PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

AS DIFERENTES ABORDAGENS DO ENSINO DE PROPORCIONALIDADE

Por

Hércules Luiz Junior

Orientador: José João Rossetto, Dr.

Curitiba

2016

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

As Diferentes Abordagens do Ensino da Proporcionalidade

Hércules Luiz Junior

Departamento de Matemática – UFPR

81531-990, Curitiba, PR

Brazil

e-mail: hercules.junior@ufpr.br

Orientador: José João Rossetto, Dr.

Resumo:

O estudo da proporcionalidade se faz corrente para a vida do educando desde as séries iniciais da Educação Básica, quando ao observar objetos em seu meio e compará-los com registros gráficos do mesmo, em escala, percebe uma regra de representação (escala) a qual refere-se a uma situação de proporcionalidade, até aplicações de física e o estudo das relações entre as grandezas desta área do conhecimento nas séries finais da Educação Básica. Sendo assim, a proporcionalidade se faz um objeto de estudo de grande importância acadêmica e social para o estudante. Neste trabalho, visa-se questionar de quais formas podemos abordar uma situação problema que envolva relação entre grandezas proporcionais. Prefere-se não aqui discutir qual o melhor método de ensino, o de mais fácil assimilação do educando ou ainda qual o mais eficaz nas resoluções, pois estes questionamentos nos remetem a uma educação tradicionalista de repetição. O que se quer neste artigo é o desenvolvimento de diferentes habilidades de resolução para que tenhamos um cidadão competente no que se refere a relação entre grandezas proporcionais. Serão apresentados neste texto, o método conhecido como “regra de três”, o método da redução à unidade e a aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. No fim do documento apresentaremos uma seção de resolução de problemas, do livro Temas e Problemas Elementares, de Elon Lages de Lima *et al* [1], utilizando-se dos métodos abordados durante o desenvolvimento do artigo.

Palavras chave: Proporcionalidade, métodos de resolução, resolução de problemas.

1. INTRODUÇÃO

Ao se estudar um objeto matemático e ao se ensinar este objeto é comum nos questionarmos sobre de que forma ele pode auxiliar no desenvolvimento social, acadêmico ou humano do educando. Mais forte destes três pontos, sempre será a aplicação contextualizada deste conceito, visto que, em grande parte, os estudantes da Educação Básica, visam o estudo de novos conhecimentos sob a perspectiva do "para que serve isto? ". ZABALA (1998) [2] destaca que a indispensabilidade do sentido que um determinado conteúdo deva ter, nem mesmo que para apenas gerar uma nova aprendizagem, destacando assim que o educando deve saber para que serve determinado objeto de estudo.

A fonte dos nossos estudos não é a busca por inventar algo novo sem fundamento ou aprender algo sem significado, mas sim a busca por soluções a problemas que enfrentamos em nosso cotidiano. Desta forma, o estudo da matemática visa formar academicamente, socialmente e humanamente, pessoas capazes de aplicar seus conceitos e raciocínios em situações problematizadoras de seu meio social.

GRANDO (1995) [3] enfatiza que *"quando alguém resolve um problema de matemática, estamos diante de uma pessoa que pensa. A Matemática que um sujeito produz não é independente de seu pensamento enquanto ele a produz"*, concluindo que apesar da matemática ser ensinada na escola ela, também, é aprendida fora da escola.

Sob este ponto de vista, a proporcionalidade é um objeto de estudo da matemática de importante aplicação contextualizada aos seus investigadores como afirma WALLE (2009) [4], "o raciocínio proporcional é considerado pedra fundamental do currículo elementar e uma base do pensamento algébrico" (p.382). Para o autor, o raciocínio proporcional é o momento no qual o aluno desenvolve a habilidade de manipular as relações aritméticas multiplicativas, sendo assim, para ele, um dos objetivos mais importantes do ensino da matemática no Ensino Fundamental.

O estudo da relação proporcional entre grandezas é algo presente em nosso cotidiano, além de estimulador para o estudo de relações entre grandezas não proporcionais e de aplicação acadêmica nos mais diversificados níveis. Problemas de proporcionalidade surgem naturalmente na natureza, nas ciências e tecnologias, por exemplo: a forma de discócito da célula vermelha do sangue é ideal quanto à proporção da área de superfície da membrana e seu volume, possibilitando um excepcional rendimento nas trocas gasosas das células do nosso corpo. (ROSSETTO, 2003) [5]. De acordo com os PCN (1997, p. 38) [6] de Matemática do Ensino Fundamental II, *"o fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis da proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real"*

Observando a grade curricular da educação básica, o estudo proporcional se faz presente em todos os níveis, seja sob a percepção indutiva ou algébrica, ou ainda geométrica. Apresenta-se mais explicitamente no 7º ano do Ensino Fundamental II, logo após o desenvolvimento inicial do conhecimento algébrico (PCN's) [6], geralmente estudado como o "conteúdo regra de três".

Contudo, o estudo de proporcionalidade chega ao seu ápice no desenvolvimento do conceito de funções afim, mais especificamente das funções lineares, com o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (TFP), na 1ª série do Ensino Médio.

O princípio deste artigo é apresentar diferentes métodos de resolução de problemas envolvendo relações entre grandezas proporcionais: Aplicação direta do TFP, regra de três e redução a unidade. Para isto, iremos segmentar a estrutura do texto em três etapas:

Inicialmente, iremos abordar a fundamentação teórica do ensino da proporcionalidade e a fundamentação conceitual da mesma, expondo procedimentos de resolução e a demonstração de teoremas e corolários.

Num segundo momento, será apresentada uma seção de resolução de problemas de proporcionalidade valendo-se dos três métodos abordados para que o educador possa avaliar as diferentes formas de raciocinar e desenvolver estes conceitos. Os problemas referem-se ao livro "Temas e Problemas Elementares" de Elon Lages de Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado [1], de modo mais específico, são encontrados no capítulo número 1 (Proporcionalidade e Porcentagem) da referida obra.

Finalizaremos com resoluções de exercícios de outras áreas do conhecimento, por proporcionalidade visando mostrar de que forma este conceito pode nos auxiliar em diferentes áreas de estudo.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O ensino da proporcionalidade

Os estudos a respeito de proporcionalidade se iniciam, formalmente, de acordo com os PCN's [6], no sétimo ano do Ensino Fundamental II, abordando os seguintes tópicos: razão e proporção, donde são exploradas aplicações com escala, velocidade média, densidade demográfica; propriedades envolvendo proporções; relações entre grandezas proporcionais, construções geométricas proporcionais e resolução de problemas envolvendo proporcionalidade.

Quanto aos tópicos relações entre grandezas proporcionais e resolução de problemas envolvendo proporcionalidade, pode-se observar que, na maioria das vezes, materiais didáticos e educadores os apresentam aos estudantes pelo método milenar conhecido como *regra de três*. Tal procedimento exige diversas condições a serem observadas para a resolução: *é uma regra de três simples, composta, direta, inversa, mista?*.

Observa-se, então, a geração de um ambiente de memorização de fórmulas de resolução para cada caso possível, não se valendo de um ponto importante da proporcionalidade que é a forma sob a qual as grandezas envolvidas se relacionam e se são realmente um caso de proporcionalidade. Infelizmente é trabalhado apenas a resolução pelo método e não a análise da situação sob o viés da proporcionalidade para sequente resolução.

É oportuno refletir se apenas este método de resolução capacita os educandos de forma a desenvolver integralmente a habilidade de solucionar problemas contextualizados e reais envolvendo os conceitos de proporcionalidade. Desenvolver diferentes métodos de resolução é possibilitar diferentes visualizações e interpretações de uma mesma situação, aumentando assim o nível cognitivo do estudante sobre o conceito abordado.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do sétimo ano destacam a importância da utilização de estratégias que desenvolvam o raciocínio proporcional através de fenômenos práticos e do cotidiano. O documento realça ainda que o educando deve, ainda, interpretar estes fenômenos de diferentes formas, analisando as relações entre as grandezas envolvidas e elaborando diferentes estratégias de solução.

Isto significa confrontar um conhecimento específico e memorizado com uma aprendizagem significativa, a qual se dá, segundo WALLE (p. 382) [4], pelo desenvolvimento de atividades que usem de variadas situações e contextos que possibilitem uma resolução sem uso de únicas regras ou fórmulas.

Portanto, se faz necessário que os alunos dominem e compreendam os conceitos de proporcionalidade e não somente um procedimento de resolução memorizado por regras e fórmulas. *"Fazer matemática não é reconhecer os problemas típicos de determinado capítulo, aplicando-lhes, portanto, determinadas fórmulas."* (D'AMBROSIO) [7]. Ou seja, fazer com que o aluno seja partícipe na tessitura de seu próprio conhecimento, levando em conta os seus saberes anteriores, o contexto, os quais serão essenciais para um ambiente de investigação. ZABALA (1998) [2] reforça ainda este ponto de vista, só ocorre quando possibilitado ao educando acesso a exercícios progressivos que usem de diferentes ações formadoras de procedimentos, técnicas e estratégias de resolução.

Para isto, podemos avaliar o saber, o fazer e o ser do educando no desenvolvimento de cada conceito, todos necessários no processo educativo, porém um precede outro. O saber passa por um processo de mecanização, em que conhecimentos são testados *"sempre da mesma forma",* o fazer *"implica em dominar, em pensamento, as mesmas situações até resolver os problemas desencadeados por elas "*(GRANDO,1995) [3]; e o ser passa pela forma como o educando irá utilizar este conhecimento em seu meio social (ZABALA,1998) [2]

Quando o educando percebe diferentes formas de resolução, e a possibilidade de escolha pelo método mais simples, em sua opinião, para a solução de um problema, compreendendo as variáveis e conceitos envolvidos, podemos verificar uma aprendizagem significativa.

De fato, a resolução de problemas que envolvem proporcionalidade precisa ser resultado da reflexão e da compreensão sobre conceitos relacionados ao tema. Assim sendo, buscamos apresentar três diferentes métodos de resolução de problemas que envolvam proporcionalidade, os quais denominamos regra de três, redução à unidade e aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade. Estes podem ser apresentados aos educandos do sétimo ano do Ensino Fundamental II, os quais já possuem conhecimento algébrico e geométrico suficientemente necessários para isto; e desenvolvido com educando do Ensino Médio em nível acadêmico mais elevado visto o conhecimento de funções lineares e de conceitos físicos adquiridos logo na primeira série deste nível de ensino.

2.2 Proporcionalidade: Conceitos e propriedades

Nesta seção iremos apresentar conceitos que estruturam e definem os estudos de proporcionalidade. Vale destacar que alguns destes conceitos podem ser apresentados aos educandos durante a abordagem do assunto, inclusive com suas respectivas demonstrações, de acordo com o nível curricular de ensino no qual o aluno se encontra; ou ainda são pré-requisitos já adquiridos, em especial para os educandos do Ensino Médio.

Definição 1: Suponhamos que duas grandezas x, y estão relacionadas por uma função que a cada valor de x se associe um único valor bem determinado de y. Neste caso, diremos que y é função de x e denotaremos por $y = f(x)$.

Definição 2: Dada uma função $f: X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, nomeamos a função como:

i. *Crescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

ii. *Decrescente* quando $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

iii. *Monótona não-decrescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

iv. *Monótona não-crescente* quando $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

**Nos casos i. e ii. diremos que a função é estritamente monótona.*

Definição 3: (Grandezas diretamente proporcionais) Suponha duas grandezas x, y de forma que $y = f(x)$. Diremos que y é diretamente proporcional à x quando são satisfeitas as seguintes condições:

i. y é uma função crescente de x;

ii. *Se* $y = f(x)$, então $c \cdot f(x) = f(c \cdot x)$ para todo $c \in \mathbb{R}_+$.

Definição 4: (Grandezas inversamente proporcionais) Suponha duas grandezas x, y de forma que $y = f(x)$. Diremos que y é inversamente proporcional à x quando são satisfeitas as seguintes condições:

i. y é uma função decrescente de x;

ii. *Se* $y = f(x)$, então $f(x)/c = f(c \cdot x)$ para todo $c \in \mathbb{R}_+*$, sendo $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais positivos.

Definição 5: (Proporcionalidade) Uma proporcionalidade é uma função $f: X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, tal que para todo $x \in X$ e $c \in \mathbb{R}$ temos $f(cx) = c \cdot f(x)$ [proporcionalidade direta] ou temos $f(cx) = f(x)/c$, se $c \neq 0$ [proporcionalidade inversa].

A definição acima mencionada é a mais comumente utilizada nos materiais didáticos ao abordar o tópico de proporcionalidade, contudo, basta que a condição $f(cx) = c \cdot f(x)$ seja verificada para o conjunto dos números inteiros, como visto no teorema que segue.

Teorema 6: (Teorema Fundamental da Proporcionalidade) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

i. $f(nx) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

ii. Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

iii. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

Demonstração:

(*i.* $\Rightarrow$ *ii.)* Tome $q = m/n$, um número racional, donde $m = nq$. Por *(i.)* temos que $m \cdot f(x) = f(mx) = f(nqx) = n \cdot f(qx)$, portanto $f(qx) = \frac{m}{n} f(x) = qf(x)$. Agora, assuma $a = f(1)$, o que nos garante $a > 0$ por f crescente e que, por *(i.)* $f(q) = f(q \cdot 1) = q \cdot f(1) = aq$. Desta forma, $f(x) = ax$, para todo x racional. Tome x irracional e suponha por absurdo que $f(x) \neq ax$. Assuma que $f(x) > ax$, logo $\frac{f(x)}{a} > x$. Dado $q \in]x, \frac{f(x)}{a}[$, q racional, obtemos $f(x) > aq > ax \Rightarrow f(x) > f(q) > ax$. Porém, por hipótese, f é crescente, portanto $q > x \Rightarrow f(q) > f(x)$, O que nos leva a um absurdo. Para $f(x) < ax$ o procedimento é análogo. Logo quando $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(*ii.* $\Longrightarrow$ *iii.)* Podemos afirmar, pelo item *(ii.)* que $f(x+y) = f\big((x+y)\cdot 1\big) = (x+y)\cdot f(1) = x\cdot f(1) + y\cdot f(1) = f(x\cdot 1) + f(y\cdot 1) = f(x) + f(y)$. Logo $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;

(*iii.* $\Longrightarrow$ *i.)* Tome n inteiro e x um real. Assuma $n \geq 0$, logo temos que $f(nx) = f(x + x + \cdots + x)$, com n parcelas x, portanto $f(nx) = f(x) + f(x) + \cdots + f(x) = n\cdot f(x)$. Observe ainda que $f\big((-n)\cdot x\big) = f\big(n\cdot(-x)\big) = f(-x) + f(-x) + \cdots + f(-x) = n\cdot f(-x) = -n\cdot f(x)$. Logo $f(nx) = n\cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

Observe que a condição (*ii.)* do teorema acima demonstrado nos garante que f é uma função linear.

Corolário 7: Se $f(cx) = c\cdot f(x)$, para quaisquer $c, x \in \mathbb{R}$, então $f(x) = ax$, e $a = f(1)$.

Demonstração: Pelo TFP temos que $f(cx) = a\cdot(cx)$, logo podemos afirmar que $f(cx) = a\cdot(cx) = c\cdot(ax) = c\cdot f(x)$, bastando tomar $a = f(1)$.

Assim, para atestar que f é uma proporcionalidade, basta verificar as condições *(i.)* e *(ii.)* do TFP.

Teorema 8: As afirmações seguintes sobre $y = f(x)$ são equivalentes:

i. y é diretamente proporcional a x;

ii. Existe um número k, chamado de *constante de proporcionalidade entre* x *e* y, tal que $f(x) = k\cdot x$ para todo x

Demonstração:

(i.⟹ii.) Como y é diretamente proporcional a x, temos que $f(cx) = c\cdot f(x)$, logo, pelo TFP, temos que dado $a = f(1)$, $f(x) = f(x\cdot 1) = x\cdot f(1) = ax$. Portanto, basta tomar $k = f(1)$.

(ii.⟹i.) Pelo TFP, temos que $k = f(1) > f(0) = f(0\cdot 0) = 0\cdot f(0) = 0$. Assim $x < x' \Longrightarrow kx < kx'$, logo $f(x) < f(x')$, o que nos garante que f é crescente.

Ainda, pelo fato de $f(cx) = kcx = ckx = c \cdot f(x)$ nos garante que $y = f(x)$ é diretamente proporcional a x. Para $k < 0, k = f(1)$, $x < x' \Longrightarrow kx > kx'$, logo $f(x) > f(x')$.

Teorema 9: As afirmações seguintes sobre $y = f(x)$ são equivalentes:

i. y é inversamente proporcional a x;

ii. Existe um número k, chamado de *constante de proporcionalidade entre* x *e* y, tal que $f(x) = k/x$ para todo x

Demonstração: Basta afirmar que se y é inversamente proporcional a x, então y é diretamente proporcional a $1/x$ com $x \neq 0$ e seguir procedimento análogo a demonstração do Teorema 8.

Definição 10: Seja z uma função das variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$; com $n \in \mathbb{N}$ $[z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)]$, diremos que :

a. z é diretamente proporcional a x_1 quando:

i. Para quaisquer valores fixados de $x_2, x_3, \dots, x_n$, a grandeza z é uma função crescente de x_1. $[x_1' < x_1'' \rightarrow f(x_1', x_2, x_3, \dots, x_n) < f(x_1'', x_2, x_3, \dots, x_n)]$;

ii. Para quaisquer $x_1', x_2, x_3, \dots, x_n$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(n \cdot x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = n \cdot f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

b. z é inversamente proporcional a x_1 quando:

i. Para quaisquer valores fixados de $x_2, x_3, \dots, x_n$, a grandeza z é uma função decrescente de x_1. $[x_1' < x_1'' \rightarrow f(x_1', x_2, x_3, \dots, x_n) < f(x_1'', x_2, x_3, \dots, x_n)]$;

ii. Para quaisquer $x_1', x_2, x_3, \dots, x_n$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $f(n \cdot x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)/n$.

Teorema 11: Seja $z = f(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ com $n, p \in \mathbb{N}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i. z é diretamente proporcional a $x_1, x_2, \dots, x_p$ e inversamente proporcional a $x_{p+1}, \dots, x_n$;

ii. Existe uma constante de proporcionalidade k tal que $z = k \cdot \frac{x_1, x_2, \dots, x_p}{x_{p+1}, \dots, x_n}$.

Demonstração: *(i. $\Longrightarrow$ ii.)* Por $z = f(x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ e pelo TFP temos a equivalência $z = \frac{x_1, x_2, \dots, x_p}{x_{p+1}, \dots, x_n} f(1,1,1, \dots, 1)$. Basta tomar $k = f(1,1,1, \dots, 1)$.

(ii.$\Longrightarrow$i.) Este passo segue de imediata demonstração a partir da aplicação do Teorema 8 e do Teorema 9.

Método da Regra de Três:

a. Dada uma proporcionalidade direta $y = kx$ com $x' \Longrightarrow y'$ e $x'' \Longrightarrow y''$, logo $\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''}$.
b. Dada uma proporcionalidade inversa $y = k/x$ com $x' \Longrightarrow y'$ e $x'' \Longrightarrow y''$, logo $\frac{x'}{x''} = \frac{y''}{y'}$.
c. Dada uma proporcionalidade mista $y = k \cdot \frac{x_1, x_2, \dots, x_p}{x_{p+1}, \dots, x_n}$ com $(x_1', x_2', \dots, x_p', x_{p+1}', \dots, x_n') \to y'$ e $(x_1'', x_2'', \dots, x_p'', x_{p+1}'', \dots, x_n'') \to y''$, logo $\frac{y'}{y''} = \frac{x_1'}{x_1''} \cdot \frac{x_2'}{x_2''} \cdot \dots \cdot \frac{x_p'}{x_p''} \cdot \frac{x_{p+1}''}{x_{p+1}'} \cdot \dots \cdot \frac{x_n''}{x_n'}$.

Demonstração:

a. Temos por hipótese que $y' = k \cdot x' \; e \; y" = k \cdot x"$, logo $k = y'/x' e \; k = y"/x".\ Portanto\ y'/x' = y"/x"$.
b. $Temos\ por\ hipótese\ que\ y' = k/x'\ e\ y" = k/x",\ logo\ k = y' \cdot x' e\ k = y" \cdot x".\ Portanto\ x'/x" = y"/y'$.
c. Temos por hipótese que $y' = k \cdot \frac{x_1', x_2', \dots, x_p'}{x_{p+1}', \dots, x_n'}$ e que $y" = k \cdot \frac{x_1", x_2", \dots, x_p"}{x_{p+1}", \dots, x_n"}$, logo $k = y' \cdot \frac{x_{p+1}', \dots, x_n'}{x_1', x_2', \dots, x_p'} = y" \cdot \frac{x_{p+1}", \dots, x_n"}{x_1", x_2", \dots, x_p"}$. Portanto $\frac{y'}{y''} = \frac{x_1'}{x_1''} \cdot \frac{x_2'}{x_2''} \cdot \dots \cdot \frac{x_p'}{x_p''} \cdot \frac{x_{p+1}''}{x_{p+1}'} \cdot \dots \cdot \frac{x_n''}{x_n'}$.

*Observe que para a resolução por regra de três, não se faz importante o conhecimento do valor da constante de proporcionalidade k. Basta que, conhecidas todos os valores das variáveis exceto uma, apliquemos alguma das proporções acima expostas.

Redução à unidade:

*Neste método primeiro determinamos o valor da constante de proporcionalidade por meio gráfico (diagrama) e em seguida calculamos a variável desconhecida.

Exemplo: Um barco com 7 pessoas, à deriva no mar, tem suprimento de água suficiente para 28 dias. Após 3 dias, o barco recolhe 2 náufragos. Se o consumo diário de água por pessoa se mantiver o mesmo, em quantos dias acabará a reserva?[1]

Solução: Faltando 25 dias para o esgotamento de água do grupo de 7 pessoas, mantendo-se o controle do consumo de água, 2 novas pessoas se juntam ao grupo. Observa-se que as grandezas envolvidas (dias para esgotamento de água e quantidade de pessoas) são inversamente proporcionais. Logo:

	Dias para esgotamento de água	*Quantidade de pessoas*	
$\times 7$	*25*	*7*	$: 7$
$: 9$	*175*	*1*	$\times 9$
	$\approx 19,44$	*9*	.

Assim, para os 9 tripulantes, estima-se que a água se esgotará em aproximadamente 19 dias.

** Note que a constante de proporcionalidade neste exercício é dada pela duração da água na embarcação para uma única pessoa (2ª linha do diagrama).*

Aplicação do Teorema 11 e TFP:

Método semelhante à redução à unidade, porém por registro exclusivo algébrico, determinamos o valor da constante de proporcionalidade e deduzimos, a partir de uma situação inicial, uma fórmula representativa da situação avaliada. Em seguida determinamos a solução do problema. Método eficiente para estudo das relações entre grandezas físicas, como veremos na quarta seção.

Exemplo: Empregando 3 equipes, consegue-se construir 5 km de estrada em 7 dias, trabalhando 8 horas por dia. Usando 4 equipes, durante 10 dias, mas trabalhando apenas 6 horas por dia, quantos quilômetros de estrada são construídos, supondo-se a sua largura constante? [6]

Solução: Primeiramente, deve-se avaliar a relação entre as grandezas, as quais podemos verificar que a quantidade de quilômetros construídos (q) *é diretamente proporcional ao número de equipes* (e)*, a quantidade de dias* (d) *e a quantidade de horas trabalhadas por dia* (h)*. Logo, pelo TFP e pelo Teorema 11 temos:*

$$q = k \cdot (e \cdot d \cdot h)$$

Onde k *é a constante de proporcionalidade, portanto:*

$$k = \frac{q}{e \cdot d \cdot h} = \frac{5}{3 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{5}{168}$$

Assim, deduzimos a seguinte fórmula representativa desta proporcionalidade, mantida as condições do enunciado:

$$q = \frac{5}{168} \cdot e \cdot d \cdot h$$

Para a situação proposta:

$$q = \frac{5}{168} \cdot 4 \cdot 10 \cdot 6 \approx 7{,}143\ km.$$

3. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Os problemas a seguir encontram-se no livro “Temas e Problemas Elementares” [1], no primeiro capítulo (Proporcionalidade e Porcentagem). Serão solucionados pelos métodos apresentados na seção anterior, possibilitando diferentes formas de assimilação do conceito pelos educandos.

1. Uma lata de leite em pó, pesando 400g, custa R$ 5,20. O mesmo leite, na embalagem de 900g, custa R$ 11,20. Qual das duas opções é a mais vantajosa?

   Solução: Deve-se buscar, dentre as duas opções, aquela que apresenta o menor valor por grama de leite em pó, desta forma verificando a opção mais vantajosa, ou ainda, o valor equivalente de uma embalagem de 900g, mantendo-se o custo por grama fixo da lata de 400g. As duas grandezas envolvidas (quantidade, em gramas, de leite em pó[g] e valor da embalagem[v]) são diretamente proporcionais.

i. *Por regra de três*

Quantidade de leite em pó (g)	*Valor da embalagem (v)*
400g	*R$ 5,20*
900g	x

Obtém-se a proporção:

$$\frac{400}{900} = \frac{5{,}20}{x} \therefore 400x = 900 \cdot 5{,}20 \therefore x = \frac{900 \cdot 5{,}20}{400} \therefore x = 11{,}70.$$

Desta forma, uma embalagem de 900g de leite em pó, a partir do custo da lata de 400g, deverá custas R$ 11,70. O que permite afirmar que, de acordo com o enunciado, o mais vantajoso é adquirir a embalagem de 900g por R$ 11,20.

ii. *Por TFP e Teorema 11*

Após a análise da relação entre as grandezas, obtém-se:

$$v = k \cdot g$$

Para a lata de 400g tem-se:

$$5{,}20 = k \cdot 400 \therefore k = \frac{5{,}20}{400} \therefore k = 0{,}013.$$

Então:

$$v = 0{,}013 \cdot g$$

A constante k representa, nesta situação, o valor de 1g de leite em pó da lata de 400g. Logo, 900g de leite desta embalagem, terão um custo de:

$$v = 0{,}013 \cdot 900 \therefore v = R\$\,11{,}70$$

O que leva a mesma solução e conclusão obtidas pelo método da regra de três.

iii. *Por redução à unidade*

Novamente, após a análise da relação entre as grandezas, obtém-se:

	Valor da embalagem (R$)	Massa de leite em pó (g)	
:400	5,20	400	: 400
× 900	0,013	1	× 900
	11,70	900	.

O que, novamente, leva as mesmas soluções e conclusões obtidas nos outros métodos.

** Pode-se reduzir a massa da lata para 100g e tomar esta porção como uma unidade e, a partir daí, determinar o valor de 9 porções. Desta forma obtém-se o custo de 100g a R$ 1,30 e conclui-se que 900g terão um custo de R$11,70.*

2. Regina, que estava acima do peso normal, fez uma dieta e perdeu 3kg em 2 meses. Continuando a mesma dieta, quantos quilos ela perderá em 3 meses? E em 1 ano?

Solução: Ao analisar a relação entre as grandezas, vale destacar que tal situação não representa uma proporcionalidade, visto que se o fosse, poder-se-ia afirmar *que em determinado momento Regina teria uma massa incompatível com a sobrevivência humana, além do que a perda de massa corpórea, a longo prazo não mantém uma taxa de redução mensal constante. Logo, pode-se admitir uma proporcionalidade para um cálculo aproximado de perda de massa corpórea nos primeiros 3 meses, contudo, não é coerente assumir a mesma condição para 1 ano. Com estas observações e condições apresentadas, assumindo uma perda contínua mensal nos primeiros três meses, verifica-se que as grandezas (tempo, medido em meses [t] e massa, medida em quilogramas [m]) são diretamente proporcionais.*

i. *Por regra de três*

Tempo em meses (t)	*Massa em quilogramas (m)*
2	*3*
3	*x*

Obtém-se a proporção:

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{x} \therefore 2x = 3 \cdot 3 \therefore x = \frac{3 \cdot 3}{2} \therefore x = 4{,}5\ kg$$

Portanto, pode-se afirmar que, mantida as proporções de perda de massa corpórea, ela perderá em torno de 4,5 kg em 3 meses.

ii. *Por TFP e Teorema 11*

Após a análise da relação entre as grandezas, obtém-se:

$$m = k \cdot t$$

Para os dados iniciais, obtidos nos primeiros 2 meses:

$$3 = k \cdot 2 \therefore k = \frac{3}{2} \therefore k = 1{,}5$$

Então:

$$m = 1{,}5 \cdot t$$

A constante k representa, nesta situação, a perda de massa corpórea por mês. Logo, em 3 meses de dieta, sua perda de massa será de:

$$m = 1{,}5 \cdot 3 \;\therefore m = 4{,}5\; kg$$

O que leva a mesma solução e conclusão obtidas pelo método da regra de três.

iii. Por redução à unidade

Novamente, após a análise da relação entre as grandezas, obtém-se:

	Tempo medido em meses (t)	*Perda de massa corpórea (kg)*	
:2	*2*	*3*	*: 2*
× *3*	*1*	*1,5*	× *3*
	3	*4,5*	.

O que, novamente, leva as mesmas soluções e conclusões obtidas nos outros métodos.

3. Um fazendeiro, na safra passada, usou 12 camponeses para cortar sua plantação de cana de 120 hectares. Trabalhando 6 horas por dia, os trabalhadores concluíram o serviço numa semana. Este ano, o fazendeiro plantou 180 hectares e dispõe de 14 cortadores de cana, dispostos a trabalhar 8 horas por dia, durante 5 dias. Quantos hectares de cana esses trabalhadores conseguirão cortar?

Solução: Novamente cabe uma reflexão sobre a existência da proporcionalidade neste problema. Ao se tratar de seres humanos e esforço físico, não se pode afirmar que o rendimento de corte dos trabalhados seja o mesmo, o que não permite afirmar a existência de uma proporcionalidade. Além disso, também não se pode afirmar que o rendimento de um cortador de cana se mantém constante durante um dia de trabalho e durante dias sucessivos. O que se pode supor é que, em média, é possível contratar trabalhadores com rendimentos diários semelhantes e constantes e calcular um valor aproximado de corte admitindo-se uma *proporcionalidade. Assim, a grandeza quantidade de hectares (h) cortados é diretamente proporcional a quantidade de camponeses (c), a quantidade de horas diárias trabalhadas (t) e ao número de dias trabalhados (d).*

i. Por regra de três

h	$c \cdot t \cdot d$
120	$12 \cdot 6 \cdot 7$
x	$14 \cdot 8 \cdot 5$

Obtém-se a proporção:

$$\frac{120}{x} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 7}{14 \cdot 8 \cdot 5} \therefore x = \frac{120 \cdot 14 \cdot 8 \cdot 5}{12 \cdot 6 \cdot 7} \therefore x \approx 133{,}33\ hectares.$$

Portanto, admitindo-se as condições avaliadas, os camponeses cortariam, aproximadamente, 133,33 hectares de cana.

ii. Por TFP e Teorema 11

Após a análise da relação entre as grandezas, obtém-se:

$$h = k \cdot (c \cdot t \cdot d)$$

Para os dados iniciais, obtidos na primeira safra:

$$120 = k \cdot 12 \cdot 6 \cdot 7 \ \therefore k = \frac{120}{12 \cdot 6 \cdot 7} \ \therefore k = \frac{5}{21}$$

Então:

$$h = \frac{5}{21} \cdot (c \cdot t \cdot d)$$

A constante k representa, nesta situação, a quantidade de hectares cortados por um trabalhador em uma hora de trabalho. Logo, na segunda safra, o total de hectares cortados é:

$$h = \frac{5}{21} \cdot (14 \cdot 8 \cdot 5) \;\therefore\; h \approx 133{,}33\ hectares.$$

O que leva a mesma solução e conclusão obtidas pelo método da regra de três.

iii. *Por redução à unidade*

Novamente, após a análise da relação entre as grandezas, obtém-se:

Quantidade de hectares cortados (h)		$c \cdot t \cdot d$	
:504	*120*	*504*	*: 504*
$\times\ (14 \cdot 8 \cdot 5)$	*5/21*	*1*	$\times\ (14 \cdot 8 \cdot 5)$
	133,33	*560*	.

O que, novamente, leva as mesmas soluções e conclusões obtidas nos outros métodos.

4. Se o mesmo fazendeiro do problema anterior quisesse cortar todos os seus 180 hectares de cana num só dia, com os cortadores trabalhando 5 horas por dia, quantas pessoas ele precisaria contratar?

Solução: Para esta questão, basta manter a reflexão e condições da questão anterior (nº. 3). A relação entre as grandezas se dá por: a quantidade de camponeses (c) *é diretamente proporcional a quantidade de hectares de cana cortados* (h) *e inversamente proporcional a quantidade de horas trabalhadas por dia* (t) *e a quantidade de dias trabalhados* (d).

i. *Por regra de três*

c	h	t	d

12	120	6	7
x	180	5	1

Obtém-se a proporção:

$$\frac{12}{x} = \frac{120}{180} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \therefore x = \frac{12 \cdot 180 \cdot 6 \cdot 7}{120 \cdot 5 \cdot 1} \therefore x = 151{,}2$$

Portanto, admitindo-se as condições avaliadas, o fazendeiro deveria contratar 152 camponeses para o serviço.

ii. *Por TFP e Teorema 11*

Após a análise da relação entre as grandezas, obtém-se:

$$c = k \cdot \frac{h}{t \cdot d}$$

Para os dados iniciais, obtidos na primeira safra:

$$12 = k \cdot \frac{120}{6 \cdot 7} \therefore k = \frac{12 \cdot 6 \cdot 7}{120} \therefore k = \frac{21}{5}$$

Então:

$$c = \frac{21}{5} \cdot \frac{h}{(t \cdot d)}$$

A constante k representa, nesta situação, a quantidade de hectares cortados uma hora de trabalho por camponês. Logo, na segunda safra, o total de camponeses a serem contratados é:

$$c = \frac{21}{5} \cdot \frac{180}{(5 \cdot 1)} \therefore h = 151{,}2$$

O que leva a mesma solução e conclusão obtidas pelo método da regra de três: deve-se contratar 152 trabalhadores.

iii. *Por redução à unidade*

Novamente, após a análise da relação entre as grandezas, obtém-se:

	Quantidade de camponeses (c)	$h/(t \cdot d)$	
$\times 7/20$	*12*	*20/7*	$\times 7/20$
$\times 180:(5 \cdot 1)$	*21/5*	*1*	$\times 180:(5 \cdot 1)$
	151,2	*560*	.

O que, novamente, leva as mesmas soluções e conclusões obtidas nos outros métodos.

3.1 Aplicações a outras áreas do conhecimento.

As próximas duas questões tem por finalidade avaliar modelos matemáticos já determinados para as referidas situações sob o conceito de proporcionalidade. Visa-se realçar, como nos documentos oficiais [8], a presença e aplicabilidade deste conceito, não só em situações diversas, mas também em diferentes áreas do conhecimento.

5. Um objeto soltado do alto de um edifício leva 5 segundos para atingir o solo. Quanto tempo levaria esse objeto para cair de um prédio 3 vezes mais alto?

Solução: A situação acima pode levar a uma análise equivocada da relação entre as grandezas quando abordada com educandos que não dominam os conceitos implícitos no enunciado. Afirmar que o tempo de queda é diretamente proporcional a altura do edifício seria um erro considerável para quem domina conceitos físicos, porém aceitável a educandos de 7º ano, que até então, conhecem apenas os tópicos de proporcionalidade linear. O enunciado remete a uma situação de queda livre. Desprezando-se a resistência do ar, nota-se que o objeto sofre aceleração pela *gravidade local, o que faz com que a velocidade sofra constantes variações a cada segundo, anulando a hipótese que a altura do edifício é diretamente proporcional ao tempo de queda. O modelo matemático que representa tal tópico é dado por:*

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

onde g *representa a aceleração da gravidade local,* t *o tempo de queda e* h *a altura da queda. Pode-se reescrever o modelo da seguinte maneira:*

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h}$$

Como $\sqrt{2/g}$ *é constante, pode-se afirmar que* t *é diretamente proporcional a* $\sqrt{h}$*, uma proporcionalidade não linear, a qual aqui foi estudada. Portanto, uma alteração a altura da queda, 3 vezes mais alta que a anterior, implica num tempo* $\sqrt{3}$ *vezes maior que o anterior. Logo, o novo tempo de queda será de* $5\sqrt{3}$ *segundos.*
**Vale destacar que aqui utilizou-se o segundo método de resolução apresentado na seção anterior (TFP e Teorema 11), pois o mesmo visa modelar uma situação e analisar situações semelhantes a partir desta modelagem. Note que:*

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \sqrt{h} \ \therefore t = k \cdot \sqrt{h}, com\ k = \sqrt{\frac{2}{g}}$$

k *constante de proporcionalidade.*

6. (Puccamp – SP) Eventualmente, a solução $0{,}30\ M$ de glicose é utilizada em injeção intravenosa, pois tem pressão osmótica próxima à do sangue. Determine qual é a pressão osmótica, em atmosferas, da referida solução a $37°C$.

Solução: Primeiramente deve-se relevar o conceito de pressão osmótica. Pressão osmótica é a pressão a qual deve-se aplicar a fim de evitar que um solvente atravesse uma membrana semipermeável, ou ainda, uma pressão a ser aplicada sobre uma solução mais concentrada a fim de evitar a osmose (diluição).

A osmose é o processo espontâneo no qual um solvente passa por uma membrana semipermeável, partindo sempre de uma solução menos concentrada para uma mais concentrada, até que haja um equilíbrio entre as pressões exercidas pelas duas soluções cessando o processo. Esta pressão de equilíbrio é chamada de pressão osmótica (π)*. Tal pressão pode ser calculada pelo modelo matemático*

$$\pi = M \cdot R \cdot T \cdot i$$

Onde M *é a concentração em* mol/L *da solução,* R *é a constante universal dos gases (*$R = 0{,}082\ atm \cdot L \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$*; sendo R a constante de proporcionalidade deste modelo matemático), T a temperatura da solução medida em Kelvin (Escala absoluta) e* i *o fator de Van't Hoff .*

Este exercício exige apenas uma substituição de valores na fórmula informada, com as devidas adaptações as unidades de medidas solicitadas:

$$\pi = 0{,}30 \cdot 0{,}082 \cdot (37 + 273) \cdot 1 \ \therefore \ \pi \approx 7{,}63\ atm.$$

Vale ressaltar a aplicabilidade da proporcionalidade neste caso, novamente representada por um modelo matemático pronto, temos que a pressão osmótica (π) *é diretamente proporcional a concentração em* mol/L *da solução* (M)*, a temperatura absoluta da mesma* (T)*e ao fator de Van't Hoff* (i)*, sendo a constante universal dos gases* (R) *a constante de proporcionalidade do modelo.*

É muito comum médicos indicarem a pacientes em determinados quadros clínicos, como dengue, vômito e diarréia, a reposição de fluídos e minerais perdidos por meio de bebidas isotônicas, sejam naturais como a água de coco, ou industrializadas como as adquiridas em mercados. Uma solução isotônica é aquela que possui pressão osmótica igual a da solução na qual será inserida, no caso particular as células do corpo desidratadas, facilitando assim a reposição dos fluídos perdidos nas anomalias biológicas citadas.

O modelo matemático apresentado permite determinar a composição da bebida para que o procedimento descrito seja efetivo.

7. Uma nutricionista ao estipular o VET (Valor Energético Total) diário de um paciente em processo de dieta para emagrecimento, determinou que seu valor em $1500\ kcal/dia$. Após isto, deve-se determinar a distribuição energética entre os macronutrinetes e micronutrientes. Determine a massa a ser consumida diariamente de macronutrientes para este paciente.

Solução: São ao todo 3 macronutrientes (carboidratos, proteínas e gorduras), os quais recebem este nome pois são necessários, em valores nutricionais, em maior quantidade no VET e mensurados em gramas. Já os micronutrientes são compostos por vitaminas e minerais, fornecidos em menor quantidade necessária e mensurados em miligramas ou microgramas.

Em proporções adequadas para manuntenção da saúde, segundo o IOM (Instituto de Medicina), são distribuídas da seguinte forma:

- *Carboidratos devem corresponder entre 45% e 65% do VET* [$1g \rightarrow 4\ kcal$]
- *Proteínas devem corresponder entre 10% e 35% do VET* [$1g \rightarrow 4\ kcal$]
- *Gorduras devem corresponder entre 20% e 35% do VET* [$1g \rightarrow 9\ kcal$]

Ou seja, para o VET de $1500kcal/dia$ *e tomando um valor médio para cada macronutriente (50% de caboidratos, 22,5% de proteínas, 27,5% de gorduras):*

<u>Carboidratos:</u>

Quantidade de kcal/dia	*%*
1500	*100*
x	*50*

Obtém-se a proporção:

$$\frac{1500}{x} = \frac{100}{50} \therefore x = \frac{1500 \cdot 50}{100} \therefore x = 750\frac{kcal}{dia} \therefore x = \frac{750}{4} \therefore$$
$$x = 187{,}5g$$

Proteínas:

Quantidade de kcal/dia	*%*
1500	*100*
x	*22,5*

Obtém-se a proporção:

$$\frac{1500}{x} = \frac{100}{22,5} \therefore x = \frac{1500 \cdot 22,5}{100} \therefore x = 337,5\ kcal/dia \therefore x = 337,5/4 \therefore$$
$$x = 84,375\ g$$

Gorduras:

Quantidade de kcal/dia	*%*
1500	*100*
x	*27,5*

Obtém-se a proporção:

$$\frac{1500}{x} = \frac{100}{27,5} \therefore x = \frac{1500 \cdot 27,5}{100} \therefore x = 412,5\ kcal/dia \therefore x = 412,5/9 \therefore$$
$$x \approx 45,83\ g$$

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluir o presente artigo, reflete-se sobre a real importância de dominar um conceito matemático. Não apenas o ato de reproduzir e demonstrar teoremas e suposições, ou de aplicar fórmulas e métodos resolutivos, mas sim o de saber quando usar cada método, a que se aplica cada conceito, teoria, teorema e suposições. Os exercícios levam a isto, a não só aplicar o procedimento da regra de três, mas questionar se este é o único e, caso não seja, se é o melhor método a ser utilizado em determinada aplicação ou situação. Antes ainda, verificar se a questão trata realmente de uma situação de proporcionalidade para aí sim aplicar o devido procedimento.

Casos como o exercício número 1, remetem a situações em que o método da redução à unidade se torna mais similar ao processo cotidiano, onde dificilmente elabora-se uma proporção (regra de três) ou modela-se um acontecimento de forma mental em pleno supermercado.

Ou ainda, casos como os das questões 3 e 4, que levam a modelar a situação, pois, provavelmente, a mesma ocorrerá com uma certa frequência em determinado perído de tempo. Nesta situação, uma aplicação direta do TFP e do Teorema 11, levam a uma modelagem mais simples e objetiva, desde que se possa assumir uma proporcionalidade, mesmo que para aproximação. Existe também os casos de análise científica ou acadêmica como os exercícios 7 e 8, cujo procedimento agora citado se torna mais eficiente.

Isto posto, reforça-se três indagações pertinentes ao assunto:

1. Vale a pena conhecer apenas um método de resolução de situações de proporcionalidade?
2. Apenas um procedimento de resolução garante ao educando uma capacitação conceitual e produtiva aplicação social do conceito?
3. Como proceder em situações que envolvam proporcionalidade ou aceitam aproximação por proporcionalidade?

Espera-se que o texto apresentado deixe claro que sim, é de suma importância conhecer diferentes métodos, sendo indiferente qual o melhor, pois os utilizamos em diferentes momentos e diferentes situações, as quais abordam um mesmo conceito, por se adaptarem melhor a situação A ou situação B. Afirma-se que a abordagem de um único método limita o desenvolvimento do educando a situações práticas de proporcionalidade, por apresentar dificuldades de adaptação a como certos fatos são apresentados levando a não obtenção de uma aprendizagem significativa sobre o conceito.

Quanto ao terceiro questionamento, fica aqui talvez a maior reflexão sobre o ensino da proporcionalidade. Muitas vezes se capacita o educando a resolver problemas de proporcionalidade, mas não o prepara para reconhecer e interpretar tais situações. Exemplos interessantes disto são os exercícios 2, 3 e 4. Usain St. Leo Bolt, recordista mundial dos 100 metros rasos, alcançou este recorde ao correr tal distância em 9,58 segundos no ano de 2009 em Berlim, Alemanha. Seria correto admitir que o mesmo atleta correria o dobro da distância no dobro do tempo, não considerando a real fadiga muscular da prova e a queda de rendimento (não constância da velocidade)? Não, pois nitidamente não se trata de uma situação de proporcionalidade. Prova disto é que o recorde mundial de 200 metros rasos pertence ao mesmo atleta, foi obtido no mesmo local e semana do recorde dos 100 metros e sua marca é de 19,19 segundos, mais que o dobro do tempo anterior. Porém nota-se que, para esta situação, admitir uma proporcionalidade levaria a um resultado muito próximo do real. Contudo, é evidente, também, que tal suposição não seria válida para o rendimento do mesmo atleta em uma maratona, visto que o recorde mundial de maratonas pertence ao queniano Dennis Kimetto, também obtido no mesmo campeonato mundial de atletismo de Berlim em 2009 com o tempo de 2:02:57. Se Usain Bolt mantivesse a média na maratona, terminaria o percurso em aproximadamente 1:07:00.

Portanto, refletir uma situação e sua nuances se torna mais importante do que tornar o educando um resolutor de problemas matemáticos.

Vale citar que a metodologia apresentada foi aplicada em sala de aula para educandos do 7° ano em colégio particular nesta cidade, obtendo-se resultado notório, onde educandos recorriam a diferentes métodos segundo análise de problemas e adaptação ao método mais adequado. Foi apresentado bom rendimento nas resoluções e interessantes debates quando métodos diferentes eram aplicados em uma mesma resolução. Percebeu-se ainda uma aproximação do método da redução à unidade a um procedimento mais artimético, enquanto os demais se tornam mais próximos de procedimentos algébricos.

5. REFERÊNCIAS

[1] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto Cesar. **Temas e Problemas Elementares**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: ARTMED, 1998.

[3] GRANDO, Célia Regina. **O Jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da Matemática**, 1995. 194 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – UNICAMP, Campinas, 1995.

[4] WALLE, John Van de. **Matemática no ensino fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula.** Porto Alegre: Ed. Artmed, 2009.

[5] ROSSETTO, José João. **Tese de Doutorado: Análise de Modelos de Filtros Mecânicos para Eritrócitos.** Curitiba, PGEI/UTFPR, 2003.

[6] SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF.

[7] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática: Arte ou técnica de explicar e conhecer**. São Paulo: Ática, 1998.

[8] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1997.

[9] CORDEIRO, Maria Helena, FLORIANI, Edson Francisco. **Análise da Eficácia das estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade** In: V EDUCERE, III CONGRESSO NACIONAL DA ÁREA DE EDUCAÇÃO, 2005, Curitiba, Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/painel/TCCI197.pdf> Acesso em: 24 Out 2014.

[10] D'AMBROSIO, Ubiratan. **Matemática e Cultura**. Revista Pátio, Ed. 57, Fev. Abril/2011.

[11] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[12] LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto Cesar. **A Matemática do Ensino Médio – Vol. 1**. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

[13] LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais – PROFMAT.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[14] SILVA, Eolália Artifon**. Pensamento proporcional e Regra de Três: estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas**, 2008. 210 p . Dissertação (Mestrado em Educação) – UTP, Curitiba, 2008.

[15] SILVA, Luiz Carlos. **A prática de ensino de física no ensino médio e o conceito de proporcionalidade: conexão fundamental na construção e (re)construção de**

conhecimentos, 2009. 107p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – UFPA, Belém, 2009.

[16] TINOCO, Lúcia A. de A. **Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade**, s/n. Disponível em: < http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_III/pdf/uso_proporcionalidade.pdf>Acesso em: 15 Fev 2015.

[17] LOPES, Sonia. **Bio – Volume Único.** Ed. Saraiva, 2013

[18] VITOLO, Marcia Regina. **Nutrição, da gestação ao envelhecimento.** Rio de Janeiro, Ed. Rubio, 2008