas*, selecione a ferramenta  *Segmento* e construa o segmento AB' (h), clicando sucessivamente nos pontos A e B' (ou vice-versa). (figura 78).

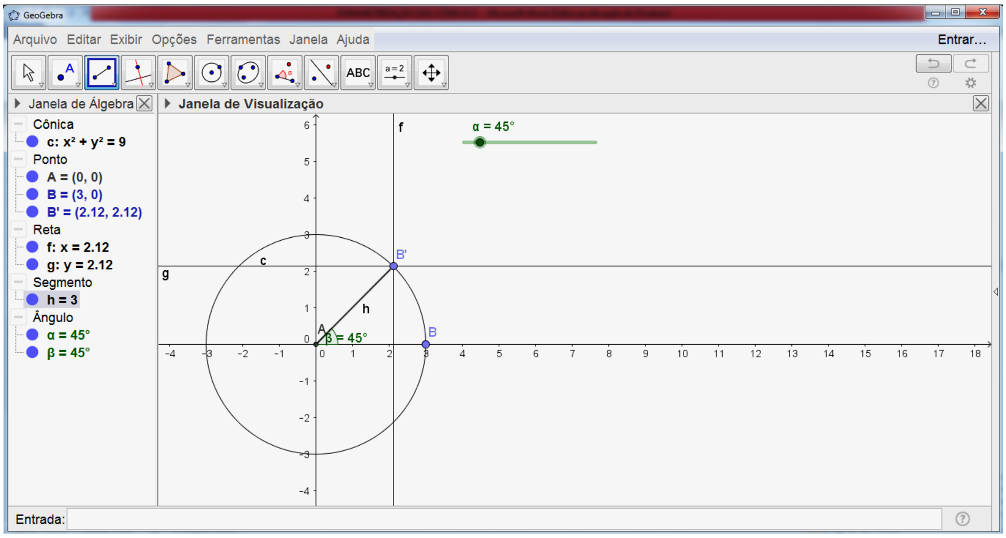

Figura 78

6° **Passo:** Ainda com a ferramenta *Segmento* ativa, clique no ponto B' e na interseção da reta f com o eixo *OX*. Logo em seguida clique novamente em B' e na interseção da reta g com o eixo *OY* (ou vice-versa), criando assim os segmentos B'C (i) e B'D (j), respectivamente. (figura 79).

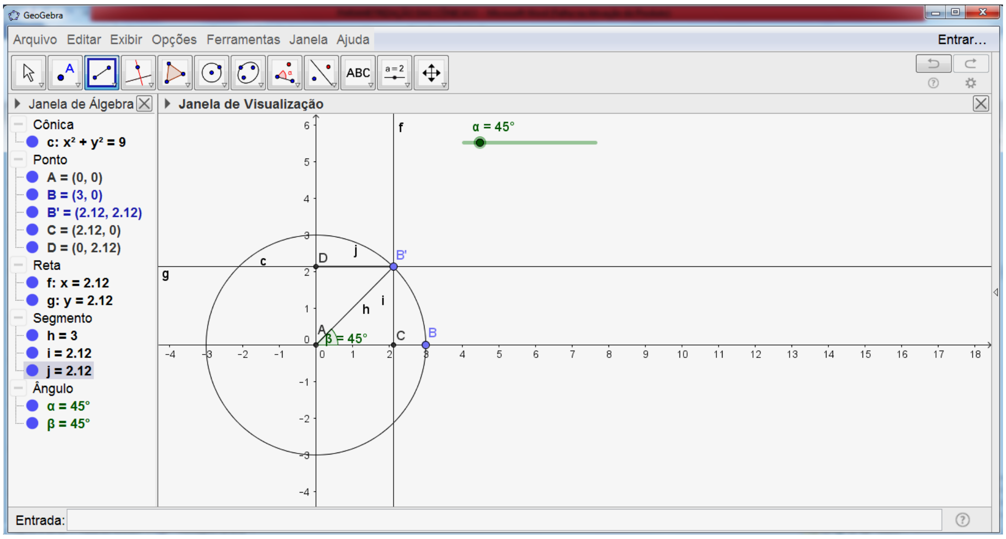

Figura 79

7° **Passo:** Com o botão direito do mouse, clique na reta g (por exemplo), que abrirá uma caixa de opções, onde, clicando em *Propriedades* (figura 80), aparecerá a Janela de *Preferências* (figura 81), que nos permitirá, nos próximos passos, fazermos algumas modificações em nossa figura.

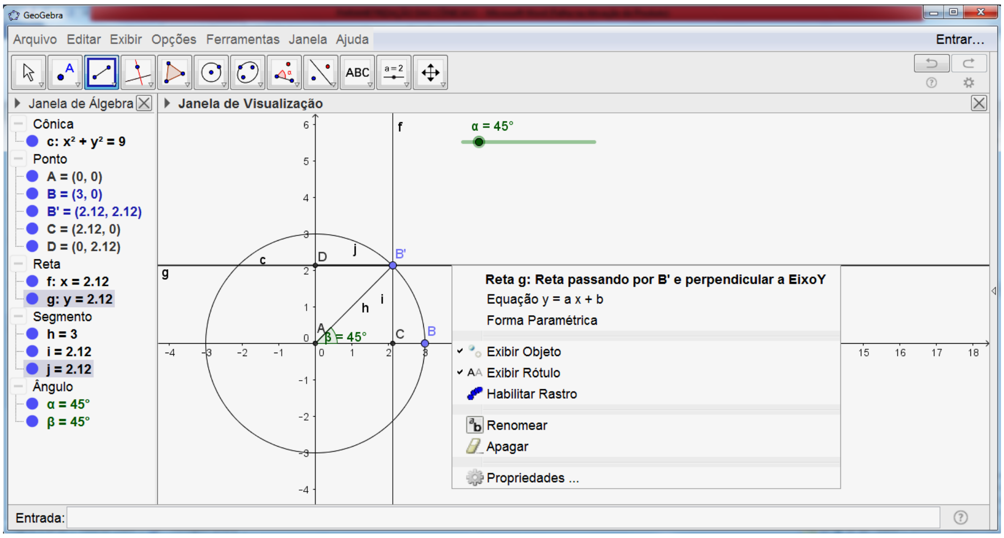

Figura 80

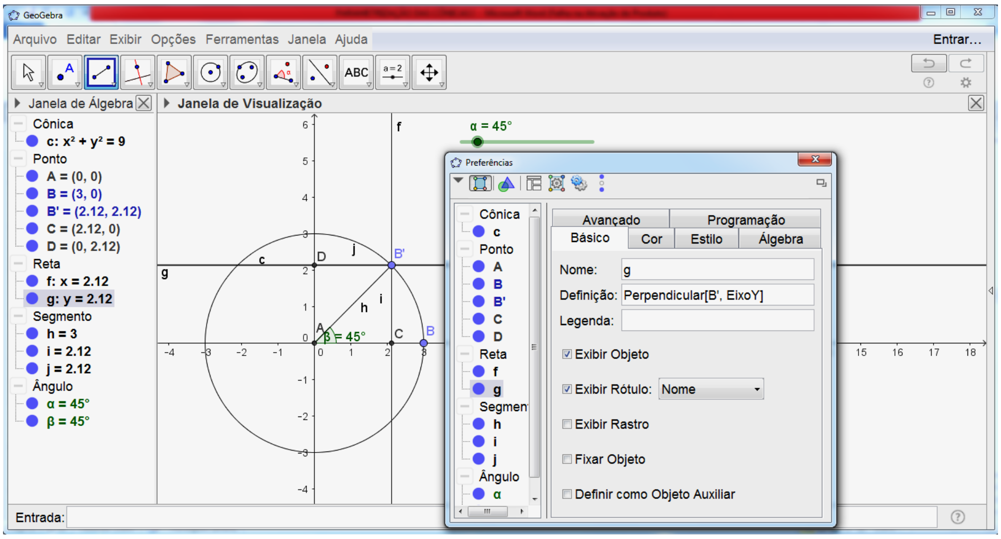

Figura 81

Observe que dentro da Janela de *Preferências* (figura 81), também existe uma *Janela de Álgebra*. Então, nos passos seguintes, quando nos referirmos à *Janela de Álgebra*, o usuário pode optar por uma das duas.

8° Passo: Desmarque a opção *Exibir Objeto*, para ocultar a reta g, que já se encontra destacada (sombreada) na *Janela de Álgebra* (figura 81). Em seguida, selecione a reta f e o ponto B e faça o mesmo procedimento, ocultando assim as duas retas e o ponto B. (ver figura 82).

Observe que os pontos que antes estavam azuis, agora ficaram em branco.

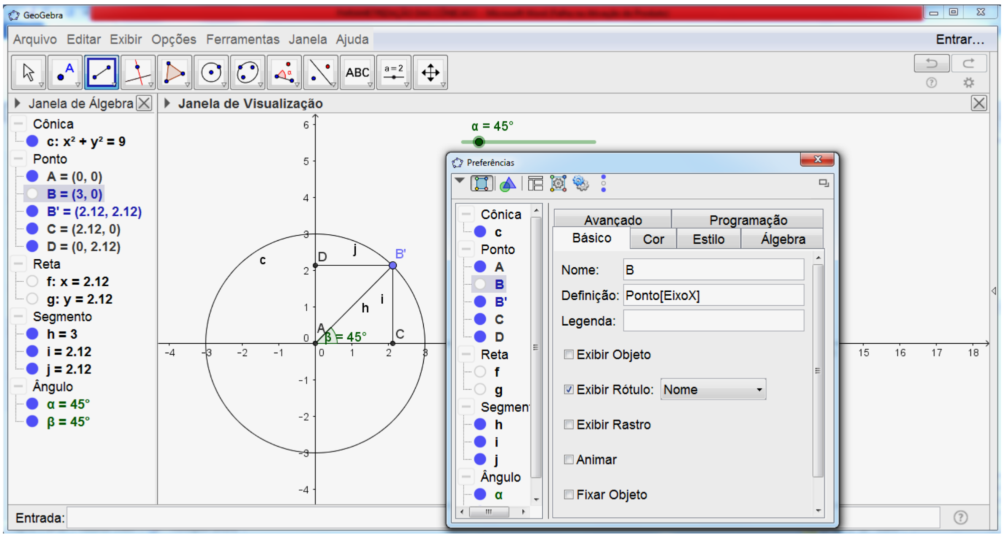

Figura 82

9° Passo: Selecione (clicando na letra e não no ponto azul) os segmentos h, i e j, um de cada vez ou se preferir selecione todos de uma só vez clicando na palavra *segmento* (na *Janela de Álgebra*) e desmarque a opção *Exibir Rótulo*, ocultando assim os respectivos rótulos. (ver figura 83).

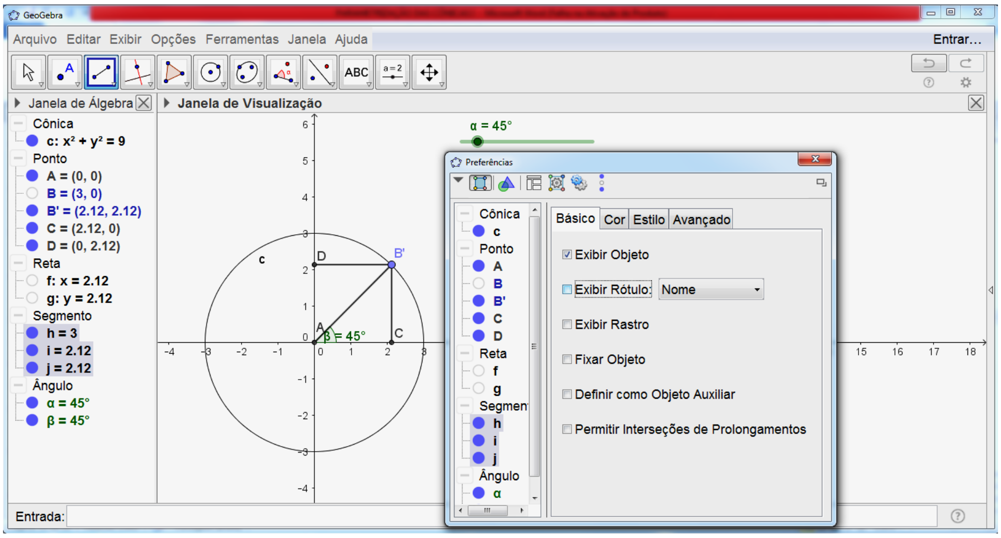

Figura 83

10° Passo: Selecione os segmentos i e j (um de cada vez). Na opção *cor* (figura 84), escolha o *vermelho* e na opção *estilo* (figura 85) escolha *pontilhado* (por exemplo).

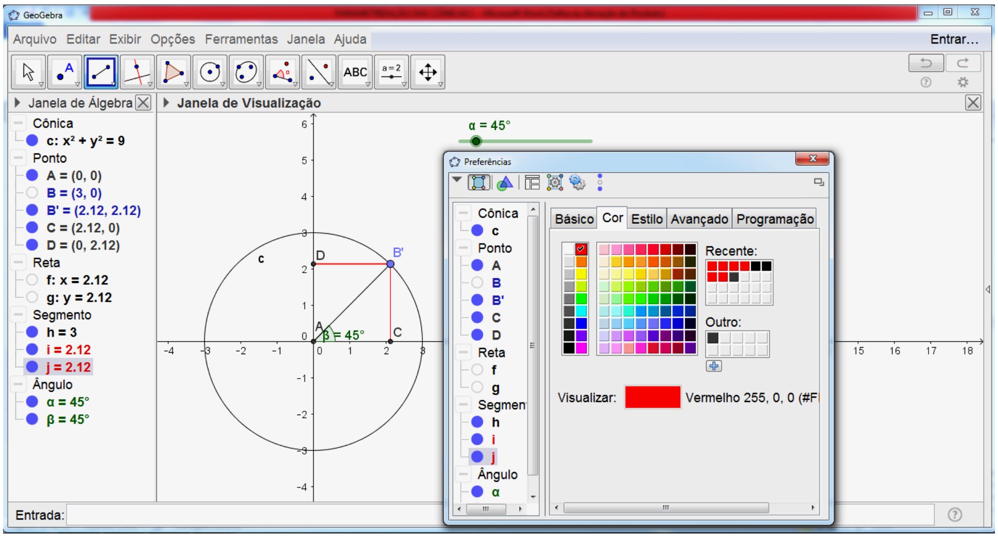

Figura 84

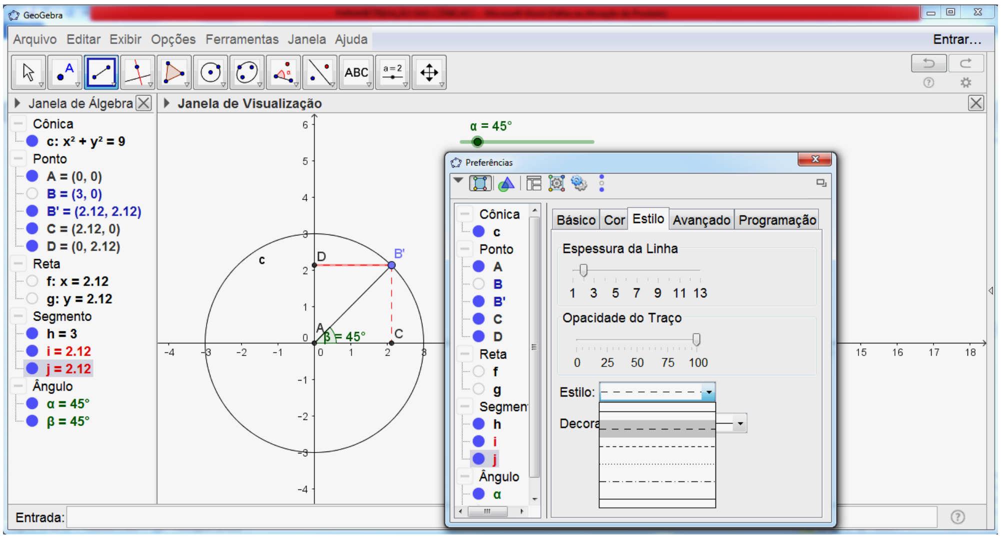

Figura 85

11° Passo: Selecione os pontos A, B', C e D (um de cada vez) e em *Básico*, na opção *Nome*, substitua os nomes atuais por O, P, X e Y, respectivamente, apertando sempre a tecla *Enter* (do teclado), após digitar cada letra. Da mesma forma, selecione os ângulos β e α, e substitua por t e t', respectivamente (de acordo com nosso contexto). (figura 86).

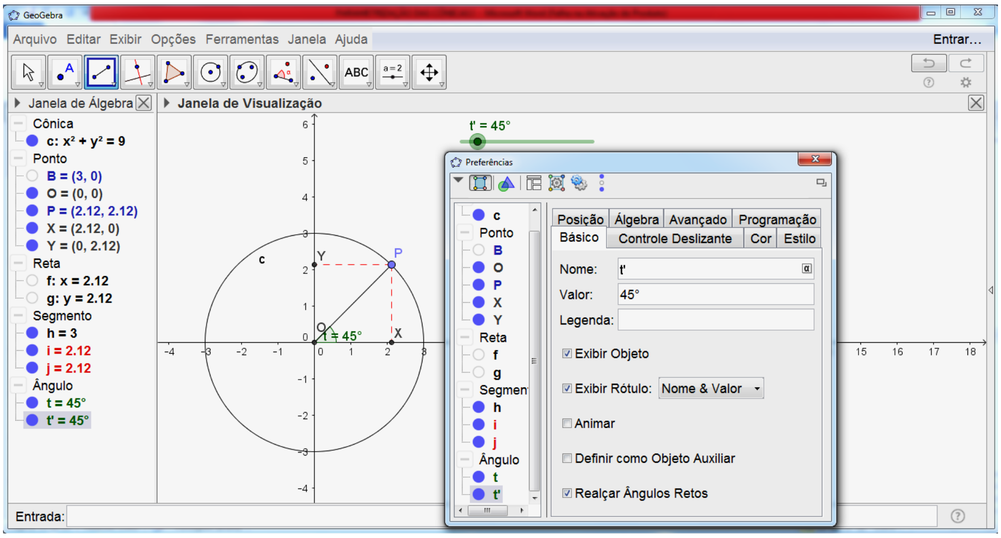

Figura 86

12° Passo: Ainda na Janela de *Preferências*, clique no menu *Preferências - Janela de Visualização*, e em *Eixo X* e *Eixo Y*, desmarque a opção *Exibir Números*, ocultando assim os números das coordenadas dos eixos *X* e *Y*. (figura 87).

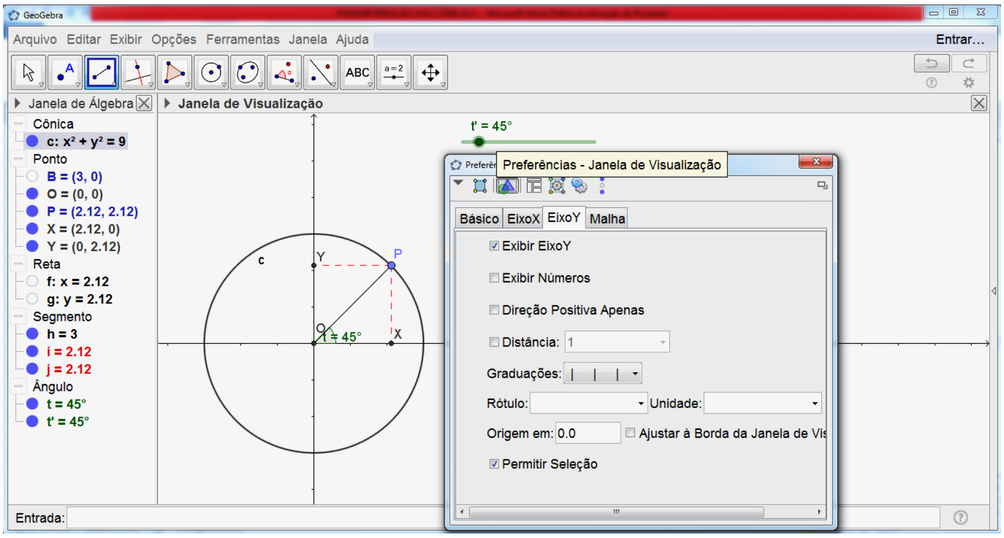

Figura 87

13° Passo: Para mudar a unidade de medida do ângulo que está em graus, para radianos, basta selecionar a ferramenta *Preferências - Avançado* e clicar na opção *radianos* (figura 88). Em seguida feche a Janela de *Preferências*.

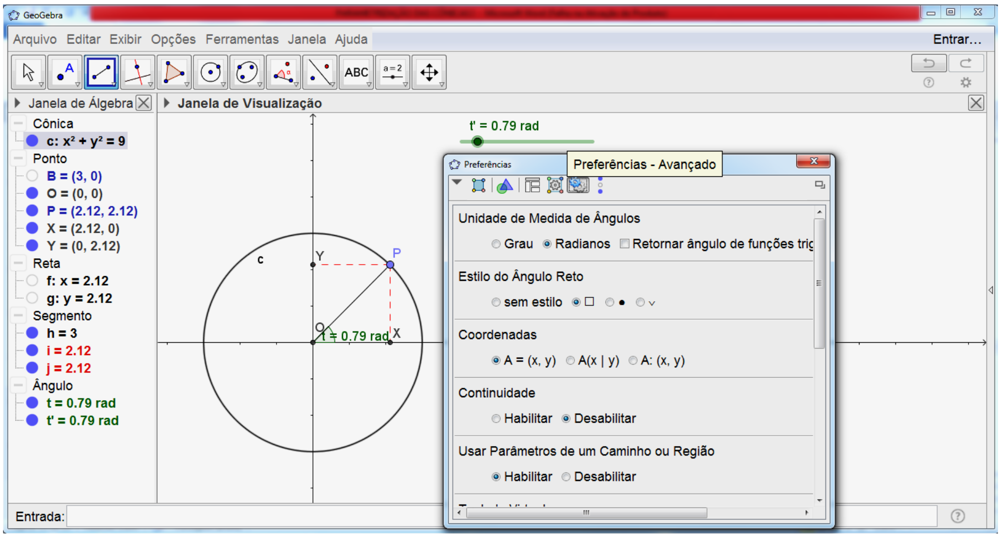

Figura 88

14° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Movimentação*, selecione a ferramenta  *Mover*, em seguida, segurando o botão esquerdo do mouse, arraste os rótulos (c, t, O, P, X e Y) e posicione-os da maneira que achar mais adequado. (ver figura 89).

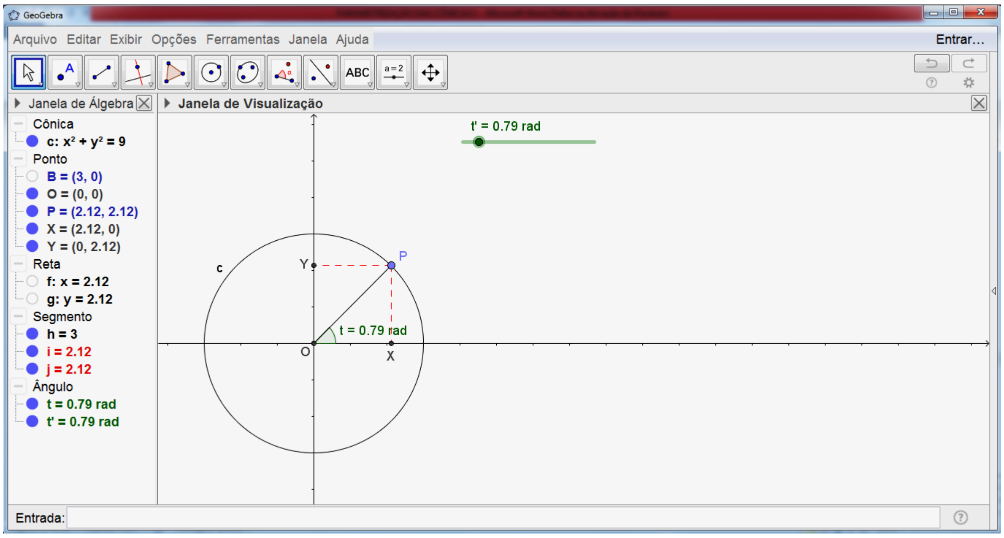

Figura 89

15° Passo: Com o botão direito do mouse, clique em *Ângulo* t' (na *Janela de Álgebra* ou no *Controle Deslizante*) e marque a opção *Animar* (ver figura 90). Observe que, na medida em que t percorre os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, o ponto P percorre todo o círculo.

Para parar a animação, proceda da mesma maneira e desmarque a opção *Animar*, ou se preferir clique no botão  *Pausa*, localizado no canto inferior esquerdo da *Janela de Visualização* (ver figura 91).

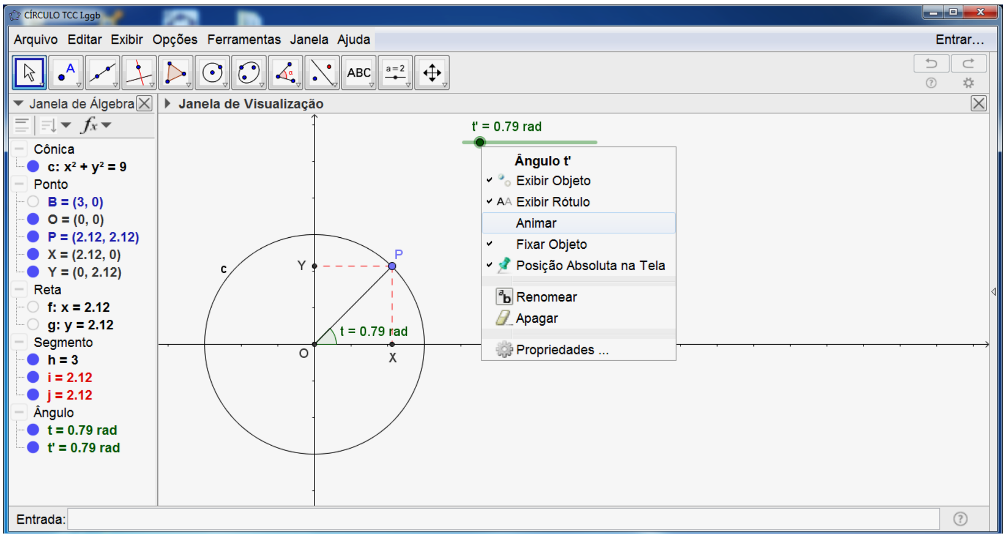

Figura 90

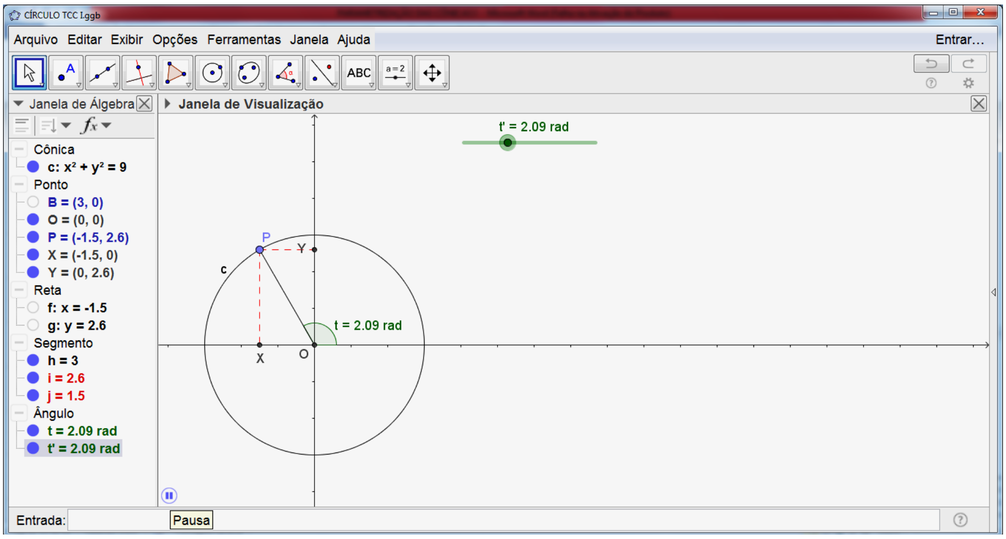

Figura 91

Esse movimento de animação também pode ser realizado manualmente, segurando o botão esquerdo do mouse e arrastando t', no *Controle Deslizante*.

Se preferir modificar o intervalo, velocidade ou tipo de movimento da animação (por exemplo), clique com o botão direito do mouse no *Ângulo* t', selecione a ferramenta  *Propriedades* e em *Controle Deslizante* faça as modificações desejadas. (figura 92).

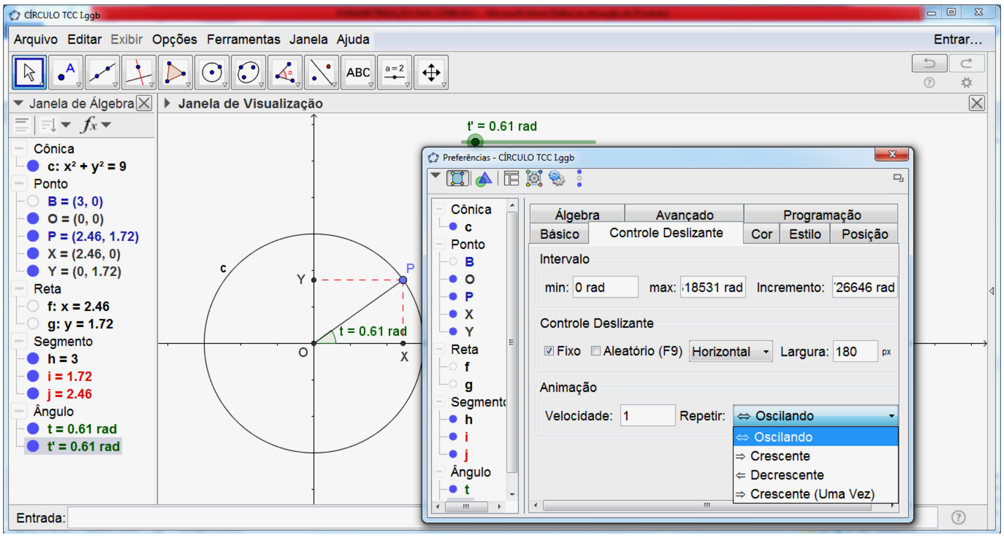

Figura 92

16° Passo: Na *Janela de Álgebra*, clique na bolinha azul correspondente a *Cônica* c, para ocultar o círculo. (figura 93).

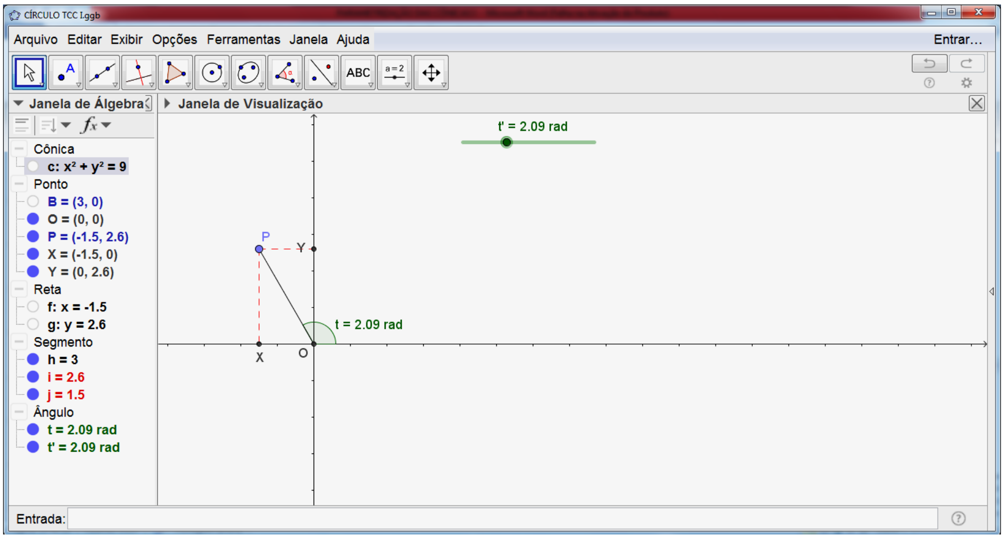

Figura 93

17° Passo: Com o botão direito do mouse, clique no ponto P e marque a opção  *Habilitar Rastro*. (figura 94).

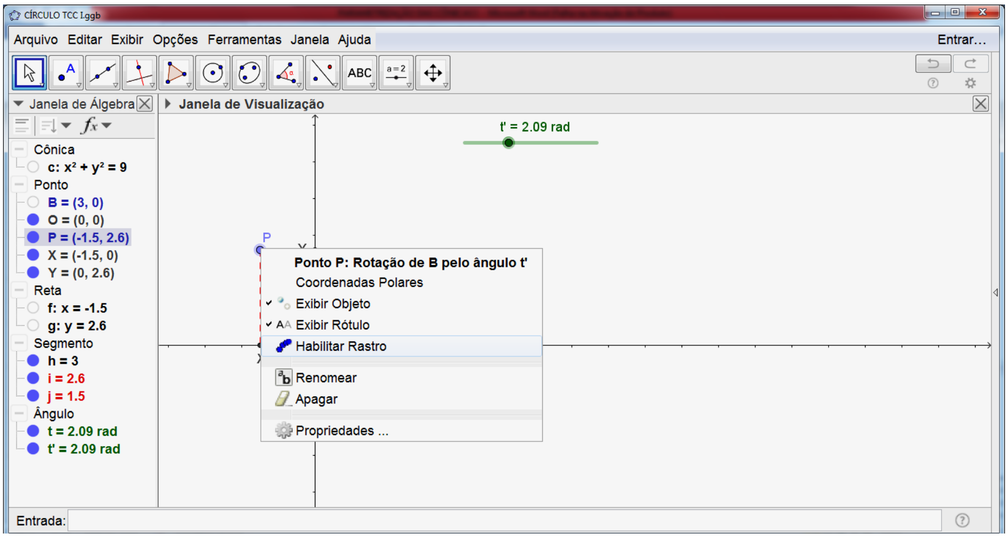

Figura 94

18° Passo: Repita o 15° Passo e observe que, na medida em que t percorre os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, a trajetória percorrida pelo ponto P descreve todo o círculo c. (figura 95).

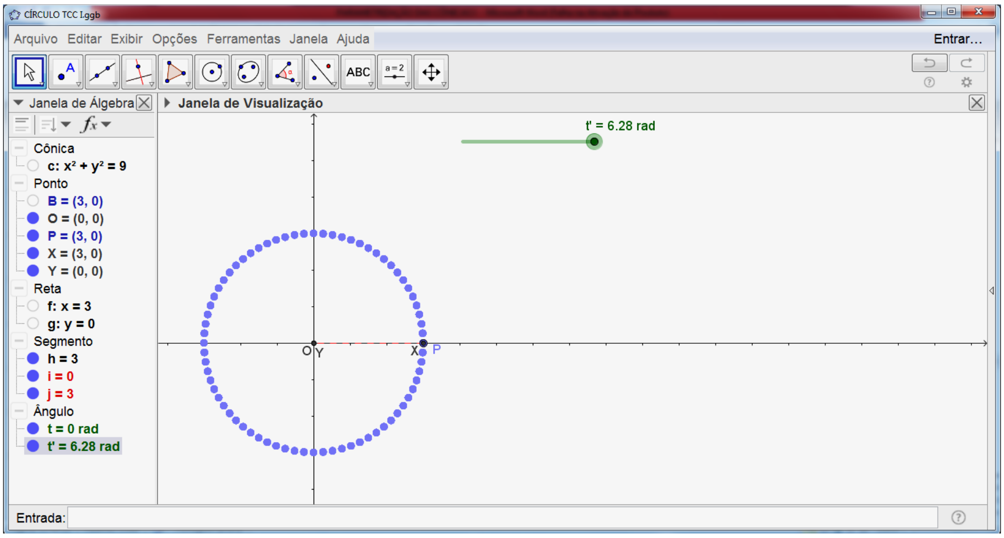

Figura 95

19° Passo: Pare a animação, clique na bolinha branca correspondente a *Cônica* c, para exibir novamente o círculo c, e no menu *Exibir*, selecione a opção *Atualizar Janelas* (figura 96), para apagar os rastros. (figura 97).

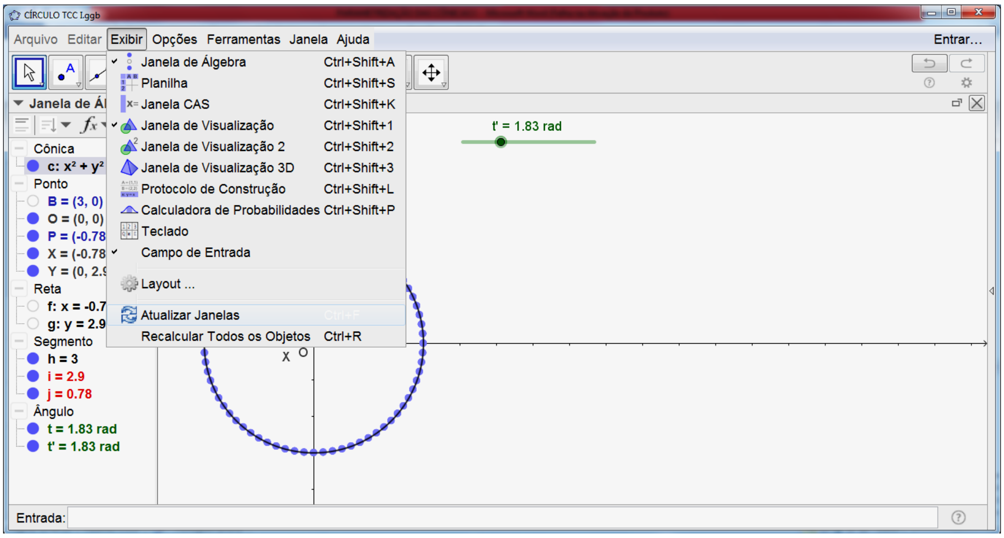

Figura 96

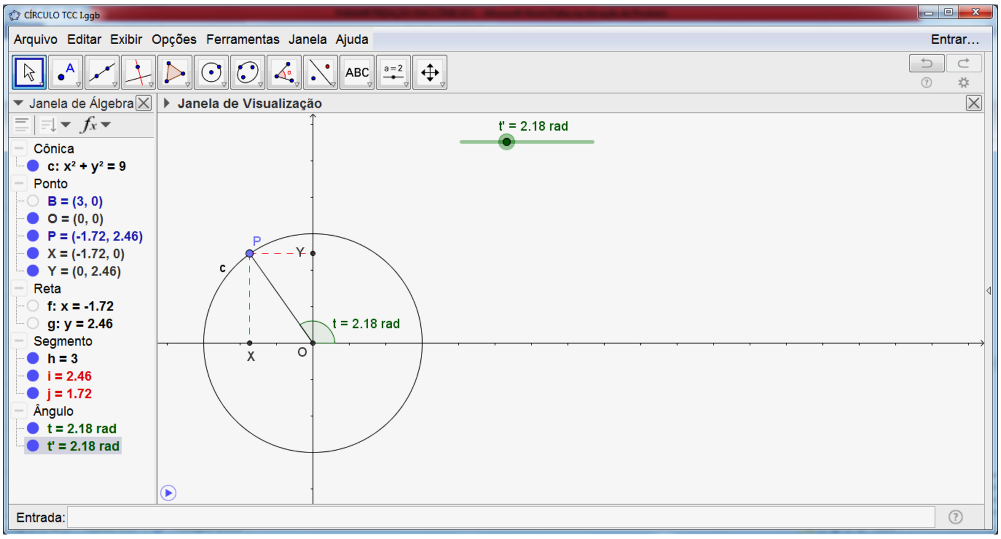

Figura 97

20° Passo: No menu *Arquivo*, clique na opção *Gravar* (ou *Gravar Como*) para salvar o trabalho. (figura 98).

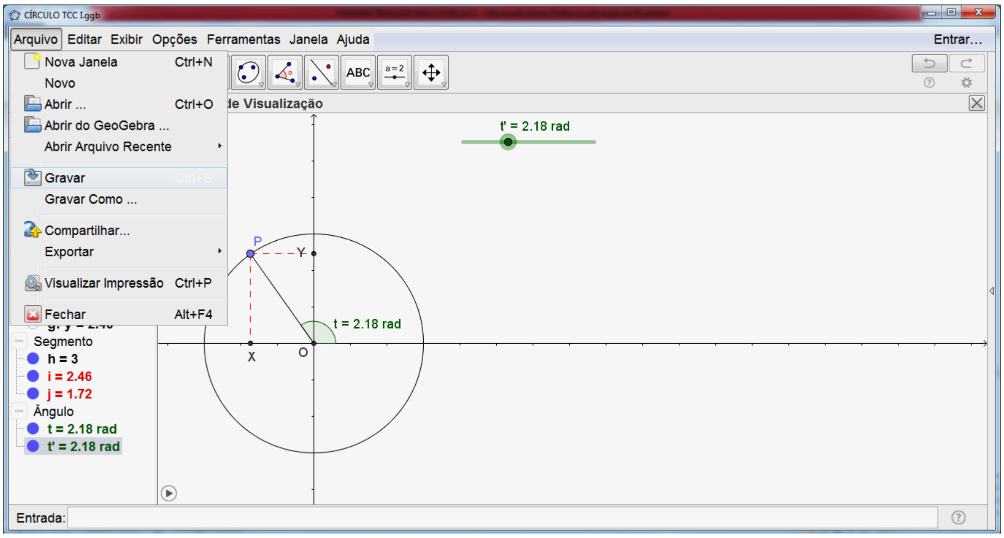

Figura 98

3.4 - Parametrização da Elipse

Seja $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ uma elipse de centro na origem e reta focal paralela ao eixo OX.

Sejam $\boldsymbol{C}_a : x^2+y^2=a^2$ o círculo de centro na origem e raio a e $\boldsymbol{C}_b : x^2+y^2=b^2$ o círculo de centro na origem e raio b.

Considere para cada $t \in R$, os pontos $P_a=(a\cos t, a\ sen\ t) \in \boldsymbol{C}_a$ e $P_b=(b\cos t, b\ sen\ t) \in \boldsymbol{C}_b$, tais que os vetores $\overrightarrow{OP_a}$ e $\overrightarrow{OP_b}$ fazem um ângulo t, no sentido positivo (anti-horário), com o semieixo positivo OX.

A intersecção da reta $r_a: x = a\ cos\ t$, paralela ao eixo OY que passa pelo ponto P_a, com a reta $r_b: y = b\ sen\ t$, paralela ao eixo OX que passa pelo ponto P_b, nos dá o ponto $P=(a\ cos\ t, b\ sen\ t)$ (figura 99) pertencente à elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$ (independentemente de qual quadrante ele esteja). Portanto, uma possibilidade de equações paramétricas para a elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$ é:

$$\boldsymbol{\varepsilon}: \begin{cases} x = a\ cos\ t \\ y = b\ sen\ t \end{cases} \quad ; \quad t \in R.$$

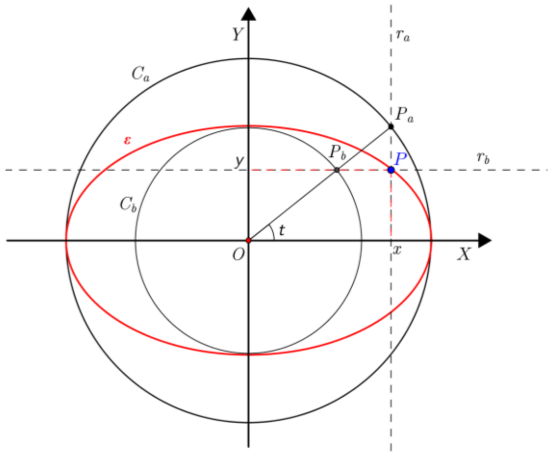

Figura 99: Construção da Elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\mathbf{1}$

Observe que, mesmo que seja $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ uma elipse de centro na origem do sistema e reta focal paralela ao eixo OY, $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,sen\,t \end{cases}$; $t \in R$, ainda é uma parametrização para a elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$, pois, $x = a\cos t$ e $y = b\,sen\,t$, permanecem sendo as coordenadas de $P \in \boldsymbol{\varepsilon}$. (figura 100).

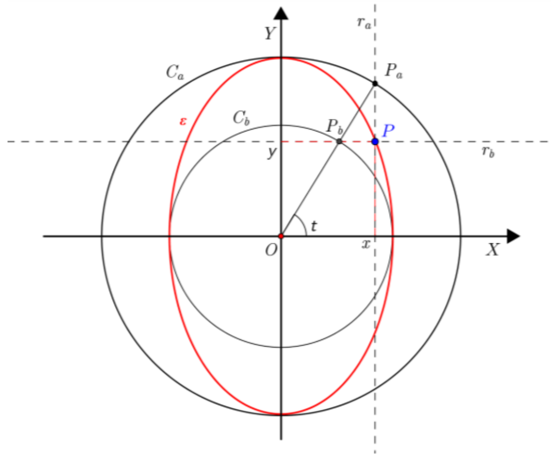

Figura 100: Construção da Elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=\mathbf{1}$

Seja agora a elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ de centro (x_0, y_0).

Por uma translação dos eixos coordenados, obtemos um sistema de eixos $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, onde $\bar{O} = (x_0, y_0)$ é o centro da elipse. Nas novas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$, a equação cartesiana da elipse fica na forma $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\frac{\bar{x}^2}{a^2}+\frac{\bar{y}^2}{b^2}=1$ e, portanto,

$$\boldsymbol{\varepsilon}: \begin{cases} \bar{x} = a\cos t \\ \bar{y} = b\,sen\,t \end{cases} \quad ; \; t \in R$$

são as equações paramétricas da elipse nas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

Como $x = \bar{x} + x_0$ e $y = \bar{y} + y_0$, obtemos que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}: \begin{cases} x \ = a\cos t + x_0 \\ y = b\, sen\, t + y_0 \end{cases} \quad ; t \in R$$

são parametrizações da elipse nas coordenadas x e y.

Exemplo:

Parametrize a elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$: $4x^2 + 3y^2 - 24x + 54y + 231 = 0$

Solução:

Completando os quadrados, obtemos:

$$4(x^2 - 6x) + 3(y^2 + 18y) = -231$$

$$4(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 18y + 81) = -231 + 36 + 243$$

$$4(x - 3)^2 + 3(y + 9)^2 = 48$$

Dividindo por 48, temos:

$$\frac{(x-3)^2}{12} + \frac{(y+9)^2}{16} = 1$$

Que representa a equação da elipse de centro $(x_0, y_0) = (3, -9)$ e reta focal paralela a OY, onde $a = 4$ e $b = 2\sqrt{3}$. Então,

$$\boldsymbol{\varepsilon}: \begin{cases} x = 4\cos t \ + 3 \\ y = 2\sqrt{3}\, sen\, t \ - 9 \end{cases} \quad ; \ t \in R,$$

é uma parametrização de $\boldsymbol{\varepsilon}$.

3.4.1 - Parametrizando a Elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ com o Software GEOGEBRA

Roteiro de Construção (se preferir clique aqui para assistir o vídeo)

1° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Cônicas*, selecione a ferramenta  *Elipse* e construa uma elipse (c), clicando nas coordenadas $x = -3$, $x = 3$ e $y = 2$ (por exemplo), respectivamente. (figura 101).

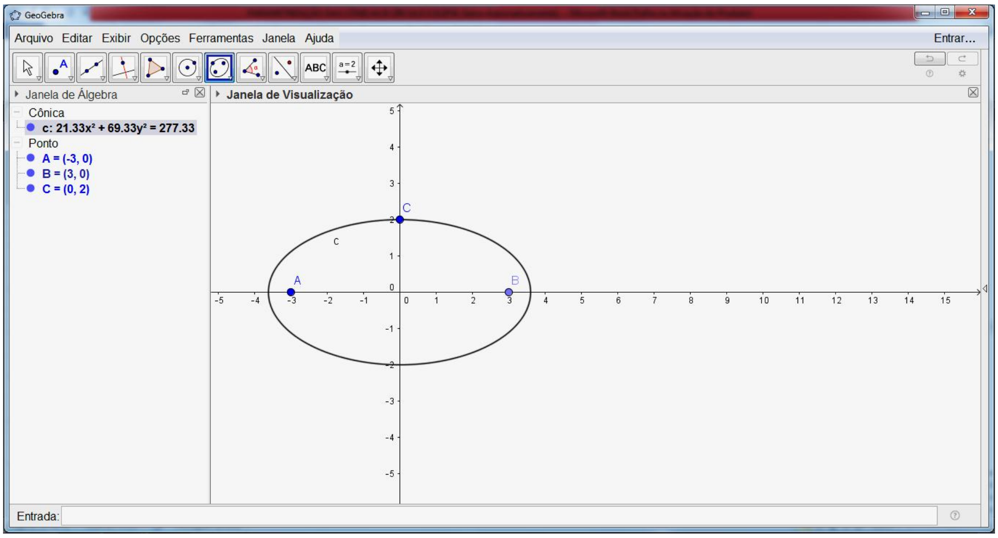

Figura 101

2° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Formas Circulares*, selecione a ferramenta  *Círculo dados Centro e um de seus Pontos* e construa um círculo (d), clicando na origem do sistema e no ponto C. (figura 102).

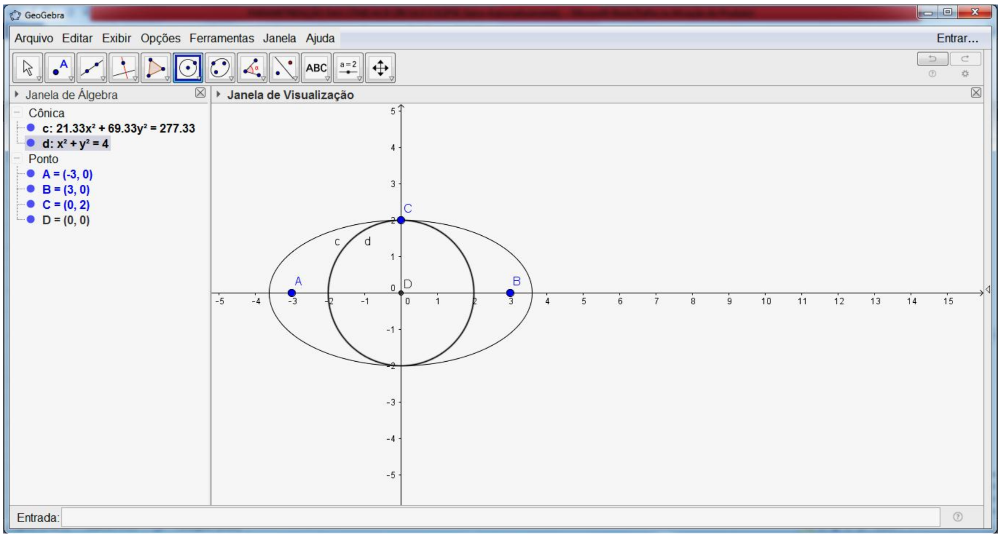

Figura 102

3° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Pontos*, selecione a ferramenta  *Interseção de Dois Objetos* e clique na interseção da elipse com o eixo positivo *OX*, criando assim, o ponto E. (figura 103).

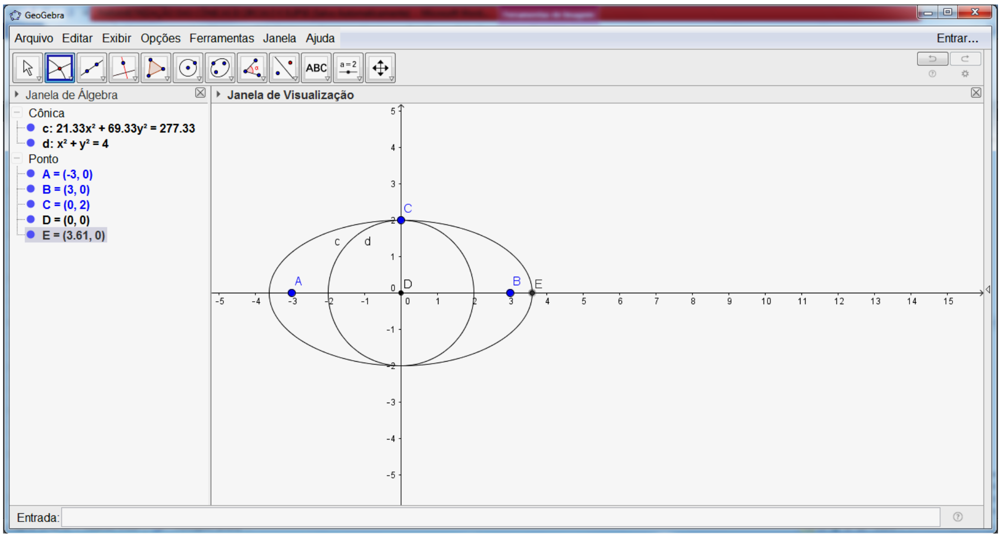

Figura 103

4° Passo: Novamente com a ferramenta *Círculo dados Centro e um de seus Pontos*, construa outro círculo (e), clicando no ponto D e no ponto E, respectivamente. (figura 104).

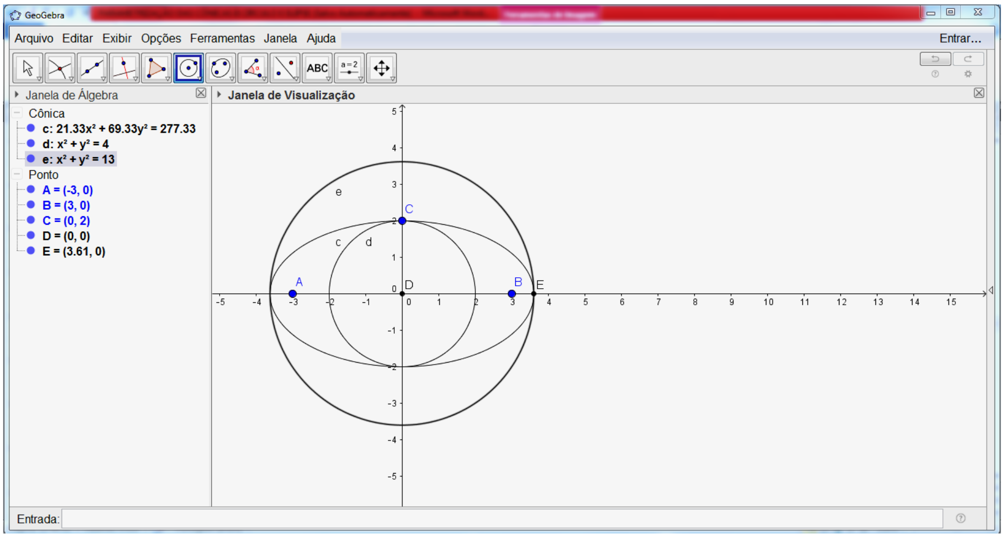

Figura 104

5° Passo: Crie um controle deslizante na opção *Ângulo α* (ver 3.3.1, 2° Passo). (figura 105).

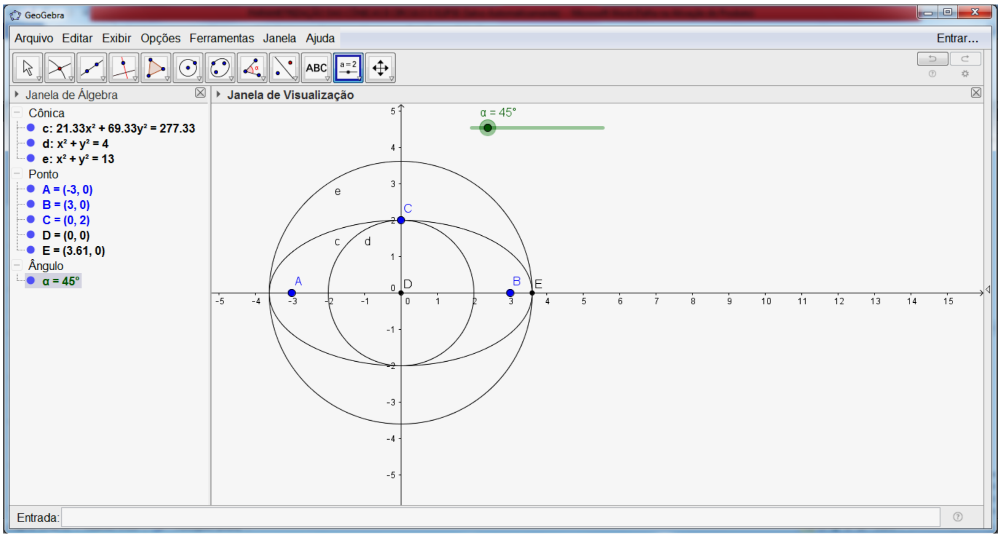

Figura 105

6° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Ângulos e Medidas*, selecione a ferramenta *Ângulo com Amplitude Fixa* e clique nos pontos E e D, respectivamente. Em seguida, substitua *45°* por *α* (com a opção *Sentido Anti-horário* selecionado) e clique em *Ok* (ver figura 106).

Note que aparecerá o ângulo *β* (ED̂E') com a mesma medida de *α* (do controle deslizante). (figura 107).

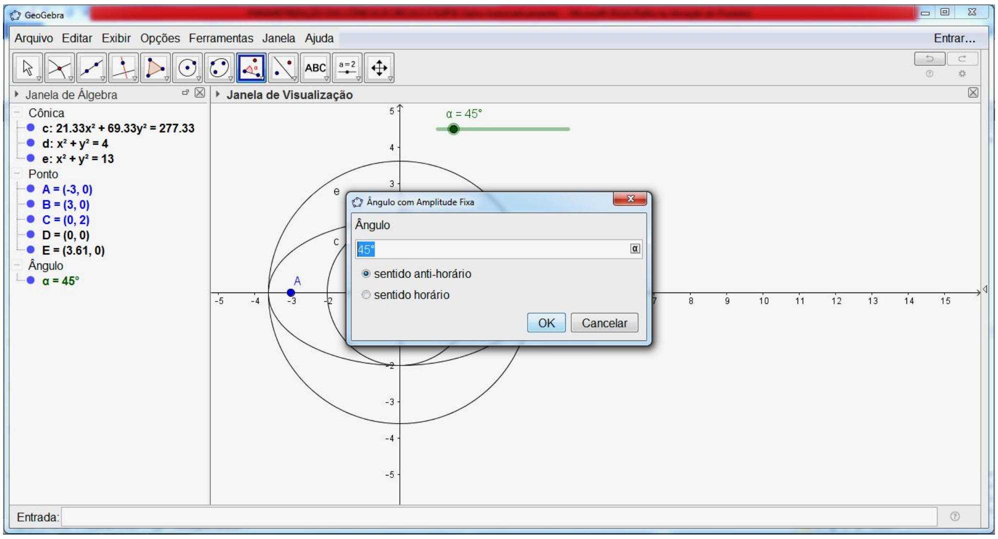

Figura 106

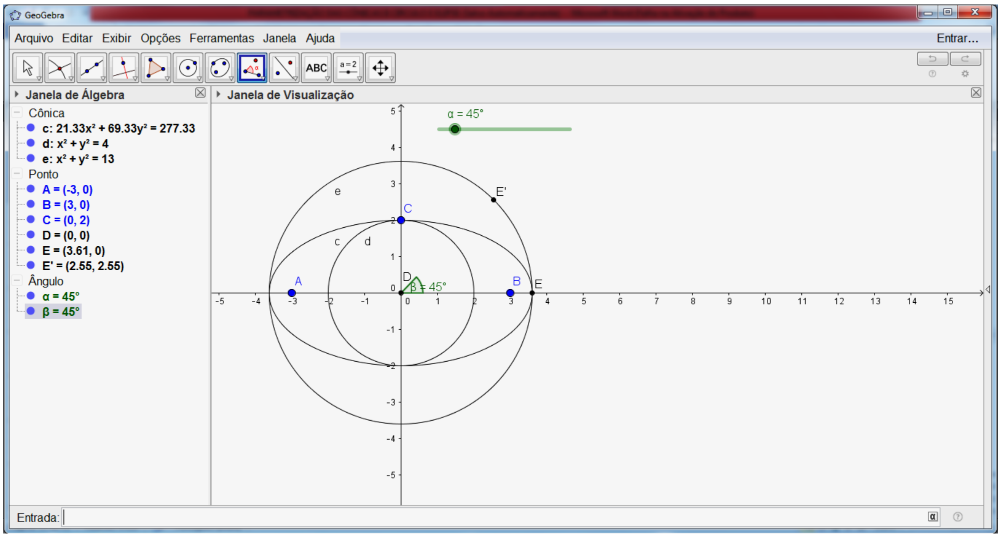

Figura 107

7° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Linhas Retas*, selecione a ferramenta *Segmento* e construa o segmento DE' (f), clicando sucessivamente nos pontos D e E' (ou vice-versa). (figura 108).

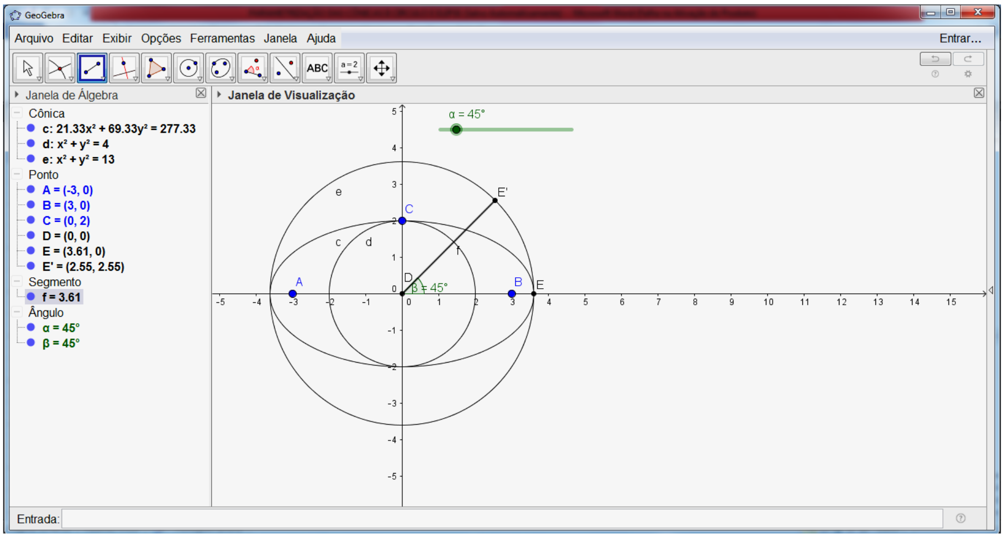

Figura 108

8° Passo: Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, clique na interseção do segmento f com o círculo d (menor), criando o ponto F. (figura 109).

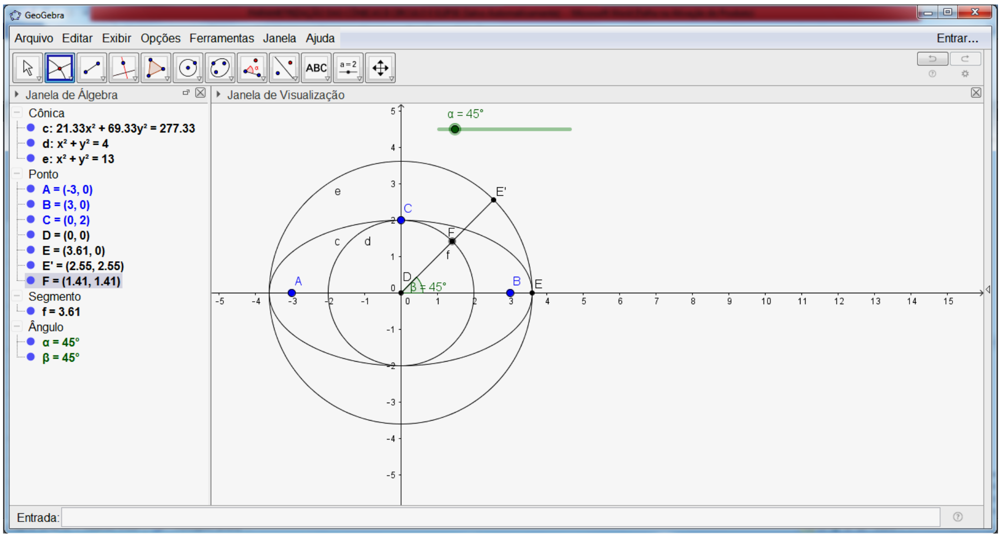

Figura 109

9° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Retas Especiais e Lugar geométrico*, selecione a ferramenta  *Reta Perpendicular* e clique no ponto F e no eixo *OY*. Em seguida clique no ponto E' e no eixo *OX* (ou vice-versa), criando assim, as retas g e h, respectivamente. (figura 110).

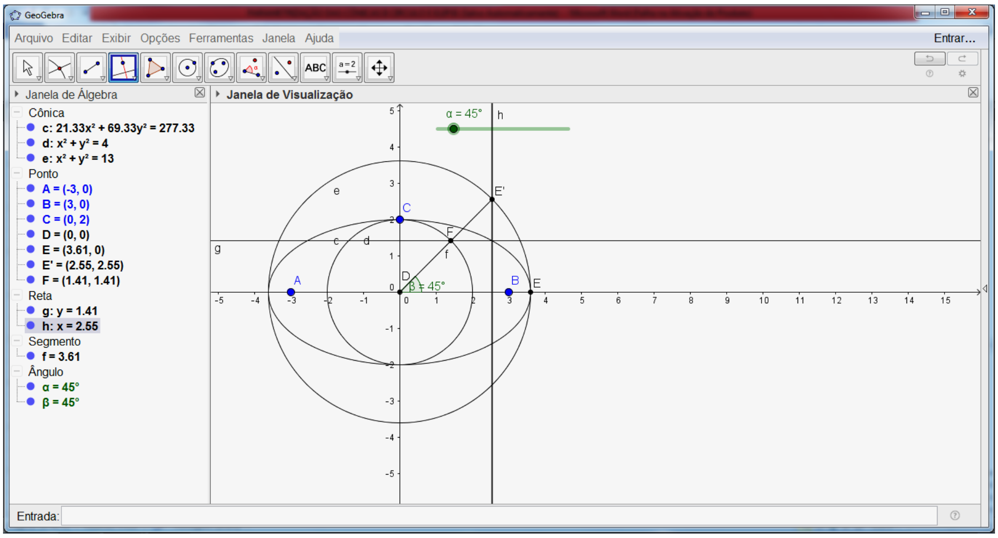

Figura 110

10° Passo: Com a ferramenta  *Interseção de Dois Objetos*, clique na interseção da elipse c com as retas g e h; na interseção da reta h com o eixo *OX*; e na interseção da reta g com o eixo *OY*. Criando assim os pontos G, H e I, respectivamente. (figura 111).

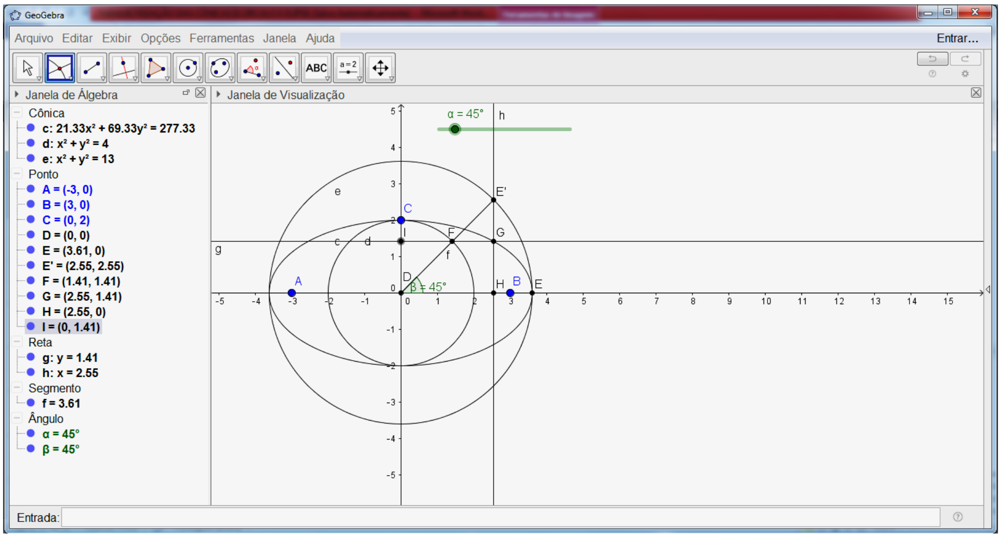

Figura 111

11° Passo: Com a ferramenta *Segmento*, clique nos pontos E' e H para criar o segmento i, e nos pontos G e I para criar o segmento j. (figura 112).

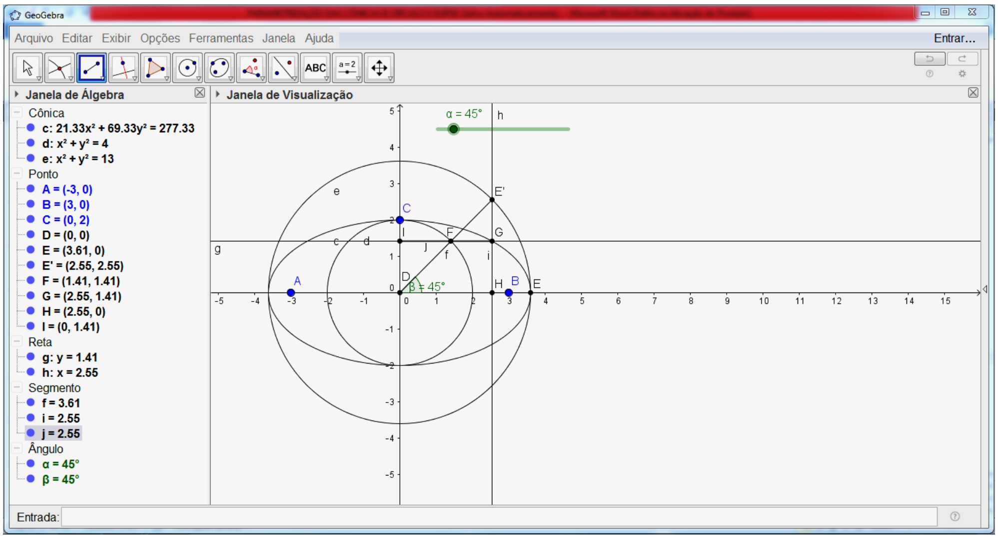

Figura 112

12° Passo: Clique com o botão direito do mouse na *Janela de Visualização*, em seguida e selecione a opção *Propriedades* (figura 113). Aparecerá a Janela de *Preferências* (figura 114), onde faremos algumas modificações na figura, para uma melhor visualização.

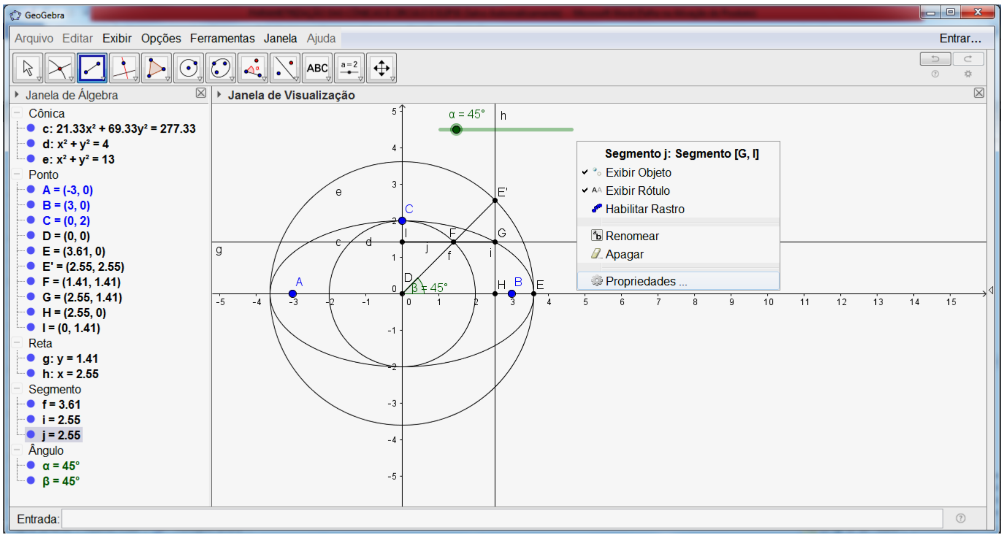

Figura 113

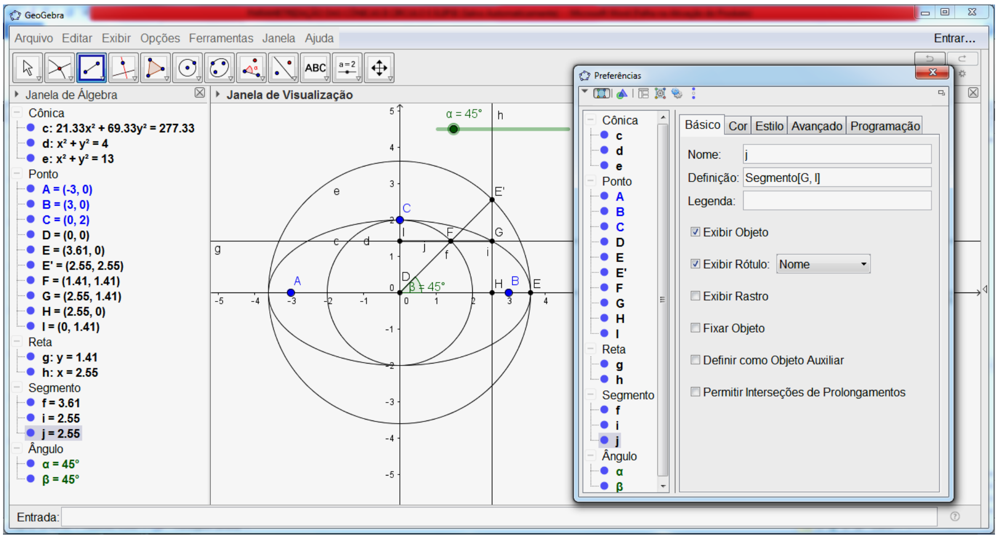

Figura 114

13° Passo: Na *Janela de Álgebra*, clique em *Cônica*, para selecionar todas as cônicas, e desmarque a opção *Exibir Rótulo*, para ocultar todos os rótulos. Em seguida clique em *segmento*, e da mesma forma, oculte todos os seus rótulos. (ver figura 115).

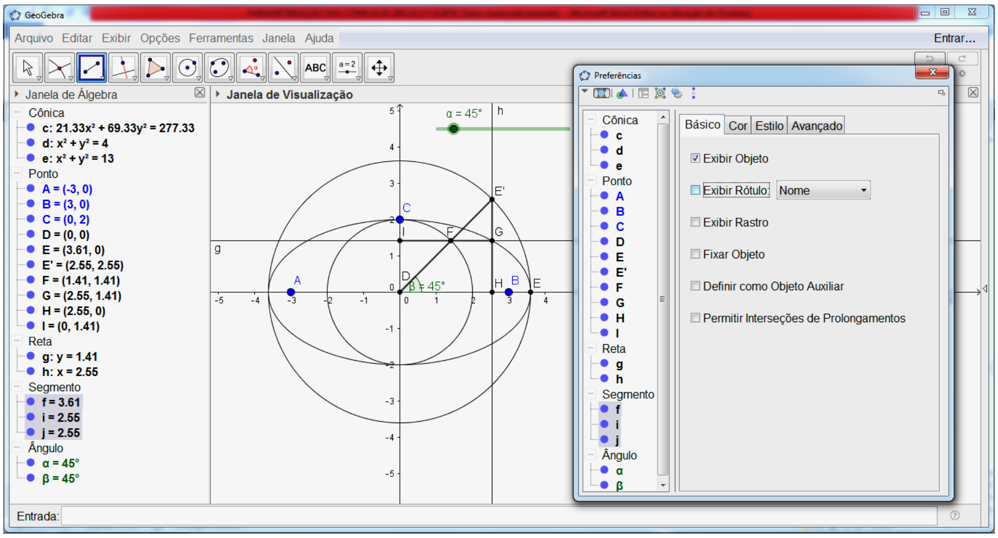

Figura 115

14° Passo: Desmarque (clicando na bolinha azul) os pontos A, B, C e E, e as retas g e h, para ocultar os respectivos pontos e retas. (ver figura 116).

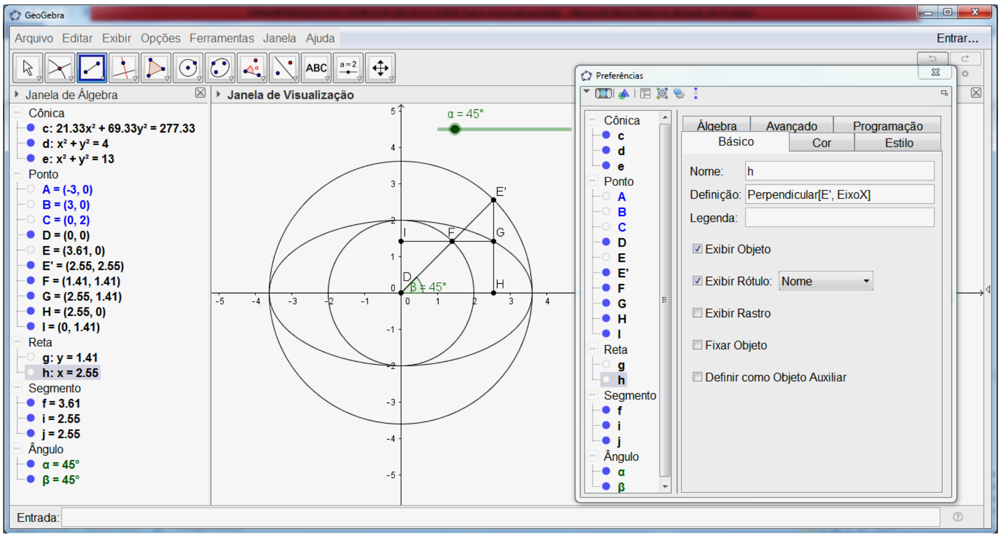

Figura 116

15° Passo: Façamos as alterações descritas do 10° ao 14° passo do item 3.3.1, para modificar os nomes, unidade de mediada de ângulo, cores e estilo dos objetos desejados, bem como ocultar os números dos eixos das coordenadas. Em seguida marque a opção *Animar* e observe que, na medida em que t percorre os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, o ponto P percorre toda a elipse. (figura 117).

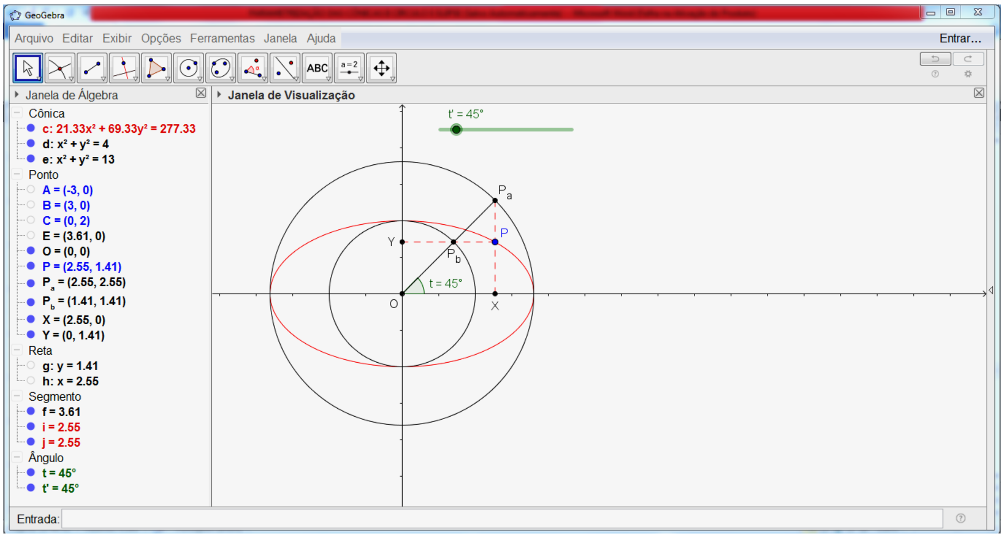

Figura 117

16° Passo: Na *Janela de Álgebra*, desmarque todas as cônicas (clicando nas bolinhas azuis) para ocultar os dois círculos e a elipse. (figura 118).

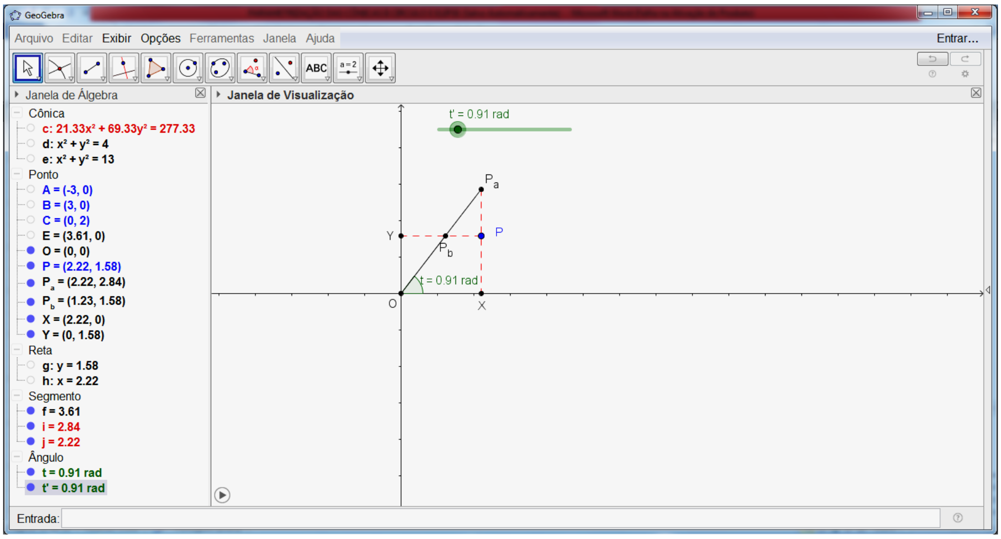

Figura 118

17° Passo: Com o botão direito do mouse, clique no ponto P e marque a opção  *Habilitar Rastro*. Em seguida, no controle deslizante, marque a opção animar e observe que à medida que t percorre os valores do intervalo $[0, 2\pi)$, o ponto P percorre toda a elipse. (figura 119).

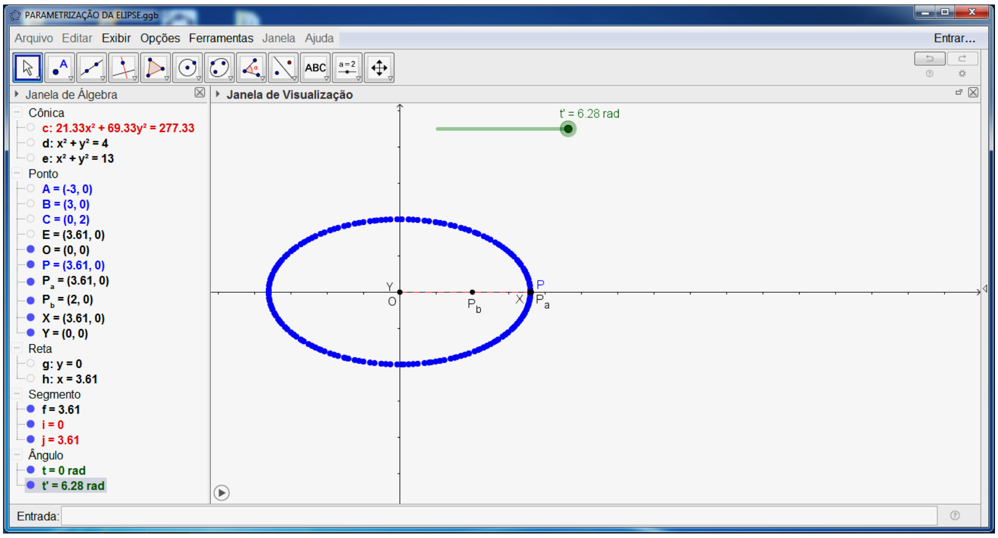

Figura 119

18° Passo: Pare a animação, limpe os rastros e salve o trabalho.

3.5 - Parametrização da Hipérbole

Considere a hipérbole $\boldsymbol{h}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, de centro na origem do sistema, cuja reta focal é coincidente com o eixo OX. Considere ainda que $0 < b < a$ (para os casos em que $0 < a < b$, basta fazer as adaptações necessárias).

Sejam as retas $s_1: x = b$ e $s_2: x = a$. Consideremos um ponto $P = (x, y) \in \boldsymbol{h}$ no primeiro quadrante. Seja $P_1 = (x_1, y_1)$ o ponto de intersecção de s_1 com a reta paralela ao eixo OX que passa por P.

Seja t a medida (em radianos) do ângulo do semieixo positivo OX para a semirreta OP_1 no sentido anti-horário. Da trigonometria, temos que $P_1 = (x_1, y_1) = (b, \text{tg } t)$.

Note que as segundas coordenadas de P e P_1 são iguais.

Daí conclui-se que $y = y_1 = b \text{ tg } t$, ou seja, $P = (x, y) = (x, y_1) = (x, b \text{ tg } t)$.

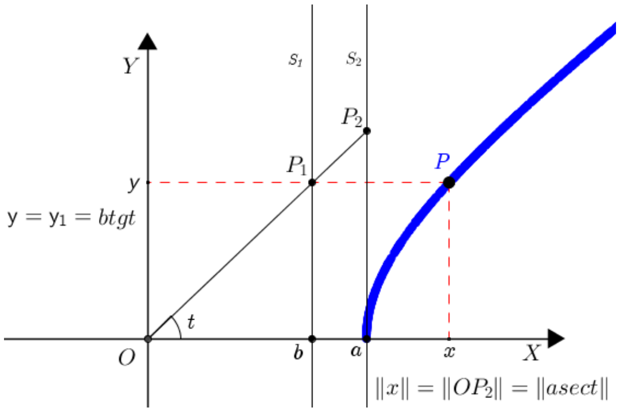

Figura 120: Hipérbole $\boldsymbol{h}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mathbf{1}$ - Primeiro quadrante

Para obter a coordenada x do ponto P, seja P_2 o ponto de intersecção da semirreta OP_1 com a reta s_2. Então $|OP_2| = |a \sec t|$.

O círculo de centro na origem e raio $|OP_2|$ intersecta o semieixo OX no ponto $P_0 = (x_0, 0)$, onde $x_0 = |OP_2| = |a \sec t|$.

Como t é um arco do primeiro quadrante, $a \sec t$ é um número positivo. Logo, $x_0 = a \sec t$.

Afirmamos que $x = x_0$, isto é,

$$P = (x, y) = (x, b \operatorname{tg} t) = (x_0, b \operatorname{tg} t) = (a \sec t, b \operatorname{tg} t).$$

Para verificar a afirmativa, basta mostrar que o ponto de coordenadas $(a \sec t, b \operatorname{tg} t)$ satisfaz a equação cartesiana da hipérbole $\boldsymbol{h}$.

$$\frac{(a \sec t)^{\ 2}}{a^2} - \frac{(b \operatorname{tg} t)^{\ 2}}{b^2} = sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t = 1$$

Finalmente, observe que, conforme t percorre todos os valores do intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, o ponto P percorre todos os pontos da hipérbole que estão no primeiro quadrante (figura 120).

Para obter os pontos do quarto quadrante, fazemos a mesma construção, variando t no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Nesse caso, o ponto $P = (x, y)$ da hipérbole tem a sua segunda coordenada negativa coincidindo com $b \operatorname{tg} t$, que é também um número negativo (figura 121).

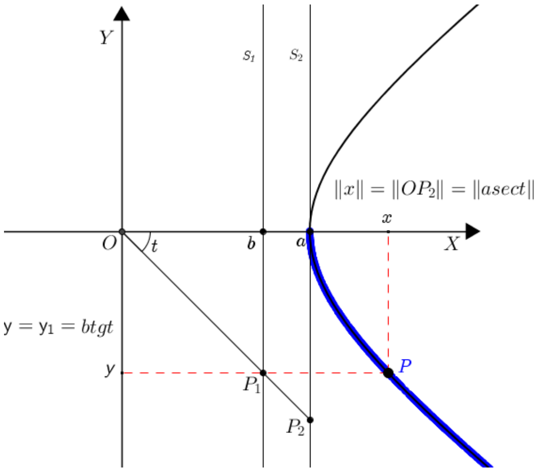

Figura 121: Hipérbole $\boldsymbol{h}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mathbf{1}$ - Quarto quadrante

Para obter o ramo da hipérbole que intersecta o semieixo negativo OX, repetimos a construção, variando t no intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, sendo, agora, t o ângulo (em radianos) que o semieixo positivo OX faz com o vetor $\overrightarrow{OP'_1}$, no sentido horário, onde P'_1 é o ponde de interseção da reta $s'_1 \colon x = -b$ com a reta paralela ao eixo OX que passa por P.

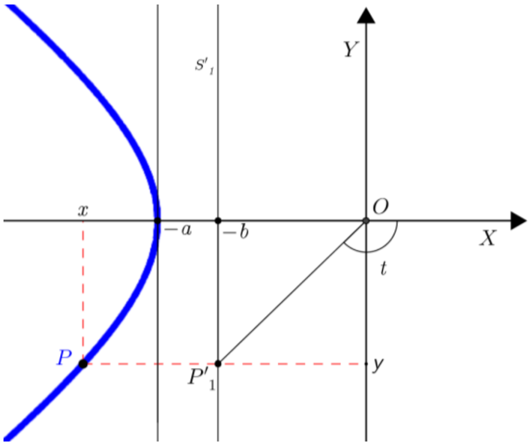

Figura 122: Ramo negativo da Hipérbole $\boldsymbol{h}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mathbf{1}$ – Segundo e terceiro quadrante

Observe que:

$$a \sec t < 0, \text{ para } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \text{e} \quad \begin{cases} b \operatorname{tg} t \leq 0, \text{ para } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \\ b \operatorname{tg} t > 0, \text{ para } \pi < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

Com essa análise, chegamos às seguintes equações paramétricas da hipérbole $\boldsymbol{h}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\boldsymbol{h}: \begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \operatorname{tg} t \end{cases} \quad ; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Quando t varia no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, obtemos o ramo da hipérbole $\boldsymbol{h}$ que intersecta o semieixo positivo *OX*, e que quando t varia no intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, obtemos o ramo de $\boldsymbol{h}$ que intersecta o semieixo negativo *OX*.

De modo geral, podemos verificar que:

$$\boldsymbol{h}: \begin{cases} x = a \sec t + x_0 \\ y = b \operatorname{tg} t + y_0 \end{cases} \quad ; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

são equações paramétricas da hipérbole $\boldsymbol{h}$: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo *OX*, e

$$\boldsymbol{h}: \begin{cases} x = b \operatorname{tg} t + x_0 \\ y = a \sec t + y_0 \end{cases} \quad ; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

são equações paramétricas da hipérbole $\boldsymbol{h}$: $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ de centro (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo *OY*.

Exemplo:

Parametrize a hipérbole $\boldsymbol{h}: 9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$

Solução:

Completando os quadrados, obtemos:

$$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 2y) = 124$$

$$9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 + 2y + 1) = 124 + 36 - 16$$

$$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 144$$

Dividindo por 144, temos:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Que representa a equação da hipérbole de centro $(x_0, y_0) = (2, -1)$ e eixo focal paralelo a *OX*, onde $a = 4$ e $b = 3$. Então,

$$\boldsymbol{h}: \begin{cases} x = 4 \sec t + 2 \\ y = 3 \operatorname{tg} t - 1 \end{cases} \quad ; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

é uma parametrização de $\boldsymbol{h}$.

3.5.1 - Parametrizando a Hipérbole $\boldsymbol{h}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ com o Software GEOGEBRA

Roteiro de Construção (se preferir clique aqui para assistir o vídeo)

1° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Cônicas*, selecione a ferramenta *Hipérbole* e construa uma hipérbole (c) de focos $F_1 = (-5, 0)$ e $F_2 = (5, 0)$; vértices $A_1 = (-4, 0)$ e $A_2 = (4, 0)$; e vértices imaginários $B_1 = (-3, 0)$ e $B_2 = (3, 0)$, clicando nas coordenadas $x = -5$, $x = 5$ e $x = 4$, respectivamente. (figura 123).

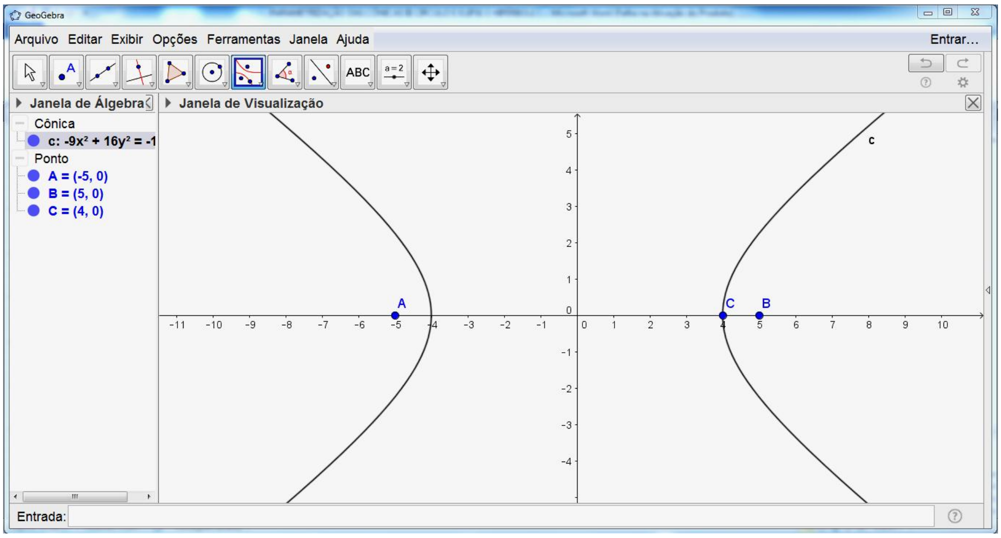

Figura 123

2° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Pontos*, selecione a ferramenta *Ponto* e clique nas coordenadas $x = 3, x = 0, x = -3$ e $x = -4$, e num ponto qualquer da hipérbole (no primeiro quadrante, por exemplo). Criando assim, os pontos D, E, F, G e H, respectivamente. (figura 124).

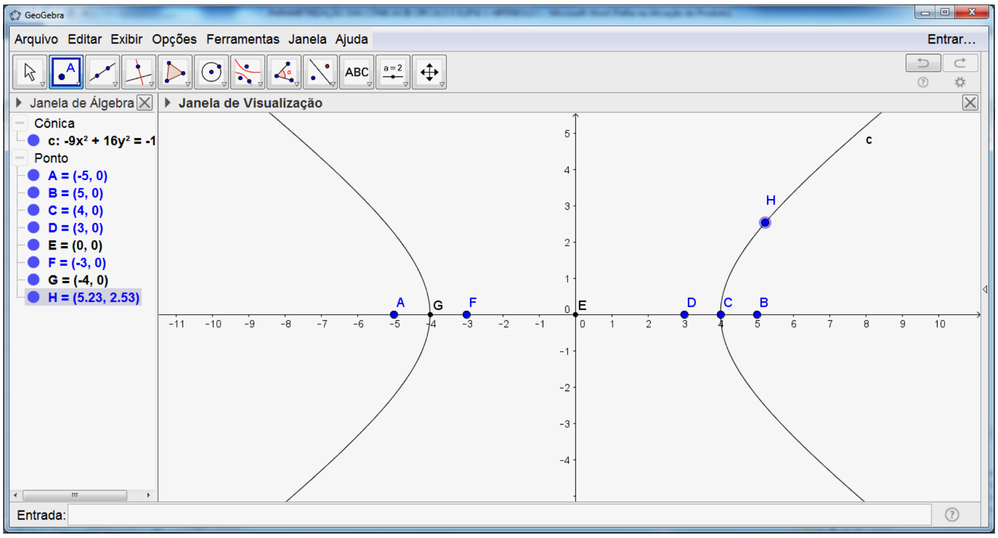

Figura 124

3° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Retas Especiais e Lugar geométrico*, selecione a ferramenta  *Reta Paralela*, clique no ponto C e no eixo *OY*, para criar uma reta (f) paralela ao eixo *OY* que passa por C. Faça o mesmo para os pontos D, F, G e H, criando assim, as retas g, h, i e j, paralelas a *OY*, e depois, crie uma reta (k) paralela ao eixo *OX*, passando por H. (figura 125).

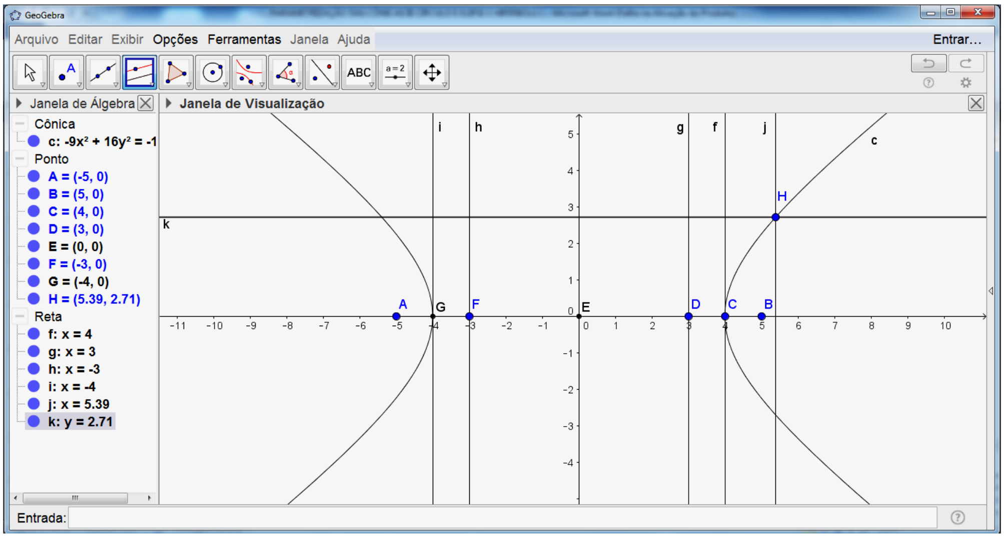

Figura 125

4° Passo: Com a ferramenta  *Interseção de Dois Objetos*, clique na interseção da reta j com o eixo *OX*, e na interseção da reta k com o eixo *OY*. Criando assim os pontos I e J, respectivamente. (figura 126).

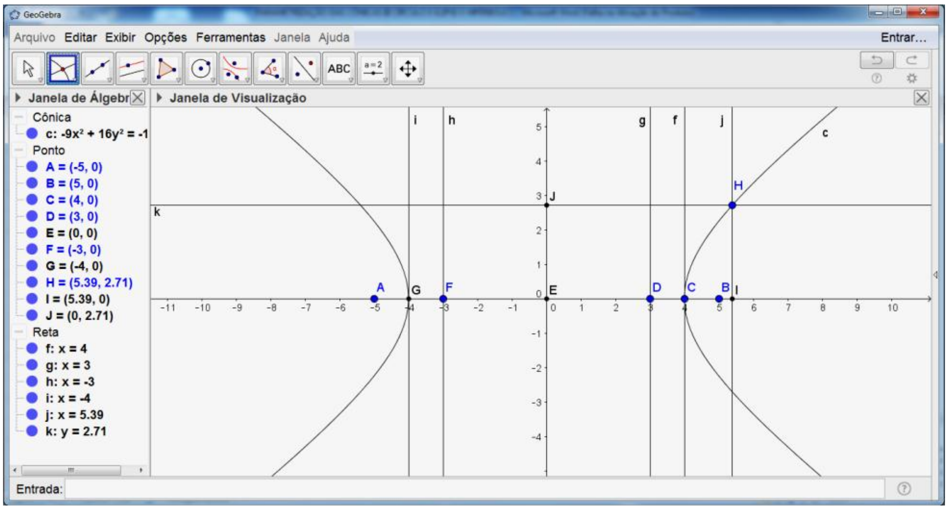

Figura 126

5° Passo: Com a ferramenta  *Segmento*, construa os segmentos HI (l) e HJ (m). Em seguida, oculte as retas j e k. (figura 127).

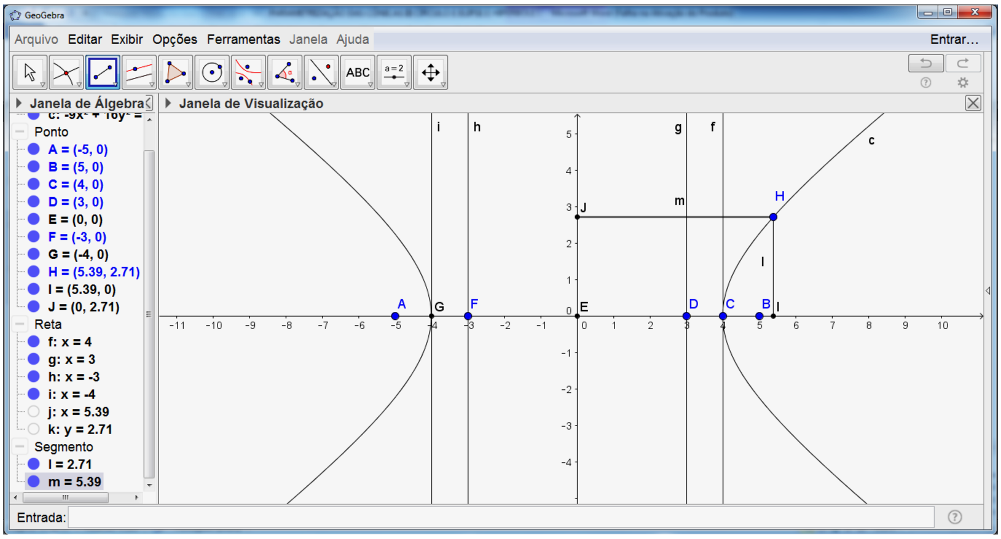

Figura 127

6° Passo: Com a ferramenta  *Interseção de Dois Objetos*, clique na interseção da reta g com o segmento m, criando assim o ponto K. (figura 128).

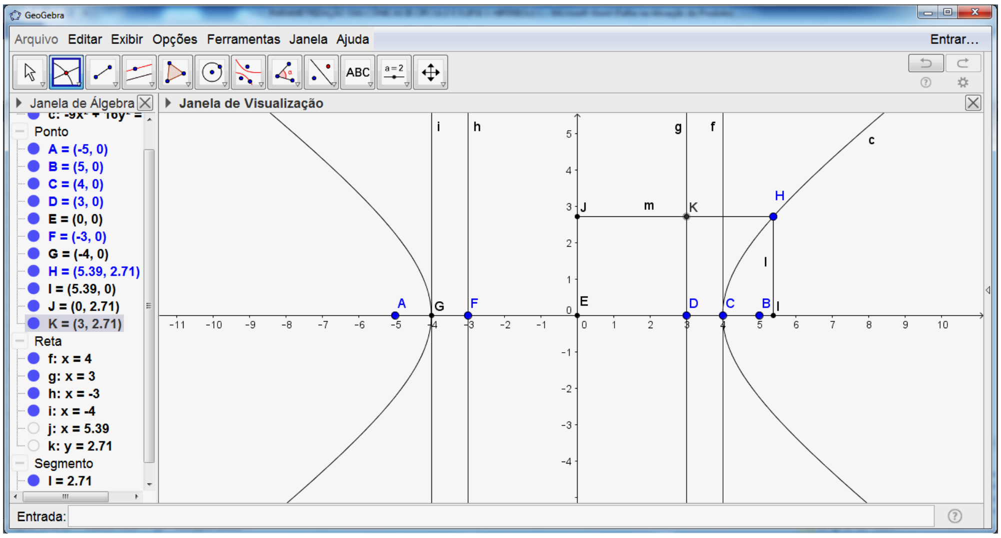

Figura 128

7° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Linhas Retas*, selecione a ferramenta  *Semirreta* e construa a semirreta $\overrightarrow{DK}$ (n), clicando nos pontos D e K. (figura 129).

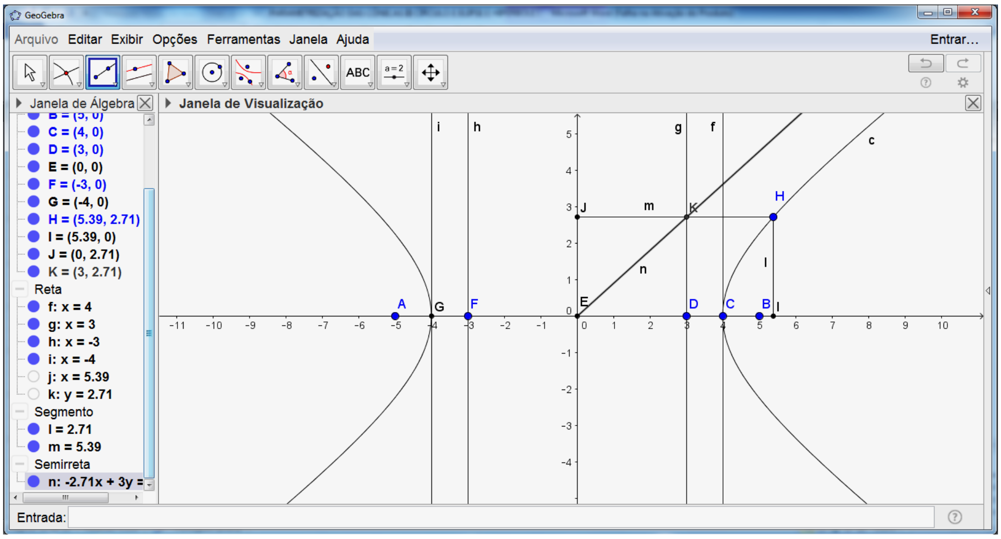

Figura 129

8° Passo: Com a ferramenta  *Interseção de Dois Objetos*, clique na interseção da reta f com a semirreta n, criando assim o ponto L. (figura 130).

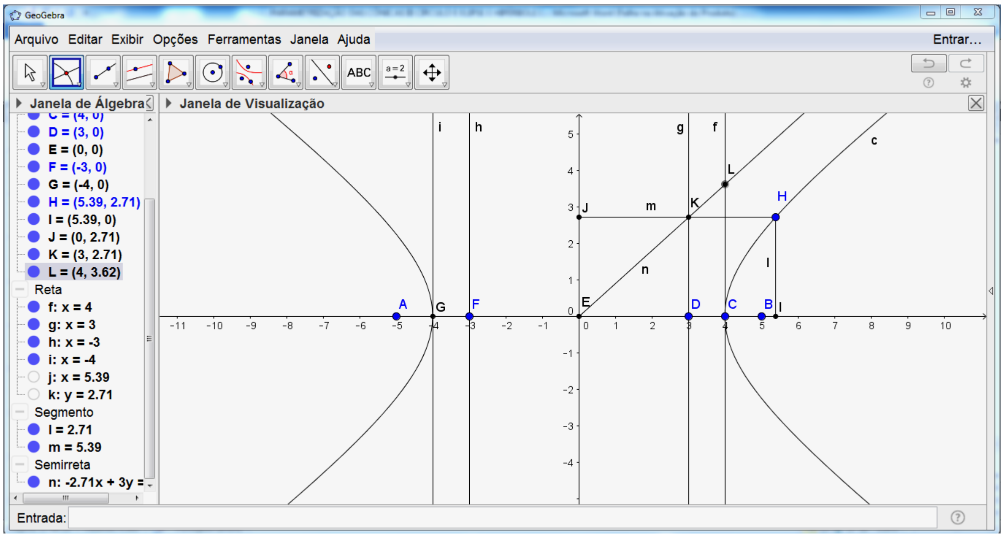

Figura 130

9° Passo: Com a ferramenta *Segmento*, construa os segmentos CL (p), DK (q) e EL (r). Em seguida, oculte as retas f e g, e a semirreta n. (figura 131).

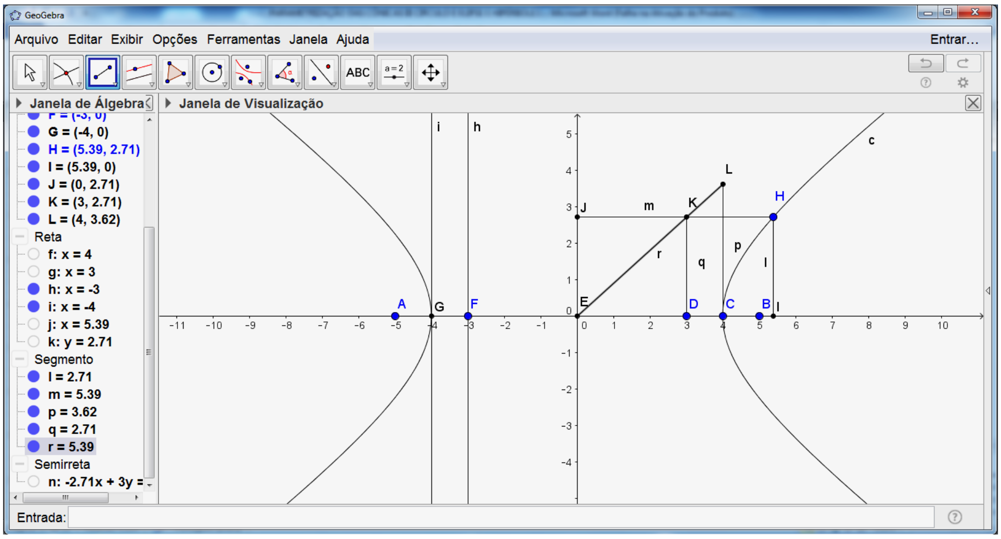

Figura 131

10° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Ângulos e Medidas*, selecione a ferramenta *Ângulo* e clique nos pontos I, E e L, criando assim, o ângulo α. (ver figura 132).

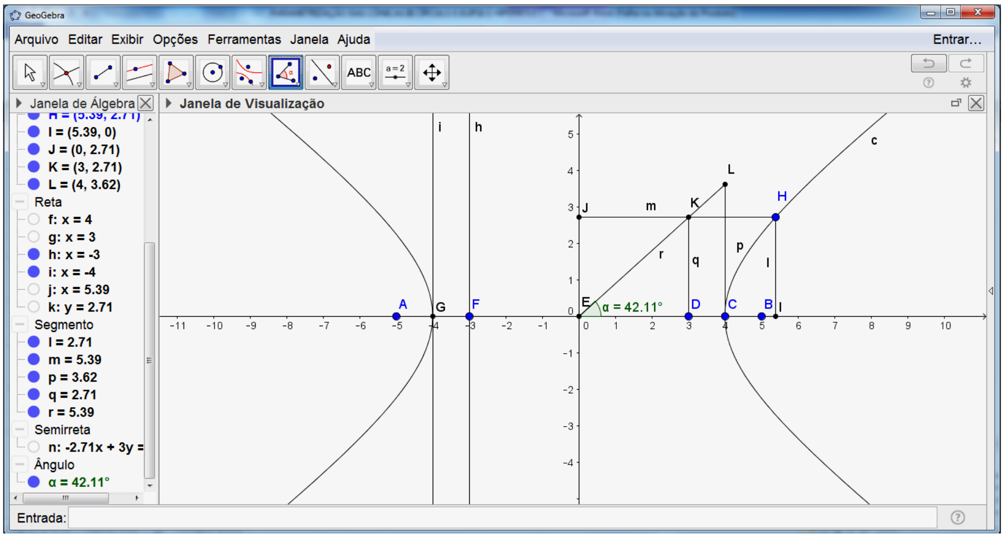

Figura 132

11° Passo: Clique com o botão direito do mouse no ponto H e marque a opção *Animar*. Em seguida, pare a animação quando o ponto H estiver no terceiro quadrante (por exemplo). (figura 133).

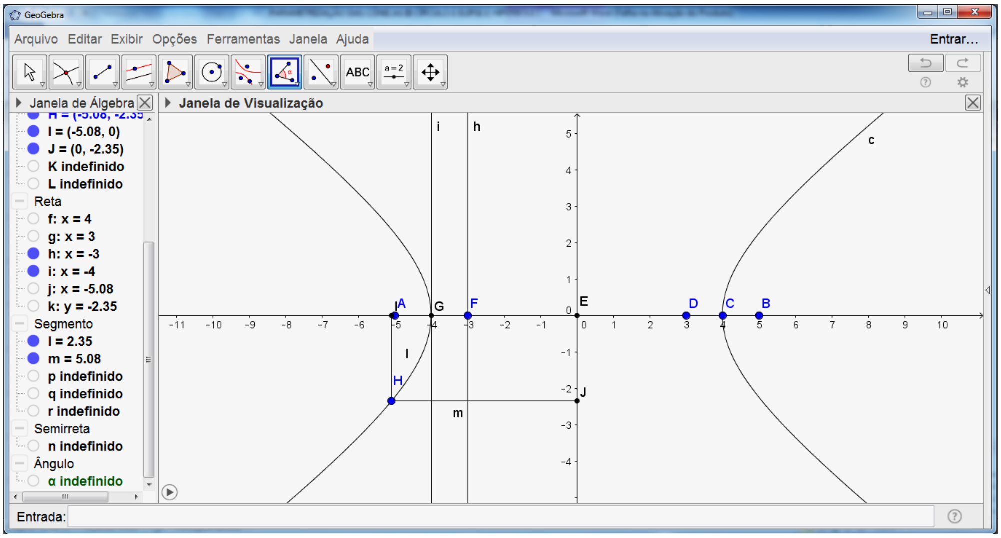

Figura 133

12° Passo: Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, marque o ponto (M) de interseção da reta h com o segmento m, em seguida, com a ferramenta *Semirreta*, construa a semirreta $\overrightarrow{EM}$ (s), clicando nos pontos E e M. Novamente com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* , marque o ponto (N) de interseção da reta i com a semirreta s. (figura 134).

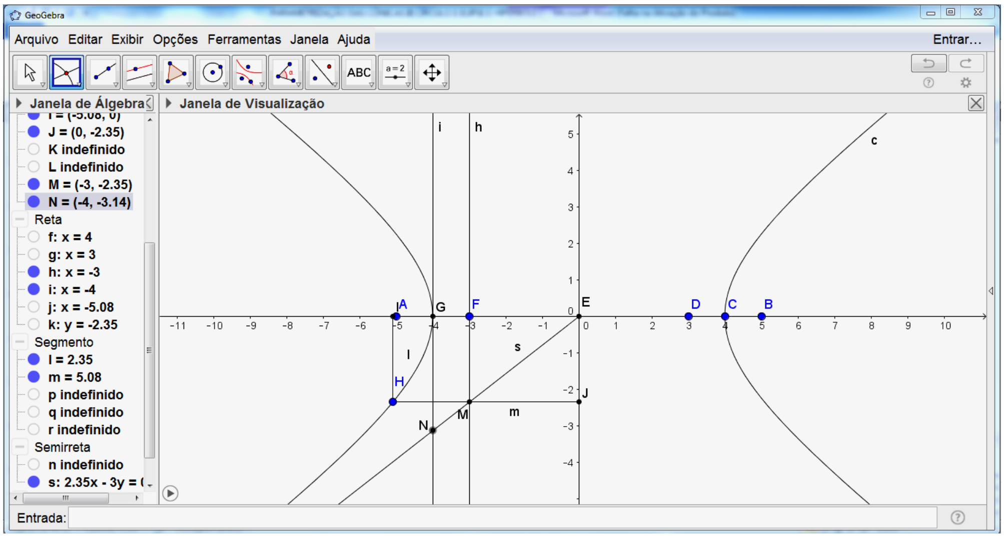

Figura 134

13° Passo: Com a ferramenta *Segmento*, construa os segmentos EN (t), FM (a) e GN (b), clicando nos pontos E e N, F e M, e G e N, respectivamente. Em seguida, oculte as retas h e i, e a semirreta s. (figura 135).

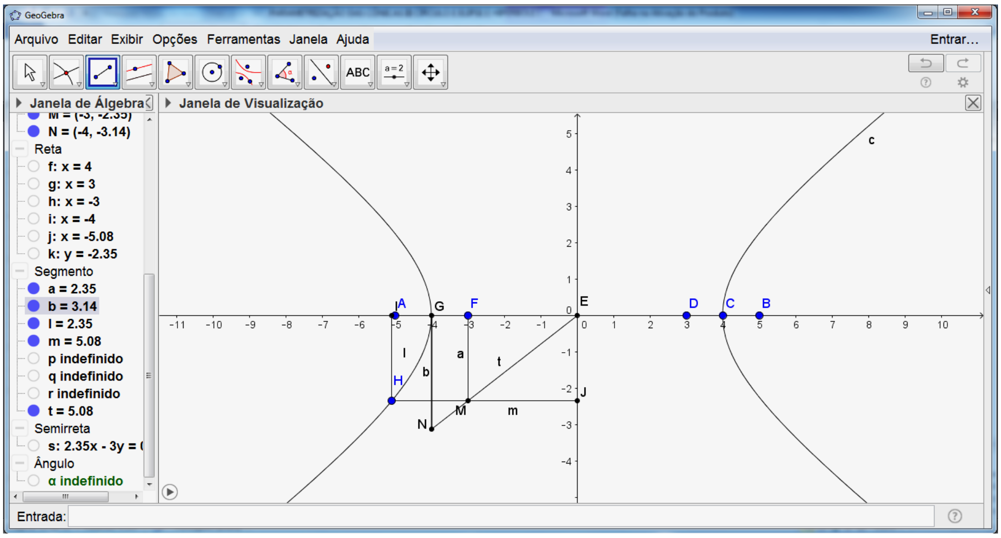

Figura 135

14° Passo: Com a ferramenta *Ângulo*, clique nos pontos N, E e B, criando assim, o ângulo β. (ver figura 136).

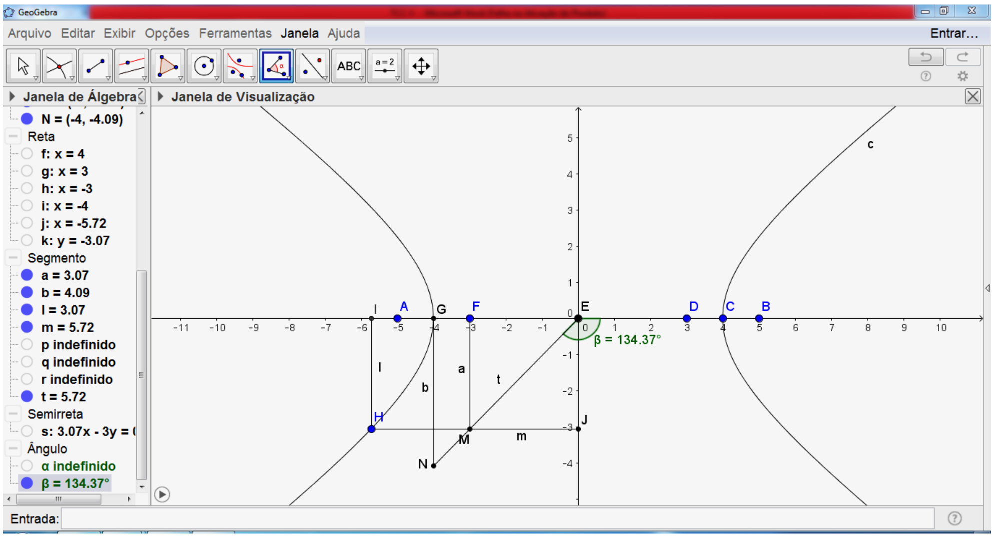

Figura 136

15° Passo: Com o botão direito do mouse, clique na área em branco da *Janela de Visualização*, que abrirá uma caixa de opções, onde, clicando em *Propriedades*, aparecerá a Janela de *Preferências* (figura 137), que nos permitirá, nos próximos passos, fazermos algumas modificações em nossa figura.

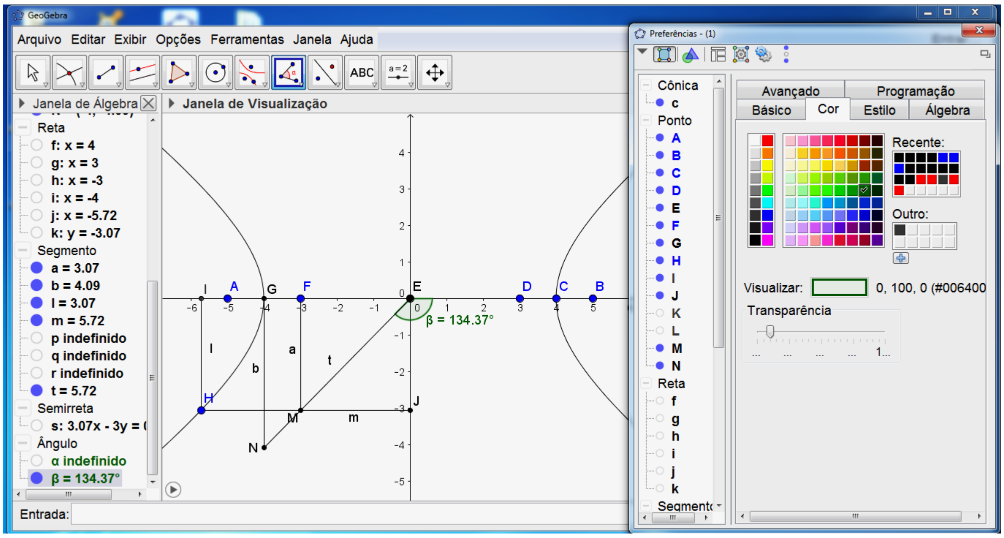

Figura 137

16° Passo: Oculte os pontos A e B, e os *rótulos* de todos os segmentos e da hipérbole. Em seguida, modifique os nomes, unidade de medida dos ângulos, estilo e cores dos objetos desejados, e oculte os números dos eixos das coordenadas (veja as alterações descritas do 10° ao 14° passo do item 3.3.1). Selecione a opção *Animar* e observe que, na medida em que os ângulos t e t' percorrem os valores do intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, P percorre toda a hipérbole. (figura 138).

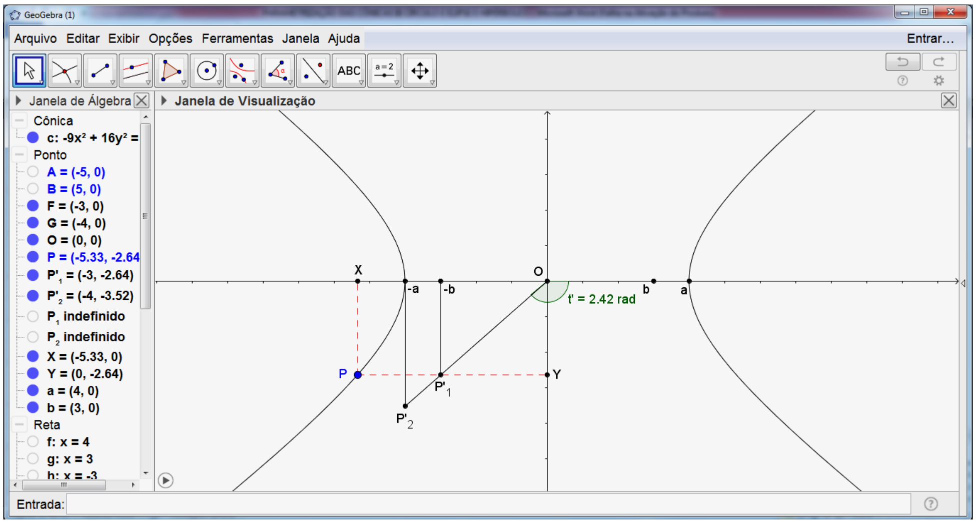

Figura 138

17° Passo: Oculte a hipérbole. Clique com o botão direito do mouse no ponto P e marque a opção *Habilitar Rastro* e *animar* novamente (ou se preferir clique no ícone *reproduzir*, localizado no canto inferior esquerdo da *Janela de Visualização* (ver figura 139)) e observe que à medida que os ângulos t e t' percorrem os valores do intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, P descreve toda a hipérbole.

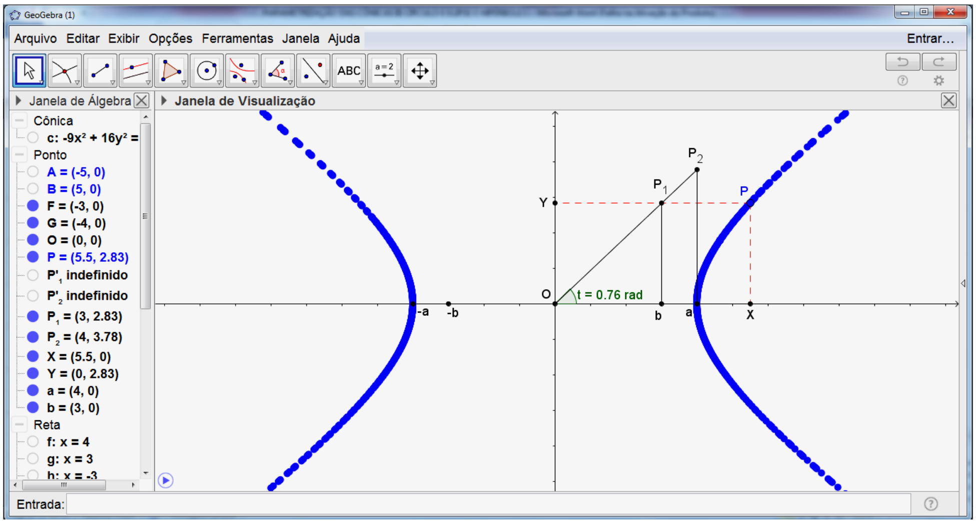

Figura 139

18° Passo: Pare a animação, limpe os rastros e salve o trabalho.

Observação: Na construção da parametrização da hipérbole, o intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ é representado pelo intervalo $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, pois, são equivalentes.

3.6 - Parametrização da Parábola

Seja $\boldsymbol{p}: x^2 = 4py$, uma parábola de vértice na origem e reta focal paralela ao eixo OY (para os demais casos, faça as adaptações necessárias).

Se substituirmos x por t na equação da parábola, obtemos:

$$\boldsymbol{p}: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{4p} \end{cases} \quad ; t \in R,$$ que são equações paramétricas de $\boldsymbol{p}$.

Seja agora $\boldsymbol{p}: (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$, uma parábola de vértice (x_0, y_0). Então temos que:

$$\boldsymbol{p}: \begin{cases} x = t + x_0 \\ y = \frac{t^2}{4p} + y_0 \end{cases} \quad ; t \in R,$$ são equações paramétricas de $\boldsymbol{p}$.

Exemplo:

Parametrize a parábola $\boldsymbol{p}: 2y^2 + 4x + 16y - 4 = 0$

Solução:

Completando os quadrados, obtemos:

$$2(y^2 + 8y) = -4x + 4$$
$$2(y^2 + 8y + 16) = -4x + 4 + 32$$
$$2(y + 4)^2 = -4x + 36$$
$$2(y + 4)^2 = -4(x - 9)$$

Dividindo por 2, temos:

$$(y + 4)^2 = -2(x - 9)$$

Que representa a equação da parábola de vértice $V = (x_0, y_0) = (9, -4)$, cujo eixo focal é paralelo a OX e o foco está à esquerda do vértice. Então, temos que:

$$\boldsymbol{p}: \begin{cases} x = -\frac{t^2}{2} + 9 \\ y = t - 4 \end{cases} \quad ; t \in R,$$

é uma parametrização da parábola $\boldsymbol{p}$.

Observação: O procedimento utilizado para obter equações paramétricas das parábolas, também se aplica para obter equações paramétricas de partes de elipses e hipérboles.

Se substituirmos x por t na equação da elipse $\boldsymbol{\varepsilon}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, por exemplo, obtemos que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}\text{: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2} \end{cases} \quad ;\ -a\le x\le a.$$

Para cada escolha de sinal na expressão de y, descrevemos uma parte da elipse $\boldsymbol{\varepsilon}$. Logo, suas equações paramétricas são:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_+\text{: } \begin{cases} x=t \\ y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2} \end{cases} \ ;\ t\in(-a,a]\,, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_-\text{: } \begin{cases} x=t \\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2} \end{cases} \ ;\ t\in[-a,a),$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_+$ é a semi-elipse contida no semiplano superior, incluindo o vértice $A_2=(a,0)$ e excluindo o vértice $A_1=(-a,0)$. Analogamente, $\boldsymbol{\varepsilon}_-$ é a semi-elipse contida no semiplano inferior, incluindo o vértice $A_1=(-a,0)$ e excluindo o vértice $A_2=(a,0)$. (ver figura 140).

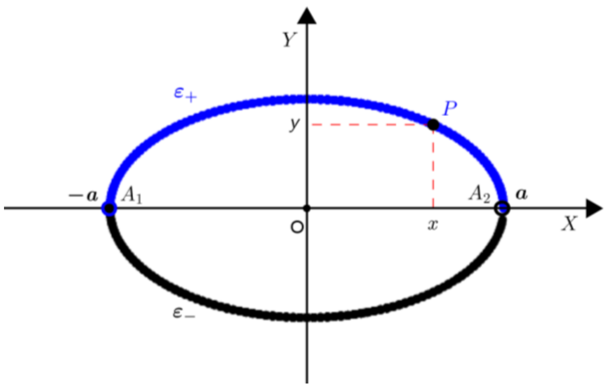

Figura 140: Elipse $\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_+\cup\ \boldsymbol{\varepsilon}_-$

Substituindo x por t na equação da hipérbole $\boldsymbol{h}$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, por exemplo, obtemos que:

$$\boldsymbol{h}\text{: } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{t^2-a^2} \end{cases} \quad ;\ -a\le x\le a$$

Para cada escolha de sinal na expressão de y, descrevemos uma parte da hipérbole $\boldsymbol{h}$. Logo, suas equações paramétricas são:

$$\boldsymbol{h}_+\text{: } \begin{cases} x=t \\ y=\frac{b}{a}\sqrt{t^2-a^2} \end{cases} \ ;\ t\in(-a,a]\,, \qquad \boldsymbol{h}_-\text{: } \begin{cases} x=t \\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{t^2-a^2} \end{cases} \ ;\ t\in[-a,a),$$

onde $\boldsymbol{h}_+$ é a semi-hipérbole contida no semiplano superior, incluindo o vértice $A_2=(a,0)$ e excluindo o vértice $A_1=(-a,0)$. Analogamente, $\boldsymbol{h}_-$ é a semi-hipérbole contida no semiplano inferior, incluindo o vértice $A_1=(-a,0)$ e excluindo o vértice $A_2=(a,0)$. (ver figura 141).

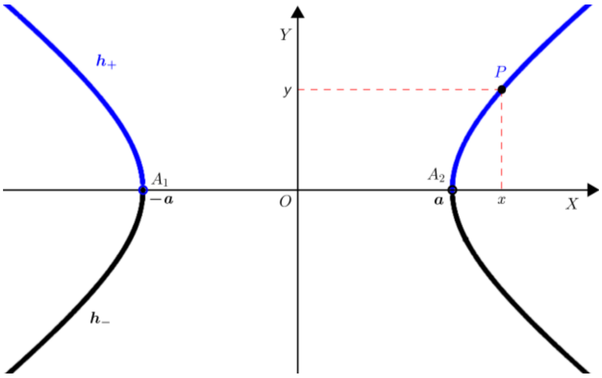

Figura 141: Hipérbole $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_+ \cup \ \boldsymbol{h}_-$

Geometricamente, o parâmetro t pode ser interpretado do seguinte modo:

Seja $\boldsymbol{p}$: $x^2 = 4py$, uma parábola de vértice na origem e reta focal paralela ao eixo *OY* (para os demais casos, faça as adaptações necessárias).

Seja t a medida, em radianos, do ângulo formado pelo semieixo positivo *OX* e o segmento *OP*, tomado no sentido anti-horário, onde *O* é o vértice da parábola e *P* $= (x, y)$ um ponto qualquer pertencente $\boldsymbol{p}$. (figura 142).

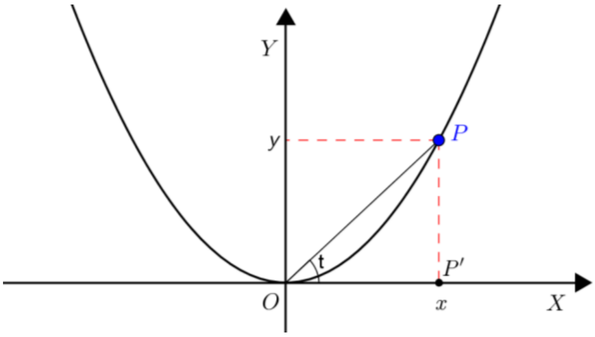

Figura 142: Paráboa $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{x^2} = \boldsymbol{4py}$

Considerando o ponto *P'* $= (x, 0)$, obtemos o triângulo *OPP'* (figura 142), retângulo em *P'*, de lados *OP*, x e y, no qual:

- *OP* é a *hipotenusa*;
- y é o *cateto oposto* ao ângulo t;
- x é o *cateto adjacente* ao ângulo t.

Do triângulo *OPP'*, em relação ao ângulo t, temos a seguinte razão trigonométrica:

$$\text{tg}\ t = \frac{cat.\ op.}{cat.\ adj.} = \frac{y}{x} \rightarrow \text{tg}\ t = \frac{y}{x} \qquad \textbf{(I)}$$

Da expressão geral da parábola, temos que:

$$x^2 = 4py \rightarrow y = \frac{x^2}{4p} \qquad \textbf{(II)}$$

Substituindo **(II)** em **(I)**, obtemos:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\frac{x^2}{4p}}{x} = \frac{x}{4p} \rightarrow x = 4p \operatorname{tg} t \qquad \textbf{(III)}$$

Substituindo **(III)** em **(II)**, obtemos:

$$y = \frac{(4p \operatorname{tg} t)^2}{4p} = 4p \operatorname{tg}^2 t$$

Portanto, as expressões das coordenadas x e y, em função do parâmetro $t \neq \frac{\pi}{2}$, são:

$$x = 4p \operatorname{tg} t \qquad \text{e} \qquad y = 4p \operatorname{tg}^2 t$$

Fazendo t percorrer os valores do intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, obtemos todos os pontos de $\boldsymbol{p}$. Logo,

$$\boldsymbol{p}: \begin{cases} x = 4p \operatorname{tg} t \\ y = 4p \operatorname{tg}^2 t \end{cases} \qquad ; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

são equações paramétricas de $\boldsymbol{p}$.

Seja agora $\boldsymbol{p} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$, uma parábola de vértice (x_0, y_0). Então temos que:

$$\boldsymbol{p}: \begin{cases} x = 4p \operatorname{tg} t + x_0 \\ y = 4p \operatorname{tg}^2 t + y_0 \end{cases} \qquad ; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

são equações paramétricas de $\boldsymbol{p}$.

3.6.1 - Parametrizando a Parábola p: $x^2 = 4py$ com o Software GEOGEBRA

Roteiro de Construção (se preferir clique aqui para assistir o vídeo)

1° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Retas Especiais e Lugar geométrico*, selecione a ferramenta  *Reta Paralela*, clique no eixo *OX* e no ponto $y = -1$ (A), para criar a reta diretriz (f) paralela ao eixo *OX*. (figura 143).

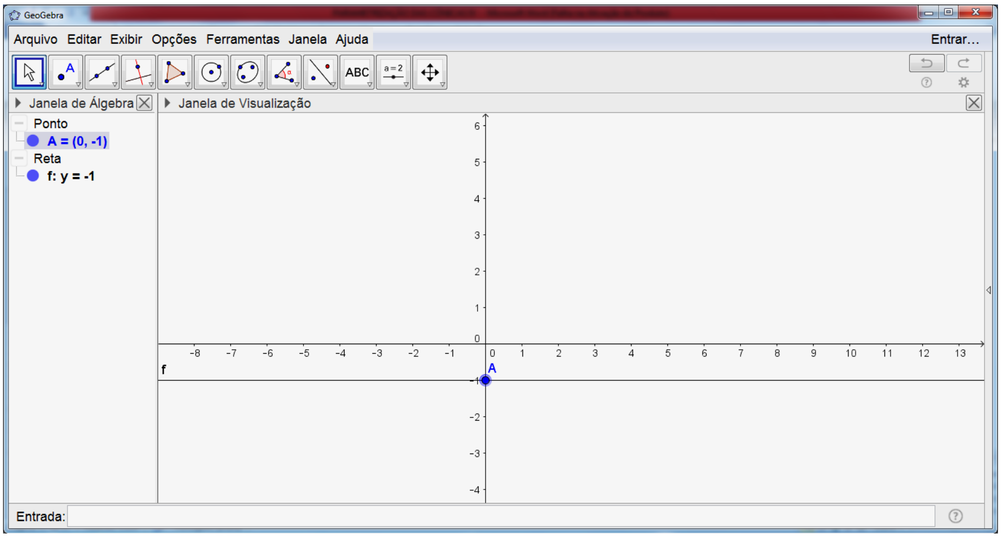

Figura 143

2° Passo: Na caixa de *Ferramentas de Cônicas*, selecione a ferramenta *Parábola*, clique na reta diretriz f e na coordenada $y = 1$, respectivamente. Construindo assim, a parábola c, de vértice na origem, parâmetro $2p = 2$ e foco B $= (0, 1)$. (figura 144).

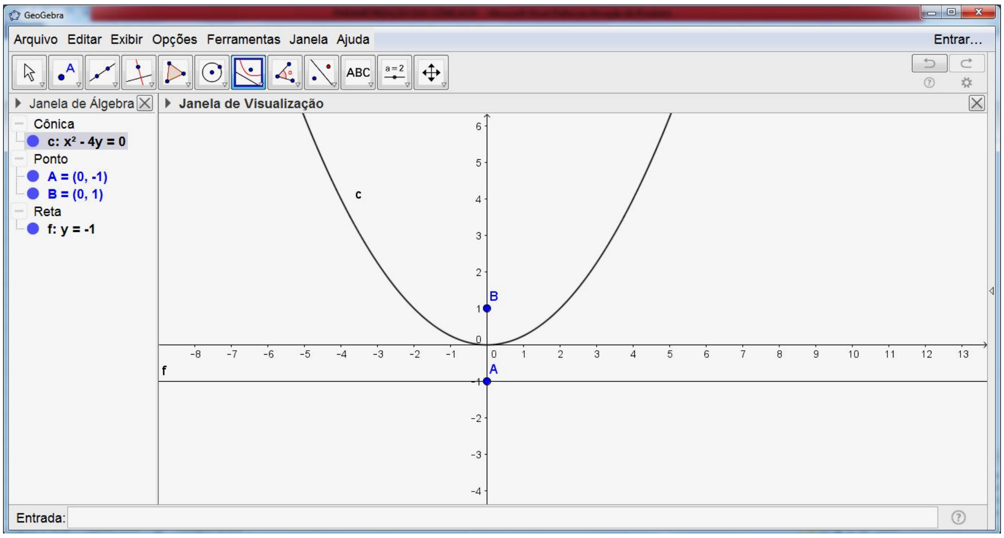

Figura 144

3° Passo: Com a ferramenta *Ponto*, clique no vértice $(0, 0)$ e num ponto qualquer da parábola (no primeiro quadrante, por exemplo). Criando assim, os pontos C e D, respectivamente. (figura 145).

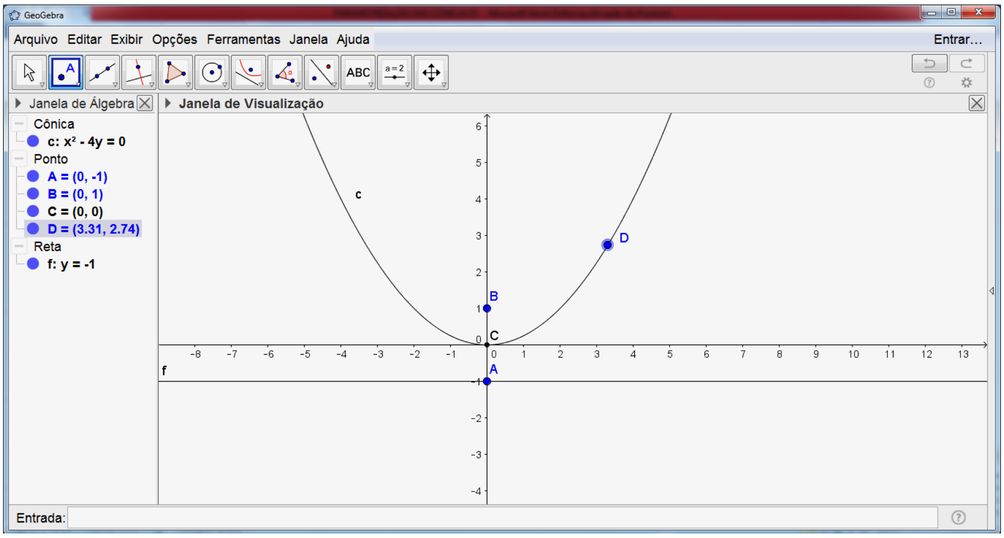

Figura 145

4° Passo: Com a ferramenta *Reta Paralela*, clique no ponto D e no eixo *OY*, para criar uma reta (g) paralela ao eixo *OY* que passa por D. Em seguida, clique novamente no ponto D e no eixo *OX*, para criar uma reta (h) paralela ao eixo *OX* que passa por D. (figura 146).

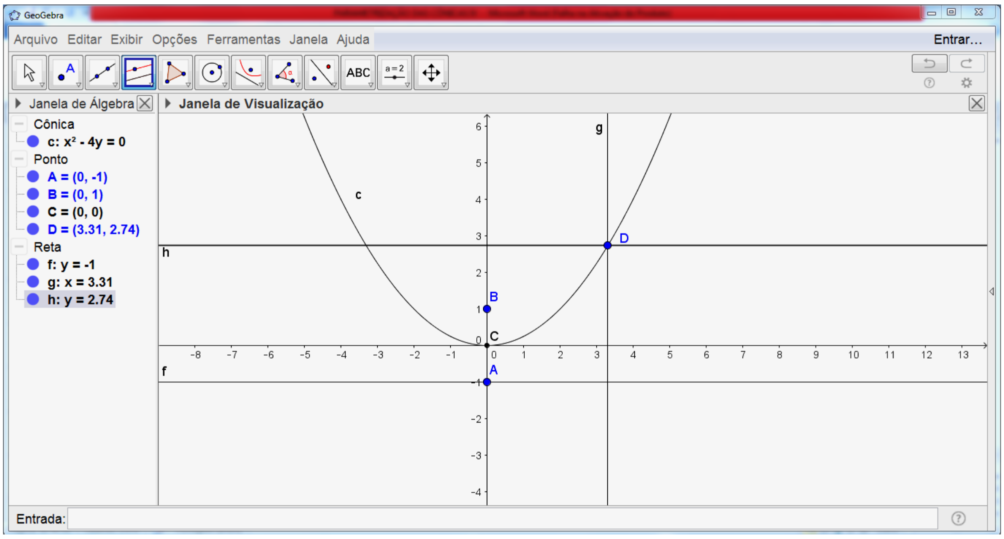

Figura 146

5° Passo: Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, clique na interseção da reta g com o eixo *OX*, e na interseção da reta h com o eixo *OY*. Criando assim os pontos E e F, respectivamente. (figura 147).

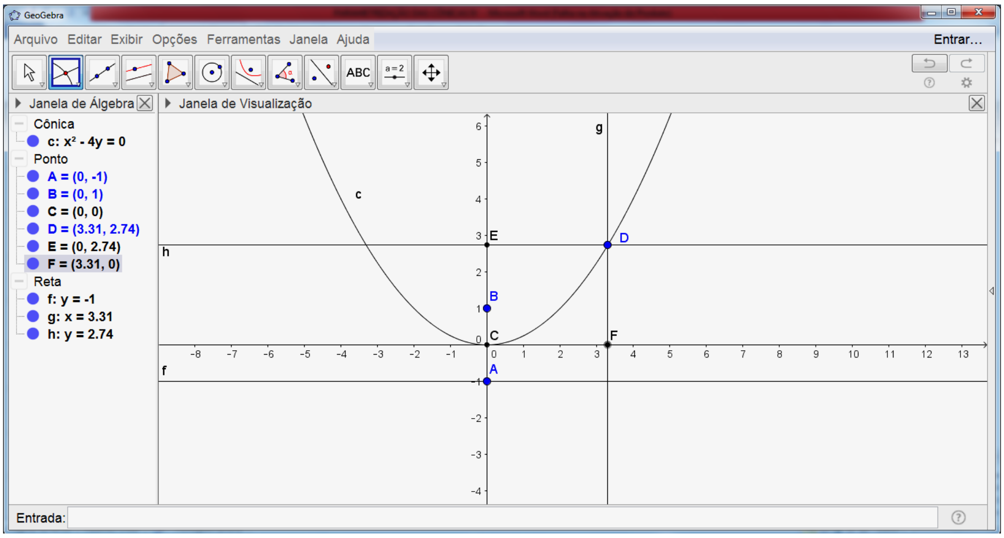

Figura 147

6° Passo: Com a ferramenta *Segmento*, construa os segmentos CD (l), DE (j) e DF (k), clicando nos pontos C e D, D e E, e D e F, respectivamente. Em seguida, oculte as retas g e h. (figura 148).

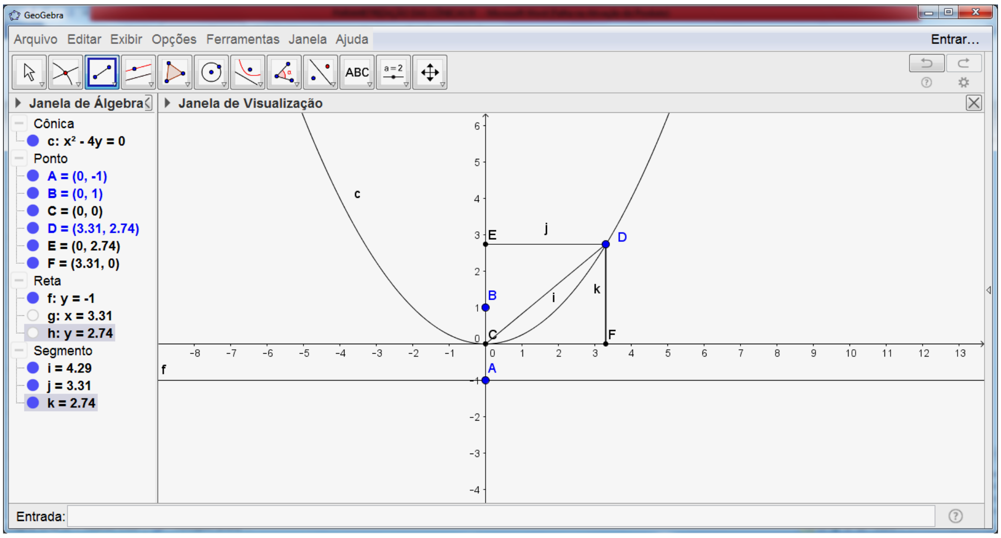

Figura 148

7° Passo: Com a ferramenta *Ponto*, clique num ponto do semieixo positivo OX (ponto $(6,0)$, por exemplo), criando assim o ponto G. Em seguida, Com a ferramenta *Ângulo*, clique nos pontos G, C e D, para criar o ângulo α. (figura 149).

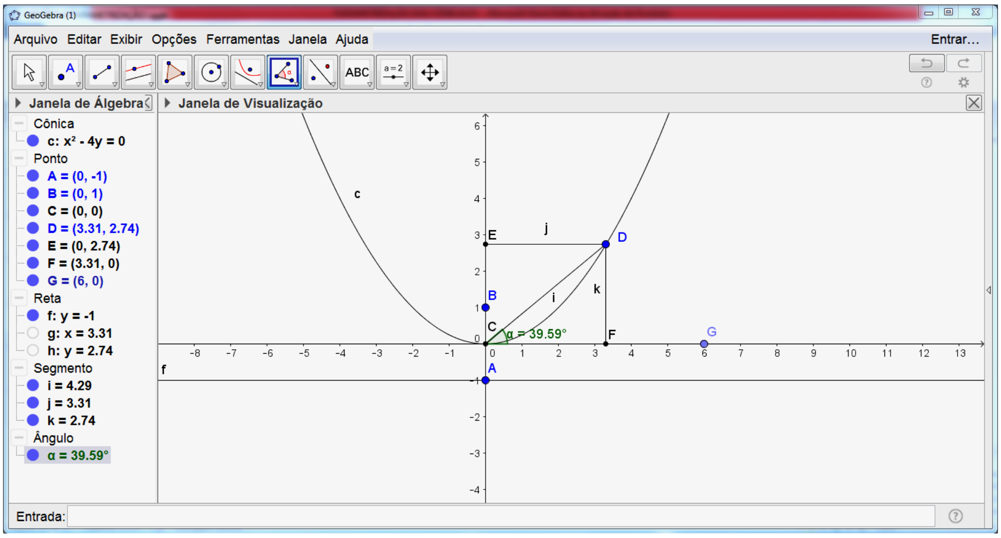

Figura 149

8° Passo: Com o botão direito do mouse, clique na área em branco da *Janela de Visualização*, que abrirá uma caixa de opções, onde, clicando em *Propriedades*, aparecerá a Janela de *Preferências* (figura 150), que nos permitirá, nos próximos passos, fazermos algumas modificações em nossa figura.

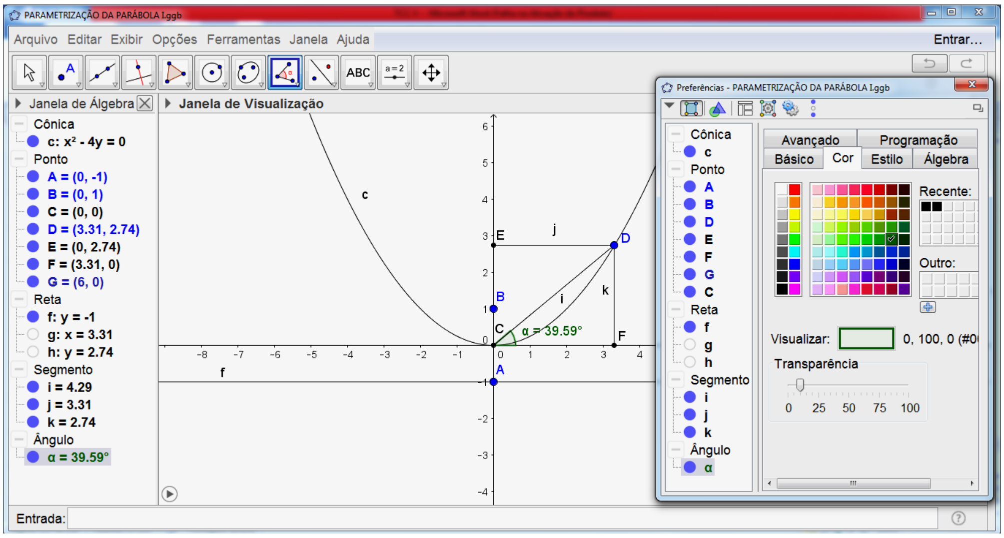

Figura 150

9° Passo: Oculte os pontos A, B e G, e os *rótulos* de todos os segmentos e da parábola. Em seguida, modifique os nomes, unidade de medida do ângulo, estilo e cores dos objetos desejados, e oculte os números dos eixos das coordenadas (veja as alterações descritas do 10° ao 14° passo do item 3.3.1). (figura 151).

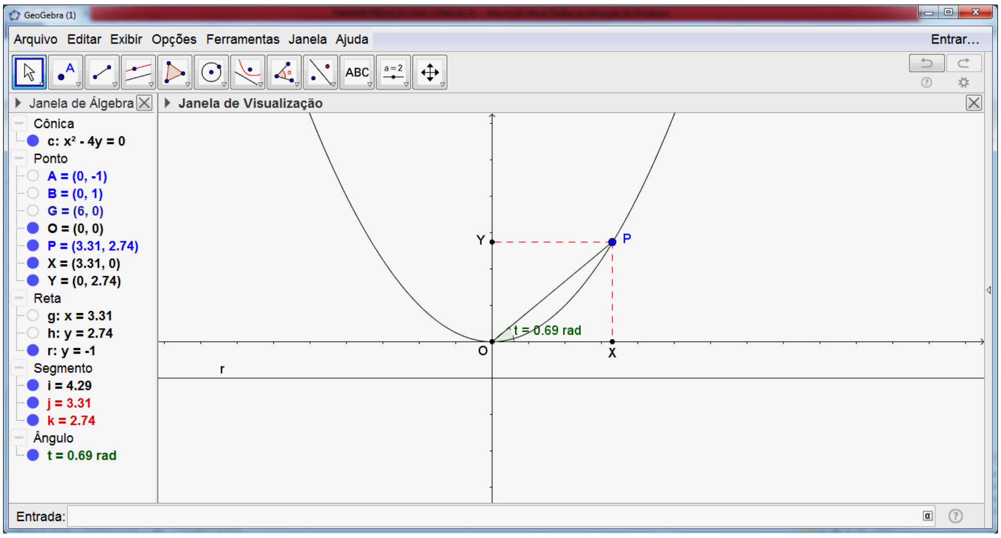

Figura 151

10° Passo: Com o botão direito do mouse, clique o ponto P e marque a opção *Animar*. Observe que, na medida em que t percorre os valores do intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, o ponto P percorre toda parábola. (figura 152)

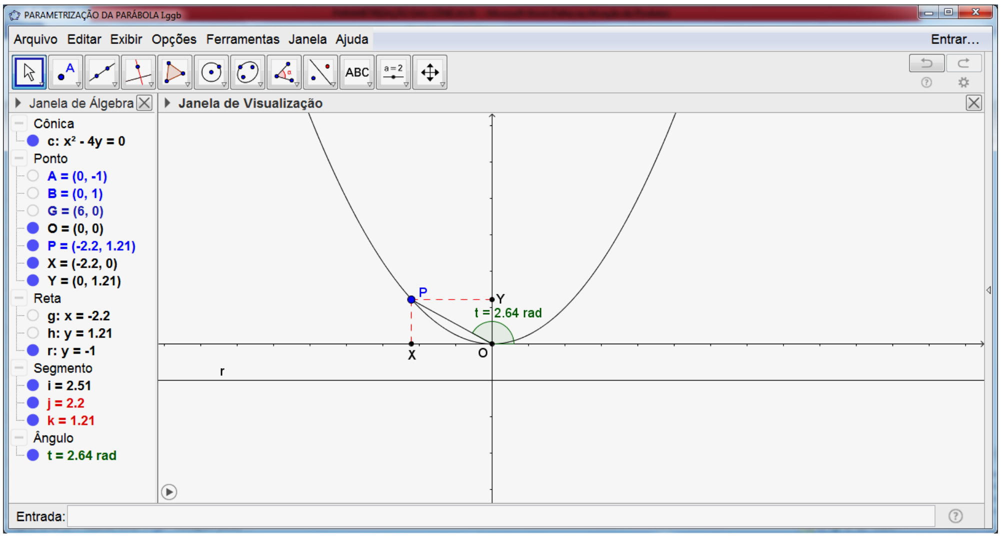

Figura 152

11° Passo: Oculte a parábola. **C**lique novamente com o botão direito do mouse no ponto P e marque a opção *Habilitar Rastro* e *animar* novamente. Observe que à medida que t percorre os valores do mesmo intervalo, P descreve toda a parábola. (figura 153)

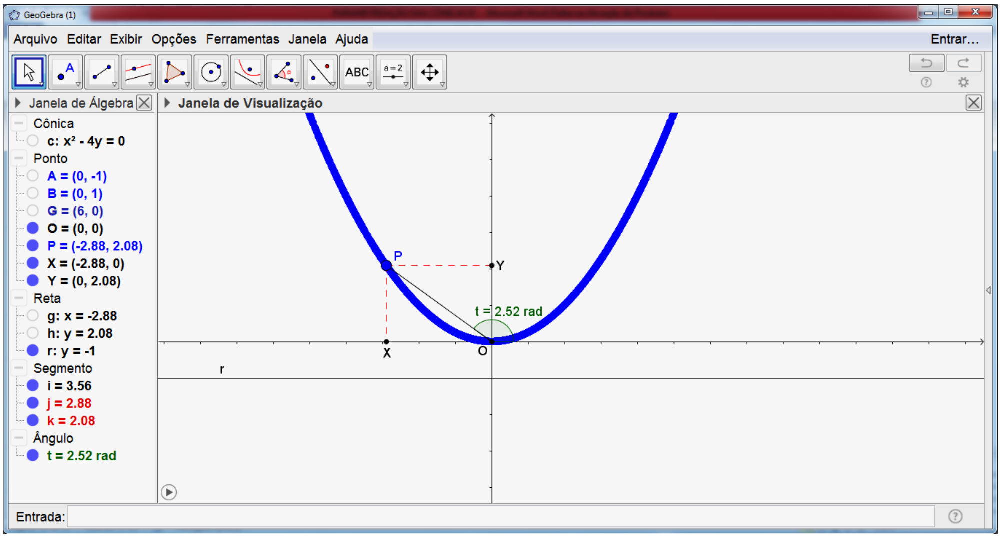

Figura 153

12° Passo: Pare a animação, limpe os rastros e salve o trabalho.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao estudarmos a disciplina de Geometria Analítica do programa PROFMAT, fomos avaliados através de um seminário, onde fiquei responsável pela apresentação do conteúdo Parametrização das Cônicas. Após, me aprofundar um pouco no assunto, percebi que se conseguisse fazer as construções das figuras, conforme descritos os processos de Parametrização, e pudesse, com animações, mostrar geometricamente como isto funcionava, ficaria mais fácil o entendimento por parte dos meus colegas da turma.

Vi, que o GEOGEBRA era a ferramenta ideal para realizar estas construções, mas, como tive pouco tempo, não consegui fazer as figuras como desejava, pois, também não conhecia bem o programa. Mesmo assim, expus o conteúdo da forma que deu.

Foi aí, que tive a ideia para o Trabalho de Conclusão do Curso, refazer todas as figuras, e através de roteiros, descrever passo a passo todo o processo de construção. Sendo que esta ideia foi de imediato aceita pelo meu orientador, o prof. Dr. Edicarlos Miranda de Souza, onde a colocamos em prática.

Cada passo aqui descrito sugere apenas uma maneira para a construção e animação das figuras, sendo que estas podem ser realizadas de outras formas e usando outras ferramentas, bem como modificar a ordem das etapas de construção.

Nos roteiros didáticos, deixamos de descrever alguns passos que se repetiam nas construções apresentadas, para que não se tornasse muito repetitivo, sendo que a ideia central é fazer com que os pontos, segmentos e ângulos se movimentem harmonicamente. Quanto aos demais aspectos visuais, tais como nomenclaturas, espessuras formatos e cores dos objetos, são opcionais a quem se propor a fazer as construções.

A maior dificuldade encontrada para a realização e conclusão deste trabalho, foi construir uma figura para a Parametrização da Hipérbole, tal que, num único clique, mostrasse que à medida que os valores do ângulo t variassem no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, o ponto P percorreria toda a hipérbole.

Por fim, lembramos que este roteiro é direcionado diretamente a professores e alunos que não possuem habilidades com o programa GEOGEBRA.

REFERÊNCIAS

AQUINO, Luiz C.M. de. **Geometria Analítica**: 38. Equação Paramétrica das Cônicas, 2012. Disponível no site: <https://www.youtube.com/watch?v=HkEC65cVhl4>. Acesso em 14 de Set. 2015.

BOYER, Carl Benjamin, 1907 – B785h. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgar Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

DA CRUZ, Luiz Francisco. **Cálculo Vetorial e Geometria Analítica:** Cônicas **-** Cap.8. Departamento de Matemática – UNESP / Bauru. Disponível no site: <http://wwwp.fc.unesp.br/~lfcruz/GA_CAP_08.pdf>. Acesso em: 04 de Maio de 2016.

DANTAS, Sérgio; FERREIRA, Guilherme. **Interface e Ferramentas** - Capítulo 1. Disponível no site: <www.ogeogebra.com.br/arquivos/01-interfaceeferramentas.pdf>. Acesso em: 12 de jun. 2016.

DELGADO GÓMEZ, Jorge J.; FRENSEL, Kátia Rosenvald. **Geometria Analítica II:** Aula I – Equações Paramétricas das Cônicas. Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense – IM-UFF. Rio de Janeiro-RJ, 2008. Disponível no site: <http://www.professores.uff.br/katia_frensel/aulasga2/ga2-aula1.pdf>. Acesso em 16 de Set. 2015.

ECCOM. **Revista de Educação Cultura e Comunicação.** Faculdades Integradas Teresa de D`Ávila – Vol.4, n.7 (2013) Lorena, SP: Curso de Comunicação Social, 2013.

EVES, Howard. **História da Geometria.** Tradução Higino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1992. – (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v.3).

FRENSEL, Katia; DELGADO, Jorge. **Geometria Analítica.** NEAD – Núcleo de Educação a Distância, Curso de Licenciatura em Matemática – UFMA, 2011. Disponível no site: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/geometria-analitica-ufma.pdf >.

HOHENWARTER, Markus. **GeoGebra-Informações**. Última modificação: 19 de Abril de 2007. Tradução para Português: Hermínio Borges Neto, Luciana de Lima, Alana Paula Araújo Freitas, Alana Souza de Oliveira. Disponível no site: <https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf>. Acesso em: 15 de Jun. de 2016.

________________________; HOHENWARTER, Judith. **Ajuda GeoGebra -** Manual Oficial da Versão 3.2. Tradução e adaptação para português de Portugal António Ribeiro. Última modificação: 04/05/2009. Disponível no site: <https://www.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 22 de Jun. 2016.

IEZZI, Gelson Iezzi. **Fundamentos da Matemática Elementar.** São Paulo, Atual ed., 1977-78.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias**: O novo ritmo da informação. Campinas, SP: Papirus, 2007. 141 p.

LEONARDI, Rosângela. **O professor PDE e os Desafios da Escola Pública Paranaense**, 2010 vol.1: O uso do software GeoGebra nas aulas de geometria plana da 7^a série / 8^o ano do ensino fundamental. Disponível no site: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_unicentro_mat_artigo_rosangela_leonardi.pdf>.

GEOGEBRA (org). **Manual GeoGegra 5.0.** Disponível no próprio programa, clicando no menu *Ajuda*, ou no site: <https://www.geogebra.org/manual/pt/Manual>.

PESQUISA SOBRE O USO DA INTERNET POR CRIANÇAS E ADOLESCENTES NO BRASIL [livro eletrônico]. **TIC Kids Online Brasil 2014**. Coordenação executiva e editorial Alexandre F. Barbosa. São Paulo, 2015. Disponível em: <http://cetic.br/media/pdfs/apresentacoes/tic_kids_online_brasil_2014_hangout_imprensa.pdf>Acesso em: 13 de Abr. 2016.

PROBLEMA III- UFRGS. **Aplicações – Hipérboles**: Telescópios Refratores x Refletores. Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Disponível no site:

<http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo4/prob_aplicas2.html>. Acesso em: 14 de Abr. 2016

QUARANTA NETO, Francisco; GUIMARÃES, Luiz Carlos. **Tradução comentada da obra "novos elementos das seções cônicas" (Philippe de La Hire – 1679) e sua relevância para o ensino da matemática**: Preposição XVII de hipérbole. Natal: IFRN editora, 2013.

SATO, Jocelino. **As Cônicas e suas Aplicações**: Aspectos Históricos e a Importância das Cônicas. Faculdade de Matemática – FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia – UFU. Uberlândia, Minas Gerais, 2004. Disponível no site: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/node2.html>. Acesso em 05 de Abr. 2016.

STEINBRUCH, Alfredo; Winterle, Paulo. **Geometria analítica** 2.ed. – São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

VENTURI, Jacir J., **Cônicas e Quádricas** - 5^a ed. 243p. Curitiba, 1949. Disponível no site: <geometriaa.dominiotemporario.com/livros/cq.pdf>. Acesso em 06 de Abr. 2016.