UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Análise Combinatória: Estudo de Permutação Caótica no Ensino Médio

Ubiratan Nogueira Pessoa

MANAUS
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM MATEMÁTICA

Ubiratan Nogueira Pessoa

Análise Combinatória: Estudo de Permutação Caótica no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Antonio Cordeiro Prata

MANAUS
2016

UBIRATAN NOGUEIRA PESSOA

ANÁLISE COMBINATÓRIA: ESTUDO DE PERMUTAÇÃO CAÓTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Amazonas, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 31 de maio de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata
Presidente

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
Membro

Profª Dra. Jeanne Moreira de Sousa
Membro

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado disposição, força e por ter me amparado quando não via mais opções de continuar.

Agradeço a minha mãe, Dona Célia, por ter me apoiado e reclamado comigo quando necessário, por nunca ter me deixado de lado, por mesmo não compreendendo não me deixar desistir.

Agradeço aos professores do PROFMAT pólo Manaus, muito especialmente ao meu orientador Prof. Dr. Roberto Antônio Cordeiro Prata.

Agradeço aos colegas da turma, que sempre quando precisei me apoiaram e permitiram continuar nessa luta.

Agradeço, finalmente aos meus alunos, pois eles me motivaram a querer mais, a querer o melhor e a querer fazer da educação um caminho para a melhoria de vida daqueles que buscam isso.

RESUMO

Este trabalho teve por objetivo apresentar um Estudo de Análise Combinatória-Permutação Caótica por meio da Modelagem Matemática como uma estratégia no resgate de um ensino significativo de Matemática no Ensino Médio. Para tanto, apresentamos Permutação Caótica como uma situação-problema modelada no que diz respeito à análise de tendências e previsão de resultados de um experimento. Deste modo elaboramos uma proposta de 10 aulas para os alunos de Ensino Básico e Médio nas quais realizam-se atividades de modo que o estudante conheça a Permutação Caótica, aprenda a utilizá-la e aplique-a nos mais diversos tipos de situações-problemas, envolvendo por exemplo outras disciplinas como, Biologia, Química e Língua Portuguesa . Os principais objetivos dessas aulas, o material e o tempo necessários, bem como os pré-requisitos para o sucesso da mesma também serão detalhados nesse trabalho.

Palavras-chave: Contextualização, Permutação Caótica, Análise Combinatória, Ensino-Aprendizagem, Modelagem Matemática .

ABSTRACT

This study aims to present an analysis of Study Combinatorial - permutation Chaotic through mathematical modeling as a strategy in the rescue of a significant teaching mathematics in high school . Therefore, we present permutation Chaotic as a problem situation modeled with regard to trend analysis and forecasting of results of an experiment . Thus prepared a proposal of class for students of basic and secondary education in which are carried out activities so that students know permutation Chaotic , learn to use it and apply it in various types of problem situations involving a other disciplines such as Biology, Chemical and Portuguese. The main objectives of this class , the material and the time needed and the prerequisites for its success will also be detailed in this work .

Keywords: Contextualization , Permutation Chaotic , Combinatorial Analysis , Teaching and Learnig , Mathematical Modeling.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\cap$	Interseção de dois conjuntos.
$\cup$	União de dois conjuntos.
$C_{n,p}$	Combinação de n elementos p a p .
$A_{n,p}$	Arranjo de n elementos p a p.
$\Rightarrow$	Implica em.
$=$	Igual.
$\neq$	Diferente.
$>$	Maior.
$<$	Menor.
$\geq$	Maior ou igual.
$\leq$	Menor ou igual.
$\sum\limits_{i=1}^{n}$	Somatório variando de 1 a n.
$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$	Interseção dos conjuntos A de 1 a n.
$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$	União dos conjuntos A de 1 a n.
$\overline{n}$	Número de Permutações Caóticas de n elementos
$\square$	Indica o fim de uma demonstração.

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

P475a Pessoa, Ubiratan Nogueira

Análise Combinatória : Estudo de Permutação Caótica no Ensino Médio / Ubiratan Nogueira Pessoa. 2016

40 f.: il. color; 31 cm.

Orientador: Roberto Antonio Cordeiro Prata

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas.

1. Introdução. 2. Conceitos e Teoremas. 3. Permutação Caótica. 4. Abordagem de Permutação. I. Prata, Roberto Antonio Cordeiro II. Universidade Federal do Amazonas III. Título

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A escolha do tema surgiu pelo fato de ser o conteúdo que mais provoca dificuldades e duvidas nos alunos do 2^o Ano do Ensino Médio, série que trabalhei durante 2 anos em escolas particulares e 5 anos em cursinhos de reforço e preparatório. A ideia foi a de inserir os conceitos matemáticos através da construção do conhecimento, elaborando questões contextualizadas e expondo posteriormente o conceito de Permutação Caótica.

O principio da contagem é exposto para os alunos pela primeira vez no 6^o Ano do Ensino Fundamental de modo simples e no entanto metódico, sem interpretação do que de fato ele representa, e posteriormente no 2^o Ano do Ensino Médio abordando fórmulas e mais fórmulas que muitos alunos sequer sabem a finalidade. Nossa proposta é a utilização do cotidiano do aluno para a formulação dos princípios matemáticos e contextualização do que representa cada item das fórmulas apresentadas, tornando assim a utilização desta uma maneira de facilitar a obtenção dos resultados desejados, tendo em vista que o conteúdo proposto muitas vezes oferece grandes valores como resultados e que seriam de difícil obtenção sem o uso de ferramentas para otimizar os mesmos, oferecendo aos alunos a real função da matemática que é ajudar o homem a entender e utilizar o ambiente ao seu redor.

Para o desenvolvimento das atividades e alcance dos objetivos propostos para as competências e o conhecimento da Matemáticas descritos nos Parâmetros Curriculares Nacionais, e citado no Programa de Formação e Valorização de Profissionais da Educação que indicam a contextualização como uma excelente ferramenta para construção do Ensino da Matemática como uma ciência acessível e de fácil compreensão, propomos uma atividade prática envolvendo problemas cotidianos dos alunos que proporcionem uma visão "palpável" dos conceitos abordados.

1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é propor uma Atividade Didática diferenciada da aplicada em sala de aula atualmente, que consolide os conceitos de Análise Combinatória, especialmente de Permutações Caóticas, através de uma aplicação que destaque sua aplicabilidade e compreensão, ante a contextualização, da Metodologia Modelagem Matemática.

1.2 Organização

Este trabalho está organizado em 5 capítulos, sendo que o Capítulo 1 é uma breve introdução sobre o tema abordado. No Capítulo 2, temos as considerações iniciais sobre o Ensino da Matemática e um histórico do tema abordado. No Capítulo 3, apresentamos alguns conceitos e teoremas da Análise Combinatória. No Capítulo 4, fazemos a exposição das atividades realizadas com os alunos do 9º Ano voluntários de uma Escola Pública de Manaus aplicando a Análise Combinatória e introduzindo problemas de Permutação Caótica. E concluindo, no Capítulo 5, apresentamos nossas considerações finais sobre a prática do processo de ensino e aprendizagem do estudo de Permutações Caóticas nas escolas de Ensino Fundamental e Médio, em particular no 9º ano do Fundamental.

Capítulo 2

Considerações Iniciais

As atuais instituições de ensino procuram tornar o ensino algo mecânico e repetitivo, tornando o sistema de ensino enfadonho e ultrapassado, pouco revelando as necessidades de ensino-aprendizagem bem como não preparando os alunos para o real conhecimento dos conteúdos ensinados. Segundo D'AMBROSIO (2012, p.119) "o grande desafio que se encontra na educação é justamente sermos capazes de interpretar as capacidades e a própria ação cognitiva não da forma linear, estável e continua."

Na Matemática podemos observar diversos livros com os diversos conteúdos e formulas, no entanto pouca contextualização. Diversas vezes em sala de aula, ou mesmo pelas redes sociais, alunos e ex-alunos fazem questionamentos de onde irão utilizar certos conteúdos matemáticos, deixando claro que a visão destes é que a aprendizagem que tiveram dos conteúdos é meramente abstrata, superficial e decorativa, sem aplicação na realidade diária e pouco útil, quando na verdade D'AMBROSIO 2012 diz:

> A matemática é uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua historia para explicar, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural.

E reforçando a importância da matemática temos nos PCN's:

> A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.(BRASIL, 1999).

A escola atual prepara o aluno para decorar fórmulas, para fazer provas e mostrar resultados, não importando de onde veio o conteúdo, ou com que finalidade ele foi utilizado, por isso temos cada vez mais alunos abandonando as escolas ou sem interesse em aprender. Quando na verdade é preciso estimular os alunos a aprender, motiva-los na busca do conhecimento e na aplicação de cada conteúdo, facilitar o acesso a informação e ao domínio de cada tópico, como é citado no PROFORMAR:

> A contextualização é uma excelente ferramenta para o professor de matemática apresentar essa disciplina de forma mais utilitária e menos formal, oportunizando ao aluno a participação no processo da construção do ensino de Matemática e vê-la como uma ciência acessível e de fácil entendimento (2007).

Diante da realidade para o ensino da matemática no país, são necessárias medidas e estratégias para que o ensino seja levado a um novo patamar e que os alunos utilizem e se motivem a ampliar os horizontes nos conhecimentos matemáticos. Dentre os conteúdos de matemática, foi escolhido um em especial para a abordagem do processo de ensino-aprendizagem por fatores históricos e contextualização: A Permutação Caótica. O motivo principal é o fato de que muitas vezes nem mesmo os professores sabem sua origem ou como explicar em sala de aula sem ser pelo método conteúdo-fórmulas-atividades.

Outros conteúdos como geometria, ou álgebra, são bem mais contextualizados que a analise combinatória, muitos matemáticos como Pitágoras, Arquimedes, Bháskara e outros são conhecidos por suas contribuições ao longo da historia, o que de algum modo enriquece o ensino desses conteúdos.

A Análise Combinatória embora seja um dos conteúdos mais cobrados em provas de concursos e vestibulares, é também o mais negligenciado em sua contextualização e aplicação em sala de aula, não permitindo assim o desenvolvimento logico e cognitivo adequado para diversas outras áreas, que seria obtido com uma explanação do conteúdo de modo adequando assim como explicam Roa e Navarro-Pelayo:

> Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, teoria dos números, a teoria dos autônomos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias. (ROA; NAVARRO-PELAYO, 2001).

A importância da analise combinatória é descrita também nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), que destacam o desempenho do conteúdo no ensino médio na formação do raciocínio combinatório e a atenção que devemos ter ao ensina-lo. Segundo os PCN's temos:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (BRASIL, 1999, p.257).

Tendo em vista a importância da análise combinatória para os processos lógico e de contagem, este trabalho visa estudar uma parte especifica dos conteúdos combinatórios, parte esta que como aluno de ensino médio não foi vista e através da pesquisa de campo durante a graduação tive pouco contato.

A permutação caótica foi proposta como trabalho de mestrado e decidi estudá-la por perceber que os professores de faculdade estão bastante familiarizados e tem o conteúdo como algo ensinado no ensino médio.

2.1 Análise Combinatória na história

Os primeiros relatos sobre a analise combinatória apareceram há muito tempo no contexto da humanidade, supõe-se que ela surgiu antes mesmo dos registros históricos, mas foi através do matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa, na Sicília, no século III a.C., que passou-se a ter conhecimento acerca dos problemas de contagem. Ele propôs um problema de combinação de peças em um tabuleiro, que ficou conhecido como Stomachion, não se sabe se foi realmente Arquimedes quem inventou o jogo ou se ele apenas explorou o problema proposto em alguns manuscritos antigos. O jogo consistia em 14 peças planas, geralmente feitas em marfim, de diversas formas poligonais, e o objetivo era organizar essas peças de diferentes maneiras a formar um quadrado.

Algumas passagens históricas importantes sevem para exemplificar o desenvolvimento e a aplicação do campo de problemas combinatórios em diversos períodos, dentre os quais podemos citar:

– Problema 79 do Papiro de Ahmes (ou Rhind) escrito por volta de 1650 a.C.;

– Problema escrito por Leonardo de Pisa em 1202;

– Uma poesia infantil que data de mais ou menos 1730.

Embora essas passagens possam ser identificadas como progressões, o princípio da contagem pode ser percebido ao se observar que a ideia principal é a contagem final dos elementos, dando assim uma introdução para a análise combinatória.

O papiro de Rhind também é conhecido como papiro de Ahmes, escriba que o copiou em meados de 1650 a.C.. Acredita-se que esse papiro é cópia de um documento datado do período de 2000 a.C. a 1800 a.C.. Além disso, é possível que algum conhecimento seja proveniente de estudos do arquiteto Imhotep, que teria sido um dos responsáveis pela construção da pirâmide do faraó Zoser (7000 a.C.).

Neste Papiro o problema 79 pode ser descrito da seguinte forma:

> Sejam sete casas,
> cada casa tem sete gatos,
> cada gato come sete ratos,
> cada rato come sete cachos de trigo
> e cada cacho de trigo tem sete grãos.
> Quantos são ao todo nessa história?

Que é similar ao problema de Fibonacci:

> Sete mulheres velhas estão indo para Roma,
> cada uma delas tem sete mulas,
> cada mula carrega sete sacos,
> cada saco contem sete pães,
> cada pão tem sete facas
> e cada faca tem sete bainhas.
> Qual é o número total de coisas?

E a uma poesia infantil de aproximadamente 1730:

> Quando eu estava indo para Santo Ivo,
> Eu encontrei um homem com sete mulheres,
> Cada mulher tem sete sacos,
> Cada saco tem sete gatos,
> Cada gato tem sete gatinhos,
> Gatinhos, gatos, sacos e mulheres,
> Quantos estavam indo para Santo Ivo?

Nos três problemas podemos observar uma ideia de contagem fundamental para análise combinatória, no entanto a primeira ocorrência de combinatória que podemos de fato citar é o sistema “I Ching”(1182-1135 a.C.), como um dos trabalhos mais antigos dos chineses. Este trabalho é baseado em dois simbolos que podem ser combinados em trigramas ou hexagramas que podem aparecer com repetição ou não, formando assim diversos simbolos utilizados na época.

Outro item importante é o Tratado Médico de Susruta (século IV a.C.) onde foram encontradas discussões sobre as várias espécies de demonstração que podem ser feitas pela combinação entre: doce, ácido, salino, pungente, amargo e adstringente. Também é possível perceber agrupamentos nas situações onde explicam o caso das combinações serem tomadas separadamente; ou 15 doses tomadas de dois em dois sabores; 20 de três em três; 15 de quatro em quatro; 6 de cinco em cinco; ou 1 tomadas todas juntas. Pelo fato da ideia de misturar os sabores está implícita, tendo em vista que não é necessário combinar doce com doce, temos nessa discussão um caso de combinação sem repetição.

O matemático Varahamihira (505, 587) em seu trabalho “Brihat-Samhita” colocou o problema sobre número de perfumes que podem ser feitos escolhendo-se 4 ou 5 dados ingredientes e misturando-os em várias proporções; segundo relatos há uma afirmação clara de que existem 1820 possibilidades de se escolher 4 ingredientes em um total de 16; no entanto não foi apresentado a listagem dos casos, o que permite conjecturar que a resposta era obtida pelo uso de uma fórmula.

E finalmente como mais um dos principais pontos históricos para a análise combinatória podemos citar Bhaskara II em seu trabalho “Lilavati” (1150) que propôs o seguinte problema: “Em um agradável, espaçoso e elegante palácio, com oito portas, construído por um habilidoso arquiteto para o Príncipe do Reino, conte-me as combinações de aberturas tomadas de uma a uma, duas a duas, três a três etc.” É citado que as chances de abertura das portas do palácio chegam a 255, resultado este conseguido com as combinações informadas.

Embora os problemas de contagem existam desde sempre, a teoria combinatória só surgiu no fim do século XVI, com a necessidade de cálculos de possibilidades dentro dos jogos de azar, e uma teoria combinatória só seria formalmente escrita em meados do século XVII e início do século XVIII pelos matemáticos Pascal (1654, escrito em 1665), Leibniz (1666), Kircher (1669), Wallis (1673) e Bessy (1693). Esse estudo deu origem à Teoria das Probabilidades.

O primeiro que tratou o assunto como uma ciência foi Christiaan Huygens (1629-1695). Em seguida, mais importantes porque trataram a probabilidade como um ramo da matemática, foi Jacob Bernoulli (1654-1705), em a Arte da Conjectura, publicado em 1713, e Abraham de Moivre (1667-1754) que, em 1718, escreveu a Doutrina da Probabilidade. Abraham de Moivre colaborou de forma significativa para o avanço desse ramo da matemática, em 1718 escreveu a Doutrina da probabilidade (Doctrine of Changes), onde aparece pela primeira vez a definição de independência estatística (a probabilidade de um acontecimento composto é o produto das probabilidades dos acontecimentos componentes), além disso são colocados mais de 50 problemas e questões com dados e outros jogos de azar. Ele estudou as estatísticas da mortalidade, estabelecendo uma equação simples entre 22 anos e o limite da longevidade, que fixou em 86 anos.

Jacob Bernoulli também cooperou para a Teoria Combinatória ao escrever sua principal obra, A arte de Conjeturar (1713), onde apresenta uma teoria geral sobre permutações e combinações, além dos números de Bernoulli, e faz um estudo mais aprofundado acerca da Teoria das Probabilidades.

Em 1736, Leonard Euler resolveu um famoso problema que consistia em descobrir se era possível dar uma volta em torno da cidade, que possuía sete pontes (das quais cinco ligavam a cidade a uma ilha), passando por todas elas uma única vez. Ele descobriu que não. No entanto a grande contribuição de Euler para a Análise Combinatória foi à representação dos coeficientes binomiais, resultando na fórmula de combinação:

$$\frac{n!}{n!(n-p)!}$$

E no século XIX, o matemático Peter Gustav Lejeune trabalho o principio das gavetas, ou principio das casas dos pombos. Principio que atualmente é muito útil para resolver problemas combinatórios.

2.2 O Caso da Permutação Caótica

Diante de tantos trechos históricos em que podemos perceber o uso constante da análise combinatória no cotidiano, percebemos que atualmente, embora seja um conteúdo extremamente importante, é pouco citado os fatores históricos sobre o mesmo e apenas é explanado sua utilização para a contagem. Dentre as diversas aplicações e problemas propostos por diversos matemáticos nos mais diferentes períodos da historia este trabalho visa tratar especificamente a de permutação caótica, que foi proposto em um problema no século XVIII. O estudo das permutações caóticas é resultado de um empenhado e engenhoso trabalho de Leonard Euler para solucionar um problema proposto no século XVIII, conhecido como “problema das cartas mal endereçadas”.

Esse problema foi originalmente proposto por Nicolaus Bernoulli (1687-1759), sobrinho dos eminentes matemáticos Jacob (1654-1705) e Johann (1667-1748), da prestigiosa família Bernoulli, que mais produziu matemáticos em toda história. A contribuição de Nicolaus para o estudo e desenvolvimento da matemática pode ser aferida na numerosa correspondência (mais de 560 cartas) que trocou com vários colegas, dentre os quais Leonard Euler (1707-1783).

Ao longo de sua vida, Euler foi um grande resolvedor de problemas matemáticos, alguns desses abriram caminho para novos campos de pesquisa matemática, como o problema das cartas mal endereçadas. Talvez Euler tenha se interessado pelo problema por se tratar de uma questão curiosa e desafiadora da teoria das permutações, hoje chamada permutação caótica.

Uma permutação de elementos é dita caótica se, ao permutarmos esses elementos, nenhum deles continua em sua posição original. Desse modo podemos interpretar o problema das cartas mal endereçadas da seguinte forma, mais moderna e simples: qual o número de permutações caóticas de n elementos? Euler resolveu o a questão da seguinte maneira:

Resolução:

Chamaremos de D o número de maneiras de se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a destinatários diferentes de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto (ou seja, D é o número de permutações caóticas de n elementos).

Sejam as cartas $C_1, C_2, ..., C_n$, e os envelopes $E_1, E_2, ..., E_n$.

A principio, a solução é dividida em dois casos:
(i) C_1 é colocada em E_2 e C_2 é colocada em E_1;
(ii) C_1 é colocada em E_2 e C_2 não é colocada em E_1.

O caso (i) tem $(\overline{n-2})$ soluções e o caso (ii) tem $(\overline{n-1})$ soluções. Assim, o número de soluções no caso em que C_1 é colocada em E_2 é $(\overline{n-1}) + (\overline{n-2})$. Esse número de soluções é o mesmo no caso em que C_1 é colocada em E_3, e em $E_4, ...,$ e em E_n. Contando todos os casos possíveis, D será dado por:

$$D = (n-1).[\overline{n-1} + \overline{n-2}] \tag{2.1}$$

Com isso o matemático obteve a fórmula de recorrência que ainda precisava ser melhorada para encontrar D. Ele reescreveu a fórmula anterior como:

$$\begin{aligned} D - n.(\overline{n-1}) &= (n-1).[\overline{n-1} + \overline{n-2}] - n.(\overline{n-1}) \\ &= (-1).(\overline{n-1}) + (n-1).(\overline{n-2}) \\ D - n.(\overline{n-1}) &= (-1).[(\overline{n-1}) - (n-1).(\overline{n-2})]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Aplicando a equação (2.2), sucessivamente, para $n \geq 3$, obtem-se:

$$\begin{aligned}
\overline{3} - 3.\overline{2} &= (-1).[\overline{2} - 2.\overline{1}] \\
\overline{4} - 4.\overline{3} &= (-1).[\overline{3} - 3.\overline{2}] \\
&\vdots \\
D - n.(\overline{n-1}) &= (-1).[(\overline{n-1}) - (n-1).(\overline{n-2})].
\end{aligned}$$

Multiplicando as $(n-2)$ equações anteriores e realizando os cancelamentos, temos que:

$$D - n.(\overline{n-1}) = (-1)^{n-2}.[\overline{2} - 2.\overline{1}]$$

como para uma carta não é possível permutação caótica e para duas cartas temos uma permutação, temos $\overline{1} = 0$, $\overline{2} = 1$ e $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, tem-se:

$$D - n.(\overline{n-1}) = (-1)^n \tag{2.3}$$

Assim, se obteve uma equação bem melhor do que (2.1), por conter D para números sucessivos. Para encontrar D, ele dividiu a equação (2.3) por $n!$, donde:

$$\frac{D}{n!} - \frac{n.(\overline{n-1})}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} \to \frac{D}{n!} - \frac{\overline{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!} \tag{2.4}$$

Aplicando a equação (2.4) para os sucessivos valores de $n \geq 2$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{2}}{2!} - \frac{\overline{1}}{1!} &= \frac{(-1)^2}{2!} \\
\frac{\overline{3}}{3!} - \frac{\overline{2}}{2!} &= \frac{(-1)^3}{3!} \\
&\vdots \\
\frac{D}{n!} - \frac{\overline{n-1}}{(n-1)!} &= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, Adicionando as $(n-1)$ equações anteriores, chega-se a:

$$\frac{D}{n!} - \frac{\overline{1}}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Sabendo que $\overline{1} = 0$, a igualdade resulta em:

$$\frac{D}{n!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Onde Euler deu a respostas para o problema das cartas como:

$$D = n!\left[\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right] \tag{2.6}$$

com $n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$.

Atualmente um problema equivalente ao das cartas mal endereçadas é o jogo do amigo oculto, no qual n pessoas escrevem seu nome em um pedaço de papel e o depositam em um recipiente, de onde cada um retira aleatoriamente um dos pedaços de papel, ou seja, é um problema resolvido por permutação caótica.

Capítulo 3

Conceitos e Teoremas de Análise Combinatória

Este capítulo é baseado de acordo com a referência [11] .
O Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE) é uma generalização de um dos princípios básico de contagem, o princípio aditivo. Este princípio está interessado na obtenção de uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem a união de vários conjuntos não necessariamente excludentes ou disjuntos. Para provar o PIE é preciso primeiro provar a cardinalidade da união dos conjuntos.

3.1 Cardinalidade da união de dois conjuntos

Teorema 3.1. *sejam A e B conjuntos finitos, então: n(A∪B)=n(A)+n(B)-n(A∩B).*

Denotemos por Ω o conjunto universo e $n(\Omega)$ o número de elementos ou cardinalidade de Ω. Definamos A e B dois subconjuntos de Ω , além disso, temos que A∩B$\neq \emptyset$, ou seja A e B não são disjuntos.
A representação do diagrama de Venn desses conjuntos fica assim:

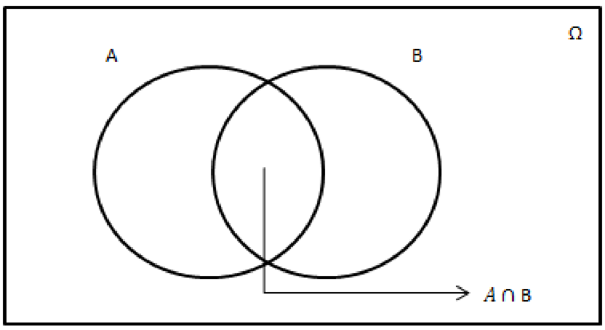

Figura 3.1: Intersecção de Conjuntos

Pelo Principio aditivo temos que n(A∪B)= $n(A) + n(B)$. Porém, este resultado só pode ser aplicado quando A e B são disjuntos, ou seja A∩B$\neq \emptyset$, o que não acontece no caso acima. Observemos que quando fizermos A∪B estaremos contando duas vezes os elementos de A∩B, logo para resolver o problema é necessário a subtração de n(A∩B) de n(A∪B). Assim, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

3.2 Cardinalidade da união de três conjuntos

Teorema 3.2. *Sejam A , B e C conjuntos finitos, então: n(A∪B∪C)= $n(A) + n(B) + n(C) -$ n(A∩B) $- n($A∩C$) -$ n(B∩C) $+ n($A∩B∩C).*

A demonstração ocorre de modo análogo a cardinalidade da união de dois conjuntos, observando-se os elementos repetidos e os subtraindo.

3.3 Principio da Inclusão e Exclusão (PIE)

O principio da inclusão e exclusão é um resultado de muita importância na analise combinatória. Ele determina o número de elementos ou cardinalidade da união de uma quantidade finita de conjuntos finitos. Os resultados dos teoremas 3.1 e 3.2 são, na realidade, casos particulares do PIE.

De modo geral, o PIE nos diz que para obter o número de elementos da união de um número finitos de conjuntos finitos, devemos proceder da seguinte maneira:

- Somar os números de elementos de cada conjunto;
- Subtrair a soma dos números de elementos das duplas interseções existentes;
- Somar o número de elementos das triplas interseções existentes;
- Subtrair a soma dos números de elementos das quadruplas interseções possíveis e prosseguir com o processo, até alcançar o número de elementos da interseção de todos eles.

A partir disso podemos descrever os casos onde ocorrem o PIE, para então definir um caso geral.
Caso 1: Com apenas dois conjuntos, o PIE se reduz ao teorema 3.1.
Caso 2: Com três conjuntos, o PIE se reduz ao teorema 3.2.
Caso 3: Com quatro conjuntos (A, B, C, D), temos:

- Duplas Interseções Possíveis: $A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D$
- Triplas Interseções Possíveis: $A \cap B \cap C, A \cap B \cap D, A \cap C \cap D, B \cap C \cap D$

- Quádruplas Interseções Possíveis: $A \cap B \cap C \cap D$

De modo que o PIE para quatro conjuntos finitos ficará:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C \cup D) &= n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - \\ & \quad n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + \\ & \quad n(A \cup B \cup C) + n(A \cup B \cup D) + n(A \cup C \cup D) + \\ & \quad n(B \cup C \cup D) - n(A \cap B \cap C \cap D). \end{aligned}$$

Antes de demonstramos o caso geral, lembremos que o símbolo $C_{(p,u)}$ é o número de combinações simples de p elementos tomados u a u. Tal agrupamentos acontece quando existem p elementos distintos e queremos contar a quantidade de grupos que podem ser formados com u elementos distintos, escolhidos entre os de p, sendo que os grupos serão diferentes pela natureza dos elementos, ou seja a ordem em que os elementos são tomados no grupo não diferencia estes grupos. A formula de calculo para $C_{(p,u)}$ é:

$$C_{(p,u)} = \frac{p!}{u!(p-u)!}$$

Devemos observar também que a alternância de sinais se deve, exatamente ao fato exposto nas demonstrações anteriores, ou seja, ao somar os números de elementos dos conjuntos A_i, contamos cada dupla interseção duas vezes. Logo, devemos subtrair as duplas interseções para que cada uma delas seja contada uma única vez.

Do mesmo modo, cada tripla interseção é contada três vezes e ao subtrairmos as duplas interseções, subtraímos casa tripla interseção três vezes, logo devemos novamente somar cada tripla interseção para conta-las.

Ao contarmos o número de elementos dos conjuntos A_i, contamos cada quadrupla interseção quatro vezes. Subtraindo as duplas interseções, subtraímos as quadruplas seis vezes (por exemplo, os elementos da interseção $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ são subtraídos em $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$, $A_1 \cap A_4$, $A_2 \cap A_3$, $A_2 \cap A_4$ e $A_3 \cap A_4$). Do mesmo modo ao somamos as triplas interseções, somamos novamente cada quadrupla interseção quatro vezes. Logo, contamos, ate então, a soma dos elementos de cada quadrupla interseção: $4 - 6 + 4 = 2$ vezes. Então, para que sejam contadas somente uma vez, devemos subtrair as quadruplas interseções possíveis.

De modo análogo veremos que a cada conjunto inserido a operação entre as interseções vai alternando entre adição e subtração. Isso explica a alternância na formula do PIE.

3.4 PIE - Caso Geral

Teorema 3.3. *Se $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ são conjuntos finitos, então:*

$$\begin{aligned} n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} nA_i - \sum_{1 \leq i<j} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i<j<k} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \\ & \sum_{1 \leq i<j<k<q} n(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_q) + \cdots + \\ & (-1)^{(n-1)} n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$Com \quad i, j, k, q \cdots \in \mathbb{N}.$

Demonstração. A demonstração é feita mostrando que um elemento v, que aparece em p dos n conjuntos $(1 \leq p \leq n)$, é contado pela fórmula anterior exatamente uma vez.
Assim, vemos que, realmente, se v aparece em p dos n conjuntos, então ele é contado:

- $C_{p,1} = p$ vezes em $\sum_{i=l}^{n} nA_i$;

- $C_{p,2}$ vezes em $\sum_{1 \leq i<j} n(A_i \cap A_j)$, pois v só aparece em $A_i \cap A_j$ se está em A_i e em A_j, como temos p conjuntos que possuem v, o número de formas de tomar dois dele com o elemento em jogo (observe que a ordem em que se toma os conjuntos não importa para a contagem) é $C_{p,2}$;

- $C_{p,3}$ vezes em $\sum_{1 \leq i<j<k} n(A_i \cap A_j \cap A_k)$, por raciocínio análogo;

E, prosseguindo com o raciocínio, notaremos que v aparece $C_{p,p} = 1$ vezes no somatório do número de elementos das interseções de p conjuntos. É claro que uma interseção com mais de p conjuntos não terá o elemento em questão, pois ele só aparece em p conjuntos.

Logo, se certo elemento v aparece em p dos n conjuntos $(p = 1, 2, 3, \cdots, n)$, então v é contado em $n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ exatamente:

$$C_{p,1} - C_{p,2} + C_{p,3} - C_{p,4} + \cdots + (-1)^{(p-1)} C_{p,p}$$

Finalmente, para mostrar que a expressão acima vale 1, basta fazer a expansão de $(1-1)^p$ pela fórmula binominal de Newton:

$$\begin{aligned} (1-1)^p &= 1^p.(-1)^0.C_{p,0} + 1^{p-1}.(-1)^1.C_{p,1} + \cdots + 1^0.(-1)^p.C_{p,p} \\ &= C_{p,0} - C_{p,1} + \cdots + (-1)^p.C_{p,p} \end{aligned}$$

Como $(1-1)^p = 0$ e $C_{p,0} = 1$, chegamos em:

$$-1 = -C_{p,1} + C_{p,2} + \cdots + (-1)^p . C_{p,p}$$

E, dividindo-se ambos os membros da igualdade por (-1):

$$C_{p,1} - C_{p,2} + \cdots + (-1)^{p-1} . C_{p,p} = 1 \tag{3.2}$$

O que conclui a demonstração. □

3.5 Permutações Caóticas sobre Sequências Finitas

Dada uma sequencia finita $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$de elementos distintos, damos o nome de permutação caótica a qualquer permutação dela em que nenhum dos elementos encontra-se em sua posição original.

Teorema 3.4. *O número de permutações caóticas de n elementos (D_n) é dado por:*

$$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}, n \in \mathbb{N}$$

3.5.1 Inferindo a Fórmula

Iremos inferir a fórmula. Depois, vamos demonstrá-la utilizando o Princípio de Indução.

Consideremos, então, uma sequência finita de n elementos distintos: $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Queremos calcular o número de permutações da sequência $a_1, a_2, ..., a_n$ em que nenhum dos elementos permanece na sua posição original.
Para isto, definamos os conjuntos:

Universo: Ω ={permutações da sequência $a_1, a_2, ..., a_n$}. Temos que $n(\Omega) = n!$

Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$: A_i ={permutações em que a_i fica na posição original}. Os elementos de A_i consistem dos anagramas obtidos fixando-se a_i na $i-sima$ posição e permutando-se os $(n-1)$ elementos nas posições restantes. Logo, para $i \in \{1, 2, ..., n\}$ temos: $n(A_i) = (n-1)!$. Além disso, o número de conjuntos A_i é:

$$C_{n,1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

Analisando-se as duplas interseções possíveis: $A_{i_1} \cap A_{i_2}$, com $i_1, i_2 \in \{1, 2, ..., n\}$ e $i_1 \neq i_2$ ($A_{i_1} \cap A_{i_2}$ = {permutações em a_{i_1} e a_{i_2} ficam nas posições originais}), temos que os elementos de cada um destes conjuntos são obtidos fixando-se dois elementos em suas posições. Assim: $n(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = (n-2)!$ e o número de duplas interseções possíveis é:

$$C_{n,2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

Analisando-se as triplas interseções possíveis: $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}$, com $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, ..., n\}$ e $i_1 \neq i_2 \neq i_3$ ($A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} = \{$permutações em a_{i_1}, a_{i_2} e a_{i_3} ficam nas posições originais$\}$),temos que os elementos de cada um destes conjuntos são obtidos fixando-se três elementos em suas posições originais e permitindo-se que os $(n-3)$ elementos restantes permutem nas outras posições. Assim: $n(A_{i_1} \cap A_{1_2} \cap A_{i_3}) = (n-3)!$ e o número de triplas interseções possíveis é:

$$C_{n,3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

Prosseguindo o raciocínio, chegaremos até as interseções de n conjuntos (que sabemos ser única).

Analisando-se a $n - upla$ interseção possível: $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, temos que os elementos destes conjuntos são obtidos fixando-se em suas posições originais e permitindo-se que os $(n-n)$ elementos restantes permutem nas outras posições. Assim: $n(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = 0! = 1$ e o número de $n - uplas$ interseções possíveis é:

$$C_{n,n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

Pelo Princípio da Inclusão e da Exclusão:

$$\begin{aligned} n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= C_{n,1}(n-1)! - C_{n,2}(n-2)! + C_{n,3}(n-3)! - ... + (-1)^{n-1}C_{n,n}0! \\ &= \frac{n!}{1!(n-1)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!0!}0! \\ &= n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right) \end{aligned}$$

Desse modo:

$$\begin{aligned} D_n = n(\Omega) - n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right) \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right) \\ &= n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right) \end{aligned}$$

e, então, vemos que a fórmula realmente é:

$$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

3.5.2 Fórmula de Recorrência das Permutações Caóticas

Para demonstrar a fórmula por indução matemática, precisamos primeiro mostrar que as permutações caóticas satisfazem a uma interessante fórmula de recorrência.

Seja D_{n+2} número de permutações caóticas dos elementos (distintos) da sequência $a_1, a_2...a_{n+2}$.

Podemos "separa" estas permutações em dois grupos: aquelas em que a_1 ocupa o lugar do elemento que está na primeira e aquelas em que isto não ocorre.

As permutações caóticas do primeiro grupo são formada do seguinte modo: primeiro, escolhe-se um elemento para trocar de posição com a_1, o que pode ser feito de $(n+1)$ formas. Para cada um delas, permutam-se os n elementos restantes, de forma que nenhum deles fique em sua posição original. Isto pode ser feito de D_n modos. Logo, o número de permutações do primeiro grupo é:$(n+1)D_n$.

Para as permutações do segundo grupo, procedemos do seguinte modo: escolhemos um lugar da sequência para alocar o elemento a_1 (lugar x), colocando, "provisoriamente", o elemento deste local no primeira posição. Isto pode ser feito de $(n+1)$ formas. Para cada uma delas , permutamos os $(n+1)$ elementos restantes de modo que nenhum fique na posição original e a_x não fique na primeira posição. Isto pode ser feito de D_{n+1} modos. Logo, o número de permutações do segundo grupo é: $(n+1)D_{n+!}$.

Portanto: $D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$.

Temos, assim que as permutações caóticas satisfazem à seguinte fórmula de recorrência: $D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$.

Esta fórmula será utilizada para demonstrar pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula das permutações caóticas.

3.5.3 Demonstração por Indução

Afirmação: "O número de permutações caóticas de n elementos é dado por $D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$*"*

Nesta demonstração, utilizamos a segunda forma do Princípio de Indução Matemática.

Primeiramente, constatamos que a afirmação é válida para $n = 1$. Realmente se temos uma sequência com um elemento (a_1), não existe nenhuma permutação em que a_1, não fique em primeiro lugar, ou seja, $D_1 = 0$. E, utilizando a fórmula: $D_1 = 1! \sum_{i=0}^{1} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - 1 = 0$.

Suponhamos, agora, que a afirmação seja válida $\forall k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq (n+1)$. Em particular, para $k = n$ e $k = n+1$, temos:

$$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \text{ e } D_{n+1} = (n+1)! \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(-1)^i}{i!} \text{ (Hipótese de Indução).}$$

Então, para $(n+2)$, temos (utilizando a fórmula de recorrência obtida no item anterior):

$$D_{n+2} = (n+1)(D_{n+1} + D_n)$$

Utilizando-se a Hipótese de Indução:

$$\begin{aligned}
D_{n+2} &= (n+1)\left((n+1)! \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(-1)^i}{i!} + n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right) \\
&= (n+1)n! \left((n+1) \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(-1)^i}{i!} + \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right) \\
&= (n+1)! \left((n+1)\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right) + \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right) \\
&= (n+1)(n+1)! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} + (n+1)(-1)^{n+1} + (n+1)! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \\
&= (n+1)! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right)(n+2) + (n+2-1)(-1)^{n+1} \\
&= (n+2)! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}\right) + (n+2)(-1)^{n+1} + (-1)(-1)^{n+1} \\
&= (n+2)! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(n+2)(-2)^{n+1}}{(n+2)!} + \frac{(-1)(-1)^{n+1}}{(n+2)!}\right) \\
&= (n+2)! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}\right) \\
&= (n+2)! \sum_{i=0}^{n+2} \frac{(-1)^i}{i!}
\end{aligned}$$

o que mostra a fórmula para $(n+2)$.

Assim, podemos concluir pelo Princípio de Indução, que a fórmula é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, o que finaliza a demonstração do teorema.

Capítulo 4

Uma Abordagem de Análise Combinatória

Este capítulo é destinado à apresentação de uma forma de trabalho diferenciado da Análise Combinatória. Nela mostraremos os procedimentos necessários para o desenvolvimento de uma aula motivadora e diferenciada com exemplos do cotidiano, possíveis soluções sem os conceitos matemáticos definidos, apresentação e aplicação dos conceitos de Análise Combinatória e Permutação Caótica.
-Objetivos: Aplicar os conceitos de Análise combinatória de modo contextualizado;
- Mostrar o conceito de Permutação Caótica e sua utilidade em resoluções de problemas;
- Mostrar aos alunos a utilização das fórmulas como ferramentas para facilitar os problemas;
- Pré-requisitos: Conhecer o principio da contagem; ideia de combinação; permutação e arranjo.;
- Turma teste: 9○ano do Ensino Fundamental;
- Tempo necessário: Aproximadamente 50min (equivalente a 1 tempo de aula);
- Materiais utilizados: quadro, pinceis, objetos diversificados para combinações(objeto dos próprios alunos).

4.1 Público Alvo e Período de Aplicação

O conteúdo de permutação caótica faz parte da análise combinatória, no entanto não é muito desenvolvido ou sequer explicado em muitas escolas do ensino médio. O motivo é a difícil compreensão dos cálculos envolvidos e dos resultados encontrados por parte dos alunos. Visando uma análise de caso sobre permutação caótica e sobre Análise Combinatória em geral, as atividades foram realizadas com 20 alunos voluntários do 9º ano do Ensino Fundamental de 2016 de uma Escola Pública de Manaus, estes alunos não tinham desenvolvimento nenhum de análise ou princípio da contagem, para assim analisar seu desenvolvimento com base em um conteúdo novo. As aulas aconteceram antes do horário de aula, das 12:30 às 13:20 horas, cinco vezes na semana, totalizando 10 aulas. A seguir, apresentamos o desenvolvimento das atividades de forma ordenada, tendo em vista que estas foram realizadas nas varias aulas.

4.2 Primeira Análise: Identificação do modo de ensino de Análise Combinatória

Uma análise de como o conteúdo é explicado em sala de aula revela que a Análise Combinatória é exposta de modo mecânico, dando ênfase a uma resolução técnica mediante fórmulas pré-determinadas, sem a contextualização do enunciado de cada questão, embutindo um medo de questões complexas e difíceis para os alunos. Em visitas as escolas de Ensino Médio durante o 2^o semestre de 2015,que aconteceram através de aulas assistidas, foi constatado que os professores explicam o princípio da contagem com exemplos clássicos, como lançamento de moedas, lançamentos de dados, modos de se vestir e em seguida já introduzem as fórmulas de permutação, arranjo e combinação, o que confunde os alunos e não os permite uma assimilação aprofundada do conteúdo, o que acaba frustrando os mesmos e muitas vezes os fazendo desistir de entender.

4.3 Atividade 1: Assimilação do Princípio da Contagem e Princípio Multiplicativo

Primeira Aula

Para introduzir a ideia de contagem foi proposto para os alunos a seguinte ideia: foram fornecidos quatro elementos Pincel, laço de cabelo, pulseira e uma cruz, foi pedido para combinarem em quantos pares fossem possíveis. De inicio somente um aluno conseguiu formar todas as combinações possíveis, os demais alunos formaram pares somente visíveis, ignorando as opções que não podiam ser contadas visualmente. O aluno que conseguiu visualizar todos os pares explicou que cada item podia ser combinado com o outro, formando um novo par e explanou as formas:

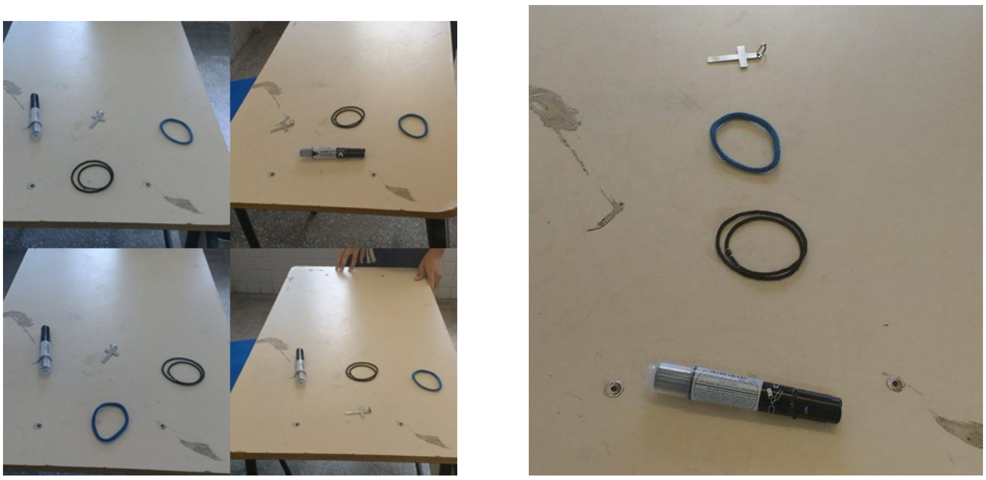

Figura 4.1: Combinações feitas por alunos com objetos.

Depois da observação das combinações possíveis, foi possível explicar que a contagem de possibilidades era feita através da quantidade de elementos e de todas as maneiras que estes podem ser combinados, expliquei que a quantidade n de elementos podem ser selecionadas de p modos diferentes. Em seguida foi solicitado para que os alunos realizassem a contagem da quantidade de combinações que podem ser feitas com 3 pinceis (azul, preto, vermelho), sendo separados de 2 em 2.

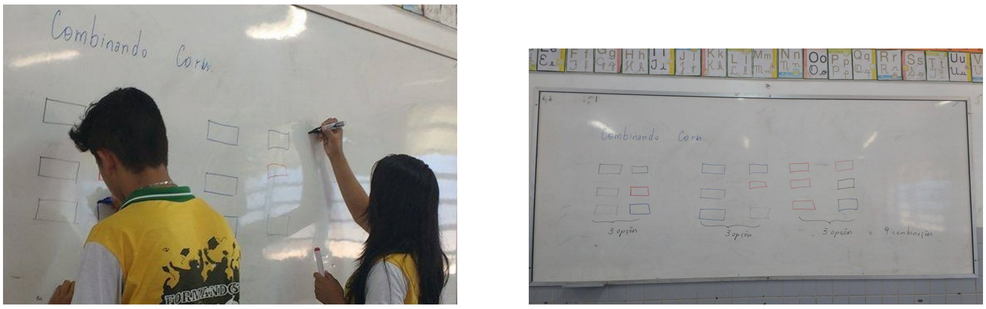

Figura 4.2: Alunos montando as combinações das cores dos pinceis

Diante do resultado encontrado, foi possível perceber que os alunos entenderam a ideia do principio da contagem e então foi exposto o princípio multiplicativo, pedi para que eles calculassem as possibilidades através da multiplicação e fazendo as contas acharam 9 possibilidades como resultado. Perguntaram se azul e preto não era o mesmo que preto e azul? Expliquei que na contagem poderiam ser solicitadas de duas maneiras sendo diferenciadas pela palavra "distintos"; no caso de coisas do mesmo gênero: como números ou no caso das cores. Alguns entenderam mas não sabiam como aplicar, os questionamentos sobre o tema foram realizados na aula posterior.

Segunda Aula

Na segunda aula foi inserida a ideia de números e aplicação das restrições existentes, como os critérios de distintos, não-distintos, número ser par, começar ou terminar com determinado número, depois de uma breve explicação foi proposta a seguinte atividade:

1- Com os números 1, 2, 5, 7 e 8 determine:
a- Quantos números com 2 algarismos podemos formar?
b- Quantos números com 2 algarismos distintos podemos formar?
c- Quantos números pares de 2 algarismos podemos formar?
d- Quantos números pares de 2 algarismos distintos podemos formar?

2- Com os números 0, 1, 2, 4, 5 e 7 determine:
a- Quantos números com 2 algarismos podemos formar?
b- Quantos números com 2 algarismos distintos podemos formar?

c- Quantos números pares de 2 algarismos podemos formar?
d- Quantos números pares de 2 algarismos distintos podemos formar?

No princípio alguns alunos não conseguiram fazer as letras c e d da primeira questão, então foi explicado um modelo de questão onde só se podia terminar com os números $2, 3$ e 5. Onde se pode observar claramente a limitação de opções para o último dígito. Com isso os alunos conseguiram fazer as letras c e d da primeira questão e ainda conseguiram fazer a segunda questão, após breve explicação que o número zero não podia ocupar a posição do primeiro digito.

Terceira e Quarta Aula

Nas terceira e quarta aulas foram descritos o diagrama de árvore, ideias principais de contagem, fatorial e permutação (com e sem repetição). As ideias aplicadas a pratica foram de fácil entendimento para os alunos, e estes conseguiram desenvolver as atividades solicitadas, tais como encontrar anagramas das palavras (com e sem repetição), quantidades de números com determinados algarismos.

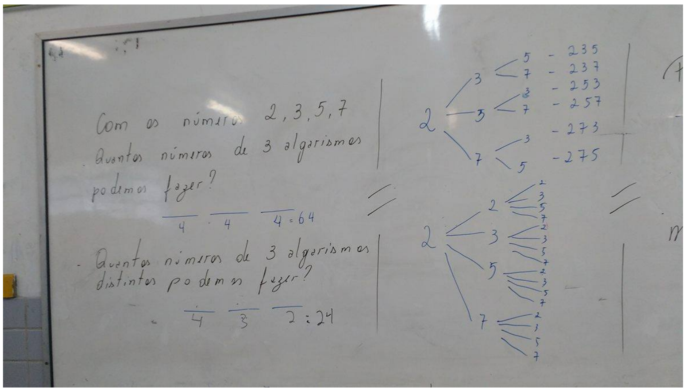

Figura 4.3: Exercício feito pelos alunos, Contagem e Diagrama de Árvore

Quinta Aula

A quinta aula foi somente de exercícios sobre os assuntos dados e possíveis dificuldades que os mesmos sentissem, alguns alunos disseram confundir entre como contar as possibilidades e a quantidade de elementos, disseram ser mais fácil calcular os anagramas de uma palavra que a quantidades de números.

4.4 Atividade 2: Assimilação de Combinações, Arranjos e Permutações Caóticas

Sexta Aula

Na sexta aula foi apresentada a importância da posição na escolha de grupos, em seguida foi exposta a relação entre esta informação e a ideia de combinação e arranjo. A relação entre a posição importar ou não ficou bem definida, no entanto os alunos tiveram dificuldades em associar as fórmulas de combinação e arranjo com o que estava sendo trabalhado. Então demonstrei a palavra CAFE e as combinações de três de suas letras

$$\begin{array}{cccccccc} CAF & AFE & FAC & EAC & CFE & ACF & FEC & EAF \\ CAE & AFC & FCA & ECA & CFA & AEF & FEA & EFA \\ CEA & ACE & FCE & ECF & CEF & AEC & FAE & EFC \end{array}$$

Solicitei aos alunos que aplicassem os valores na fórmula de arranjo, $n = 4$ pois temos 4 letras e $p = 3$ já que seriam ordenadas de 3 em 3.

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4.3.2.1}{1} = 24$$

Resultando exatamente no número de anagramas existentes para o problema proposto. Em seguida solicitei que os alunos copiassem da lista de anagramas somente os que tinham combinações diferentes das já escolhidas alguma vez.

Os alunos selecionaram:

$$CAF \quad CAE \quad FCE \quad EAF$$

Solicitei para que aplicassem na fórmula de combinação assim como tinham feito na fórmula de arranjo, obtendo assim:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4.3!}{3!.1} = 4$$

Não foi necessário explicação para que os alunos associassem o resultado ao que eles procuravam na questão.

Foram passadas novas questões de combinação e arranjo, as quais cerca de 70% dos alunos conseguiram fazer sem problemas, os alunos com dificuldades não conseguiam identificar em que situação usar combinação ou arranjo.

Sétima Aula

Na sétima aula, foi iniciado o conteúdo de estudo deste trabalho: permutação caótica. Foi solicitado para que 3 alunos escrevessem seus nomes em um papel, enrolassem os papeis e os tirassem em seguida aleatoriamente, sugerindo assim a típica brincadeira do amigo oculto. Obtendo os seguintes resultados:

Sorteio\aluno	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3
1^o sorteio	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 1
2^o sorteio	Aluno 3	Aluno 2	Aluno 1
3^o sorteio	Aluno 1	Aluno 3	Aluno 2
4^o sorteio	Aluno 2	Aluno 1	Aluno 3
5^o sorteio	Aluno 3	Aluno 1	Aluno 2

Foi percebido que algumas vezes o aluno tirava seu próprio nome e que nesse caso não era possível concluir a brincadeira, pois ele iria presentear a si mesmo, então desse modo foi determinado o conceito de permutação caótica na prática, uma permutação de termos onde nenhum termo permaneça na posição onde se encontrava inicialmente.

Pedi para que os alunos, sem realização de cálculos, encontrassem na questão da palavra CAFÉ os anagramas onde as letras não ficassem nenhuma na mesma posição e eles perceberam que eram poucas as situações que isso acontecia, mostrando as abaixo descritas:

$$\begin{array}{ccc} AFEC & ACEF & AECF \\ EFAC & ECAF & EFCA \\ FECA & FCEA & FEAC \end{array}$$

Solicitei também que 4 alunos escrevessem seus nomes na lousa e pedi para eles observarem quem poderiam sortear em um possível amigo oculto

$$\begin{tikzcd} & Jorge \\ Pedro \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & Luana \\ & Paula \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & Pedro \\ Jorge \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & Luana \\ & Paula \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & Paula \\ Luana \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & Pedro \\ & Jorge \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} & Jorge \\ Paula \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & Pedro \\ & Luana \end{tikzcd}$$

Solicitei para que os alunos verificassem como poderia ficar o amigo oculto completo e eles deram as seguintes repostas:

Pedro $\to$ Jorge Jorge $\to$ Luana Luana $\to$ Paula Paula $\to$ Pedro

Pedro $\to$ Jorge Jorge $\to$ Paula Paula $\to$ Luana Luana $\to$ Pedro

$\vdots$

Pedro $\to$ Luana Luana $\to$ Pedro Jorge $\to$ Paula Paula $\to$ Jorge

Os alunos observaram que foram 9 formas diferentes de fazer o amigo oculto e perguntei deles qual a semelhança entre a palavra café e a situação proposta. Alguns responderam que escolhi 4 pessoas pois a palavra café tinha 4 letras e que provavelmente iria ter uma fórmula que facilitasse o cálculo, pois descrever cada situação deveria ser muito complicado.

Oitava Aula

Na oitava aula relembrei a ideia do amigo oculto e todos os passos feitos, em seguida foi exposta aos alunos a fórmula de permutação caótica:

$$D = n!\left[\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right]$$

A fórmula foi apresentada em uma forma simplificada sem o símbolo de somatória visando a melhor compreensão de cada item para os alunos participantes. Foi solicitado para que os alunos imaginassem os casos de amigos ocultos com 3 e 4 amigos, em seguida expliquei que o n, como nos casos anteriores era o numero de elementos, e como no amigo oculto todos os elementos são utilizados só existe ele para substituição na formula.
Pedi para realizarem os cálculos aplicando a fórmula com os números ditos e observassem os resultados. Os alunos perceberam que o número encontrado era justamente o número de casos vistos nas aulas anteriores.

Nona Aula

A nona aula foi somente de exercícios com permutação caótica, foram passadas algumas palavras e solicitado para que os alunos descobrissem a quantidades de permutações caóticas possíveis em cada situação. Vendo que os alunos compreenderam o cálculo, pedi para que resolvessem com números, alguns alunos disseram ser desnecessário, pois sendo letras ou números o resultado seria o mesmo.

Como o conteúdo estava se desenvolvendo sem problemas perguntei aos alunos se eles sabiam a origem dos conteúdos estudados e, em especial, a origem da permutação caótica. Diante da resposta negativa expliquei sobre os jogos de azar e a influência deles na análise combinatória e sobre o problema das cartas mal endereçadas resolvido por Euler que resultou no aprofundamento da permutação caótica e em um avanço para os estudos da matemática nessa área.

Décima Aula

Na ultima aula, apenas propus alguns exercícios de diversas partes da analise combinatória, pedi para que identificassem o conteúdo e que resolvessem usando as fórmulas estudadas caso fosse necessário.

Nesta aula compareceram 16 alunos dos quais 10 conseguiram fazer todos os cálculos corretamente, no entanto sem identificar todos os conteúdos, os outros 6 alunos cometeram erros principalmente entre identificar combinações e arranjos, por este motivo erraram na aplicação da fórmula correta, os tópicos acertados por todos foram anagramas (permutações) e permutação caótica (amigo oculto).

4.5 Avaliação da Atividade

Durante a aplicação da atividade a ideia principal era responder as seguintes perguntas:

1. A contextualização facilita a compreensão da analise combinatória por parte dos alunos?

2. Que resultados obtêm-se ao inserir permutação caótica como um dos conteúdos abordados no ensino médio?

De um modo geral a contextualização tornou o conteúdo de melhor compreensão, os alunos perceberam que são situações do cotidiano sendo resolvidas nos problemas, além disso podemos perceber o desenvolvimento do raciocínio lógico por parte deles, os alunos identificaram mais rapidamente situações onde a posição importa (Arranjos) e onde a posição não importa (Combinações), além da ideia do principio da contagem e da permutação. Uma das desvantagens percebidas foi o fato de os alunos quererem resolver tudo mentalmente, ou usando o diagrama de árvore para visualização dos resultados.

Para a segunda pergunta os resultados foram completamente positivos, pelo fato de nenhum elemento ficar no mesmo lugar, os alunos compreenderam o desenvolvimento da fórmula e seu resultado, além de compreender o que eles estavam selecionando no resultado. Alguns alunos chegaram a comentar que dentre combinação, arranjo e permutação caótica, o mais simples era este ultimo, por ser uma coisa que eles sempre praticavam como entretenimento nas festas de final do ano.

Diante do desenvolvimento das aulas, podemos concluir que uma abordagem diferenciada estimula os alunos e torna-os mais solícitos à compreensão do conteúdo, além disso, a participação durante as aulas foi algo completamente diferente do visto em uma aula normal, os alunos questionaram, opinaram em melhores métodos de resolução e tornaram o desenvolvimento do conteúdo algo inovador e produtivo.

Capítulo 5

Considerações finais

Diante do trabalho apresentado podemos perceber que a análise combinatória pode sim ser ensinada de modo diferenciado e que desperte o interesse do aluno, possibilitando a compreensão, discussão e análise critica do conteúdo exposto. Podemos observar que o conteúdo de Permutação Caótica (tão excluído do Ensino Médio), pode sim, ser aplicado pelos professores e compreendido pelos alunos, desde que este seja exposto da maneira correta. A Modelagem Matemática utilizada para contextualizar o tema abordado mostra que antes de mais nada é preciso um preparo do professor e que este seja um mediador entre o conhecimento do aluno e o conhecimento matemático, tendo em vista que partindo das situações onde o aluno retém o conhecimento, até o ponto de motivação para a busca de novos meios de soluções dos problemas ou resolução de problemas mais complexos é um longo e trabalhoso processo, no qual o aluno precisa ser guiado e motivado para não cair na passividade ou simplesmente se perder no caminho, deixando assim o tema de lado. Outro resultado importante é que a Análise Combinatória é um conteúdo extremante diversificado, com diversas possibilidades de trabalho e aplicação, que no entanto é pouco explorado em sala de aula, sendo muitas das vezes negligenciado, sendo deste modo visto de forma "ruim" pelos alunos, tal visão pode e deve ser modificada por novas estratégias de ensino, valorizando a aplicação e tratamento da informação como algo útil e não mais uma fórmula a se decorar. Com este trabalho pretendemos motivar os professores a procurar novas estratégias de ensino, para assim em um futuro próximos observamos alunos críticos e debatedores dos grandes problemas matemáticos.

Referências Bibliográficas

[1] BORBA, R.E.S.R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: ANAIS DO X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Educação Matemática, Cultura e Diversidade, 2010, Salvador.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: MEC, 1999. 364 p

[3] D'AMBROSIO, U. Educação Matemática: Da teoria á prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

[4] EVES, H., Introdução à História da Matemática, Editora UNICAMP, 2004.

[5] GARBI, Gilberto, Uma pequena pérola de Euler, Revista do Professor de Matemática, nº 50 - Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[6] MOREIRA, Carlos Gustavo T.A., Amigo oculto, Revista do Professor de Matemática, nº 15 - Sociedade Brasileira de Matemática, 1989.

[7] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages. A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO - VOLUME 1. Coleção do Professor de Matemática- SBM. Sexta Edição.

[8] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages. A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO - VOLUME 2. Coleção do Professor de Matemática - SBM. Sexta Edição.

[9] PEREIRA, A. G. & Campos, V. S. M. , Análise combinatória, Permutações Caóticas, Aula 8 do Programa Universidade a distância, UNIDIS Grad, EDUFRN, 2006.

[10] PROFORMAR, Metodologia e prática do ensino de matemática/ Coordenador: Iêda Maria de Araújo Câmara Costa et.all-Manaus: UEA.Edições, 2007.

[11] RISMA, Leonardo Gonçalves; FALCÃO, Ricardo de Carvalho. Permutações Caóticas Sobre Sequências Finitas-Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática-Profmat - UFSJ-2014.

[12] ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. Jornadas europeas de estadística, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

[13] SANTOS, J. Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T.C.. INTRODUÇÃO À ANÁLISE COMBINATÓRIA. Editora Unicamp. Terceira Edição.