PROFMAT **Departamento de Matemática** 81531-990, Curitiba, PR
Universidade Federal do Paraná Brazil

NÚMEROS COMPLEXOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Por

Eusebio Labadie Neto

Orientador do Trabalho:

Prof. Dr. José João Rossetto

Preprint PROFMAT 2016 30 de junho de 2016

Disponível via Internet:
http:// www.mat.ufpr.br

Números Complexos e Equações Algébricas

Eusebio Labadie Neto
Departamento de Matemática – UFPR
019081-900, Curitiba-PR
Brazil
e-mail: profeusebio@hotmail.com

30 de Junho de2016.

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo analisar as soluções de equações algébricas de coeficientes reais. Para tanto apresentam-se os números complexos, a natureza das raízes de uma equação algébrica e as fórmulas de resolução das equações de terceiro e quarto graus. Com relação aos números complexos, destaca-se o surgimento da raiz imaginária, a potenciação e a radiciação e que as raízes enésimas de números complexos conjugados também são conjugadas. Com o estudo da representação exponencial de um número complexo, determina-se a periodicidade da função e^x. Explora-se também a existência de raízes racionais, complexas conjugadas e múltiplas. A fórmula de resolução de equações do terceiro grau, conhecida como fórmula de Cardano, é deduzida de modo diferente daquele feito pela literatura estudada. Por fim, discute-se a natureza das raízes da equação do terceiro grau através da análise do discriminante e a correta associação, na fórmula de Cardano, das raízes cúbicas das variáveis auxiliares.

Palavras-Chave: Equações Algébricas, Números Complexos, Fórmula de Cardano.

INTRODUÇÃO

Equações algébricas surgem naturalmente em situações do cotidiano. Por exemplo, para modelar o fenômeno de filtração das células vermelhas do sangue no baço humano, Rossetto (pág. 22) [16], apresenta uma equação relevante. Esta relaciona o comprimento (*L*) e o raio (*r*) de um poro cilíndrico na qual a célula é capaz de transpor o poro numa situação limite, uma vez apresentados sua área de superfície de membrana (*A*) e seu volume (*V*): $L = r(\frac{A}{2\pi r^2} - 1 - (\sqrt[3]{3(\frac{V}{\pi r^3} - \frac{A}{2\pi r^2}) + 2} + 1)^2)$.

A resolução de equações algébricas consiste em um dos tópicos mais fascinantes da álgebra. Vários matemáticos contribuíram, ao longo da história, para o desenvolvimento deste tema como: Cardano (1501-1576), Ferrari (1522-1565), Lagrange (1736-1813), Ruffini (1765-1822), Abel (1802-1829), Galois (1811-1833). As equações do segundo grau já eram conhecidas dos babilônios (1700 a. C). Estes utilizavam problemas envolvendo soma (s) e produto (p) de dois números para encontrar soluções da equação: $x^2 - sx + p = 0$.

Uma pergunta intrigante é: por que mais de três mil anos se passaram desde o conhecimento dos babilônios sobre a equação do segundo grau até que Scipioni Ferro resolvesse a equação do terceiro grau e Ludovico Ferrari desenvolvesse a fórmula de resolução da equação de quarto grau?

Embora haja divergência sobre a autoria da fórmula de resolução de uma equação cúbica, foi Cardano quem primeiro publicou a demonstração de que a equação cúbica é solúvel por radicais e apresentou a fórmula de resolução deste tipo de equação na sua obra *Ars Magna* de 1445.

Os trabalhos de Cardano e Ferrari com relação às fórmulas das equações algébricas de graus 3 e 4 respectivamente eram conhecidos por Bombelli (1525-1572). Um aspecto importante que Bombelli argumentou foi que os números reais eram insuficientes para a resolução de equações algébricas, pois havia a necessidade de lidar com raízes quadradas de números reais negativos. Cabe ressaltar que foi Euler (1707-1783) quem compreendeu os números complexos evitando alguns sofismas da época como concluir que $1 = -1$ através da incorreta utilização da raiz imaginária. A teoria sobre equações algébricas contribuiu para o renascimento da álgebra, pois foi através dela que Galois desenvolveu a teoria de grupos.

Além da relevância histórica estes conteúdos, equações algébricas e números complexos apresentam problemas em suas abordagens nos livros didáticos. Para Lima et all (pág. 136) [11] ao analisarem o livro *Matemática* volume 3 de Iezzi et all argumentam: “ A motivação deste capítulo é falsa (...). Certamente, os complexos não teriam sido criados se o motivo fosse o citado, fazer com que as equações do segundo grau tivessem solução”. Ainda sobre números complexos, Lima et all (pág. 215) [11] analisando o livro de Giovanni e Bonjorno *Coleção Matemática 2º Grau* volume 3 concluíram: “ A apresentação dos números complexos nos livros didáticos tem sido insatisfatória. A abordagem tem sido meramente algébrica e o número i cai do céu”. Com relação às equações polinomiais, Lima et all (2001, pág. 136) [11] estudando a obra já citada de Giovanni e Bonjorno: “ Este capítulo é mal redigido, deixando entrever a falta de boa conceituação matemática”. Citamos duas obras consideradas como exemplo para evidenciar a dificuldade destes temas.

O objetivo geral do presente trabalho é analisar as soluções de equações algébricas de coeficientes reais, pois a relevância histórica e as dificuldades de expor estes conteúdos aos alunos de ensino médio motivam uma abordagem diferenciada sobre os temas propostos.

Os objetivos específicos são apresentar de forma sistemática os números complexos e estudar, de forma detalhada, as equações de graus 3 e 4. Com relação ao primeiro deles, pretende-se apresentar de forma adequada uma revisão da literatura sobre números complexos, enfocando: as formas de representações, as operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão), potenciação, radiciação, logaritmo natural. O segundo objetivo específico visa abordar a natureza das raízes, o discriminante de equações de grau 3 e as implicações na natureza das raízes.

As seções desta dissertação pretende estruturar uma sequência didática apropriada dos conteúdos. Inicialmente, serão abordados os números complexos, enfocando: a raiz imaginária e o seu surgimento como motivação para resolver equações do terceiro grau.

A segunda seção analisará aspectos relevantes das equações algébricas, como a existência de raízes: racionais, complexas conjugadas e múltiplas. Também serão apresentado o Teorema de Girard e o Teorema Fundamental da Álgebra.

As equações de terceiro e quarto graus constituem-se no cerne da terceira seção. Com relação às equações de terceiro grau, analisar-se-ão: a fórmula de resolução, o discriminante e a natureza das raízes. Esta dedução será feita de modo diferente daquele estudado na literatura deste trabalho. A fórmula de resolução de equações de quarto grau desenvolvida por Ferrari será estudada nessa seção. Destacam-se semelhanças significativas entre as estratégias de dedução da fórmula de Cardano e da fórmula de Ferrari.

1 - NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos surgiram na resolução de equações do terceiro grau e não como vários livros didáticos afirmam que foi na resolução de equações do segundo grau, em que o discriminante é negativo com em o $x^2 + 1 = 0$. Garbi [6] menciona que Rafael Bombelli em 1572 no seu livro *L'Algebra Parte Maggiore Dell'Arithmetica* mostrou a insuficiência dos números reais na resolução de equações do terceiro grau.

Bombelli já conhecia os trabalhos de Cardano e Ferrari sobre resolução de equações de graus 3 e 4 respectivamente, bem como a fórmula de Cardano, conteúdos que serão estudados a posteriori. Ele propôs a resolução da equação:

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad (1-1)$$

A fórmula de Cardano da resolução desta equação de grau 3 apresenta a solução:

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

Assim, pela fórmula acima, observa-se que, na sequência, basta investigar as raízes quadradas de números negativos. Por verificação, 4 é raiz da equação (1-1). As outras raízes são: $-2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}$. Se por um lado, quando uma equação do segundo grau tem discriminante negativo, dizia-se que a equação não tem solução, por outro, na equação (1-1), proposta por Bombelli, as 3 raízes são reais e na sua resolução pela fórmula de Cardano aparecem raízes quadradas de números negativos. Ele concluiu desta forma, que os números reais eram insuficientes para encontrar as raízes de equações de grau 3. Garbi (pág.51) [6] ressalta: "... seu método (se referindo a Bombelli) baseou-se no pensamento rude de que $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\ e\ \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ deveriam ser números na forma $a + b\sqrt{-1}$ e $a - b\sqrt{-1}$ ".

Faz sentido, pois as 3 raízes são reais. Sendo assim, as raízes de números negativos precisariam ser canceladas (o que ocorre somando-as, já que ainda assim será raiz). Bombelli deduziu que $a = 2, b = 1$ e obteve $x = 4$.

A manipulação algébrica para tratar de operações de raízes quadradas de números negativos exigia que $\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1} = -1$. No conjunto dos números reais o quadrado de um número é sempre positivo, ou nulo. Agora surge um número que multiplicado por ele mesmo resulta -1.

Conforme Hefez e Villela (2012, pág.4) [8], Leonard Euler em 1777, denotou o "número" $\sqrt{-1}$ por i e determinou várias propriedades dos números introduzidos por Bombelli". Euler compreendeu os números complexos. Na época de Euler, já existia o tradicional sofisma:

$$-1 = \sqrt{-1}\,.\sqrt{-1} = \sqrt{(-1).(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Utilizar a propriedade dos números reais não negativos: $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$ se mostrou insatisfatório. Lima et all (pág. 452) [11] afirmam: "um número complexo z é definido como $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$". Onde a significa a parte real e bi significa a parte imaginária do número complexo. A representação $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ também é denominada de representação algébrica de um número complexo. No caso em que

$a = 0$, o número complexo é chamado imaginário puro. O zero pode ser considerado imaginário puro.

Para adicionarmos dois ou mais números complexos, adicionamos as respectivas partes reais e as partes imaginárias da seguinte forma, Sejam os números complexos, $a + bi\ e\ c + di\ com\ a, b, c, d\ \in \mathbb{R}$. A adição é dada por: $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i$ e, deste modo, a adição de números complexos fica bem definida.

Uma análise mais detalhada se faz necessária sobre a adição de números complexos. Hefez e Villela (2012, pág.13) [8] argumentam que a associação entre o conjunto dos números complexos e o $\mathbb{R}^2$ é perfeita! Se considerarmos o conjunto dos números complexos e o $\mathbb{R}^2$ como espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, há um isomorfismo φ que leva a base canônica do $\mathbb{R}^2$ $\alpha = \{(1,0); (0,1)\}$ na base $\beta = \{1; i\}$ dos números complexos, onde:

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, com\ \varphi\big((1,0)\big) = 1\ e\ \varphi\big((0,1)\big) = i$$

É Imediato que o par ordenado (a, b) tem como imagem o número complexo $a + bi$. Quando foi dito que a adição está bem definida nos números complexos é porque esta se adicionando vetores em um espaço vetorial.

Nesta situação $\mathbb{C}$ é um espaço isomorfo ao $\mathbb{R}^2$. Em espaços vetoriais não há, a priori, a operação multiplicação de vetores, assim o produto de números complexos não está definido.

Euler entendia que $i^2 = -1$, assim pode-se definir o produto de dois números complexos. Sejam os números complexos, $a + bi\ e\ c + di\ com\ a, b, c, d\ \in \mathbb{R}$. O produto:

$(a + bi)(c + di) = ac + bdi^2 + adi + bci.$

Como $i^2 = -1$, tem-se:

$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.

Um aspecto relevante é que o conjunto dos números complexos tem a estrutura algébrica de corpo em relação às operações usuais de adição e multiplicação. O conjunto dos complexos pode ser entendido como uma extensão do corpo dos reais: $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$.

Abordados os conceitos de adição e multiplicação, será necessário definir o módulo, as operações: de potenciação, de radiciação, logaritmos e as representações trigonométrica e exponencial de um número complexo.

Definição (1-1*):* O módulo de um número complexo $\mathrm{z = a + bi}$ é o número não negativo: $\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$.

Geometricamente, o módulo de um número complexo equivale a distância do vetor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ à origem. Explorando ainda mais a associação entre o conjunto dos números complexos e o $\mathbb{R}^2$, o vetor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pode ser expresso em coordenadas polares com o ângulo θ entre o vetor e o eixo X positivo (eixo das abscissas) e o módulo do vetor (a,b) que é $\mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}$. O vetor (a,b) em coordenadas polares é igual a (r,θ). Desta forma: $a = rcos(\theta),\ b = rsin(\theta)$. Diante do exposto pode-se definir a forma trigonométrica de um número complexo. Dados,

$\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$, como: $a = rcos(\theta),\ b = rsin(\theta)$, então

$z = rcos(\theta) + risin(\theta)$, ou, equivalentemente,

$z = r[cos(\theta) + isin(\theta)]$.

Definição (2-1)*:* A representação trigonométrica de um número complexo $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$ é $z = r\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big),\ \theta \in [0,2\pi],\ r \geq 0$ com: $a = rcos(\theta),\ b = rsin(\theta)$ e $\tan\theta = \frac{b}{a}$. O ângulo θ é chamado de argumento do número complexo na representação trigonométrica.

Definição (3-1)*:* O conjugado de um número complexo $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$ é a sua imagem na função $\psi: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \psi(\mathrm{a} + \mathrm{bi}) = \mathrm{a} - \mathrm{bi}, \mathrm{com}\ a, b, \in \mathbb{R}$. O conjugado de $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$, será denotado por $\mathrm{z}' = \mathrm{a} - \mathrm{bi}$.

A função ψ apresenta as seguintes propriedades:

I – ψ é bijetiva. Sejam $z_1 = a + bi\ e\ z_2 = p + qi$ com $z_1 \neq z_2$, elementos do domínio de ψ. $\psi(z_1) = a - bi$ e $\psi(z_2) = p - qi$, $\psi(z_1) \neq \psi(z_2)$. $z_1 \neq z_2 \to \psi(z_1) \neq \psi(z_2)$, assim ψ é injetiva. Para cada elemento do contradomínio de ψ, $w = m + ni$; existe um elemento do domínio de ψ, $s = m - ni$ tal que $\psi(s) = w$, logo ψ é sobrejetiva. Como ψ é injetiva e sobrejetiva, tem-se que ψ é bijetiva.

II - A inversa de ψ é a própria função ψ , $pois$, $\psi\big(\psi(z)\big) = z$.

III - $\psi(z_1 + z_2)$= $\psi(z_1) + \psi(z_2)$.

IV - $\psi(z_1 . z_2)$= $\psi(z_1) . \psi(z_2)$.

A propriedade IV merece uma atenção especial. Se considerarmos $z_1 = z_2 = z$. Tem-se:

$\psi(z.z) = \psi(z).\psi(z)$.

$\psi(z^2) = (\psi(z))^2$.

Para um produto de n fatores, $\psi(z^n) = (\psi(z))^n$. A prova é feita por indução sobre n. Para $n = 2$ foi demonstrado anteriormente. Supondo verdadeiro para $n = k - 1$, ou seja, $\psi\big(z^{k-1}\big) = (\psi(z))^{k-1}$; prova-se para $n = k$.

$\psi(z^{k-1}.z) = \psi(z^{k-1}).\psi(z)$

$\psi(z^k) = (\psi(z))^{k-1} .\psi(z)$

$\psi(z^k) = (\psi(z))^k$.

Cabe mencionar que o conjugado de um número complexo na forma trigonométrica $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$, $\theta \in [0,2\pi]$ é $z' = r(cos(-\theta) + isin(-\theta))$.

Estas são as principais propriedades do conjugado de um número complexo. É imediato que se $z = a + bi$ e o seu conjugado $z' = a - bi$, então: $z + z' = 2a$ e $z - z' = 2b$. Pode-se relacionar um número complexo, seu conjugado e seu módulo, na expressão:

$z.z' = (a + bi).(a - bi)$.

$z.z' = a^2 - i^2b^2$, como $i^2 = -1$.

$z.z' = a^2 + b^2$, sendo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$z.z' = r^2$. $(2 - 1)$

No isomorfismo entre o $\mathbb{R}^2$ e os números complexos, a abscissa a do par ordenado (a, b) significa a parte real do número complexo $z = a + bi$; enquanto a ordenada b, corresponde a parte imaginária de z. O plano de Argand–Gauss corresponde ao plano cartesiano em que o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas são às partes real e imaginária, respectivamente, dos números complexos. Este plano é denominado plano Argand–Gauss em homenagem a Jean-Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Com o conceito de conjugado e a equação (2-1), apresenta-se o inverso de um número complexo z não nulo., como:

$\frac{1}{z} = \frac{z'}{z.z'}$, ou,

$\frac{1}{z} = \frac{z'}{r^2}$.

No caso especial em que o módulo do número complexo z for igual a 1, o inverso será o seu conjugado :

$\frac{1}{z} = \frac{z'}{r^2} = \frac{z'}{1} = z'$

Logo:

$z.z' = 1$.

O resultado anterior motiva a demonstração da relação trigonométrica fundamental como segue. Sejam $z = \cos\theta + i\sin\theta$ e seu conjugado $z' = \cos\theta - i\sin\theta$.

$z.z' = 1$

$(\cos\theta + i\sin\theta).(\cos\theta - i\sin\theta) = 1$,

$cos^2\theta - i^2 sin^2\theta = 1$.

Como $-i^2 = 1$, logo:

$cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

Com o conceito de elemento inverso de um número complexo z e a operação de multiplicação, poder-se-á definir a divisão entre dois números complexos $z_1\ e\ z_2$ como o produto entre o dividendo z_1 e o inverso de z_2. Desta forma a divisão entre z_1 e z_2 é expressa como:

$\frac{z_1}{z_2} = z_1.\frac{1}{z_2}$, ou,

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z'_2}{r_2^2}$. (3-1)

Abordou-se o surgimento da raiz imaginária através da resolução de equações de terceiro grau, as quatro operações elementares envolvendo números complexos, bem como os conceitos de módulo e conjugado. Antes de prosseguir apresentaremos exemplos numéricos envolvendo as quatro operações elementares envolvendo números complexos.

Exemplos 1-1:

Sejam os números complexos: $z = 1 + i;\ w = 3 + 4i$.

A adição $z + w = 4 + 5i$.

$z.w = (1 + i).(3 + 4i) = -1 + 7i$

$z - w = -2 - 3i$

$\frac{z}{w} = \frac{1+i}{3+4i} = \frac{(1+i).(3-4i)}{25} = \frac{7}{25} - \frac{1}{25}i$

Como esperado, os resultados das operações acima são números complexos da forma $a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}$.

O produto de dois números complexos merece uma atenção maior. O mesmo pode ser feito utilizando-se a representação trigonométrica destes.

Sejam os números complexos: $z = r_1(cos(\theta_1) + isin(\theta_1))$; $w = r_2(cos(\theta_2) + isin(\theta_2))$. O produto $z.w$ fica:

$z.w = r_1r_2((cos(\theta_1) + isin(\theta_1)).(cos(\theta_2) + isin(\theta_2))$. Ou,

$z.w = r_1r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) + i^2 \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(sin(\theta_1)cos(\theta_2) + sin(\theta_2)cos(\theta_1))$. Substituindo: $i^2 = -1$, tem-se:

$$z.w = r_1r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i(sin(\theta_1)cos(\theta_2) + sin(\theta_2)cos(\theta_1))$$

ou, finalmente,

$$z.w = r_1r_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + isin(\theta_1 + \theta_2)) . \quad (4-1)$$

Aplicando a equação (4-1) para $z_1 = z_2 = z$, onde $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$, obtém-se o quadrado do número complexo z:

$$z.z = z^2 = r.r((cos(\theta + \theta) + isin(\theta + \theta)) .$$

$$z^2 = r^2\ (cos(2\theta) + isin(2\theta)) .$$

Definido o quadrado do número complexo z, serão deduzidas as fórmulas da potenciação e da radiciação de expoente $n \in \mathbb{N}$ do número $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$. Estas fórmulas de potenciação e radiciação de números complexos foram desenvolvidas por Abraham De Moivre (1667-1754). Cabe mencionar que a primeira vez que surgiu a expressão $(\sin\theta + \cos\theta)^n = \cos n\theta + \sin n\theta$ foi em 1733 em um trabalho de Euler como cita Struik (1998, pág.167) [20].

Teorema (1-1): (1ª Fórmula de De Moivre): dado um número complexo $z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$ e um número natural n tem-se: $z^n = r^n(cos(n\theta) + isin(n\theta))$.

A demonstração será feita por indução sobre n. Para $n = 2$ a expressão é verdadeira, pois foi provada anteriormente. Pela hipótese de indução, assume-se que a expressão é válida para $n = k - 1$. Daí, prova-se a seguir que a fórmula é válida para $n = k$. De fato,

$$z^k = z^{k-1}z = r^{k-1}(cos((k-1)\theta) + isin((k-1)\theta)).r(cos(\theta) + isin(\theta)).$$

$$z^k = r^{k-1+1}(cos((k-1+1)\theta) + isin((k-1+1)\theta))).$$

$$z^k = r^k(\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)). \quad (5-1)$$

Portanto, a 1ª fórmula de De Moivre é válida para todo número natural. Esta fórmula será expandida para os números inteiros.

Corolário (1-1): A 1ª fórmula de De Moivre é válida para potencias de números complexos com expoentes inteiros.

A fórmula é válida para todos os números naturais, demonstraremos que a mesma também é válida para todo $n < 0, n \in \mathbb{Z}$. Existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $m = -n$.

O inverso de um número complexo z é $\frac{1}{z}$. Considerando $\frac{1}{z} = z^{-1}$, tem-se que o produto de n fatores iguais a z^{-1} é igual ao produto de n fatores iguais a $\frac{1}{z}$, assim $z^{-1}.z^{-1}\ .\ z^{-1} \ldots\ .z^{-1} = \frac{1}{z}.\frac{1}{z}\ .\frac{1}{z}. \ldots\ .\frac{1}{z}$, logo $(z^{-1})^n = (\frac{1}{z})^n$, ou $z^{-n} = (\frac{1^n}{z^n})$. Como $1^n = 1$, tem-se: $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$. Substituindo $m = -n$, obtém-se $z^m = \frac{1}{z^n}$ **,** assim $z^m z^n = 1$, chega-se a: $z^n = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z^m}}$ e $z^n = z^{-m} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{z^m}}$ **.**

A fórmula (5-1) demonstrada anteriormente pode ser aplicada para z^m, pois m é um número natural. Assim,

$$z^n = \frac{1}{r^m(\cos(m\theta) + i\sin(m\theta))}$$. Ou,

$$z^n = r^{-m}\frac{(\cos(m\theta) - i\sin(m\theta))}{(\cos(m\theta) + i\sin(m\theta))(\cos(m\theta) - \sin(m\theta))}$$. Simplicando,

$$z^n = r^{-m}\frac{(\cos(m\theta) - i\sin(m\theta))}{\cos(m\theta)^2 - i^2\sin(m\theta)^2}$$

Como $i^2 = -1$, tem-se:

$$z^n = r^{-m}\frac{\cos(m\theta) - i\sin(m\theta)}{\cos(m\theta)^2 - (-1)\sin(m\theta)^2} = r^{-m}\frac{\cos(m\theta) - i\sin(m\theta)}{\cos(m\theta)^2 + \sin(m\theta)^2}$$

Utilizando os fatos de que a função cosseno é par e a função seno é impar, bem como o denominador ser a relação fundamental trigonométrica, deduz-se que:

$$z^n = r^{-m}\frac{\cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)}{1}$$

Finalmente, $de\ n = -m$, obtém-se:

$$z^n = r^n\big(cos(n\theta) + isen(n\theta)\big)\ .$$

A radiciação de números complexos é extremamente importante, pois um número complexo apresenta n raízes enésimas.

Teorema (2-1): (2ª Fórmula de De Moivre): dado um número complexo $z = r\big(cos(\theta) + isen(\theta)\big)$ e um número natural n, então existem n raízes enésimas de z da forma: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z},\ 0 \le k \le n-1,\ \sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}$.

A demonstração parte de que, $\sqrt[n]{z} = z_k$ e assim $z_k^n = z$. Aplicando-se a primeira fórmula de De Moivre em z_k^n e considerando a representação trigonométrica chega-se a $z_k = p(\cos\omega + i\sin\omega)$, onde ω é o argumento de z_k na representação trigonométrica. Daí, substituindo-se em $z_k^n = z$, deduz-se que

$$p^n(\cos(n\omega) + i\sin(n\omega)) = r\big(cos(\theta) + isen(\theta)\big)$$

Escrevendo ambos os lados acima como números da forma $z = a + bi$, igualando as partes real e imaginária e lembrando que dois números complexos são iguais se e somente se seus módulos são iguais e seus argumentos congruentes, conclui-se que,

$p^n = r$,

$\cos(n\omega) = cos(\theta)$ e

$\sin(n\omega) = sen(\theta)$.

Da primeira equação, tira-se: $p = \sqrt[n]{r}\ com \sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}$. Das duas últimas igualdades, tem-se:

$n\omega = \ \theta + 2k\pi$

$\omega = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

Deste modo,

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})\right)$.

Basta agora, explicitar os valores de k. Precisam-se analisar os valores de k para que $0 \leq \theta \leq 2\pi$, com o objetivo de não considerar uma mesma raiz mais de uma vez. O valor de k deve assumir os possíveis restos da divisão de um número inteiro por n, ou seja, k variará de 0 até $n - 1$. O fulcro desta ideia é que k deve assumir o valor de cada uma das diferentes classes de congruência módulo n. Assim, k irá variar de $0\ a\ n - 1$. Desta forma:

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq n - 1\ e\ \sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}$.

Percebe-se que as raízes enésimas de um número complexo no plano Argand-Gaus são pontos de uma mesma circunferência, pois todas as raízes enésimas têm o mesmo módulo. Naturalmente, o módulo das raízes enésimas.é o raio desta circunferência e os argumentos destas raízes formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$.

A seguir apresentam-se três cálculos do que foi discutido acima.

Exemplo 2-1:

a) Calcular as raízes cúbicas da unidade.

$1 = \cos 0 + i\sin 0$

$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$

$k = 0, \sqrt[3]{1} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0 = 1$

$k = 1, \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$k = 2, \sqrt[3]{1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

As raízes de cúbicas de 1 são: $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Considerando $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ tem-se $w^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; ou seja, as raízes cúbicas da unidade são: $1, w, w^2$.

b) Calcular as raízes cúbicas de 8.

Como $8 = 8\ (\cos 0 + i \sin 0)$, ou seja, 8 tem o mesmo argumento que 1. Desta forma, o triângulo tendo como vértices as raízes cúbicas de 8 é semelhante ao triângulo que tem vértices as raízes cúbicas de 1. Como foi feito as raízes cúbicas de 1, as raízes cúbica de 8 são:

$$8 = 8(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$\sqrt[3]{8} = 2(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3})$$

$$k = 0, \sqrt[3]{8} = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2(1 + 0) = 2$$

$$k = 1, \sqrt[3]{8} = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$k = 2, \sqrt[3]{8} = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = -1 - i\sqrt{3}$$

Um exemplo mais interessante no qual o módulo do número complexo em que as partes real e imaginária sejam não nulas e o módulo seja diferente de 1 é dado a seguir.

c) raízes quartas de $z = -9 + i9\sqrt{3}$. O módulo e o argumento do número complexo são dados por: $r = 18,\ \theta = \frac{2\pi}{3}$.

Aplicando a segunda fórmula de De Moivre:

$$z_k = \sqrt[4]{18}[\cos(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + \frac{2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + \frac{2k\pi}{4})]$$

$$z_k = \sqrt[4]{18}\left[\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2})\right],\ k = 0,1,2,3.$$

$$k = 0, z_0 = \sqrt[4]{18}\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] = \sqrt[4]{18}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$$

$$k = 1, z_1 = \sqrt[4]{18}\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right] = \sqrt[4]{18}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$k = 2, z_2 = \sqrt[4]{18}\left[\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right] = \sqrt[4]{18}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$$

$$k = 3, z_3 = \sqrt[4]{18}\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right] = \sqrt[4]{18}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})\ .$$

Agora, apresenta-se um Teorema sobre as raízes enésimas de números complexos conjugados, resultado que utilizar-se-á, posteriormente, na análise do discriminante da equação do terceiro grau.

Teorema (3-1): as raízes enésimas de um número complexo $z = a + bi$ e as raízes enésimas do seu conjugado $z' = a - bi$ são conjugadas.

Para a demonstração considere as representações trigonométricas de $z = a + bi$ e de $z' = a - bi$, quais sejam $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $z' = r(\cos(-\theta) + i\sin\,(-\theta))$ respectivamente. Nota-se que os módulos destes números complexos são iguais a $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Aplicando-se a segunda fórmula de De Moivre, obtém-se as raízes enésimas:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})\right), \qquad k \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \le k \le n-1; \;\; \sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{z'} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{-\theta}{n} + \frac{2t\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{-\theta}{n} + \frac{2t\pi}{n})\right), t \in \mathbb{Z}, 0 \le t \le n-1; \;\; \sqrt[n]{r} \in \mathbb{R}$$

Para $k = 0,\; t = 0$, tem-se:

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin(-\frac{\theta}{n})\right)$. Como a função seno ímpar , tem-se que:

$$\sqrt[n]{z'} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{-\theta}{n}\right) - i\sin(\frac{\theta}{n})\right)$$

Desta forma, as raízes enésimas quando os parâmetros são $k = 0, t = 0$ resultam em números complexos conjugados. Seria um erro atribuir valores iguais para k e t quando estes são diferentes de zero. A ideia bastante sutil consiste em encontrar soluções estritamente positivas para a equação Diofantina: $t + k = n$.

Para $k = 1,\; t = n - 1$, as raízes procuradas são:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n})\right)$$

$$\sqrt[n]{z'} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{-\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{-\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n})\right)$$

$$\sqrt[n]{z'} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(-\frac{\theta}{n} - \frac{2\pi}{n} + 2\pi\right) + i\sin(-\frac{\theta}{n} - \frac{2\pi}{n} + 2\pi)\right)$$

Como as funções seno e cosseno são funções periódicas de período 2π, vem:

$$\sin(-\frac{\theta}{n} - \frac{2\pi}{n} + 2\pi) = \sin\left(-\frac{\theta}{n} - \frac{2\pi}{n}\right) \;\; e \;\; \cos\left(-\frac{\theta}{n} - \frac{2\pi}{n} + 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\theta}{n} - \frac{2\pi}{n}\right)$$

Substituindo-se, obtém-se:

$$\sqrt[n]{z'} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(-\frac{\theta}{n} - \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin(-\frac{\theta}{n} - \frac{2\pi}{n})\right)$$

$$\sqrt[n]{z'} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(-(\boldsymbol{\frac{\theta}{n}} + \boldsymbol{\frac{2\pi}{n}})\right) + i\sin(-\left(\boldsymbol{\frac{\theta}{n}} + \boldsymbol{\frac{2\pi}{n}}\right))\right)$$

Portanto, os números complexos $\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n})\right)$ e $\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(-(\boldsymbol{\frac{\theta}{n}} + \boldsymbol{\frac{2\pi}{n}})\right) + i\sin(-(\boldsymbol{\frac{\theta}{n}} + \boldsymbol{\frac{2\pi}{n}}))\right)$ são conjugados. Aplicando-se o raciocínio análogo para $k = 2,\; t = n - 2; k = 3,\; t = n - 3$ e assim sucessivamente, obter-se-ão as outras raízes enésimas de z e z' conjugadas duas a duas. Este procedimento de cálculo não é usualmente encontrado nos livros didáticos.

Outra forma bastante interessante para demonstrar este teorema consiste na utilização da função ψ da definição (3-1). Como o conjunto dos números complexos é um corpo, consequentemente tem a estrutura algébrica de anel também. Se um número complexo z for raiz enésima de $\mathrm{a+bi}$, então z' conjugado de z será raiz enésima de $\mathrm{a-bi}$.

A função $\psi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que leva um número complexo no seu conjugado é homomorfismo sobrejetor de anéis. Da hipótese, temos $z^n = a + bi$. Aplicando a ψ, tem-se $\psi(z^n) = \psi(a+bi)$, e com a propriedade de homomorfismo, $(\psi(z))^n = \psi(a + bi)$. Como $\psi(z) = z'$, vem, $(z')^n = a - bi$, ou na forma de raiz $z' = \sqrt[n]{a-bi}$.

Para a representação os resultados seguintes não serão demonstrados, pois os mesmos não fazem parte do escopo deste trabalho. As expansões em série de Taylor das funções: $\sin x, \cos x, e^x$ são:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Substituindo $x = i\theta$ na expansão de e^x:

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$

Como $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i\,;\ n \in \mathbb{N}$, a expressão anterior fica:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Para $\theta = \pi$, tem-se: $e^{i\pi} = -1$, ou, equivalentemente, $e^{i\pi} + 1 = 0$. Uma relação em que estão presentes: $e, \pi, i, 1$ e 0, que são números notáveis da Matemática.

A forma exponencial de um número complexo é obtida substituindo a relação $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ na representação trigonométrica, ou seja, $z = r\big(cos(\theta) + isin(\theta)\big)$ = $re^{i\theta}$.

Antes de avançar, a relação $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ precisa ser analisada com mais detalhes. Um resultado interessante ocorre quando substituímos $\theta\ por\ \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como as funções seno e cosseno têm período 2π, tem-se: $e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)$. Ou, da trigonometria, $e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos\theta + i\sin\theta$. E, finalmente, $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$. Fazendo $x = i\theta$, vem: $e^{x+2\pi i} = e^x$.

Portanto, a função e^x é periódica e tem período $2\pi i$. Uma função f periódica é caracterizada por $f(x+t) = f(x)$, para todo x em seu domínio e t representa o período e é o menor número real positivo. Naturalmente, que $2\pi i$ não é um número real, mas a ideia de função periódica é bem pertinente para função $f(x) = e^x$. O período desta função é bastante interessante, pois $2\pi i$ corresponde ao comprimento de uma circunferência de raio i.

Considerando $-\pi \leq \theta \leq \pi$, e as relações $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ e $e^{-i\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta$, podem-se determinar as relações entre funções trigonométricas e funções exponenciais, quais sejam: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ e $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Algumas considerações são pertinentes. Como $\cos\theta$ e $\sin\theta$ são números reais, então $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ é um número real, pois $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$; enquanto que $e^{i\theta} - e^{-i\theta}$ é um número imaginário puro, pois é igual a $2i\sin\theta$.

Assim, a tangente também será real como mostra o cálculo a seguir:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}{\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} = i\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}\right)$$

Tendo a representação exponencial de um número complexo, será definido o logaritmo natural deste número. Como θ é um número real, utilizaremos $z = re^{i(\theta + 2k\pi)}$. Assim, o logaritmo natural de um número complexo é definido como: $\ln(z) = \ln(re^{i(\theta+2k\pi)})$. Ou, motivando-se pelas propriedades de logaritmo e da representação exponencial: $\ln(z) = \ln(r) + \ln\left(e^{i(\theta+2k\pi)}\right) = \ln(r) + i\theta + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

2 - EQUAÇÕES ÁLGÉBRICAS

Algumas perguntas sobre equações algébricas surgem naturalmente. Uma equação admite raízes racionais? Há relação entre estas raízes e os coeficientes da equação? Existem raízes múltiplas em uma determinada equação? Alguns dos objetivos desta seção são responder a estas indagações. Verificar-se-á as relações entre raízes e coeficientes de equações algébricas, a existência de raízes racionais, raízes reais e raízes complexas. Resolver equações algébricas significa encontrar raízes de funções polinomiais da forma: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$, onde os coeficientes são números reais.

Na seção anterior foi demonstrado que a equação $x^n = c$, onde c é um número complexo admite n raízes enésimas e assim podem-se encontrar todas as raízes das equações que são reduzidas à forma $x^n = c$. Uma substituição de variável que será necessária nas demonstrações da fórmula de Cardano e da fórmula de Ferrari é aquela em que transforma o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$ no polinômio $p(y) = b_n y^n + b_{n-1}y^{n-1} + \cdots + b_1 y + b_0, b_n \neq 0$; com $b_{n-1} = 0$, conforme apresenta-se na próxima Proposição.

Proposição (1-2): existe uma substituição de variável $x = y + u$ que transforma o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$ no polinômio $p(y) = b_n y^n + b_{n-1}y^{n-1} + \cdots + b_1 y + b_0,\ b_n \neq 0$; com $b_{n-1} = 0$.

Demonstração: fazendo a substituição $x = y + u$ em $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tem-se:

$p(y) = a_n(y+u)^n + a_{n-1}(y+u)^{n-1} + \cdots + a_1(y+u) + a_0$ que se transforma em:

$p(y) = a_n y^n + (na_n u + a_{n-1})y^{n-1} + \cdots$ e daí para que o coeficiente de y^{n-1} seja igual à zero, basta atender a equação $na_n u + a_{n-1} = 0$. Donde, isolando-se *u* chega-se em $u = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$.

Antes de partir para as fórmulas de Cardano e Ferrari, aplicar-se-á a Proposição acima na resolução da equação geral do segundo grau com o objetivo de exemplificar o procedimento. Considere a equação do segundo grau com coeficientes reais: $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$. Visando eliminar o termo de primeiro grau, pela proposição (1-2) será feita uma mudança de variável, $x = y - \frac{b}{2a}$. Desta forma, $a(y - \frac{b}{2a})^2 + b\left(y - \frac{b}{2a}\right) + c = 0$. Desenvolvendo o quadrado chega-se a: $ay^2 - by + \frac{b^2}{4a} + by - \frac{b^2}{2a} + c = 0$. Agora multiplicando por 4a, tem-se: $ay^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$, logo, $4a^2y^2 - b^2 + 4ac = 0$. Isolando y^2, assim, $y^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Desta forma, $y = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Tanto $+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ como $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ elevados ao quadrado resultam $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, por isso foi utilizada a expressão $y = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Tendo a variável auxiliar y, obter os valores de x é imediato: $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Desta forma:

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (1-2).

A equação (1-2) é a fórmula de resolução de uma equação de segundo grau. A mesma também poderia ser obtida através do procedimento de completamento de quadrados, procedimento este, que também será adotado nas fórmulas de Ferrari. Seja, $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$. Multiplicando ambos os termos por $4a$, tem-se, $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$. Adicionando-se $b^2 - 4ac$ em ambos os lados, tem-se: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac$ e assim, $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$. Há um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação. Logo, $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$. Extraindo a raiz quadrada dos dois membros da equação anterior, chega-se a: $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$. Donde, $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$. Finalmente, isolando a variável x, tem-se:

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (1-2).

As duas formas de obter a resolução da equação do segundo grau são equivalentes, pois como $x = y - \frac{b}{2a}$, então $2ax - b = 2ay$. Substituindo-se em $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$, tem-se $(2ay)^2 = b^2 - 4ac$. Logo, $4a^2y^2 = b^2 - 4ac$ e a demonstração segue como feito anteriormente.

Na equação do segundo grau, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante e será denotado pela letra grega delta (Δ). Assim, $\Delta = b^2 - 4ac$. Caso o discriminante seja positivo a equação terá duas raízes reais e distintas. Se o discriminante for nulo, haverá duas raízes reais idênticas na equação. O discriminante negativo implica raízes complexas conjugadas, este é um ponto importante. Este resultado precisa ser generalizado no seguinte Teorema.

Teorema (1-2): seja $p(x)$ um polinômio de grau n com coeficientes reais e raízes pertencentes ao conjunto dos complexos. Se $\mathrm{z = m + ni}$ for raiz de $p(x)$ então o seu conjugado $\mathrm{z' = m - ni}$ também será raiz de $p(x)$

Demonstração: $\mathrm{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}$, $a_n \neq 0$

Como z é raiz de $p(x)$, temos:

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$

Aplicando o conjugado dos dois membros da equação e lembrando que o conjugado de um número real é ele mesmo e que o conjugado da soma é a soma dos conjugados, tem-se:

$a_n z'^n + a_{n-1} z'^{n-1} + a_{n-2} z'^{n-2} + \cdots + a_1 z' + a_0 = 0$

Assim, $p(z') = 0$. Portanto, z' será raiz de $p(x)$, se o somente se, z for raiz de $p(x)$.

O resultado foi provado para uma equação de grau n. Naturalmente, também é válido para equações do segundo grau. Uma equação algébrica de coeficientes reais de grau ímpar admite pelo menos uma raiz real. A demonstração deste resultado exige o Teorema do Valor Intermediário que é enunciado de Guidorizzi (pág. 122) [7].

Lema (1-2): Teorema do Valor Intermediário: se f for uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e se γ for um número compreendido entre $f(a)\ e\ f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.

Teorema (2-2): todo polinômio de coeficientes reais de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

Demonstração: considere a função polinomial p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida $\mathrm{p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}$, $a_n \neq 0$, onde n é um número natural ímpar. A função p é polinomial e como toda função polinomial é contínua, logo p é uma função contínua. Supondo $a_n > 0$, então $lim_{x\to\infty}^{p(x)} = +\infty$. Como p é uma função contínua e $lim_{x\to\infty}^{p(x)} = +\infty$, logo existe $a \in \mathbb{R}$, tal que $p(a) > 0$. Por outro lado, ao analisar o limite $lim_{x\to-\infty}^{p(x)} = -\infty$ e o fato, já mencionado de que p é uma função contínua, há $b \in \mathbb{R}$, tal que $p(b) < 0$. Como p é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e $0 \in [p(b), p(a)]$, então pelo Lema (1-2), existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $p(x_0) = 0$. Agora assumindo $a_n < 0$, tem-se $lim_{x\to\infty}^{p(x)} = -\infty$ e $lim_{x\to-\infty}^{p(x)} = +\infty$. A demonstração segue de modo análogo à feita no caso anterior em que $a_n > 0$.

Sabendo resolver as equações: $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ e $x^n = c,\ c \in \mathbb{R}$, podem-se resolver equações da forma: $ax^{2n} + bx^n + c = 0,\ a \neq 0$. O método para encontrar soluções para equações da forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0,\ a \neq 0$ consiste em fazer uma substituição de variável $x^n = y$ e resolver a equação de segundo grau em $y,\ ay^2 + by + c = 0,\ a \neq 0$. Encontrados os valores de y, basta substituir em $x^n = y$ para obter as raízes da equação inicial $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

Bezout (1730-1783) propôs um método para resolver equações algébricas de qualquer grau. Este método utiliza fortemente as raízes da unidade e se baseia em duas equações para encontrar as raízes de um polinômio de grau n. Ele considerava como hipótese que as raízes de uma equação algébrica eram da forma $x = a_0 + a_1w + a_2w^2 + \cdots + a_{n-1}w^{n-1}$. Seu método é baseado na seguinte ideia. Deseja-se encontrar as raízes de $p(x) = 0$, onde $p(x)$ é um polinômio de grau n. As duas equações fundamentais de Bezout são: $x = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \cdots + a_{n-1}y^{n-1}$ e $y^n = 1$. E como y pode assumir qualquer uma das enésimas raízes da unidade, $P(x)$ também terá n raízes. As raízes de $p(x)$ são dadas por $x = a_0 + a_1w + a_2w^2 + \cdots + a_{n-1}w^{n-1}$, onde w representa uma das raízes enésimas da unidade.

Considerando o polinômio $R_n\,(x)$ de grau n que tenha as raízes de $p(x)$.

$$R_n\,(x) = \prod_{w}\left(x - (a_0 + a_1w + a_2w^2 + \cdots + a_{n-1}w^{n-1})\right), \qquad (2-2)$$

onde Π indica o produtório.

A resolução de uma equação algébrica de grau n se reduz a encontrar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ que tornam $p(x) = R_n(x)$. O problema deste método é que, se o grau do polinômio for maior que quatro, para determinar estes coeficientes são necessárias equações de grau superior a quatro.

Niels Henrik Abel (1802-1829) provou que equações algébricas de grau superior a 4 não são solúveis por radicais, assim o método de Bezout é incapaz de resolver equações algébricas de grau n. Então qual a relevância do método de

Bezout? A principal contribuição de Bezout foi suspeitar fortemente que uma equação algébrica de grau n possui n raízes.

Neste trabalho será adotado o conceito de ser solúvel por radicais baseado em Maxfield e Maxfield (capítulo 10) [13].

Definição (1-2): Seja F um corpo de característica zero e $\mathrm{f(x)}$ um polinômio contido em $\mathrm{F[x]}$. A equação polinomial $\mathrm{f(x)} = 0$ é solúvel por radicais, se todas as suas raízes podem ser calculadas em função de seus coeficientes através de um número finito de passos utilizando as operações de adição e multiplicação do corpo, extração das raízes enésimas de um elemento $\mathrm{k} \in \mathrm{F}$, tal que $\mathrm{k^n} = \mathrm{r}$, onde r pertença a uma extensão (de corpos) de F. Um corpo de característica zero é aquele que possui um subcorpo isomorfo ao corpo dos números racionais.

Sabe-se que equações algébricas de coeficientes reais, quando admitem raízes complexas, há um número par destas raízes. Se o grau de uma equação algébrica for ímpar, então ela tem pelo menos uma raiz real. A existência ou não de raízes racionais também é uma informação relevante.

Teorema (3-2): Se um polinômio $p(\mathrm{x}) = \mathrm{a_n x^n} + \mathrm{a_{n-1} x^{n-1}} + \mathrm{a_{n-2} x^{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_1 x} + \mathrm{a_0},\ a_n \neq 0$ de coeficientes inteiros admitir uma raiz racional $\frac{p}{q};\ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0; mdc(p,q) = 1$, então p divide $\mathrm{a_0}$ e q divide $\mathrm{a_n}$.

Demonstração: como $\frac{p}{q}$ é raiz de $P(x)$, então: $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Logo, $\mathrm{a_n}\left(\frac{p}{q}\right)^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\mathrm{n-1}} + \mathrm{a_{n-2}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\mathrm{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_1}\left(\frac{p}{q}\right) + \mathrm{a_0} = 0$. Multiplicando os termos da equação por $q^n \cdot$, tem-se: $\mathrm{a_n}(p)^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}}.q(p)^{\mathrm{n-1}} + \mathrm{a_{n-2}}.q^2.(p)^{\mathrm{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_1}.q^{n-1}.(p) + \mathrm{a_0}.q^n = 0$. Reorganizando a equação anterior, obtém-se:
$\mathrm{a_n}(p)^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}}.q(p)^{\mathrm{n-1}} + \mathrm{a_{n-2}}.q^2.(p)^{\mathrm{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_1}.q^{n-1}.(p) = -\mathrm{a_0}.q^n$. Colocando p em evidência, chega-se a: $p(\mathrm{a_n}(p)^{\mathrm{n-1}} + \mathrm{a_{n-1}}.q(p)^{\mathrm{n-2}} + \mathrm{a_{n-2}}.q^2.(p)^{\mathrm{n-3}} + \cdots + \mathrm{a_1}.q^{n-1}) = -\mathrm{a_0}.q^n$. Como os números dos dois termos da equação são inteiros e $mdc(p,q) = 1$, então p divide $\mathrm{a_0}$. Como: $\mathrm{a_n}(p)^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}}.q(p)^{\mathrm{n-1}} + \mathrm{a_{n-2}}.q^2.(p)^{\mathrm{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_1}.q^{n-1}.(p) + \mathrm{a_0}.q^n = 0$, tem-se, $\mathrm{a_{n-1}}.q(p)^{\mathrm{n-1}} + \mathrm{a_{n-2}}.q^2.(p)^{\mathrm{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_1}.q^{n-1}.(p) + \mathrm{a_0}.q^n = -\mathrm{a_n}(p)^{\mathrm{n}}$. Colocando q em evidência, obtém-se: $q(\mathrm{a_{n-1}}(p)^{\mathrm{n-1}} + \mathrm{a_{n-2}}.q.(p)^{\mathrm{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_1}.q^{n-2}.(p) + \mathrm{a_0}.q^{n-1}) = -\mathrm{a_n}(p)^{\mathrm{n}}$. Aplicando o argumento análogo ao anterior e sabendo-se que os números dos dois termos da equação são inteiros e $mdc(p,q) = 1$, então q divide $\mathrm{a_n}$.

Uma aplicação relevante do Teorema anterior é provar que raízes quadradas de números primos são números irracionais.

Proposição (2-2): raízes quadradas de números primos são números irracionais.

Demonstração: seja p um número primo. Pelo teorema (3-2), a equação $x^2 - p = 0$ admite como candidatas as raízes racionais apenas $p\ e - p$. Naturalmente $\sqrt{p} \neq p,\ \sqrt{p} \neq -p$ e $\sqrt{p}$ é solução da equação $x^2 - p = 0$. Logo, $\sqrt{p}$ é um número irracional.

Outra aplicação interessante é demonstrar que o $\cos 20°$ é um número irracional.

Proposição (3-2):

Demonstração: considere $\cos 3x = \cos(x + 2x)$. Pela fórmula de adição de cossenos de ângulos, tem-se: $\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$. Substituindo-se o seno e cosseno de arcos duplos, tem-se: $\cos 3x = (cos^2 x - sin^2 x) \cos x - 2 \sin x \cos x \sin x$. .Assim, $\cos 3x = (cos^2 x - sin^2 x) \cos x - 2sin^2 x \cos x$. Como $\sin x^2 = 1 - \cos x^2$ e reagrupando os termos do segundo membro da equação, conclui-se que:

$$\cos 3x = 4cos^3 x - 3 \cos x. \quad (3-2)$$

.

Substituindo $x = 20°$ e como $\cos 60° = \frac{1}{2}$, resulta em: $\frac{1}{2} = 4cos^3 20° - 3 \cos 20°$·. Multiplicando por 2 e reorganizando os termos da equação anterior, chega-se a:

$$8cos^3 20° - 6 \cos 20° \ - 1 = 0. \quad \text{(4-2)}$$

Esta é uma equação do terceiro grau na variável $\cos 20°$, como $20°$ é um ângulo do 1º quadrante, então $\cos 20° > 0$ e pelo Teorema (3-2), as possíveis raízes racionais são: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$. Nenhum destes valores é raiz da equação, logo $\cos 20°$ não é um número racional. A equação (4-2) é de grau ímpar, assim pelo Teorema (2-2) admite pelo menos uma raiz real. Desta forma, $\cos 20°$ é um número real que não é racional. Logo, $\cos 20°$ é um número irracional.

Nesta Proposição, a ideia de se supor que $\cos 20°$ é um número racional e obter uma contradição não prosperaria, da maneira tradicional pondo $\cos 20° = \frac{a}{b}$ e $b. \cos 20° = a$. Desta forma, considerar uma equação algébrica de grau ímpar e os teoremas (2-2) e (2-3) foi bastante eficiente para provar que $\cos 20°$ é um número irracional.

Quando se conhece uma raiz de uma equação algébrica, pode-se diminuir o grau da mesma, obtendo outra equação que contém as demais raízes da equação algébrica inicial.

Teorema (4-2): se a for raiz do polinômio $\mathrm{p(x)}$ de grau n e de coeficientes reais, então $\mathrm{p(x)}$ é divisível por $x - a$.

Demonstração: considerando o algoritmo da divisão de Euclides, $p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$. Como $x - a$ é um polinômio de grau 1, então $q(x)$ tem grau $n - 1$ e o resto da divisão $r(x)$ é uma constante. Calculando $p(a)$, obtém-se: $p(a) = (a - a).q(a) + r(a)$, portanto, $p(a) = r(a)$. Como a é raiz de $p(x)$, então $p(a) = 0$. Desta forma $r(a) = 0$. A divisão de $p(x)$ por $x - a$ tem resto igual à zero, assim $p(x)$ é divisível por $x - a$.

Lima et all [10] amplia esta discussão e deduz o dispositivo prático de Briot-Ruffini, iniciando a demonstração pelo algoritmo da divisão de Euclides como segue: toma-se $p(x) = (x - a)q(x) + r(x)$, onde, $\mathrm{p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}$, $a_n \neq 0$ e $\mathrm{q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0}$, $b_{n-1} \neq 0$. Tem-se: $r(x) = r(a) = r_0$. Pela igualdade de polinômios, $\mathrm{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0} = (x - a).(\mathrm{b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0}) + r_0$, obtém-se que: $b_{n-1} = \mathrm{a_n}$, $\mathrm{b_{n-2}} - a\mathrm{b_{n-1} = a_{n-1}} \Rightarrow \mathrm{b_{n-2} = a_{n-1}} + a\mathrm{b_{n-1}}$; $\mathrm{b_{n-3}} - a\mathrm{b_{n-2} = a_{n-2}} \Rightarrow \mathrm{b_{n-3} = a_{n-2}} + a\mathrm{b_{n-2}}$ e assim sucessivamente. Seguindo-se até o último coeficiente de $\mathrm{q(x)}$, chega-se a: $\mathrm{r_0} - a\mathrm{b_0 = a_0} \Rightarrow \mathrm{b_0 = a_0} + a\mathrm{b_0}$.

Este cálculo recursivo pode ser expresso através de tabela abaixo:

	$\mathrm{a_n}$	$\mathrm{a_{n-1}}$	$\mathrm{a_{n-2}}$	....	$\mathrm{a_1}$	$\mathrm{a_0}$
a	b_{n-1}	$\mathrm{b_{n-2}}$	$\mathrm{b_{n-3}}$	....	$\mathrm{b_0}$	r_0

O dispositivo fornece o polinômio $\mathrm{q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0}$, $b_{n-1} \neq 0$ e o valor de $p(a)$ que é igual a r_0.

Exemplos 1-2: Obter as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$

	1	-5	6	
2	1	$2.1 - 5 = -3$	$2.(-3) + 6 = 0$	$q(x) = x - 3$

É imediato que a raiz de $q(x)$ é 3 e as raízes de $x^2 - 5x + 6 = 0$ são 2 e 3.

Uma equação de quarto grau apareceu No Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT 2015-1. Foi solicitado aos candidatos que encontrassem as raízes do polinômio: $p(x) = 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 3x + 3$. Pelo teorema (3-2), as possíveis raízes racionais são: $1, -1, 3, -3,\ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$. Verifica-se que $p(1) = -4$, pois é a soma dos coeficientes. A aplicação do dispositivo de Briot-Ruffini fornece a tabela abaixo:

	2	1	-7	-3	3
-1	2	-1	-6	3	0
$\frac{1}{2}$	2	0	-6	0	

As outras raízes serão obtidas resolvendo a equação $2x^2 - 6 = 0$, reconstituída da última linha da tabela acima, e, equivale à $x^2 - 3 = 0$. Esta última equação tem raízes $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$. As raízes do polinômio $p(x) = 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 3x + 3$ são, portanto, $-1, \frac{1}{2},\ \sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$.

As informações do dispositivo de Briot-Ruffini podem ser interpretadas da seguinte forma: $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 3x + 3 = (\mathrm{x} + 1).(2x^3 - x^2 - 6x + 3)$. O polinômio $2x^3 - x^2 - 6x + 3$ será fatorado em um produto de dois polinômios, um de primeiro grau e outro de segundo grau, assim, $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 3x + 3 = (\mathrm{x} + 1).\left(x - \frac{1}{2}\right).(2x^2 - 6)$. O fator 2 será colocado em evidência, $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 3x + 3 = 2.(\mathrm{x} + 1).\left(x - \frac{1}{2}\right).(x^2 - 3)$. Finalmente, a fatoração do polinômio $x^2 - 3$ nos fornece, $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 3x + 3 = 2.(\mathrm{x} + 1).\left(x - \frac{1}{2}\right).(x + \sqrt{3}).(x - \sqrt{3})$. Assim, o polinômio $p(x)$ apresenta-se na forma fatorada.

Explorando ainda o exemplo anterior, pode-se obter o valor de $p(3)$ pelo dispositivo de Briott-Ruffini representado abaixo:

	2	1	-7	-3	3
3	2	7	14	39	120

Desta forma, tem-se que $p(3) = 120$. Os cálculos anteriores mostram a praticidade do dispositivo de Briot-Ruffini.

Conhecendo as raízes $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ de um polinômio $p(x)$, o mesmo pode ser expresso em sua forma fatorada: $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$. Cabe ressaltar que se um polinômio de grau n possuir todas as n raízes no conjunto dos números complexos, então seus coeficientes serão números reais.

Teorema (5-2): Se um polinômio de grau n tiver raízes reais ou raízes complexas conjugadas $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ no conjunto dos complexos, então os coeficientes deste polinômio serão números reais.

Demonstração: $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)\ x_i \in \mathbb{C}$. Com relação às raízes reais de $p(x)$, o produto de polinômios $(x - x_i)$ com x_i real, resulta em um polinômio real. Se $a + bi$ for raiz de $p(x)$, então, pelo Teorema (1-2), $a - bi$ também será raiz de $p(x)$. O produto $\big(x - (a + bi)\big)(x - (a - bi))$ é um polinômio de coeficientes reais, a saber $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$. Desta forma o produtório $\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$, $x_i \in \mathbb{C}$ será um polinômio de grau n com coeficientes reais.

A forma fatorada de um polinômio de coeficientes reais em fatores lineares precisa ser estudada de forma mais detalhada. O teorema de Albert Girard (1590-1623) demonstra que é possível realizar a fatoração, em termos lineares, de um polinômio que tenha seus coeficientes pertencentes a um corpo. .

Teorema de Girard (6-2): Para qualquer polinômio não constante $\mathrm{p} \in \mathrm{F[x]}$ existe um corpo K que contém F, em que P pode ser decomposto em fatores lineares na forma:

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \ \in K[x]$$

Naturalmente, $x_1 \ldots x_n$ são raízes de p em K. Precisa-se demonstrar o lema a seguir. Considere (p) o ideal gerado pelo polinômio p.

Lema (2-2): Se $\mathrm{P} \in \mathrm{F[x]}$, onde $\mathrm{F[x]}$ é um corpo for um polinômio irredutível, então $\mathrm{F[x]/(P)}$ é um corpo que contém F e pelo menos uma raiz de P.

Demonstração: a ideia consiste em provar que todos os elementos, não nulos, de $F[x]/(P)$ admitem inverso. Seja $Q +\ (p)$ um elemento não nulo de $F[x]/(P)$, onde Q é um polinômio que pertence ao corpo F. Logo, $Q + (p) \neq 0 \Rightarrow Q \notin (p)$. Como p é um polinômio irredutível, Q e p são primos relativos, logo $\exists\ p_1, Q_1\ \in F[x]$ tais que:

$$pp_1 + QQ_1 = 1\,. \qquad (3-2)$$

Logo, $pp_1 + QQ_1 - 1 = 0$. Esta relação mostra que $QQ_1 - 1$ é divisível por p, logo pertence ao ideal (p) gerado por p, assim, $QQ_1 + (p) = 1 + (p)$ e $\big(Q + (p)\big)\big(Q_1 + (p)\big) = 1 + (p)$. Conclui-se que todo elemento de $F[x]/\,(P)$ tem inverso, assim $F[x]/(P)$ é corpo. Precisa-se ainda provar que F contem uma raiz de p. Considerando que o corpo $F[x]/\,(P)$ é formado por classes e que os polinômios múltiplos de p pertencem à classe do elemento neutro deste corpo tem-se: $p\big(x + (p)\big) = p(x) + (p) \Longrightarrow p\big(x + (p)\big) = 0$, portanto, há uma raiz de p, $x + (p)$ em $F[x]/\,(P)$.

Algumas considerações são necessárias. O ideal gerado por um polinômio irredutível é um ideal maximal. Como o quociente de um anel por um ideal é um corpo, se e somente se, o ideal for maximal, então o quociente de um anel por um ideal gerado por um polinômio irredutível será um corpo. Há uma hipótese implícita bastante importante na argumentação anterior: que o quociente de um anel por um ideal é um corpo, se e somente se, o ideal for maximal e o anel for comutativo com unidade.

Pode-se, agora, provar o teorema de Girard (6-2):

Demonstração: a decomposição do polinômio p em produto de polinômios irredutíveis em $\mathrm{F[x]}$, $p = P_1P_2 \dots P_r$. Se houver raízes de p em F, então existirão polinômios de grau 1 na fatoração de P em polinômios irredutíveis em $\mathrm{F[x]}$. Como P_1 é polinômio irredutível em $\mathrm{F[x]}$, então pelo lema (2-3), $F_1[x] = F[x]/(P_1)$ será corpo. O polinômio P_1 pode ser decomposto em produto de polinômios irredutíveis em $F_1[x]$, $P_1 = P_{k_1}P_{k_2} \dots P_{k_j}$. Assim $p = P_{k_1}P_{k_2} \dots P_{k_j}P_2 \dots P_r$. Prossegue-se com quocientes de corpos por ideais de polinômios irredutíveis até que o polinômio p esteja fatorado em termos lineares, então existirá um corpo $\mathrm{K[x]}$ que contenha as raízes de p, concluindo a demonstração do Teorema.

Agora, estudar-se-á o Teorema Fundamental da Álgebra. Salienta-se que não se fará a demonstração do mesmo, pois não faz parte do escopo deste trabalho.

Teorema Fundamental da Álgebra (7-2): O número de raízes de um polinômio não constante com coeficientes sobre o corpo dos números complexos é igual ao grau deste polinômio.

Cabe mencionar que se uma raiz tiver multiplicidade k, então essa raiz será contada k vezes.

Tignol [21] enfatiza a ideia de Leonard Euler (1707-1783): provar que as sentenças a seguir são equivalentes e depois demonstrar o teorema fundamental da álgebra.

Lema (3-2): são equivalentes as seguintes três sentenças (a), (b) e (c): (a) Teorema Fundamental da Álgebra; (b) todo polinômio não constante sobre o corpo dos reais tem pelo menos uma raiz complexa; (c) todo polinômio, não constante, de coeficientes reais pode ser decomposto em produtos de polinômios de coeficientes reais de grau 1 ou 2.

Demonstração: de imediato (a) implica (b). Assumindo-se (b) como hipótese, provar-se-á (c). Seja $p(x)$ um polinômio não constante sobre $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{C}$ uma raiz de $p(x)$. Se $a \in \mathbb{R}$, então $p(x)$ será divisível por $x - a$ e pelo algoritmo da divisão de Euclides, tem-se: $P(x) = (x - a)P_1(x)$. Se $a \notin \mathbb{R}$, então $a \neq a'(a'$ é o conjugado de a). Foi provado anteriormente que se a for raiz então a' também será raiz de $p(x)$. Desta forma, $p(x)$ será divisível por $(x - a)(x - a') = x^2 - (a + a')x + aa'$. Como a soma de dois números complexos conjugados resulta em um número real e o mesmo acontece com o produto, então o polinômio $x^2 + (a + a')x + aa'$ terá coeficientes reais. Pelo algoritmo da divisão: $p(x) = (x^2 - (a + a')x + aa')P_1(x)$. Agora, aplica-se o mesmo raciocínio para $P_1(x)$. Seja $b \in \mathbb{C}$, uma raiz de $P_1(x)$. As raízes de $P_1(x)$ são raízes de $p(x)$ também, tem-se: $P_1(x) = (x - b)P_2(x)\ se\ b \in \mathbb{R}\ ou\ P_1(x) = (x^2 - (b + b')x + bb')P_2(x)\ se\ b \notin \mathbb{R}$, onde b' é o conjugado de b. Repete-se o processo até o polinômio $p(x)$ estar na forma de produtos de polinômios com coeficientes reais de grau 1 ou 2.

Demonstrar-se-á que (c) implica (a). Um polinômio de grau dois em $\mathbb{R}[x]$ pode ser decomposto em produto de dois polinômios de grau 1 em $\mathbb{C}[x]$. Define-se um homomorfismo (H) em que um polinômio p é levado ao seu conjugado p'. $H: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \longmapsto \mathrm{p}' = a'_n x^n + a'_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a'_1 x + a'_0$, onde a'_i é o conjugado de a_i. O produto $PP' \in \mathbb{R}[x]$. Utilizando como hipótese a sentença (c): todo polinômio sobre $\mathbb{R}$ pode ser decomposto em polinômios de coeficientes reais de grau 1 ou 2 e o fato de que todo polinômio de grau dois em $\mathbb{R}[x]$ pode ser expresso como produto de dois polinômios lineares em $\mathbb{C}[x]$, tem-se: $PP' = P_1 P_2 \ldots P_k$, onde cada P_i é um polinômio de grau 1 em $\mathbb{C}[x]$, o que completa a demonstração.

Tignol [21] cita a ideia de Euler de utilizar as equivalências desenvolvidas anteriormente para demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, porque visa provar a sentença (b): todo polinômio, não constante sobre o corpo dos reais tem pelo menos uma raiz complexa. Desta forma, por equivalência, o Teorema Fundamental da Álgebra estaria demonstrado.

Com o Teorema de Girard (6-2) e o Teorema Fundamental da Álgebra (7-2) podem-se estabelecer relações entre os coeficientes reais de um polinômio de grau n, $\mathrm{p(x)} = \mathrm{a_n x^n} + \mathrm{a_{n-1}x^{n-1}} + \mathrm{a_{n-2}x^{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_1 x} + \mathrm{a_0}$, $a_n \neq 0$ e as suas raízes $\mathrm{x_1, x_2, \ldots, x_n}$. Sabe-se, pelo teorema fundamental da álgebra que $p(x)$ tem n raízes. Pelo teorema (6-2), pode-se fatorar $p(x)$ em termos lineares no conjunto dos números complexos como segue: $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$. Efetuando-se a multiplicação, tem-se:

$p(x) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} - s_3x^{n-3} + \cdots (-1)^n s_n$, onde: $s_1 = \sum_1^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$; $s_2 = \sum_{i\neq j,1}^n x_ix_j = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$. Segue-se o raciocínio recursivo até $s_n = x_1x_2x_3 \ldots x_n$.

Pela igualdade dos polinômios $\mathrm{p(x)} = \mathrm{a_nx^n} + \mathrm{a_{n-1}x^{n-1}} + \mathrm{a_{n-2}x^{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_1x} + \mathrm{a_0}$, $a_n \neq 0$ e $p(x) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} - s_3x^{n-3} + \cdots (-1)^n s_n$. Portanto, $s_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $s_2 = +\frac{a_{n-2}}{a_n}$, ..., $s_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$. De forma geral, $s_i = (-1)^i \frac{a_{n-i}}{a_n}$.
Estas relações entre coeficientes de uma equação algébrica e suas raízes são conhecidas como relações de Girard.

Caso existam raízes múltiplas, estas aparecerão tantas vezes quantas forem as suas respectivas multiplicidades. Há relações entre a multiplicidade de uma raiz e as suas derivadas.

A derivada de uma função polinomial $\mathrm{p(x)} = \mathrm{a_nx^n} + \mathrm{a_{n-1}x^{n-1}} + \mathrm{a_{n-2}x^{n-2}} + \cdots + \mathrm{a_1x} + \mathrm{a_0}$, $a_n \neq 0$ é um polinômio de grau $n-1$: $\frac{dp}{dx} = \mathrm{n.a_nx^{n-1}} + \mathrm{(n-1).a_{n-1}x^{n-2}} + \mathrm{(n-2).a_{n-2}x^{n-3}} + \cdots + \mathrm{a_1}$, $a_n \neq 0$. Seja $y = f(x).g(x)$. A derivada desta função produto é $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.g(x) + f(x).\frac{dg(x)}{dx}$. A demonstração destas derivadas não faz parte do objetivo deste trabalho, mas para mais detalhes ver Guidorizzi [7].

Teorema (8-2): Se a for raiz de multiplicidade k de um polinômio $p(x)$ de coeficientes reais e raízes pertencentes aos complexos de grau n, então a será raiz das derivadas de ordem k deste polinômio.

Demonstração: como a é raiz de ordem k, podemos escrever $p(x)$ como:
$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Por hipótese, a é raiz de multiplicidade k, então: $p(x) = (x-a)^k q(x)$. Derivando $p(x)$ obtém-se, $\frac{dp}{dx} = k(x-a)^{k-1}q(x) + (x-a)^k\frac{dq}{dx}$, Assim, $\frac{dp}{dx} = (x-a)^{k-1}[kq(x) + (x-a)\frac{dq}{dx}]$. Portanto, $\frac{dp}{dx}(a) = 0$. Foi provado que a é raiz da derivada primeira. Como todas as derivadas sucessivas de $p(x)$ até a ordem k são o produto de $(x-a)$ elevado a alguma potência entre 1 e $k-1$ multiplicado por um polinômio, concluí-se que a será raiz de todas as derivadas até a derivada de ordem k.

3 - EQUAÇÕES CÚBICAS, QUÁDRICAS

Nesta seção serão abordadas as equações cúbicas e quádricas. O termo quádrica se refere a equações de quarto grau, embora, atualmente, este termo seja utilizado de outra forma. As equações algébricas de grau maior do que quatro também serão foco de análise. A seção será iniciada com a abordagem das equações de terceiro graus e a fórmula de Cardano.

As fórmulas de resolução de equações cúbicas e quádricas foram publicadas em 1445 por Girolamo Cardano (1501-1576) em sua obra ***Ars Magna***. Cardano admitiu que para a resolução das cúbicas, ele teve auxílio de Nicolo Fontana "Tartaglia" (1500-1557). Tartaglia mostrou o método da resolução da cúbica para Cardano acreditando que este o manteria em segredo, o que não aconteceu.

Embora a fórmula de resolução da equação cúbica seja conhecida como fórmula de Cardano, sabe-se que Scipione Del Ferro já conhecia por volta de 1515 à resolução de equações cúbicas da forma $x^3 + px = q$, mas decidiu não publicar seus resultados. Depois da sua morte em 1526, seus discípulos se apropriaram do seu método.

A intenção de resolver uma equação cúbica surgiu muito antes de Cardano e Tartaglia discutirem a autoria da fórmula de resolução deste tipo de equação, neste sentido, a álgebra de Omar Kayyam (cerca de 1050-1122 d.C.) merece atenção.

Enquanto os gregos utilizavam segmentos de retas para representar os coeficientes de uma equação algébrica, ele utilizava números para este fim; uma significativa evolução para a época. O termo raízes de uma equação já era utilizado, mesmo considerando apenas como raízes os números positivos. Kayyam tinha conhecimento do discriminante da equação quadrática e avançou na álgebra ao procurar raízes da equação cúbica.

A equação cúbica de Omar Kayyam era: $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, fazendo a substituição $x^2 = 2py$, que é uma equação de uma parábola; a equação cúbica será: $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$. Boyer (pág. 175) [2] argumenta que: "$2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$ é uma equação de hipérbole e que os pontos onde esta hipérbole cruza a parábola $x^2 = 2py$ terão como abscissas raízes da equação cúbica original". Outras cônicas também poderiam ter sido usadas para determinar as raízes da cúbica original como as abscissas dos pontos de intersecção com a parábola citada anteriormente.

Uma conclusão foi que a parábola $x^2 = 2py$ sempre intersectava a hipérbole $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$ em pelo menos um ponto, ou seja, toda equação cúbica tinha pelo menos uma raiz real.

A partir da história da matemática, nota-se que o fascínio por resolver equações algébricas persiste há séculos, agora será analisada a chamada *fórmula de Cardano de resolução da equação cúbica*. Como, sem perda de generalidade, o coeficiente do termo líder é sempre não nulo, será considerado como sendo 1. Deseja-se encontrar as raízes da equação:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1-3)$$

Aqui a, b, c são números reais.

Pela proposição (1-2) a substituição de variável que elimina o termo de grau dois na equação (1-3) é $x = y - \frac{a}{3}$. Então, $(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$. Desenvolvendo as potencias, desta forma, $y^3 - 3y^2\frac{a}{3} + 3y(\frac{a}{3})^2 - (\frac{a}{3})^3 + ay^2 - 2y\frac{a^2}{3} + a(\frac{a}{3})^2 + by - \frac{ab}{3} + c = 0$. Logo, $y^3 - ay^2 + \frac{a^2y}{3} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2}{3}a^2y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0$. Simplificando e reagrupando em termos de potências de y, chega-se a: $y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27} = 0$. Fazendo: $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}$, tem-se:

$$y^3 + py + q = 0\,. \qquad (2-3)$$

Agora se procede à resolução da equação (2-3). Uma nova substituição será necessária:

$$y = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}\ . \qquad (3-3)$$

. A ideia fundamental do método desenvolvido por Cardano consiste em obter duas equações nas variáveis t e u. Obtendo-se t e u, consegue-se resolver a cúbica. Efetuando-se a seguir a substituição de (3-3) em (2-3) tem-se, $(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u})^3 + p(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}) + q = 0$ e daí: $t + 3\sqrt[3]{t^2}\sqrt[3]{u} + 3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u^2} + t + p(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}) + u + q = 0$. Reorganizando a equação: $t + u + q + \left(3\sqrt[3]{tu} + p\right)\left(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}\right) = 0$. Logo: $t + u + q = 0$ e $\left(3\sqrt[3]{tu} + p\right)\left(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}\right) = 0$. Para $\left(3\sqrt[3]{tu} + p\right)\left(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}\right) = 0$, tem-se $\left(3\sqrt[3]{tu} + p\right) = 0$, ou $\left(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}\right) = 0$. Considerando $\left(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}\right) = 0$, obtém-se $\sqrt[3]{t} = -\sqrt[3]{u}$ e a equação (3-3) seria reduzida à $y = 0$. Assim, a variável auxiliar y teria valor nulo e a substituição $x = y - \frac{a}{3}$ seria desprovida de sentido. Logo é preciso que $\sqrt[3]{t} \neq -\sqrt[3]{u}$. Desta forma, o produto $\left(3\sqrt[3]{tu} + p\right)\left(\sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}\right)$ será nulo, quando $\left(3\sqrt[3]{tu} + p\right) = 0$. Assim, $\left(3\sqrt[3]{tu} + p\right) = 0$, logo, $tu = -\frac{p^3}{27}$.

Algumas considerações são pertinentes. Quando foram igualadas partes da equação anterior à zero, foram evidenciadas as equações de uma reta $t + u + q = 0$ e de uma hipérbole $tu = -\frac{p^3}{27}$. A reta citada nos fornece a soma de dois números, enquanto a hipérbole, o produto destes mesmos números. Esse sistema pode não ter solução real. Desta forma, buscam-se dois números t e u em que se sabe a sua soma e o seu produto, assim estes números são raízes da equação quadrática $k^2 + qk - \frac{p^3}{27} = 0$. Os valores de t e u são as raízes desta equação.

$$t, u = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad (4-3)$$

Os valores de t e u, substituídos na equação (3-3), dá origem à **Fórmula de Cardano**:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (5-3)$$

Para encontrar os valores de x, basta substituir y em $x = y - \frac{a}{3}$.

Lima [9] cita exemplos do livro de Álgebra de Leonard Euller (1707-1783) publicado em 1770. Serão analisados alguns destes exemplos.

Exemplo 1-3:

Resolver a equação com a fórmula de Cardano: $x^3 - 6x - 9 = 0$. Esta equação não apresenta o termo quadrado, pode-se aplicar a fórmula de Cardano diretamente, com $p = 6$ e $q = -9$, tem-se:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} \iff x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}},$$

obtém-se $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$.

Apresentar-se-á a discussão de Lima [9]. O referido autor prossegue: $x = 2 + 1 = 3$. Para se obter as outras raízes da equação cúbica deste exemplo, basta dividir $x^3 - 6x - 9$ por $x - 3$. O resultado dessa divisão será um polinômio de grau dois, assim encontrar as outras raízes será tarefa fácil. A divisão dos polinômios citados é $x^2 + 3x + 3$. As raízes de $x^2 + 3x + 3$ são: $\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e as raízes da equação pedida são: 3; $\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Uma forma, incorreta de resolver esta equação seria:

$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 3\sqrt[3]{1}$. Desta forma, as outras raízes da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ seriam: $3, -\frac{3}{2} + 3i\frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ -\frac{3}{2} - 3i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Apenas a raiz 3 está correta. As raízes da equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ são $\frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ \frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e não $-\frac{3}{2} + 3i\frac{\sqrt{3}}{2}\ e\ -\frac{3}{2} - 3i\frac{\sqrt{3}}{2}$ como foi obtido fazendo $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} = 3\sqrt[3]{1}$.

A equação $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$ admite três raízes, sendo pelo menos uma raiz real, ou seja, tem-se que combinar cada raiz cúbica de 8 com a sua respectiva raiz cúbica da unidade. As raízes cúbicas da unidade são: 1, $w = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $w^2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; as raízes cúbicas de 8 são: 2, $2w$, $2w^2$.

Como fazer a associação correta das raízes cúbicas? Sabemos que 3 é raiz. Devem-se analisar as relações entre raízes e coeficientes da equação. O produto das raízes vale 9 (termo independente da equação), então as mesmas são: 3, $\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\, e\, \frac{-3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se na resolução de equações cúbicas a fórmula de Cardano não se fez muito necessária, uma indagação natural é qual é a relevância desta fórmula? Quando foi descoberta a fórmula de Cardano não se sabia se as equações cúbicas tinham solução e nem qual a natureza das raízes desta equação. Com a utilização desta fórmula, mostrou-se que todas as equações cúbicas admitem três raízes e possibilitou examinar a natureza destas raízes, além de ter sido a partir da sua aplicação que Bombelli pode ter percebido a insuficiência dos números reais para resolver equações do terceiro grau e a necessidade de compreender a raiz imaginária.

Antes de prosseguir com outros exemplos, a análise do discriminante da equação de terceiro grau se faz necessária. Neste trabalho será utilizada a definição de Lima [9]:

Definição (1-3): dada a equação de terceiro grau com coeficientes reais: $\mathrm{y}^3+\mathrm{py}+\mathrm{q}=0$, o discriminante D desta equação é $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$.

Há relações entre o discriminante e a natureza das raízes de uma equação de terceiro grau.

Teorema (1-3): se uma equação cúbica tem discriminante negativo, então admitirá três raízes reais e distintas. Caso o discriminante for nulo, então haverá três raízes reais sendo pelo menos duas iguais. Se o discriminante for positivo, então existirá uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

Demonstração: sejam as raízes da equação cúbica $\mathrm{y}^3+\mathrm{py}+\mathrm{q}=0$ y_1, y_2, y_3. Sendo $y=\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{u}$ e como u tem três raízes cúbicas e t também tem três raízes cúbicas, a priori há nove soluções para a equação (3-3) . Pelo teorema fundamental da álgebra (7-2), uma equação algébrica de coeficientes reais de grau 3 tem 3 raízes no conjunto dos números complexos. Para determinar a correta associação das raízes cúbicas de u e t precisa-se satisfazer duas condições i - a soma de u e t é um número real, pois $t+u=-q$; ii – o produto de u e t também é um número real, $tu=-\frac{p^3}{27}$. Feitas estas considerações, serão analisados os três casos possíveis para o discriminante D.

Para $D<0$, u e t são números complexos conjugados como pode ser visto na equação (4-3). Sejam as raízes cúbicas de u: $k+ji$; $n+mi$; $r+si$; $k, j, n, m, r, s \in \mathbb{R}$.

Como u e t são números complexos conjugados, as suas raízes cúbicas pelo teorema (3-1) também são conjugadas Assim, as raízes cúbicas de t são: $k - ji;\ n - mi;\ r - si$. Desta forma, a associação das raízes cúbicas de u e t que satisfaz as condições i e ii é: $y_1 = k + ji + k - ji = 2k$, $y_2 = n + mi + n - mi = 2n$, $y_3 = r + si + r - si = 2r$. As três raízes são reais e distintas.

Para $D = 0$, neste caso u e t são iguais ao número real $-\frac{q}{2}$. As raízes cúbicas de $-\frac{q}{2}$ são: $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\ w$ e $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\ w^2$; com $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \in \mathbb{R}$ onde $1, w, w^2$ são as raízes cúbicas da unidade, como foi mostrado o exemplo (2-1). Estas raízes do número real $-\frac{q}{2}$ podem ser obtidas pelo teorema (2-1). Assim, as raízes da equação cúbica são: $y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, $y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\ w + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} w^2$, $y_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\ w^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\ w$. Como $y_2 = y_3$, a equação tem duas raízes iguais.

Para $D > 0$, u e t são números reais como mostra a equação (4-3). Pelo teorema (2-1), as raízes cúbicas de u e t são: $\sqrt[3]{u}$, $\sqrt[3]{u}\, w$ e $\sqrt[3]{u}\ w^2$; com $\sqrt[3]{u} \in \mathbb{R}$ e $\sqrt[3]{t}$, $\sqrt[3]{t}\ w$ e $\sqrt[3]{t}\, w^2$; com $\sqrt[3]{t} \in \mathbb{R}$, respectivamente. Para satisfazer as condições i e ii, tem-se: $y_1 = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{u}$, $y_2 = \sqrt[3]{t}\ \mathrm{w} + \sqrt[3]{u}\, w^2$, $y_3 = \sqrt[3]{t}\, w^2 + \sqrt[3]{u}\, w$.

Nota-se que y_2 e y_3 são números complexos conjugados e y_1 é um número real. Desta forma, foram obtidas relações entre o discriminante e a natureza das raízes da equação de terceiro grau.

Leonard Dickson (1874-1954) propôs uma forma de determinar a correta associação entre as raízes cúbicas das variáveis auxiliares visando encontrar as raízes da equação $\mathrm{y}^3 + \mathrm{py} + \mathrm{q} = 0$. Dickson (pág. 3) [4], assim como Bizout utiliza as raízes cúbicas da unidade: 1, $w = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $w^2 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Com a fórmula de Cardano, equação (5-3), da seguinte forma:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$y_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ \mathrm{w} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ w^2$$

$$y_3 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ w^2 + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ w\ .$$

Aqui, $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \in \mathbb{R}$ e $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \in \mathbb{R}$.

Exemplo (2-3): resolver a equação $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Nesta equação tem-se $D = 0$. Derivando-se o polinômio obtém-se, $3x^2 - 3 = 0$. Logo $x = -1$, ou $x = 1$. Verifica-se que 1 não é raiz da equação cúbica que se deseja resolver. Como -1 é raiz da equação cúbica $x^3 - 3x - 2 = 0$, então, pelo teorema (8-2), -1 é raiz dupla desta equação. A última raiz, que é um número real pode ser obtida de várias formas. Dividir $x^3 - 3x - 2 = 0$ por $x + 1$ duas vezes, o que é fácil, pois se utiliza o dispositivo prático de Briot-Ruffini. Desta forma encontra-se $x = 2$. A fórmula de Cardano fornece: $x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1}$. Pelo teorema (1-3), com $D = 0$, tem-se que a raiz real de $\sqrt[3]{1}$ será associada com a raiz real de $\sqrt[3]{1}$, assim $x = 1 + 1 = 2$. Observa-se que na equação (3-3) tem-se $u = t$.

A resolução de uma equação quádrica será o próximo tópico a ser desenvolvido. Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano publicou na *Ars Magna (1545)* de seu mestre.

Ferrari concebeu um método muito interessante para resolver a equação quádrica. Iniciou a resolução com uma substituição de variáveis semelhante a realizada na fórmula de Cardano. Analisando-se, a seguir, o referido método. Seja a equação: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. A mudança de variável é semelhante à realizada na fórmula de Cardano. Pela proposição (1-1), fazendo $x = y - \frac{a}{4}$, tem-se $(y - \frac{a}{4})^4 + a(y - \frac{a}{4})^3 + b(y - \frac{a}{4})^2 + c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d = 0$, logo, $y^4 - 4y^3\frac{a}{4} + 6y^2(\frac{a}{4})^2 - 4y(\frac{a}{4})^3 + (\frac{a}{4})^4 + ay^3 - 3ay^2\frac{a}{4} + 3ay(\frac{a}{4})^2 + a(\frac{a}{4})^3 + by^2 - 2by\frac{a}{4} + b(\frac{a}{4})^2 + cy - c\frac{a}{4} + d = 0$. Desenvolvendo as potências, chega-se a: $y^4 - ay^3 + 3y^2\frac{a^2}{8} - y\frac{a^3}{16} + \frac{a^4}{256} + ay^3 - 3y^2\frac{a^2}{4} + 3y\frac{a^3}{16} + \frac{a^4}{64} + by^2 - by\frac{a}{2} + b\frac{a^2}{16} + cy - c\frac{a}{4} + d = 0$. Simplificando e reagrupando em termos de potências de y.

$y^4 + \left(b - 3\frac{a^2}{8}\right)y^2 + \left(c - \frac{ab}{2} + \frac{a^3}{8}\right)y + d - \frac{ac}{4} + \frac{ba^2}{16} - 3\frac{a^4}{256} = 0$. Podem-se nomear os coeficientes das potências de y como: p, q, r, assim, $y^4 + py^2 + qy + r = 0$. Reorganizando os termos da equação anterior, tem-se, $y^4 + py^2 = -qy - r$. Adicionando $\frac{p^2}{4}$ aos dois membros da equação, logo, $y^4 + py^2 + \frac{p^2}{4} = -qy - r + \frac{p^2}{4}$ assim há um trinômio quadrado perfeito no primeiro membro da equação, $(y^2 + \frac{p}{2})^2 = -qy - r + \frac{p^2}{4}$.

Uma vez completado o quadrado, será utilizada uma nova variável auxiliar u com o objetivo de obter um quadrado perfeito no segundo membro da equação anterior. Desta forma, $(y^2 + \frac{p}{2} + u)^2 = -qy - r + \frac{p^2}{4} + 2uy^2 + pu + u^2$.

Assumindo que o segundo termo da equação seja um quadrado perfeito tem-se: $-qy - r + \frac{p^2}{4} + 2uy^2 + pu + u^2 = \left(\sqrt{2u}y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)^2$.

Os termos independentes, em relação à variável y, dos dois lados da equação acima devem ser iguais, isto é, $-r + \frac{p^2}{4} + pu + u^2 = \frac{q^2}{8u}$. Considerando u não nulo, multiplicar-se-ão os termos da equação anterior por u, assim, $-ru + \frac{p^2}{4}u + pu^2 + u^3 = \frac{q^2}{8}$, chega-se a:

$u^3 + pu^2 + \left(-r + \frac{p^2}{4}\right)u - \frac{q^2}{8} = 0 . \quad (6-3)$

Desta forma, o valor da variável auxiliar u será determinado através da equação cúbica (6-3), que é uma equação cúbica completa.

Na equação a seguir, os dois termos são quadrados perfeitos: $(y^2 + \frac{p}{2} + u)^2 = (\sqrt{2u}y - \frac{q}{2\sqrt{2u}})^2$. Extraindo a raiz quadrada dos dois membros chega-se a **fórmula de Ferrari:**

$$y^2 + \frac{p}{2} + u = \pm\left(\sqrt{2u}y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right) \qquad (7-3)$$

A fórmula de Ferrari transforma a equação de quarto grau em duas equações de segundo grau, o que é fácil de resolver. O problema da fórmula consiste em encontrar o valor da variável auxiliar u.

Estudando-se um pouco mais a fórmula de Ferrari, analisar-se-ão as duas equações de segundo grau obtidas a partir da equação (7-3). Primeiro, será considerado o sinal positivo do segundo membro da equação (7-3): $y^2 + \frac{p}{2} + u = \sqrt{2u}y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}$, logo,

$$y^2 - \sqrt{2u}y + \frac{q}{2\sqrt{2u}} + \frac{p}{2} + u = 0 . \qquad (8-3)$$

Agora considerando o sinal negativo do segundo membro da equação (7-3), tem-se também, $y^2 + \frac{p}{2} + u = -\left(\sqrt{2u}y - \frac{q}{2\sqrt{2u}}\right)$, isto é,

$$y^2 + \sqrt{2u}y - \frac{q}{2\sqrt{2u}} + \frac{p}{2} + u = 0 . \qquad (9-3)$$

Essas são as duas equações de segundo grau que fornecem as soluções da equação de quarto grau de Ferrari. Naturalmente, para encontrar as raízes da equação de quarto grau original basta substituir cada valor de y na equação: $x = y - \frac{a}{4}$.

Algumas considerações são pertinentes. Para que as equações (8-3) e (9-3) tenham coeficientes reais, a variável auxiliar u precisará assumir um valor real. Desta forma, será preciso analisar a natureza das raízes da equação (6-3). Se esta equação tiver apenas uma raiz real, então o valor de u estará determinado. Caso esta equação admita três raízes reais, significa que a variável auxiliar u poderá, a priori, admitir qualquer uma das raízes encontradas. Para obter o valor de u, há a necessidade de testar cada uma das três raízes encontradas na equação (6-3) nas equações (8-3) e (9-3) que fornecem as soluções da equação de quarto grau na variável auxiliar y. Tem-se que obter os valores da incógnita x, através da substituição $x = y - \frac{a}{4}$ e depois verificar se estes satisfazem a equação de quarto grau original.

Com relação à natureza das raízes da equação de quarto grau, elas podem ser todas reais, se as equações de segundo grau (8-3) e (9-3) admitirem raízes reais. Assim a equação $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ terá 4 raízes reais. Outra possibilidade é de que uma das duas equações de segundo grau mencionadas anteriormente tenha raízes reais e a outra equação de segundo grau admita raízes complexas conjugadas, assim a equação $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ terá duas raízes reais e duas raízes complexas conjugadas. . Há ainda outra possibilidade, as equações (8-3) e (9-3) tenham raízes conjugadas complexas, assim a equação de quarto grau não terá raízes reais, mas sim dois pares de raízes complexas conjugadas.

Tignol (pág. 131-136) [21] salienta que Lagrange observou que para resolver uma equação de quinto grau era preciso resolver uma equação auxiliar de sexto grau. Outro aspecto evidenciado por Tignol (pág. 131-136) [21] é de que Lagrange não demonstrou que equações com grau superior a quatro não são solúveis por radicais. Sabe-se que foi Abel quem demonstrou que equações com grau superior a quatro não são solúveis por radicais.

Há tipos de equações de grau 5 que podem ser resolvidas. As raízes das equações da forma $x^5 = c,\ c \in \mathbb{R}$ são facilmente encontradas pela 2ª fórmula de De Moivre.

Para as equações de quinto grau de coeficientes inteiros que possuem pelo menos uma raiz racional podem-se encontradas suas raízes sem a utilização de métodos numéricos, pois a raiz racional será encontrada através do teorema (3-2) e através do dispositivo de Briott-Ruffini, encontrar-se-ão as outras raízes.

Se a equação de quinto grau possuir raízes múltiplas, então será possível encontrar todas as raízes da mesma. Pelo teorema (8-2), uma raiz da derivada da função polinomial de quinto grau também será raiz da equação de quinto grau que se deseja resolver. As raízes da derivada são raízes de uma equação de grau 4, as quais pela fórmula de Ferrari podem ser obtidas. Caso não existam raízes racionais nem raízes múltiplas a equação de quinto grau não poderá ser resolvida analiticamente.

As raízes de equações de grau superior a quatro serão obtidas por aproximação através de métodos numéricos. Neste trabalho serão abordados dois métodos para encontrar raízes reais de equações algébricas por aproximação. O primeiro método consiste em obter uma raiz a partir do Teorema de Bolzano ou Teorema do Anulamento que é um corolário do lema (1-2) (Teorema do Valor Intermediário), o enunciado deste teorema segue-se de Guidorizzi (pág. 121) [7]:

Teorema (2-3) Teorema do Anulamento ou de Bolzano: Se f for uma função continua no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então existira pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração: a função polinomial é contínua. Seja $p(x)$ um polinômio e um intervalo fechado $[a, b]$, tal que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. As hipóteses do teorema (2-3) estarão satisfeitas. Para obter uma raiz aproximada de $p(x)$, tome $d \in [a, b]$. Caso $p(d) > 0$ considerar-se-á o intervalo $[a, d]$. As hipóteses do teorema (2-3) foram satisfeitas, então tome $d_1 \in [a, d]$. Naturalmente se $p(d) < 0$, o intervalo a ser utilizado será $[d, b]$. De forma análoga, tome $d_1 \in [d, b]$. O processo é recursivo e a cada nova etapa o tamanho do intervalo diminui até que, com a aproximação desejada, uma raiz de $p(x)$ seja encontrada. Cabe mencionar que satisfazer as hipóteses do teorema (2-3) pode ser uma tarefa não muito fácil e por isso a busca computacional faria sentido.

O segundo método a ser abordado para obter raízes de uma função é o método de Newton. Este método consiste em aproximar a função através do seu polinômio de Taylor. Seja a função $y = f(x)$ contínua e de classe C^1 e a derivada desta função $f'(x)$. O polinômio de Taylor de y em x_1 é:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1). \qquad (10-3)$$

Considere que o intercepto sobre o eixo das abscissas da equação (10-3) seja x_2, assim $y = 0$, ou seja, $0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$, logo, $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

O objetivo do método de Newton é encontrar uma raiz de $f(x)$, x_1 representa a primeira aproximação da raiz e x_2, a segunda aproximação da raiz. O processo pode ser repetido até obter a raiz da função com a aproximação desejada. A enésima aproximação da raiz fornece a aproximação:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

. . Este trabalho visa à resolução de equações algébricas, assim pode-se considerar a função $f(x)$ como uma função polinomial polinômio, pois estas funções são continuas e de classe C^1 e aplicar o método de Newton.

Uma crítica ao método de Newton é que este não informa se o polinômio tem raiz real. Caso um polinômio tenha apenas raízes complexas conjugadas, as aproximações serão inúteis para identifica-las.

O estudo de métodos numéricos para obtenção de raízes aproximadas de funções não é o foco deste trabalho, apenas foi mostrado que para se obter raízes de equações de graus superiores a quatro, as quais não são solúveis por radicais pode-se utilizar métodos numéricos para encontrar, por aproximação, raízes das equações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho procurou-se analisar as soluções de equações algébricas de coeficientes reais com a necessária e correta teoria dos números complexos e teoremas correlacionados. Merece destaque alguns resultados obtidos, como o fato de raízes enésimas de números complexos conjugados também serem conjugadas, que um número complexo tem *n* raízes enésimas. Explorou-se também a periodicidade das funções seno e cosseno e as representações trigonométrica e exponencial de um número complexo para deduzir a periodicidade da função exponencial.

A fórmula de Cardano foi de extrema relevância, pois foi a partir da resolução de equações de grau 3 que se mostrou a insuficiência dos números reais e o surgimento dos números complexos. A demonstração da fórmula de Cardano foi apresentada neste trabalho de forma diferente àquela exposta em Lima [9] e Hefez e Villela [8]. O entendimento correto das associações das raízes cúbicas das variáveis auxiliares se mostrou fundamental na resolução de equações de grau 3. Como o discriminante da equação de terceiro grau fornece informações precisas sobre a natureza das raízes da mesma, recomenda-se que, quando se abordar equações de grau 3, também se analise o discriminante deste tipo de equação, fato que não é explorado no Ensino Médio.

A fórmula de Ferrari de resolução da equação de quarto grau foi analisada e apresentada suas soluções por radicais. Sugere-se que a fórmula de Ferrari seja pelo menos mencionada no Ensino Médio e também que seja informado que equações de grau superior a quatro não são solúveis por radicais.

É importante que o Teorema Fundamental da Álgebra seja apresentado em correlação com a teoria de números complexos e polinômios. Já o Teorema de Girard é enunciado de forma equivocada em livros didáticos. Nestes cita-se que o teorema vale apenas para equações algébricas de coeficientes reais, mas na verdade vale também para equações algébricas com coeficientes em um corpo qualquer. No caso de polinômios com coeficientes reais, o corpo em que estes polinômios serão decompostos em fatores lineares é o corpo dos complexos.

Espera-se que este trabalho contribua para o ensino de números complexos e equações algébricas, possibilitando uma melhor compreensão destes tópicos para professores da educação básica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARTIN, Emil. **Galois' Theory**. 1ª ed. Mineola, New York, Dover Publications, Inc: 1998.

[2] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ª ed. São Paulo, Editora Edgard Blucher LTDA: 1974.

[3] DEHN, Edgar. **Algebraic Equations: an Introduction to the Theories of Lagrange and Galois.** Mineola, New York, Dover Publications, Inc: 2004.

[4] DICKSON, Leonard Eugene. **Theory of Algebraic Equations.** 1ª ed. 40ª reimpressão, Chicago, Merchant Books: 1903.

[5] ESCOFIER, Jean-Pierre. **Thèorie de Galois: Cours et Exercicies Corrigié**. 2ª ed. Paris, Dunod: 2000.

[6] GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. 4ª ed. São Paulo, Editora Livraria da Física: 2010.

[7] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo Vol. 1.** 5ª ed. Rio de Janeiro, LTC Livros Técnicos e Científicos Editora, 2001.

[8] HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres**. Polinômios e Equações Algébricas**. In Coleção PROFMAT. 1ª ed. Rio de Janeiro, SBM Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[9] LIMA, Elon Lages. **A Equação de Terceiro Grau**. In Matemática Universitária nº5 junho p. 9-23. Rio de Janeiro, SBM: 1987.

[10] LIMA, Elon Lages, CARVALHO; Paulo Cezar Pinto, MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **A Matemática do Ensino Médio Vol. 3**, in Coleção do Professor de Matemática; 6ª ed. Rio de Janeiro, SBM Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[11] LIMA, Elon Lages (editor), CARVALHO; Paulo Cezar Pinto, MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; et all. **Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio**, in Coleção do Professor de Matemática; 1ª ed. Rio de Janeiro, SBM Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

[12] MARTIN, Paulo A. **Grupos, Corpos e Teoria de Galois.** 1ª ed. São Paulo, Editora Livraria da Física: 2010.

[13] MAXFIELD, John E., MAXFIELD, Margaret W. Abstract. **Algebra and Solution by Radicals.** Mineola, New York, Dover Publications, Inc: 2010.

[14] NIVEN, Ivan**. Números: Racionais e Irracionais**. 1ª ed. Rio de Janeiro, SBM Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[15] ROQUE, Tatiane; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de História da Matemática.** In Coleção PROFMAT. 1ª ed. Rio de Janeiro, SBM Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[16] ROSSETTO, José João. **Tese de Doutorado: Análise de Filtros Mecânicos para Eritrócitos**, CPGEI, UTFPR, 2003.

[17] SCOTT, W. R. **Group Theory**. 1ª ed. Mineola, New York, Dover Publications, Inc: 1987.

[18] SOARES, Marcio G. **Cálculo em uma Variável Complexa**. 4ª ed. Rio de Janeiro, SBM Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[19] SPIEGEL, Murray R**. Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas**, In Coleção Schaum. 1ª ed. São Paulo, McGraw-Hill, 1973.

[20] STRUIK, Dirk J. **A Concise History of Mathematics.** 4ª ed. Mineola, New York, Dover Publications, Inc: 1998.

[21] TIGNOL, Jean-Pierre. **Galois' Theory of algebraic Equations.** 1ª ed. Hackensack, New Jerssey, World Scientific: 2001.