CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

# O ENSINO DA TRIGONOMETRIA POR MEIO DE AULAS PRÁTICAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

MAIO DE 2016

CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

# O ENSINO DA TRIGONOMETRIA POR MEIO DE AULAS PRÁTICAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Dr. Mikhail Petrovich Vishnevski

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
MAIO DE 2016

**FICHA CATALOGRÁFICA**

Preparada pela Biblioteca do **CCT** / **UENF** **142/2016**

Pires, Carlos Eduardo Moraes
O ensino da trigonometria por meio de aulas práticas / Carlos Eduardo Moraes Pires. – Campos dos Goytacazes, 2016.
122 f. : il.
Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, 2016.
Orientador: Mikhail Petrovich Vishnevski.
Área de concentração: Matemática.
Bibliografia: f. 110.
1. AULAS PRÁTICAS 2. EXPERIMENTOS 3. TRIGONOMETRIA 4. RECURSOS DIDÁTICOS I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas II. Título

CDD 516.24

CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

# O ENSINO DA TRIGONOMETRIA POR MEIO DE AULAS PRÁTICAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 31 de maio de 2016.

**Profª. Liliana Angelina León Mescua**
D.Sc. - UENF

**Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre**
D.Sc. - UENF

**Prof. Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto**
D.Sc. - IFFluminense - Campus Campos Centro

**Prof. Dr. Mikhail Petrovich Vishnevski**
D.Sc.Orientador: Prof. Dr. Mikhail Petrovich Vishnevski - UENF
(ORIENTADOR)

*Dedico este trabalho à minha esposa, Neila, que abdicou de minha presença - nos momentos em que nunca estive ausente nos 22 anos de casamento - para dedicar-me aos estudos, sem cobrança e sempre incentivando. Também aos meus filhos para recompensar essa ausência e, principalmente à minha filha Fabiane e ao meu pai, Gumercindo, que sobretudo, curvarem-se muitas vezes em oração para que eu conseguisse concluir.*

# Agradecimentos


Agradeço à Deus, o principal responsável pelo meu ingresso, permanência e, sobretudo, conclusão deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Mikhail Petrovich Vishnevski, que como professor, mostrou sua paixão pela docência, prazer em ensinar. Como orientador, pela paciência e sugestões preciosas.

Aos professores Geraldo e Nelson pelo conhecimento transmitido, mas sobretudo, aos professores Rigoberto Gregório Sanabria Castro, Liliana Angelina León Mescua e Oscar Alfredo Paz La Torre, que fizeram com que eu mudasse minha opinião de estratégia de ensino, minha visão da Educação no Brasil, acreditando na minha pessoa. Aos dois últimos, principalmente, a quem devo, em figura humana, grande parte desse título.

Aos meus colegas de sala, com quem vivi uma grande experiência de companheirismo e cumplicidade. União nunca vivenciada entre pessoas até então estranhas. Dentre todos, destaco, sem perda de importância aos demais, Eduardo Correa dos Santos, Guilherme Coelho Machado e José Renato Paveis Coelho.

*“Não te mandei eu? Esforça-te, e tem bom ânimo; não temas, nem te espantes; porque o SENHOR teu Deus é contigo, por onde quer que andares.” Josué 1:9.*

# Resumo

O presente trabalho visa contribuir para o ensino da Trigonometria no triângulo retângulo no 1º ano do Ensino Médio, a partir de uma pesquisa exploratória realizada com professores do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio (que contemplam esses conteúdos) de duas escolas em que ministro aulas. Neste sentido, este trabalho apresenta uma proposta para o ensino da trigonometria no triângulo retângulo de forma prática, ou seja, fazer experimentos dos conceitos, propriedades, fórmulas e teoremas estudados na Trigonometria deste ano. Tal proposta tem aporte teórico nas bases da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, levando em conta a história do sujeito e ressaltando o papel dos professores na proposição de situações que favoreçam a aprendizagem. É expressamente necessário que o estudante relacione o teórico com o prático de maneira consistente e não arbitrária e que o professor leva em conta o que o aluno já sabe, para que o conhecimento seja ancorado. Por esse motivo, a proposta foi dividida em três partes, a saber, (i) a fundamentação teórica, (ii) exemplos dos exercícios mais utilizados em avaliações externas e livros didáticos e (iii) sugestão para aula prática, relatando as que ministrei. Antes, no entanto, o trabalho aborda informações para reflexões como o momento em que acontecerão essas aulas - se antes, durante ou após o conhecimento teórico; se estas são mais ou menos importantes do que as aulas teóricas; quais as possíveis vantagens e desvantagens dessas aulas e como ministrá-las sem disponibilidade de um ambiente que a propicie e recursos materiais necessários na escola. A proposta teve sua execução no 1º ano do Ensino Médio matutino da Escola Estadual Professor José Veiga da Silva, situada em Jacarandá, interior do município de Marataízes, Espírito Santo. Entre as demais conclusões da experiência, enfatiza-se a que resultou em motivação no aluno para desejar adquirir um conhecimento que, por mais que lhe apontasse a aplicabilidade, não desejava.

**Palavras-chaves**: Aula Prática. Experimento. Trigonometria. Recurso Pedagógico.

# Abstract

This work aims to contribute to the teaching of trigonometry in right triangle in the 1st year of high school, from an exploratory survey of teachers of the 9th grade of elementary school and 1st year of high school (which include such content) of two schools where minister classes. Thus, this work presents a proposal for teaching trigonometry in rectangle practical triangle, ie experiment of the concepts, properties, formulas and theorems studied trigonometry in this series. This proposal has theoretical support on the basis of the theory of David Ausubel meaningful learning, taking into account the history of the subject and emphasizing the role of teachers in proposing situations that favor learning. It is strictly necessary that the student relates the theoretical with the practical consistently and not arbitrary and that the teacher takes into account what the student already knows, that knowledge is anchored. For this reason, the proposal was divided into three parts, namely, (i) the theoretical basis, (ii) examples of exercises most used in external evaluations and textbooks and (iii) suggestions for classroom practice, reporting that ministered. Before, however, the work deals with information for reflection as the moment when will these lessons - whether before, during or after the theoretical knowledge; if these are more or less important than lectures; what the possible advantages and disadvantages of these classes and how to administer them without the availability of an environment that fosters and materials needed in school resources. The proposal had its run in the 1st year of high morning the State School Education Professor José Veiga da Silva, located in Jacarandá, within the municipality of Marataízes, Espírito Santo. Among the other findings of the experiment, it is emphasized that resulted in motivating the student to want to acquire knowledge that, as much as you pointed applicability, not wanted.


**Key-words**:Practical class. Experiment. Trigonometry. Educational resource.

# Lista de ilustrações

# Lista de tabelas

# Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|---|---|
| ENEM | Exame Nacional do Ensino Médio. |
| IFFluminense | Instituto Federal Fluminense. |
| PAEBES | Programa de Avaliação da Educação Básica do Estado do Espírito Santo. |
| PCN | Parâmetros Curriculares Nacionais. |
| PROFMAT | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. |
| OCDE | Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico. |
| UENF | Universidade Estadual do Norte Fluminense. |

# Sumário

# Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal fornecer informações como proposta para o ensino da Trigonometria no triângulo retângulo no 1° ano do Ensino Médio, esperando que, com isso, aumente o interesse dos alunos em aprender, já que o desinteresse foi a causa apontada unanimemente pelos professores pesquisados para o mal desempenho no processo ensino e aprendizagem.

Para aumentar o interesse dos alunos, foram realizadas aulas práticas para cada conceito, propriedade ou teorema que se quis realçar. No que se diz respeito à este assunto, são dadas informações para auxiliar o professor a evitar erros comuns nas aulas práticas e sugestão de como torná-la prazerosa e eficaz.

Este trabalho também traz informações que valorizam a aula teórica, desassociando-a da aula tradicional, no sentido pejorativo da palavra.

Por não considerar que as aulas práticas por si só resultem no desempenho desejado, foi acrescentada como proposta a revisão dos conhecimentos prévios antes da apresentação dos novos. Isso porque, embasados na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Paul Ausubel (1908-2008), quanto mais o aluno sabe, mais ele está em condições de aprender o novo. Ainda segundo Ausubel, sem o conhecimento básico, o aluno tem condições de aprender o novo mas, quando isso acontece, esse novo conhecimento poderá ser facilmente perdido por não ter onde se ancorar. Por isso, são relacionados uma sequência de conhecimentos para trabalhar a Trigonometria.

É evidente que as propostas de aulas práticas e revisões de conteúdos anteriores tem como consequência direta o atraso no planejamento anual e risco na execução pontual que foi proposto no plano de ensino da disciplina. Devido à isso, houve o cuidado de emitir informações que levantam hipóteses de que tais perdas são investimentos.

Uma das formas de recuperar o tempo perdido pelas aulas práticas e revisões de conhecimentos básicos é a escolha das atividades. Ao invés de aumentar a quantidade de exercícios diferentes, foram focados àqueles que mais aparecerão durante a trajetória escolar, quer sejam nas avaliações internas ou externas, como o ENEM (Exame Nacional do Ensino Medio) e PAEBES (Programa de Avaliação da Educação Básica do Estado do Espírito Santo).

Este trabalho optou por dividir as informações em 7 capítulos.

No capítulo 1, apresentam-se a fundamentação teórica, como o motivo da escolha deste tema; definições e opiniões sobre aula teórica e aula prática; os equívocos cometidos nas aulas práticas; pontos de vistas que deduzem que a perda de tempo é um investimento; o momento para a aplicação dos experimentos (se antes, durante ou depois da aula teórica) e a citação da teoria que embasa as propostas deste trabalho.

No capítulo 2, descreve-se os aspectos metodológicos da pesquisa; o campo e os sujeitos da pesquisa que culminou na ideia deste; os instrumento de trabalho; a ordem dos conteúdos e como executar estas propostas. São relacionados tipos de exercícios, que vão desde os mecânicos aos contextualizados, dos mais objetivos aos mais complexos.

No capítulo 3, estão as sugestões dos conteúdos para serem trabalhados na Trigonometria no triângulo retângulo do 1° ano do Ensino Médio. Não poderiam ficar de fora as informações para trabalhar com a História da Matemática, em ordem cronológica e apresentação dos matemáticos mais importantes para a descoberta e desenvolvimento da matéria que estuda os triângulos.

No capítulo 4, onze modelos de exercícios mais usados em avaliações internas e externas e nos livros didático são expostos. Neste capítulo, tais modelos são isentos de explicações, deduções e exemplos, pois estes acontecerão no capítulo 6 de forma detalhada.

No capítulo 5, são brevemente apresentadas aulas práticas de conceitos básicos, que deveriam ficar fixado, ancorado na mente dos alunos. Tais revisões devem ser consideradas, para alguns, como o conhecimento novo, principalmente para as escolas de ensino exclusivamente Médio, diferentes daqueles que têm seus alunos vindo do Ensino Fundamental da própria escola.

Já no capitulo 6, cada conteúdo sugerido no capítulo 4 é minuciosamente apresentado para que se realize aula prática com cada um deles. Os relatos das execuções das atividades na prática são oriundas da escola Professor José Veiga da Silva, local onde a ideia ganhou corpo para ser realizada. Dá-se ênfase para os experimentos fora da sala de aula e, principalmente, fora da escola, como foi a aula prática em que a largura do rio, na Lagoa do Siri (cartão postal do município de Marataízes-ES), foi medida através da semelhança de triângulos. Quanto aos experimentos em que a realidade não foi possível, como medir a altura de um avião sobre um prédio ou a distância entre dois navios no mar, a substituição por maquetes construídas pelo alunos em contra turno foi muito útil e de muita valia.

As fotos que traduzem melhor as aulas práticas estão em quantidade tímida no corpo do trabalho. Os interessados poderão consultar os apêndices para contemplar os detalhes capturados pelas lentes das câmeras fotográficas.

Quanto aos demais arquivos citados neste trabalho, dois são os seus lugares: os apêndices e os anexos, cada qual de acordo com a origem de cada um deles.

A execução da proposta foi avaliada e verificada a sua eficiência por meio de atividades escritas, oral e aplicativos de celular. O resultado é descrito nas considerações finais, sem que houvesse a preocupação com o rigor da Estatística, por entender que a medição científica do grau de interesse dos alunos é muito complexa. Apesar da avaliação do desempenho ter caráter sistematizado, interesse de alunos nas aulas não é traduzido pelos resultados nas avaliações, mas nos brilhos de seus olhos que pouco piscam enquanto estão prestando atenção nas aulas teóricas, ou nas gargalhadas e euforia ao verificarem um conceito, uma propriedade ou um teorema na prática.

# Capítulo 1

# Fundamentação Teórica

## 1.1 A Escolha do Tema

Foi notado mal desempenho dos alunos do 1º ano do Ensino Médio na Escola Professor José Veiga da Silva na Trigonometria no triângulo retângulo. Com base nesta turma, foi feita uma pesquisa exploratória, com quatro professores de matemática do 1º ano da mesma escola acima citada e quatro da escola municipal Anália Queiroz da Silva (9º ano do Ensino Fundamental), ambas do interior de Marataízes. As escolas foram escolhidas por serem as instituições em que ministro aula. Já os anos, foram escolhidos porque são as que contemplam o conteúdo citado, de acordo com o currículo básico do Espírito Santo.

A pesquisa foi feita por meio de um questionário (Apêndice A) e apontou que os oito professores participantes nela consideram o desempenho dos alunos insatisfatório; que os problemas no ensino e aprendizagem da trigonometria são a falta de conhecimentos básicos (oito professores), falta de interesse dos alunos (oito professores), falta de recursos pedagógicos (seis), falta de tempo para planejamento das aulas (quatro) e falta de cursos de capacitação para os professores (dois) e que dentre esses problemas, o mais comprometedor é a falta de interesse dos alunos (oito).

Com base nessa pesquisa, foram levantadas possíveis causas do desinteresse dos alunos junto à pedagoga. Entre a falta de incentivo familiar, questões culturais de zona rural e outras tantas que fogem da capacidade do professor, foi escolhida a aula desinteressante, por ser a menos simpática.

Surgiu, então, a ideia de propor aulas mais interessantes, desviando-se de caminhos já percorridos chamados jogos matemáticos, dinâmicas de socialização, desafios matemáticos, exercícios por meio de resolução de problemas e outras tentativas para tornar as aulas mais atrativas para o aluno.

Para que isso acontecesse, seria necessário fazer o momento mais monótono da aula (a teoria, os conceitos, a aula expositiva) ficar interessante. Isso aconteceria devido a uma necessidade de adquirir o conhecimento para usá-lo no momento mais esperado (a aula fora da sala de aula, concreta, experimental).

Convencer o aluno de que o seu sucesso na aula prática estava diretamente ligado à aula teórica, sendo a recíproca verdadeira, não pareceu uma tarefa difícil. Porém, convencer o professor a adotar aulas práticas além das teóricas não deverá ser tão fácil.

Isso porque há muitas adversidades para ministrar uma aula prática. Se não for bem planejada, pode causar efeito contrário, como será pontuado neste trabalho.

## 1.2 A Aula Teórica

A aula teórica, comumente chamada de aula expositiva, é aquela em que o professor discorre sobre um determinado assunto durante algum tempo. Ela poderá ser expositiva clássica, em que o aluno é totalmente passivo, ou dialógica, em que o professor tenta quebrar essa passividade do aluno por meio de questionamento a serem respondidos pelos alunos, dinamizando a atividade em sala de aula. (FILHO, 2007)

Não se pode confundir aula teórica com aula tradicional, no sentido pejorativo da palavra. E não deve ser vista como um retrocesso, pois a mesma tem sua valia em tempos de modernidade da Educação.

A aula teórica é extremamente eficaz no que diz respeito à velocidade de transmissão da informação, bem como à sua quantidade. Ideal para transmitir definições, conceitos, informações sobre tratamento e mecanismos de ações. É suficiente para preparação para exames seletivos que exigem conhecimento teórico. Daí os cursos preparatórios não usarem laboratórios nem recursos lúdicos. Mas não é apenas dos cursos preparatórios a preferência a este tipo de aula. É, sem dúvida, a mais usada também nas escolas regulares.

A preferência pelas aulas teóricas tem diversos motivos. Entre eles, destaca-se, em ordem aleatória, (i) economia na transmissão do conhecimento, muito necessária para o cumprimento do currículo escolar no tempo hábil para a avaliação externa, sendo, em muitas unidades, em prazo trimestral; (ii) economia no tempo para a preparação das aulas, o que, para o professor, é muito relevante, já que o tempo de planejamento por aula dada é insuficiente; (iii) economia de recursos financeiros, uma vez que não há gastos extras com materiais, a não ser os de costume, como pincel/giz, apagador, energia elétrica e outros necessários para a permanência dos alunos e (iv) economia na produção de lixo, uma vez que a maioria dos materiais utilizados em aula prática é descartado e não reciclado, virando lixo. CANDAU (1988) dá o conceito de teoria como sentido de observar, refletir e contemplar.

## 1.3 Aula prática

A aula prática é aquela em que a principal característica é o uso de equipamentos e materiais, com os quais os alunos farão algum tipo de experiência, quer seja sobre uma lei científica ou os efeitos desta, relacionando seus aspectos teóricos e práticos. Neste caso, o aluno deixa de ser passivo, para ser ativo. CANDAU (1988) dá o conceito da prática como sentido de agir.

Elas acontecem em laboratórios, pátios, ruas, campos ou até mesmo na sala de aula, mas não podem ser confundidas com dinâmica ou uso de recurso pedagógico, embora este esteja presente na maioria das vezes. Levar uma turma para o pátio para cantar coros de paródias para memorizar uma fórmula não é aula prática. Jogos matemáticos na sala de informática também não é. Separar alunos com bolas de cor A e alunos com bolas de cor B e sortear para ver quem vai ao quadro responder, muito menos.

Numa aula prática, o aluno vai verificar ou construir o que se deseja trabalhar. Quer sejam eles conceitos, teoremas, fórmulas, etc. Todavia, não o fará por meio de jogos ou dinâmicas que apenas maquiam o tradicional exercício de perguntas teóricas. Essa verificação deverá ser por experimentos que simulam como o conhecimento será usado na sua prática. Assim, uma aula prática vai ser a teoria sendo experimentada no mundo real como esta propõe. Ela pode ser feita antes, durante ou depois da aula teórica, de acordo com o que se pretende, como será visto mais à frente. O que não se pode abrir mão é da experiência que o aluno terá. O erro ou acerto não são os resultados do fracasso ou sucesso, respectivamente, e nem o que se busca, mas o processo para compreensão do que se deseja.

Tomando como exemplo, um aluno está com 3 palitos de tamanho 3,4 e 12 cm. Pede-se para formar um triângulo. Eles não conseguem, pois o terceiro palito não encaixa no segundo. Troca-se o palito de tamanho 12 cm por um palito de tamanho 10 cm. Também não conseguem. Em seguida, substitui o palito de 10 cm por um palito de 8 cm. Ainda não dá. Agora, é dado um palito de 6 cm e eles , enfim, conseguem. É critério do professor indagar o motivo ou passar de vez a "relação de desigualdade entre lados do triângulo", que diz que "em todo triângulo, qualquer lado tem medida maior que a diferença entre as medidas dos outros dois; e assim como tem medida menor que a soma deles". Assim, tem-se exemplo de aula prática.

A aula prática tem a vantagem de fixar o conceito e, uma vez compreendido o processo, o aluno tende a não esquecer e, esquecendo,saberá os passos para chegar novamente ao conceito. Também adiciona às vantagens, o fato de que aulas práticas são menos monótonas e de serem a preferência entre os alunos. Aulas práticas são mais agradáveis e mais significativas. Segundo Paulo FREIRE (1997), para compreender a teoria é preciso experienciá-la. A importância da experimentação no processo de aprendizagem também é discutida por Bazin (BAZIN et al., 1987).

## 1.4 Aula Prática x Aula Teórica

Uma vez conhecendo as características da aula Prática e Teórica, o professor acaba por tomar partido em um ou outro modelo, como se fosse questão de escolha. Ambas deveriam caminhar juntas no plano de aula. Não há como separá-las. "Na parte de ensino, acho que o grande mal é a separação entre a teoria e a prática", disse Maria Isabel da Cunha (1989). O professor precisa entender a importância de ambas.

Para Maurício SERAFIM (2001), professor do Departamento de Administração Pública da Universidade do Estado de Santa Catarina, a teoria é feita de conceitos que são abstrações da realidade. Assim, pode-se inferir que o aluno sem o conhecimento científico do seu cotidiano, não foi capaz de compreender a teoria.

Por outro lado, trabalhar apenas com a teoria, abandonando a prática, pode ser considerado um equívoco. O resultado é quase sempre desastroso, e sempre aquém do esperado.

Para D´Ambrosio,

> "O valor da teoria se revela no momento em que esta é transformada em prática. No caso da educação, as teorias se justificam na medida em que seu efeito se faça sentir na condução do dia-a-dia na sala de aula. De outra maneira, a teoria não passará de tal, pois não poderá ser legitimada na prática educativa". (D'AMBRÓSIO, 1986)

Fernando Pessoa também opinou:

> "Toda a teoria deve ser feita para poder ser posta em prática, e toda a prática deve obedecer a uma teoria. Só os espíritos superficiais desligam a teoria da prática, não olhando a que a teoria não é senão uma teoria da prática, e a prática não é senão a prática de uma teoria. Quem não sabe nada dum assunto, e consegue alguma coisa nele por sorte ou acaso, chama «teórico» a quem sabe mais, e, por igual acaso, consegue menos. Quem sabe, mas não sabe aplicar - isto é, quem afinal não sabe, porque não saber aplicar é uma maneira de não saber -, tem rancor a quem aplica por instinto, isto é, sem saber que realmente sabe. Mas, em ambos os casos, para o homem são de espírito e equilibrado de inteligência, há uma separação abusiva. Na vida superior a teoria e a prática completam-se. Foram feitas uma para a outra. "(PESSOA, 1926)

D´Ambrosio e Fernando Pessoa expressaram bem a união da prática com a teoria. Então, não está em questão o duelo prática x teoria, mas, em que momento é interessante usá-las.

## 1.5 Na Prática, Não Há Aula Prática, Aponta Pesquisa Interna.

Uma vez conhecido o valor da aula teórica e da aula prática, o professor sabe que a aula prática também deverá fazer parte do seu planejamento. Mas, na prática, será que o professor está ministrando as aulas práticas, ou está se limitando às aulas teóricas?

Foi proposta uma pesquisa exploratória com o objetivo de verificar se os professores ministram aulas práticas. Essa pesquisa foi feita com 20 professores de Matemática, Física, Biologia e Química das escolas pesquisadas. Dentre esses 20 professores, 4 responderam que as aulas teóricas são mais importantes, enquanto os 16 concordaram que ambas são importantes. No entanto, nenhum professor trabalha com a prática de todos os conteúdos, 1 trabalha em muitos deles e os 16 nunca trabalham. Apesar de 19 professores admitirem que não receberam orientações de como trabalhar a prática dos conteúdos em suas formações, o motivo para não ministrarem aulas práticas é a dificuldade para a execução.

Segundo eles, a execução de aulas práticas requer tempo dos docentes para a preparação, tempo para a execução, gasto com materiais, equipe de apoio para preparar o ambiente, quer seja um computador, um projetor de slides, além do aborrecimento para manter a ordem na sala. Reclamaram, também, que aulas práticas "atrasam o conteúdo", e eles têm um calendário a cumprir, devido às avaliações externas, aplicadas por parte do Governo em datas fixas, sem chance de alteração das mesmas. Com tantos contratempos, o professor acaba por preferir não ministrar aulas práticas, em muitos casos, teoricamente, escrevem em seus plano de ação, mas não as executam.

## 1.6 Investimento de Tempo

É fato que a execução de aulas práticas requer maior tempo. Tempo este que o professor não tem, se quiser cumprir o planejamento. Assim, um conhecimento adquirido em duas aulas práticas poderiam ter sido transmitidos em apenas minutos de aula teórica. E se já não bastasse o tempo gasto com a prática, ainda tem o tempo gasto com a indisciplina gerado com o ambiente diferente e menos formal. Segundo a Pesquisa Internacional sobre Ensino e Aprendizagem, coordenada pela OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico), publicado no site Uol Educação (YAMAMOTO, 2014) acessado em 27/03/16, 23h07min, 20% do tempo de aula são gastos com a indisciplina e, acrescentando-se o tempo gasto com questões burocráticas como chamadas, restam menos de 70% para o ensino.

Neste trabalho, é verificado se a perda de tempo na execução das aulas práticas seria recompensada no futuro. Tal recompensa viria com a melhoria das notas, fruto do entendimento, agora adquirido por meio das aulas práticas. Uma vez que a média das notas sobem, a quantidade de recuperações diminuem. Isso é economia de tempo para correções de provas. Mas a economia de tempo em sala de aula? Essa se daria pela diminuição de revisões ou interrupções na correção de exercícios teóricos para sanar dúvidas. Até mesmo os exercícios de fixação para treinar o aluno mecanicamente (em outras palavras, fazê-lo decorar os passos da resolução) poderiam ser reduzidos. Se isto for uma verdade, então, o tempo gasto com as aulas práticas deixam de ser perda para ser investimento.

## 1.7 O Local da Aula Prática

Uma aula prática deveria ser realizada num lugar específico que propicie o experimento. Este lugar seria a sala do laboratório. O laboratório possibilita que o aluno coloque em prática o que viu na sala de aula, construindo o conhecimento e facilitando o aprendizado. Porém, sabe-se que as escolas, salvo raríssima exceção, não têm uma sala para isso. Então, sugere-se que a mesma seja feita em pátio, ginásio, sala de informática ou até em locais fora do ambiente escolar, quando há condições para isso.

É interessante que a aula prática seja em ambiente diferente do que ele está acostumado a estudar, ou seja, fora da sala de aula. No entanto, nada impede que, na impossibilidade de sair, esta aula seja dada na própria sala. Para Borges (2002), confundir atividades práticas com a necessidade de um ambiente com equipamentos especiais para a realização de trabalhos experimentais é um equívoco corriqueiro.

## 1.8 Materiais para a Aula Prática

Outro problema que impede os professores de executarem aula prática é a falta de material pedagógico. Ainda segundo Borges (2002), aulas experimentais podem ser desenvolvidas em qualquer sala de aula e sem a necessidade de instrumentos ou aparelhos sofisticados.

O professor pode pedir aos alunos, como tarefa de casa, para confeccionarem o material desejado. Um teodolito pode ser feito com cano, transferidor, barbante e pedra. Os passos na confecção dos materiais caseiros estarão em capítulos a seguir. Por hora, discute-se neste, que uma aula prática pode ser realizada sem o uso de materiais sofisticados.

## 1.9 O Momento das Aulas Práticas

A aula prática poderá acontecer antes, durante ou depois da aula teórica. O que vai determinar o momento de sua aplicação é o objetivo.

O mesmo conhecimento pode ser aplicado em momentos diferentes. Isso vai depender de como o docente deseja trabalhar, e o que ele espera dos alunos.

### 1.9.1 Aula Prática Antes da Teórica

Sugerida quando o professor quer construir o conhecimento, ao invés de passá-lo pronto para o aluno. Neste caso, o professor fala da situação-problema e dá os comandos para a construção dos passos. O final deverá ser a resposta desejada. Para isso, erros e acertos são sempre fiscalizados pelo docente. Após analisar os passos e o resultado esperado, incita-se os alunos a descobrir uma lei, um conceito, uma forma de generalizar o que foi feito. Perde parte do encanto quando o professor não deixa a classe descobrir o segredo.

Voltando ao exemplo dos palitos, tem-se o aluno com os palitos 3,4 e 12 cm. Ele percebeu, ou será motivado a perceber, que palitos só conseguem formar um triângulo, se a soma dos menores for maior do que o palito maior. Após essa verificação, o aluno está pronto para receber a teoria: "condição de existência para triângulos", conforme mencionado no quarto parágrafo do capítulo 1.3.

### 1.9.2 Aula Prática Durante a Aula Teórica

A critério do professor, um conhecimento pode ser introduzido com teoria, depois uma aula prática e em seguida, voltar para a teoria. Assim, a aula prática será realizada durante a aula teórica. Isso quando o professor prefere dar o direcionamento prévio pra que o aluno já tenha em mente o que vai fazer. Neste caso, o professor não dá comandos, mas os deixa livres para achar as soluções esperadas.

Alguns iniciam com a História da Matemática, outros começam com uma situação problema e deixa o enigma para descobrirem na prática, e finaliza com o conceito.

Na aula dos palitos, ao invés de iniciar com a aula prática, pode-se fazê-lo com uma conversa. O professor pode contar um caso em que tenha palitos e percebe que ora consegue fechar um triângulo, ora não. A partir daí, desafiar os alunos a descobrir o segredo. Deixar claro que as tentativas mal ou bem sucedidas fazem parte do processo e que da observação e da análise da relação entre os resultados poderão sair o segredo. É comum, ao perceber que os alunos não chegam ao que se espera, que outros comandos mais direcionadas sejam dados, como por exemplo, "Observe o tamanho dos palitos que vocês estão usando"ou até mesmo "junte os menores e compare com o maior".

### 1.9.3 Aula Prática Após a Aula Teórica

Neste caso, toda a teoria do conhecimento é dada previamente, e os alunos as colocam em prática. Este momento requer menor participação do professor, uma vez que o aluno tem a teoria.

Utilizando a aula dos palitos neste momento, primeiro o professor aguçaria o aluno, falaria a respeito da "condição de existência dos triângulos", demonstraria a relação e poderia exemplificar e fixar com exercícios. Após a classe ter entendido a teoria, proporia a aula teórica para avaliar se os alunos realmente estão de posse do conhecimento.

A experiência relatada neste trabalho usou os três momentos, mas foi neste terceiro que se obteve êxito, o que será abordado mais adiante.

## 1.10 Os Cuidados com as Aulas Práticas

Após concordar com a importância da aula prática, de discernir aula prática da dinâmica, de saber o local ideal, o momento em que se deve ser aplicada, é interessante conhecer alguns prejuízos que a tentativa da execução da mesma pode acarretar.

A aula prática não deve ser para a vaidade do profissional, que quer mostrar que não é tradicional. Também não é prêmio para alunos que se comportaram durante a aula teórica. Talvez possa ser usada para seduzir o aluno e fazê-lo gostar do assunto, mas não é esse o objetivo. Se não tiver associação de teoria e prática de um conhecimento, em vão aconteceu a aula, que deixou de ser investimento de tempo, para ser o mais alarmante desperdício.

Valente mostra a sua preocupação:

> "A solução para evitar o ensino das técnicas matemáticas tem sido o uso de material pedagógico. O aluno manuseia um material que propicia o desenvolvimento de conceitos matemáticos, mas apesar disso nem sempre ocorre uma formalização do conceito, no qual ele tem a chance de sintetizar suas ideias, colocá-las no papel, compará-las com outras soluções para verificar sua validade. "(VALENTE, 1991)

Observe que não basta o aluno manusear um material que propicia o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Isso não garante uma formalização do conceito. Até porque o conhecimento não está no material em si. Então, cabe ao professor apresentar questionamentos adequados que culminem na observação do aluno para que haja a construção ou a verificação do conceito em questão. E é do professor o papel na proposição de situações que favoreçam a aprendizagem, conforme a teoria que será apresentada a seguir.

## 1.11 Teoria da Aprendizagem Significativa

As propostas apresentadas neste trabalho tem aporte teórico nas bases da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel (2011)

Figura 1 – David Ausubel

Fonte:http://novaescola.org.br/formacao/david-ausubel-aprendizagem-significativa-662262.shtml

David Paul Ausubel ou David Ausubel, como era mais conhecido, foi um pesquisador norte-americano que dizia que o sujeito quanto mais sabe, mais aprende.

Ausubel ficou famoso por ter proposto o conceito de aprendizagem significativa. Segundo David, "o fator isolado mais importante que influencia o aprendizado é aquilo que o aprendiz já conhece".

Em 1963, quando a sua teoria foi apresentada, acreditava-se na influência do meio sobre o sujeito. O que os estudantes sabiam não era considerado e entendia-se que só aprenderiam se fossem ensinados por alguém. O que Ausubel propunha era exatamente o contrário. Para ele, aprender significativamente é ampliar e reconfigurar ideias já existentes na estrutura mental e com isso ser capaz de relacionar e acessar novos conteúdos.

A teoria de Ausubel leva em conta a história do sujeito e ressalta o papel dos professores na proposição de situações que favoreçam a aprendizagem.

Segundo ele, as duas condições para que a aprendizagem significativa ocorra são: (i) o conteúdo a ser ensinado deve ser potencialmente revelador e (ii) o estudante precisa estar disposto a relacionar o material de maneira consistente e não arbitrária. O docente deve levar em conta o que o aluno já sabe. caso contrário, o novo conhecimento não terá onde se ancorar.

Não importa o que o professor faça, é o aluno que determina se houve ou não a compreensão do tema. E por mais que a aula seja divertida, se esta for encaminhada de forma automática, sem reflexão e negociação de significados, de nada adiantou.

Isso não tira a parcela de responsabilidade do professor, que é o profissional qualificado para criar os momentos para a construção do conhecimento. Não se pode creditar o fracasso escolar apenas à falta de interesse do aluno em aprender. Esse fracasso tem causas variadas. E é baseado nessa teoria que foi proposta uma sequência de aulas sucessórias importantes para o ensino e aprendizagem da Trigonometria no triângulo retângulo.

# Capítulo 2

# Metodologia

Neste capítulo, serão abordados os aspectos metodológicos do presente estudo: tipo de pesquisa; campo da pesquisa, sujeitos do trabalho, instrumentos do trabalho, ordem dos conteúdos, execução da ideia e tipos de exercícios, segundo o que se pretende.

## 2.1 Tipo de Pesquisa

A abordagem que deu origem a proposta do trabalho foi a pesquisa exploratória, escolhida pela ausência de exigência com a representatividade numérica, pois valoriza a compreensão do grupo.

## 2.2 Campo da Pesquisa

A pesquisa foi realizada com os professores dos primeiros anos da escola estadual Professor José Veiga da Silva e dos nonos anos da escola municipal Anália Queiroz da Silva. Ambas estão localizadas em jacarandá, no interior de Marataízes, município do Estado do Espírito Santo, e foram escolhidas por serem a escola em que o autor ministra aulas.

## 2.3 Sujeitos do Trabalho

Após a pesquisa realizada nas duas escolas acima citadas, a execução do trabalho foi em apenas uma delas, a saber, a escola Professor José Veiga da Silva. A turma escolhida foi o 1° matutino, com 42 alunos, por ser a turma em que o autor ministra aula.

## 2.4 Instrumentos do Trabalho

A execução do trabalho aconteceu com aulas teóricas e aulas práticas verificando os conceitos, ou aulas práticas para construção dos conceitos e formalizando com a aula teórica.

Neste trabalho, foram sequenciados os conteúdos necessários para o estudo da Trigonometria no triângulo retângulo do 1º ano do Ensino Médio e apresentados num capítulo à parte. No capítulo seguinte, foram separadas algumas atividades mais utilizadas em exames externos como modelo. Tais atividades serão executadas em aulas práticas em capítulos posteriores.

## 2.5 Ordem dos Conteúdos

Segundo a Teoria da Aprendizagem Significativa, o conhecimento prévio do aluno é essencial para a compreensão de novos conhecimentos. Por isso, foi elencado para o aprendizado de Trigonometria no triângulo retângulo no 1º ano do Ensino Médio, conteúdos que são pré-requisito para que o aluno chegue até o ponto desejado.

São eles, na ordem:

1. Definição de triângulo;

2. Classificação de triângulos;

3. Condição de Existência dos Triângulos;

4. Lei Angular de Tales (soma dos ângulos internos);

5. Semelhança de Triângulos;

6. Teorema de Pitágoras;

7. Relações Métricas no Triângulo Retângulo e

8. Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo.

A partir destes, este trabalho desenvolve e explora cada conteúdo acima citado, com a seguinte estrutura.

i. a fundamentação teórica (breve conceito);

ii. exemplos de exercícios mais utilizados em avaliações externas e livros didáticos e

iii. sugestão para aula prática.

Assim, de modo geral, este trabalho é apresentado nos seguintes passos:

- Pesquisa com 8 professores para levantamento de possíveis motivos para o mal desempenho dos alunos na trigonometria;

- Levantamento de hipóteses que levaram ao resultado apontado pela pesquisa;

- Busca pela ideia para resolver o problema apontado;

- Conhecimento teórico para a execução da ideia;

- Embasamento na teoria de aprendizagem que mais se identificar;

- Organização da execução da ideia e

- Execução da ideia.

## 2.6 A Execução da Ideia

A execução da ideia inicia com a revisão dos conteúdos citados na seção 2.5, com a inserção de novo conteúdos, de forma sequencial, sem dar ênfase aos nomes dos conteúdos, objetivando-se, com isso, a solução de exercícios e problemas cotidianos de forma natural. Independente do conteúdo escolhido, o que se esperava era melhorar o desempenho ao final da Trigonometria no triângulo retângulo para aquele ano.

Como forma de verificação, todos os 42 alunos fizeram avaliações escritas em papel, online pelo celular, com diversos tipos de exercícios, descritos na próxima seção.

## 2.7 Tipos de Exercícios, Segundo o que se Pretende

É interessante, ainda, apresentar algumas informações quando o assunto é exercício de matemática. Isso porque há defensores de um modelo e críticos de outros.

Vale ponderar que para cada modelo de exercício espera-se uma habilidade do aluno. O contexto nos exercícios de matemática é de muita valia. Ele situa o aluno e simula uma possível aplicação no mundo real, preparando-o para isso. E se não for de sua realidade, o contexto o levou a viver, a pensar, a saber que existe algo muito distante dele alcançar. Todavia, o valor desse modelo não anula o valor de outros. Enquanto se espera leitura, interpretação, organização de ideais e reflexão numa questão contextualizada, por outro lado necessita-se de habilidade no cálculo, na execução da conta. E muitas vezes essa execução tem tempo delimitado. Não se pode esperar que o aluno construa o conhecimento e a cada vez que for usá-lo, tenha que reconstruir. Espera-se que em um dado momento tais informações já estarão construídas em sua mente, prontas para usá-las.

Em outras palavras, espera-se que o aluno que aprendeu de forma lúdica, outrora consiga abstrair os conceitos e abandonar o lúdico para não ficar refém deste. Imagine que toda vez que o aluno for realizar uma tarefa de geometria espacial, haja a necessidade de lhe dar um sólido geométrico, conforme foi feito na aula lúdica ou prática.

Há momentos em que o cálculo não é o objetivo do exercício. Tome-se como exemplo o tão mencionado neste trabalho, Teorema de Pitágoras. Depois que o aluno construiu o conhecimento, nada desabona a habilidade que ele tem de memorizar algumas repostas. E não se trata apenas da memorização, como no caso dos triângulos de lado 3,4 e 5 e demais proporcionas a este. Qual seria o tempo para a resolução de uma questão como essa se o aluno tivesse que fazer cálculo escrito para três elevado ao quadrado, quatro elevado ao quadrado e raiz quadrada de vinte e cinco, presentes nesta. Fica, então, evidenciado que há cálculos que necessitam de velocidade na resposta.

Entende-se que há cálculos com necessidade de velocidade nas respostas, passamos a admitir que o aluno precisa treinar com muitos exercícios. Um exercício contextualizado requer muito tempo. Dificilmente proporcionaria habilidade nos cálculos. Se desejo que o aluno entenda a divisão para usá-la no seu cotidiano, dou-lhe textos que simulam sua aplicação no cotidiano. Mas se eu quero que o aluno tenha velocidade na resolução de uma divisão, o contexto não é um caminho apropriado.

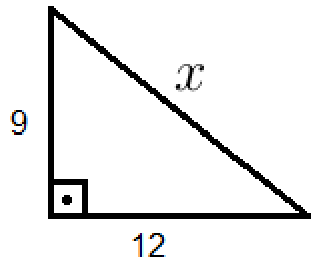
Para treinar cálculos, há a necessidade de exercícios em massa. Volta-se, então, aos exercícios do tipo "arme e efetue", tão perseguidos nos tempos modernos, como é a tomada de tabuada dos alunos. Não é objetivo julgar a eficiência deste método, nem analisar o motivo dos alunos chegarem ao Ensino Superior sem saber fazer cálculos triviais, como a própria tabuada, mas sim, apontar objetivos desejados pelo docente quando elabora uma atividade.

Segue, na sequência, os tipos de exercícios.

### 2.7.1 Cálculo mecânico com uso de fórmulas

Calcule o valor de $x$ no triângulo retângulo abaixo:

Figura 2 – Cálculo Mecânico




Fonte:Autoria Própria

Deseja-se que o aluno exercite cálculos mecânicos. Ele terá apenas o trabalho de substituir as letras e, dependendo da quantidade de vezes que ele resolveu esse tipo de conta, poderá fazê-lo automaticamente.

$c^2 = b^2 + a^2$

$x^2 = 12^2 + 9^2$

$x^2 = 144 + 81$

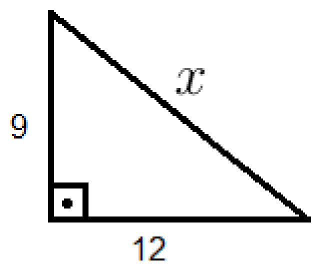
$x^2 = 225$

$x = \sqrt{2}25, x = 15$

### 2.7.2 Cálculo mecânico sem uso de fórmulas

Calcule o valor de $x$ no triângulo retângulo abaixo:

Figura 3 – Cálculo Mecânico sem Fórmulas




Fonte:Autoria Própria

Desta vez, deseja-se que o aluno compreenda que triângulos pitagóricos tendem a ser formados pelos números 3,4 e 5, também chamados de pitagóricos. A partir deste entendimento, o aluno é levado a verificar se os triângulos a seguir foram aumentados proporcionalmente, ou seja, um mesmo fator multiplicou os três lados. Então, o aluno aprende a fazer uma relação e seguir por esta.

Relação representando cateto, cateto e hipotenusa, respectivamente:

cat-cat-hip

3 - 4 - 05 - linha 1 (multiplicado por 1)

6 - 8 - 10 - linha 2 (multiplicado por 2)

9 - 12 - 15 - linha 3 (multiplicado por 3)

12 - 16 - 20 - linha 4 (multiplicado por 4)

15 - 20 - 25 - linha 5 (multiplicado por 5)

18 - 24 - 30 - linha 6 (multiplicado por 6)

21 - 28 - 35 - linha 7 (multiplicado por 7)

24 - 32 - 40 - linha 8 (multiplicado por 8)

27 - 36 - 45 - linha 9 (multiplicado por 9)

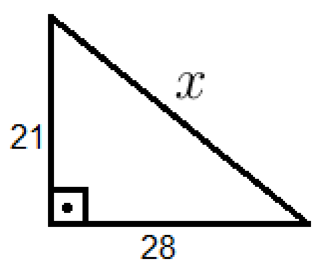
30 - 40 - 50 - linha 10 (multiplicado por 10)

A partir dessa relação, basta o aluno observar no triângulo quais são os catetos e encontrar a linha referente a esses números. Na mesma linha estará o tamanho da hipotenusa.

Nas figuras 2 e 3, tem-se os catetos 9 e 12. Procurando-os na relação, eles são encontrados na linha 3. Na mesma linha, encontramos a hipotenusa 15.

Calcule o valor de $x$ no triângulo retângulo abaixo:

Figura 4 – Outro Cálculo Mecânico




Fonte:Autoria Própria

Procurando a linha em que os valores dos catetos sejam 21 e 28, encontra-se a hipotenusa 35. De fato, ao utilizar via Teorema de Pitágoras, tem-se:

$c^2 = b^2 + a^2$

$x^2 = 21^2 + 28^2$

$x^2 = 441 + 784$

$x^2 = 1.225$

$x = \sqrt{1}.225$

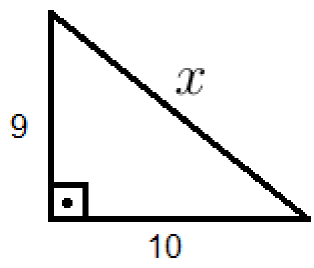
$x = 35$

Ou seja, os mesmos 35 encontrados na relação.

O aluno em exercícios futuros perceberá que a tabela serve apenas para triângulos semelhantes ao triângulo 3,4 e 5.

No exemplo a seguir, observa-se a limitação do método da relação.

Figura 5 – Limitação da Relação



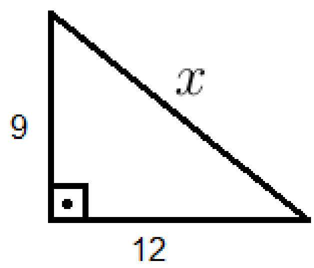

Fonte:Autoria Própria

O aluno, ao procurar uma linha que contenha os catetos 9 e 10, não encontrará. É o caso de voltar para o método com fórmula, ou seja, o Teorema de Pitágoras, ou apresentar outra técnica para estes tipos de triângulos.

### 2.7.3 Cálculo mental

Calcule o valor de $x$ no triângulo retângulo abaixo:

Figura 6 – Cálculo Mental

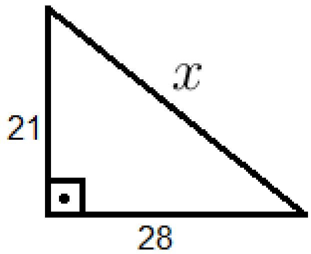



Fonte:Autoria Própria

Uma vez que o aluno reconhece um triângulo com as proporções 3,4 e 5, ele poderá calcular "de cabeça".

Ao cateto 9, que é múltiplo de 3, tem o fator 3, pois 3 vezes 3 dá 9. Ao cateto 12, que é múltiplo de 4, tem-se, também, o fator 3, pois 3 vezes 4 dá 12. Se ambos os catetos têm fator 3, também terá a hipotenusa. Assim, multiplicando 5 pelo fator 3, achar-se-á o múltiplo 15, a saber, o valor da hipotenusa.

Figura 7 – Outro Cálculo Mental



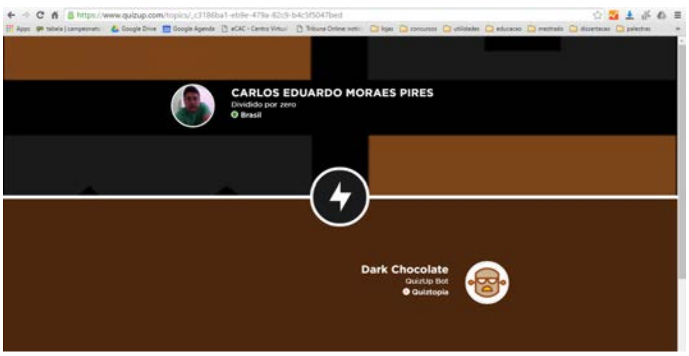

Fonte:Autoria Própria

Para os catetos 21 e 28, observa-se múltiplos de 3 (21) e de 4(28). Calcula-se facilmente que o fator é 7. Assim, por 7 será multiplicado a hipotenusa 5, donde encontra-se 35, como nos cálculos anteriores.

### 2.7.4 Cálculo por memorização da figura

Outra forma de fazer o aluno resolver tais questões é fazê-lo memorizar o processo de resolução mais comuns ou clássicos. O site Matematicarlos (matematicarlos.com.br/sabermais) tem um Projeto chamado "Saber +". Nele, o aluno treina questões mecânicas de Matemática em tempo curto. Há a possibilidade deles jogarem entre si ou com alunos de todo o Brasil ou do mundo, em suas casas, a qualquer hora do dia. A cada vitória gera pontos que podem elevá-lo ao mais alto nível num ranking geral. A quantidade de jogadas sucessivas acaba por fazer os alunos memorizarem as medidas dos triângulos e a responderam em menos de 2 segundos, assim como memorizamos as raízes quadradas exatas até 100.

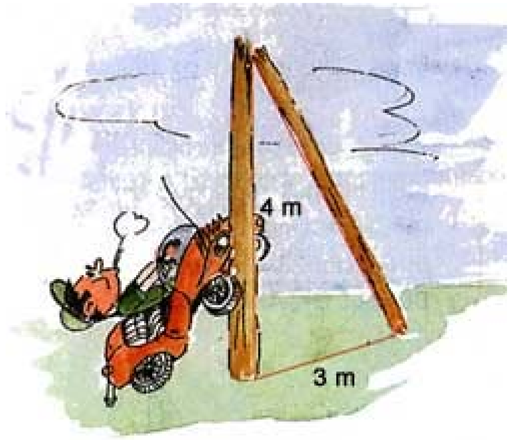
Figura 8 – Jogo do Matematicarlos




Fonte:http://www.matematicarlos.com.br/sabermais/

### 2.7.5 Pequenos Textos para os cálculos

Figura 9 – Altura do poste




Fonte:http://www.matematicarlos.com.br/sabermais/

Na figura acima, um motorista bateu num poste, quebrando numa certa altura. Com as medidas dadas na ilustração, pede-se calcular a altura do poste antes da batida.

Observe que o texto é curto e pode ser resolvido por formas diferentes. Exemplifica-se, a seguir, uma resolução pelo Teorema de Pitágoras, usando a tabela e a memorização.

a) O aluno pode optar por resolver esta questão utilizando o teorema:

$c^2 = b^2 + a^2$

$x^2 = 3^2 + 4^2$

$x^2 = 9 + 16$

$x^2 = 25$

$x = \sqrt{25}$

$x = 5$

Perceba que a medida encontrada é a parte quebrada do poste, usada como hipotenusa.

b) Pode-se chegar ao mesmo resultado utilizando o método da tabela:

3 - 4 - 5 (linha 1)

6 - 8 - 10 (linha 2)

9 - 12 - 15 (linha 3)

12 - 16 -20 (linha 4)

15 - 20 - 25 (linha 5)

18 - 24 - 30 (linha 6)

21 - 28 - 35 (linha 7)

24 - 32 - 40 (linha 8)

27 - 36 - 45 (linha 9)

30 - 40 - 50 (linha 10)

...

Os catetos 3 e 4 estão na linha 1. Observe que nesta linha a hipotenusa é 5.

c) Pela memorização. Espera-se que o aluno saiba que o triângulo retângulo de catetos 3 e 4 terá hipotenusa 5.

Percebe-se que tal exercício não requer grande habilidade em leitura, muito menos em domínio de cálculo além do normal. Tal exercício é investigativo, e o valor da hipotenusa encontrado não é a resposta procurada, pois o tamanho do poste é o que se pede.

O aluno, então, deverá perceber que a altura do poste é a soma do cateto de tamanho 4 com a hipotenusa que mede 5 metros. Daí ele poderá concluir que a altura do poste é 9 metros.

### 2.7.6 Textos longos para os cálculos

Numa escada, o espelho é a parte vertical entre um degrau e outro. O piso é a parte horizontal, ou seja, onde a pessoa apoia o seu pé quando está subindo. Patamar é, também, uma superfície horizontal, porém, maior que o piso, e serve como descanso ao subir uma escada que vence uma grande altura. Ainda tem o guarda-corpo, que é o vertical que serve de proteção para as pessoas não caírem ao subir ou descer uma escada e o corrimão, que está presente nesse guarda-corpo para as pessoas apoiarem as mãos ao subir ou descer uma escada.

Abaixo está o projeto para uma escada a ser construída numa certa residência. Cada piso terá a medida de 28 cm, enquanto que o patamar medirá 1 metro e os espelhos 18 cm. O proprietário deverá comprar barra de alumínio para fazer o corrimão e precisa saber quantos metros, no mínimo, ele deverá comprar.

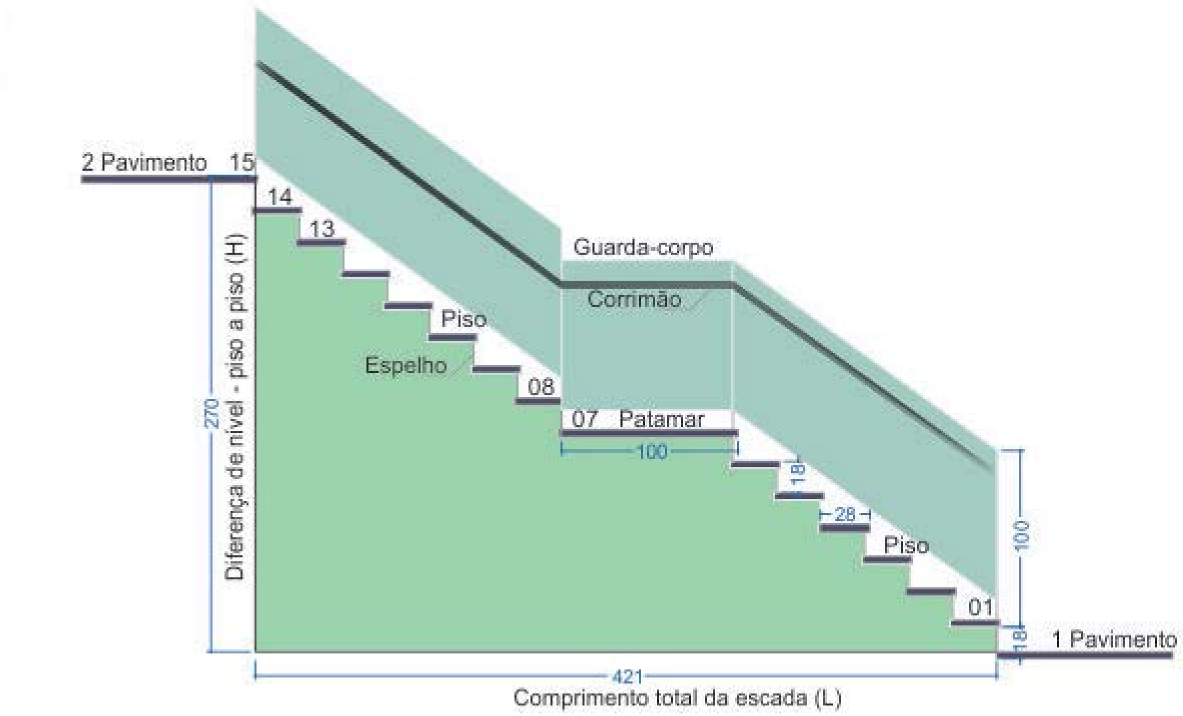
Observe que este exercício tem texto longo e é semelhante às questões de ENEM (Exame Nacional de Ensino Médio), tendo em seu primeiro parágrafo informações do objeto e no segundo, informações do que se pede.

Após todo o processo necessário para a resolução como leitura, interpretação e outros, espera-se que o aluno compreenda que o que se pede é o tamanho do corrimão.

É possível que dependendo do aluno, a palavra corrimão não lhe seja familiar. Preocupado com a falta desse conhecimento, foi colocado na figura a informação "guarda-corpo"e o 1º parágrafo, linha 6 diz que o corrimão está presente nele.

Assim, o aluno deverá perceber que deverá calcular a medida de três segmentos de reta, que vamos chamar de segmento a, segmento b e segmento c, conforme mostra a figura 10.

Figura 10 – Textos longos




Fonte:http://pedreirao.com.br/wp-content/uploads/2012/06/escada-elementos-piso-espelho-detalhe-pedreirao-650x366-banner.jpg/

O aluno também deverá perceber que a medida do segmento b pode ser facilmente descoberto, uma vez que é do mesmo tamanho que o segmento paralelo chamado de "patamar". Assim, como o tamanho desse segmento é 100 cm, o tamanho do corrimão referente também será.

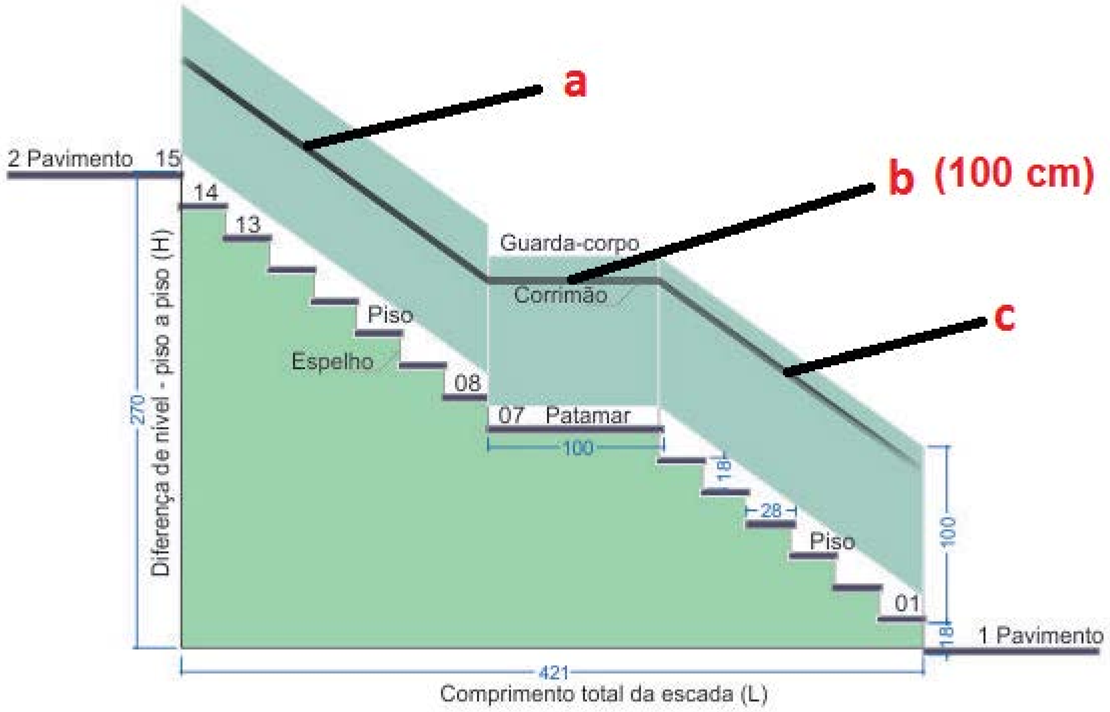
Espera-se que o aluno, ao analisar, perceba que pode obter da figura dois triângulos retângulos que serão úteis para a descobertas dos tamanhos dos segmentos a e b.

Desta forma, o segmento a será a hipotenusa do triângulo mais alto e o segmento c será a hipotenusa do triângulo mais baixo.

A medida do cateto horizontal do triângulo mais alto pode ser calculado, ao perceber que ele é formado pela distância de 7 pisos (parte da escada que se pisa). O 2º parágrafo do enunciado,na linha 2, diz que o tamanho é 28 cm. Assim, os 7 pisos terão 196 cm (28 x 7).

Já a medida do cateto vertical pode ser obtida observando à direita da figura a informação de que a distância entre o 1º pavimento e o corrimão é de 100 cm. Observa-se que o desejado é a distância entre o piso e o corrimão. Percebe-se que há 18 cm excedendo a medida que pretendida. Então, é de se esperar que se chegue à uma distância de 82 cm (100 cm - 18cm).

Figura 11 – Medidas de cada corrimão




Fonte:http://pedreirao.com.br/wp-content/uploads/2012/06/escada-elementos-piso-espelho-detalhe-pedreirao-650x366-banner.jpg/

Uma vez que se tem dois lados conhecidos, conseguimos calcular o 3º lado, que é o segmento a, usando o Teorema de Pitágoras, já que conseguimos formar um triângulo retângulo, exigido pelo teorema.

Fazendo os cálculos, tem-se:

$c^2 = b^2 + a^2$

$x^2 = 82^2 + 196^2$

$x^2 = 6.724 + 38.416$

$x^2 = 45.140$

$x = \sqrt{45.140}$

$x = 212,46$, aproximadamente.

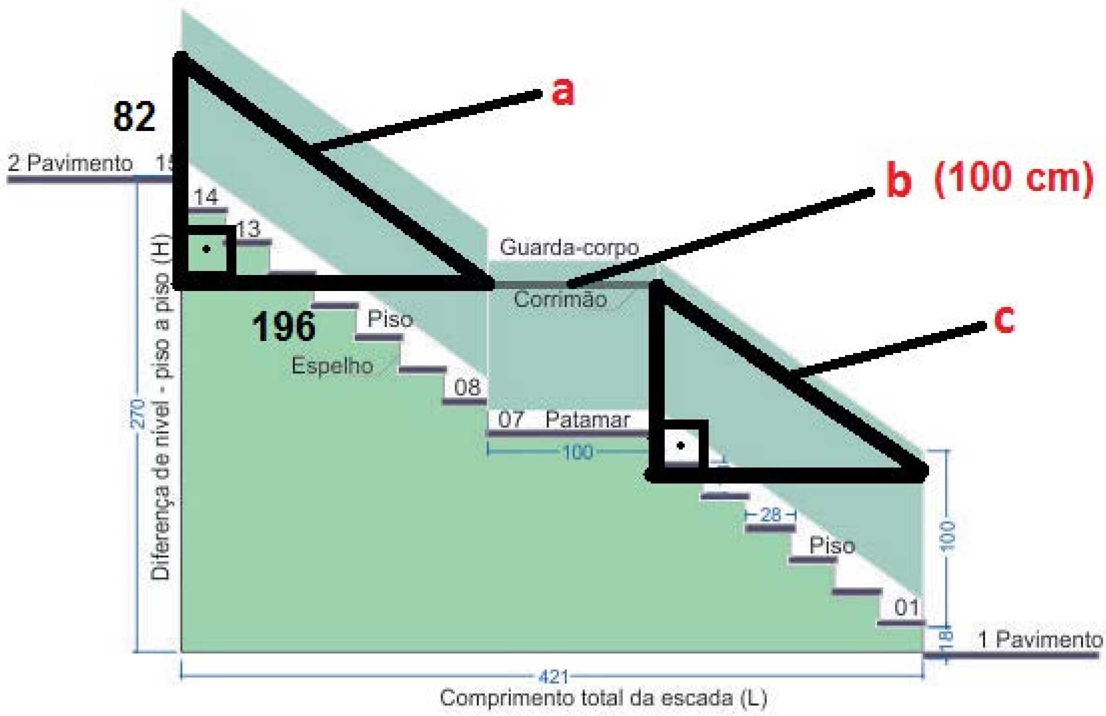
Esta é a medida do corrimão a.

Analogamente, vamos calcular a medida do corrimão c, que é a hipotenusa do triângulo mais baixo.

O cateto horizontal é formado por 6 pisos, com 28 cm cada. Logo, o tamanho do cateto horizontal mede 168 cm.

O cateto vertical tem a mesma medida do cateto vertical do triângulo mais alto, ou seja, 82 cm.

Figura 12 – Triângulos Retângulos na Figura




Fonte:http://pedreirao.com.br/wp-content/uploads/2012/06/escada-elementos-piso-espelho-detalhe-pedreirao-650x366-banner.jpg/

Fazendo os cálculos, tem-se:

$c^2 = b^2 + a^2$

$x^2 = 82^2 + 168^2$

$x^2 = 6.724 + 28.224$

$x^2 = 34.948$

$x = \sqrt{34.948}$

$x = 186,94$, aproximadamente.

Uma vez que tem-se as medidas do corrimão A (212,46), corrimão c (186,94) e corrimão b (100), pode-se chegar à reposta que é saber quanto de corrimão necessita a escada da figura.

212,46 + 186,94 + 100 = 499,4 cm.

Desta forma, é necessário, no minimo, 499,4 cm de corrimão para a escada.

# Capítulo 3

# As Aulas Teóricas

Antes de começar as aulas teóricas e práticas, vale aguçar o aluno. Localizá-lo na história, fazê-lo conhecer como começou, como desenvolveu e como está nos tempos atuais. Vale, também, apresentar os grandes matemáticos, heróis reais, para que, quem sabe, inspire um ou outro, como os heróis de ficção inspiram. Todas essas tentativas serão com as aulas sobre a História da Matemática relacionada à Trigonometria.

## 3.1 História da Matemática

Apesar da origem da Trigonometria ser incerta, pode-se dizer que esta se desenvolveu devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C.

Sabe-se, também, que há mais de três mil anos esse conhecimento já era utilizado pelos egípcio. Tal afirmação é devido à descoberta de um documento egípcio contendo problemas relacionados à cotangente, uma função trigonométrica, conhecido como o Papiro de Rhind.

Figura 13 – Papiro de Rhind, Museu de Londres

Fonte:http://www.mat.uc.pt/ mat0703/PEZ/img1F2.jpg

Euclides de Alexandria (330 a.C.), matemático platônico, conhecido como o Pai da Geometria, em sua obra mundialmente conhecida (Os Elementos) apresentou alguns conceitos trigonométricos, embora apresentados por formas geométricas.

O astrônomo Hiparco de Niceia, na segunda metade do século II a.C., apresentou um tratado com cerca de 12 volumes nos quais tratava da Trigonometria com a autoridade de quem conhecia profundamente o assunto. Hiparco apresentou uma tábua de cordas, sendo o responsável pela elaboração da primeira tabela trigonométrica registrada. Por essa e outras contribuições, ele é conhecido como o Pai da Trigonometria.

Ainda na época de Hiparco, o grego Cláudio Ptolomeu, cientista que viveu na cidade de Alexandria, uma cidade do Egito, apresentou uma tábua de cordas contendo o cálculo do seno dos ângulos de 0° a 90°. Tais ângulos seriam usados nos estudos astronômicos em que ele estava estudando.

Os matemáticos babilônicos e os egípcios foram os que mais deram contribuições importantes para a descoberta e aperfeiçoamento desse ramo da matemática.

Já na Era Cristã, menciona-se o matemático e astrônomo indiano Ariabata (476-550), cuja obra Ariabata-Sidanta, definiu o seno como relação moderna de um ângulo e a metade de uma corda e daí veio a definição do cosseno.

Figura 14 – Estátua de Ariabata, Matemático Indiano

Fonte:http://www.matematicarlos.com.br/ariabata/

No século VII, Bháskara (600-680) - não confundir com Bhákara Akaria (século XII), que cedeu o seu nome à famosa Fórmula de Bháskara para encontrar as raízes da equação quadrática - produziu uma fórmula para calcular o seno de um ângulo sem a necessidade de tabelas. Foi ele quem apresentou a fórmula de aproximação para sen(x) com uma margem de erro de menos de 1,9%.

Matemáticos árabes e persas traduziram os trabalhos dos matemáticos hindus para o mundo islâmico. No século IX, al-Khwarizmi, considerado o fundador da Álgebra, produziu tabelas precisas de senos e cossenos e a primeira tabela de tangentes, além de ser o pioneiro na Trigonometria Esférica.

Já pelo século X, matemáticos islâmicos já estavam usando todas as seis funções trigonométricas, a saber, seno, cosseno, tangente, secante, cotangente e cossecante. Foi neste período que as seguintes fórmulas trigonométricas foram desenvolvidas.

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sec x = \sqrt{1 + tan^2 x}$

No século XVII, Isaac Newton e James Stirling desenvolveram a fórmula da interpolação geral Newton-Stirling para funções trigonométricas.

Em 1.748, Leonhard Euler, por meio da obra "A Introductio in analysin infinitorum", estabeleceu o tratamento analítico dados às funções trigonométricas na Europa, definindo-as como séries infinitas, usou as abreviações $\sin, cos., tan., cot., sec.$ e $cosec.$, e apresentou a fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$

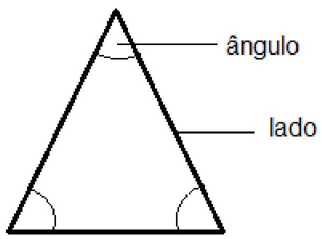
O século XVIII foi o grande desenvolvimento da trigonometria em ordem de viabilizar e facilitar os cálculos de triangulações topográficas e geodésicas, aperfeiçoados pelo matemático Gauss, em 1.820, dos quais servem de grande valia até os tempos atuais.

## 3.2 O Triângulo

O primeiro passo na longa caminhada da Trigonometria no triângulo retângulo é ter conhecimento do triângulo.

O triângulo é uma figura geométrica que ocupa o espaço interno limitado por três segmentos de retas concorrentes dois a dois, em três pontos diferentes, ou seja, é um polígono de três lados e, consequentemente, 3 ângulos.

Figura 15 – Ângulo e Lado do Triângulo




Fonte: Autoria Própria

## 3.3 Classificação dos Triângulos

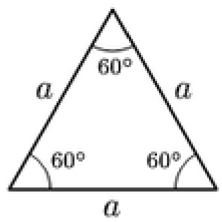
Os triângulos são classificados conforme as medidas dos lados ou ângulos.

De acordo com as medidas de seus lados, o triângulo pode ser classificado como equilátero, isósceles ou escaleno. Quanto às medidas de seus ângulos, este pode ser acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

O triângulo equilátero (equi, do latim aequi, que significa "igual", mais lateralis, que significa "relativo ao lado") é aquele que possui todos os lados congruentes, ou seja, de mesma medida. É interessante que o aluno saiba que, se os três lados têm a mesma medida, os três ângulos também terão. Sendo assim, um triângulo equilátero também será um triângulo equiângulo.

A relação entre o prefixo equi com igualdade se dá por meio de outras palavras, como equivalente (valores iguais), equidistantes (distâncias iguais) e equilíbrio (equi, igual e libra, balança, ou seja, nível igual a das balanças) entre outras.

Figura 16 – Triângulo Equilátero




Fonte: Autoria Própria

O triângulo isósceles (do grego isos, que significa "igual"mais skelos, que significa "perna", porém aqui com sentido de "lado") tem dois de seus lados com o mesmo tamanho, tendo, também, dois de seus ângulos com a mesma medida. O aluno consegue relacionar o prefixo iso com igualdade, pois na química é bastante usado para representar equivalência, como átomos isóbaros (massa atômica igual), bem como isopropil, isopropila, entre outros.

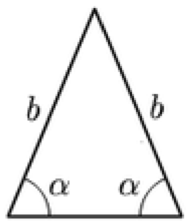
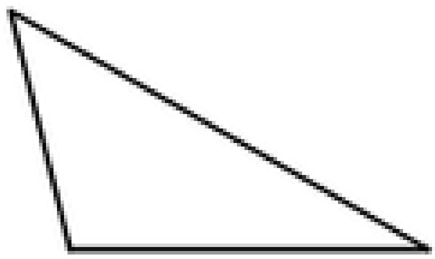



Figura 17 – Triângulo Isósceles
Fonte: Autoria Própria

O triângulo escaleno é aquele que tem com todas as medidas de seus lados diferentes. O nome escaleno vem do grego skalenos, que significa desigual.

Figura 18 – Triângulo Escaleno

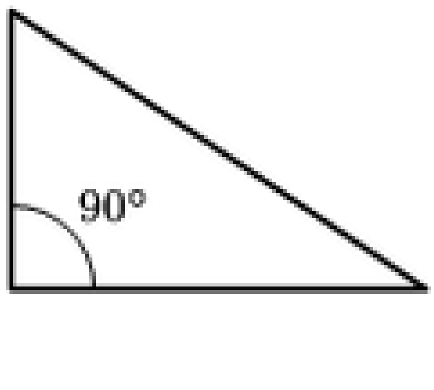


Fonte: Autoria Própria

Observa-se que os nomes retângulo, obtusângulo e acutângulo, têm a palavra ângulo no final. Essa observação seria interessante para lembrar que tais triângulos recebem esses nomes devido aos seus ângulos, e não quanto aos seus lados.

Triângulo retângulo é aquele que tem um de seus ângulos reto, ou seja, medindo 90º. Fica fácil associar retângulo com reto ângulo ou ângulo reto. Este é, quem sabe, o mais ilustre dos triângulos, e o único aceito no Teorema de Pitágoras e Razões Trigonométricas.

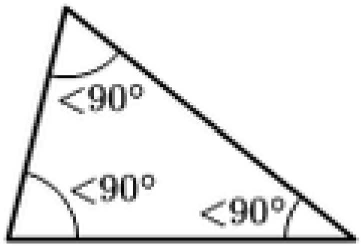
Figura 19 – Triângulo Retângulo




Fonte: Autoria Própria

O triângulo acutângulo (do latim acutus, que significa "pontudo", mais a palavra angulus, que significa ângulo) é aquele com todos os seus ângulos agudos, ou seja, menor do que 90º. O triângulo equilátero é um exemplo de um triângulo acutângulo, pois cada um de seus ângulos internos tem 60°.

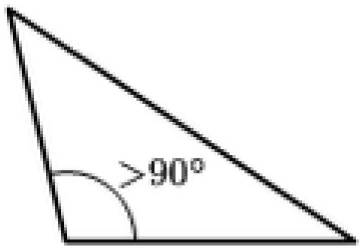
Figura 20 – Triângulo Acutângulo




Fonte: Autoria Própria

A palavra obtusângulo vem de ângulo obtuso, por isso usada para denominar o triângulo que tem um de seus lados maior do que 90°. Vale lembrar que a Lei Angular de Tales diz que a soma dos três ângulos internos deverá ser 180°. Isso nos garante que não poderão existir dois ângulos obtusos, porque a soma dos dois já seriam maiores que isso.

Figura 21 – Triângulo Obtusângulo




Fonte: Autoria Própria

## 3.4 Condição de Existência dos Triângulos

Para um triângulo existir, é necessário que a medida de qualquer um de seus lados seja menor do que a soma das medidas dos outros dois lados, bem como maior que o valor absoluto (módulo) da diferença entre essas medidas.

$|b - c| < a < b + c$

Assim sendo, com três segmentos de reta medindo 5 cm, 9 cm e 10 cm é possível construir um triângulo.

O mesmo não ocorre quando se tem segmentos de tamanhos 2 cm, 4 cm e 7 cm.

$|b - c| < a < b + c$

i.$|10 - 9| < 5 < 10 + 9$

$1 < 5 < 19(verdadeiro)$

ii.$|5 - 10| < 9 < 10 + 5$

$5 < 9 < 15(verdadeiro)$

iii.$|9 - 5| < 10 < 9 + 10$

$4 < 10 < 19(verdadeiro)$

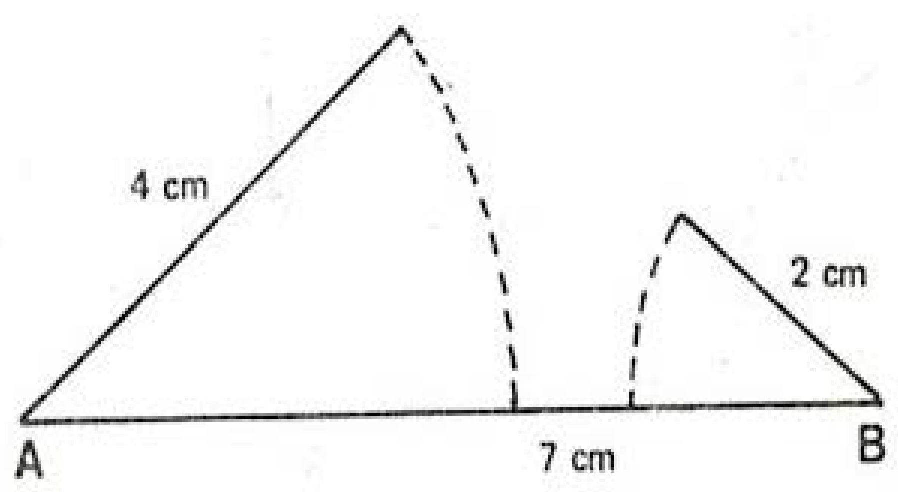
$|b - c| < a < b + c$

$|2 - 4| < 7 < 2 + 4$

$2 < 7 < 6(falso)$

Observe que 2 < 7 é verdadeiro, mas 7 < 6 não é. Assim, com os segmentos 2 cm, 4 cm e 7 cm não é possível construir um triângulo.

Figura 22 – Condição de Existência de Triângulos




Fonte: Autoria Própria

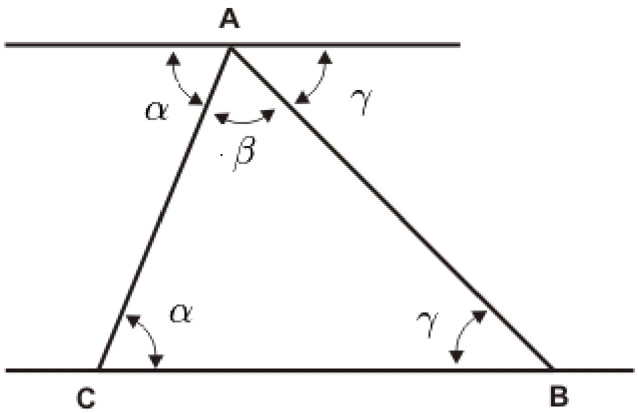
## 3.5 Lei Angular de Tales

A Lei Angular de Tales diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer sempre resultará em 180º.

$\alpha$ + $\beta$ + $\gamma$ = 180º

Ao traçar uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$, passando pelo vértice $A$, forma-se os ângulos representados na figura 23 com $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$.

Figura 23 – Lei Angular de Tales




Fonte: Autoria Própria

Na figura 23, o segmento $\overline{AC}$ é uma transversal que corta as retas paralelas. Duas retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos, colaterais internos, alternos externos e colaterais externos. A transversal $\overline{AC}$ forma os ângulos alternos internos, representados por $\alpha$. Alternos porque está alternando "dentro"e "fora", ou seja, um ângulo está "dentro"do triângulo"e o outro "fora". Internos porque está na região interna limita pelas retas paralelas).

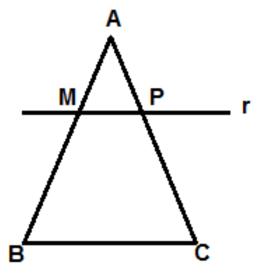
Ângulos alternos internos têm a mesma amplitude, ou seja, a mesma medida. Por isso estão representados pela mesma letra $\alpha$.

Analogamente, os ângulos alternos internos representados pela letra grega $\gamma$ têm a mesma amplitude.

Desta forma, obteve-se, na região interna do triângulo, os mesmos ângulos que formam a semicircunferência, ou seja, os ângulos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$. Isso garante afirmar que a soma deles é 180º, uma vez que $\alpha$ + $\beta$ + $\gamma$ = 180º.

## 3.6 Teorema de Tales nos Triângulos

Figura 24 – Triângulo ABC



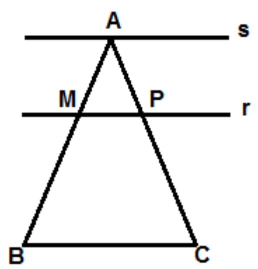

Fonte: Autoria Própria

O Teorema de Tales pode ser aplicado em situações que envolvam triângulos.

No triângulo $ABC$ da figura 24, traçamos uma reta r, paralela ao lado $\overline{BC}$. Assim, intersectamos os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos $M$ e $P$, respectivamente.

Ao traçar pelo vértice $A$ uma reta s, paralela à reta r, obtém-se três retas paralelas e duas transversais.

Figura 25 – Teorema de Tales no Triângulo ABC




Fonte: Autoria Própria

r // s // $\overline{BC}$

Pelo Teorema de Tales:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC}.$$

Generalizando, tem-se: Toda paralela a um lado de um triângulo que encontra os outros dois lados em pontos distintos determina, sobre esses ângulos, segmentos que são proporcionais. Como exemplo, tem-se:

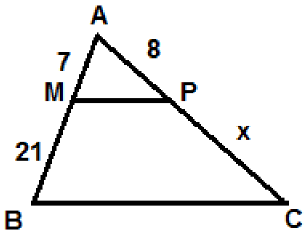
Sendo $\overline{MP}$ // $\overline{BC}$ (segmento $\overline{MP}$ paralelo a $\overline{BC}$), determinar a medida do segmento $\overline{PC}$.

Pelo Teorema de Tales,

$$\frac{7}{21} = \frac{8}{x}$$

7x = 168 $\Rightarrow$ x = 24.

Figura 26 – Exemplo do Teorema e Tales em Triângulos



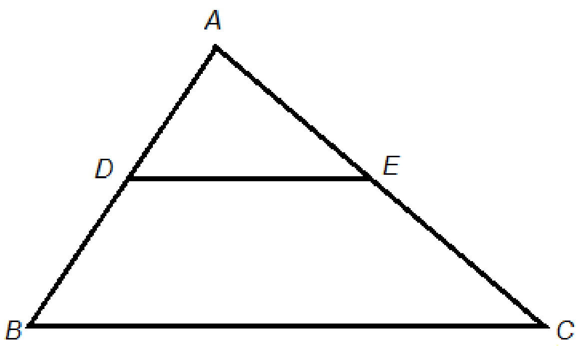

Fonte: Autoria Própria

O segmento $\overline{PC}$ mede 24.

## 3.7 Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos internos respectivamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

Figura 27 – Triângulos Semelhantes




Fonte: Autoria Própria

Considere a figura 27, em que $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$

Os triângulos $ADE$ e $ABC$ são triângulos semelhantes.

Hipótese: $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$

Tese: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

Traça-se, por $E$, $\overline{EF}$ // $\overline{AB}$

Demonstração:

Por hipótese, $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (Pelo Teorema de Tales)

$\cong$ (ângulo comum)

$\widehat{B} \cong \widehat{D}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

$\widehat{C} \cong \widehat{E}$ (ângulos correspondentes em retas paralelas)

$\dfrac{AE}{AC}$ = $\dfrac{BF}{BC}$ (pelo Teorema de Tales)

$\overline{BF} \cong \overline{DE}$ (lados opostos de um paralelogramo)

$\dfrac{AE}{AC}$ = $\dfrac{DE}{BC}$ (de 6 E 7)

$\dfrac{AD}{AB}$ = $\dfrac{AE}{AC}$ = $\dfrac{DE}{BC}$ ( de 2 e 8)

$\triangle$ADE $\sim$ $\triangle$ABC (de 3,4,5 e 9)

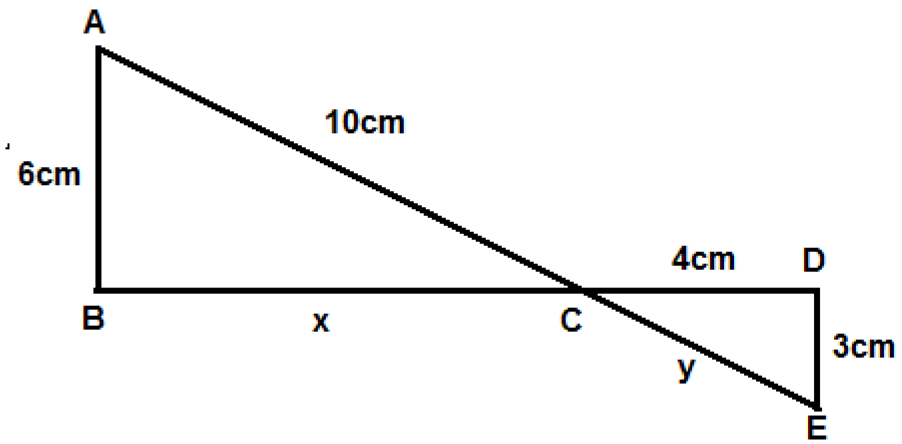
Logo, $ADE$ e $ABC$ são triângulos semelhantes, como queria-se demonstrar.

Em dois triângulos semelhantes, os ângulos congruentes são chamados de ângulos correspondentes, enquanto que os lados opostos aos ângulos são chamados lados homólogos.

Se dois triângulos têm dois ângulos respectivamente congruentes, o terceiro ângulo de cada triângulo também será congruente, uma vez que a soma dos ângulos internos de cada triângulo é igual a 180° (8.2).

Como exemplo, considere a seguinte figura:

Figura 28 – Exemplo em Triângulos Semelhantes




Fonte: Autoria Própria

Os triângulo $ABC$ e $CDE$ são semelhantes, pois o ângulo $\widehat{B}$ é congruente ao ângulo $\widehat{D}$, pois ambos têm 90°. Além disso, os ângulos representados por $\widehat{C}$ são o.p.v (opostos pelos vértices). Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma amplitude.

Como os triângulos têm, respectivamente, dois ângulos congruentes, concluímos que eles são semelhantes. Assim, $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.

Tem-se os seguintes lados homólogos: $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$; $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$; $\overline{AC}$ e $\overline{CE}$.

Se os triângulos são semelhantes, tem-se:

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE}$.

$\frac{6}{3} = \frac{x}{4} = \frac{10}{y}$.

Assim:

$\frac{6}{3} = \frac{x}{4} \Longrightarrow 3x = 24 \Longrightarrow x = 8$

$\frac{6}{3} = \frac{10}{y} \Longrightarrow 6y = 30 \Longrightarrow y = 5$

Então, $x = 8$ e $y = 5cm$.

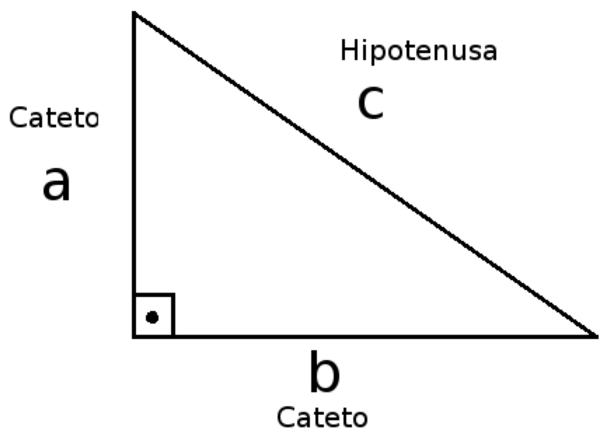
## 3.8 Teorema de Pitágoras

Conforme a Geometria Euclidiana, o Teorema de Pitágoras é uma relação entre os comprimentos dos lados de qualquer triângulo retângulo.

O teorema afirma que "em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos."

Por definição, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e os catetos os demais lados.

Figura 29 – Lados do Triângulo



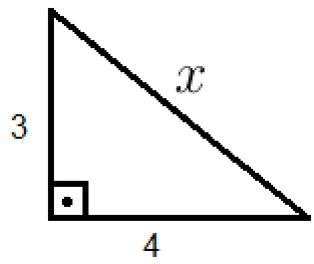

Fonte: Autoria Própria

A demonstração do teorema será vista mais adiante. Por hora, é importante conhecer o teorema na forma equacionada:

$c^2 = b^2 + a^2$

Seja um triângulo com catetos 3 e 4. Uma vez conhecidos dois lados de um triângulo retângulo, consegue-se, por meio do Teorema de Pitágoras, descobrir o terceiro lado.

Figura 30 – Triângulo de Lados 3,4 e 5




Fonte: Autoria Própria

$c^2 = b^2 + a^2$

$x^2 = 3^2 + 4^2$

$x^2 = 9 + 16$

$x^2 = 25$

$x = \sqrt{25}$

$x = 5$

O terceiro lado, chamado hipotenusa, mede 5 .

Conforme foi visto em 6.2 e 6.3, há outros métodos para calcular o terceiro lado do triângulo retângulo. Porém, aqueles métodos funcionam apenas quando os triângulos são proporcionais ao triângulo de catetos 3 e 4 e hipotenusa 5. Quando isso não acontece, a forma mais viável é o próprio Teorema de Pitágoras.

O terceiro lado de um triângulo não proporcional ao triângulo 3,4 e 5 (entenda-se que o maior lado será sempre a hipotenusa), resultando num número irracional, exigirá um cálculo extra, chamado de simplificação de raízes.

Seja um triângulo retângulo, cujos catetos medem 4 e 6, pode-se calcular a medida da hipotenusa usando o Teorema de Pitágoras:

$c^2 = b^2 + a^2$

$x^2 = 4^2 + 6^2$

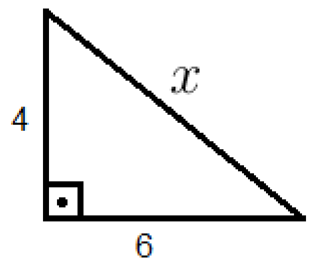
$x^2 = 16 + 36$

$x^2 = 52$

$x = \sqrt{52}$

A resposta deveria ser, aproximadamente, 7,2. Porém, é comum que a medida seja dada em forma de raiz. Neste caso, ao invés de expressar a medida como raiz quadrada de

Figura 31 – Triângulo de Lados 3,4 e 5




Fonte: Autoria Própria

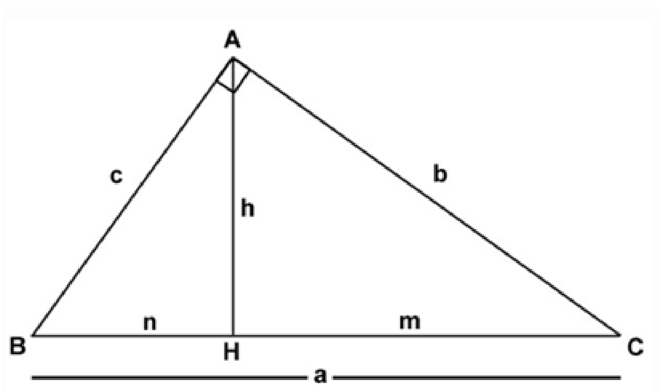
52, costuma-se simplificar esse valor.

$\sqrt{52} = \sqrt{2.2.13} = 2\sqrt{13}$.

## 3.9 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Além do Teorema de Pitágoras, existem outras relações trigonométricas entre os elementos de um triângulo retângulo.

Figura 32 – Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo



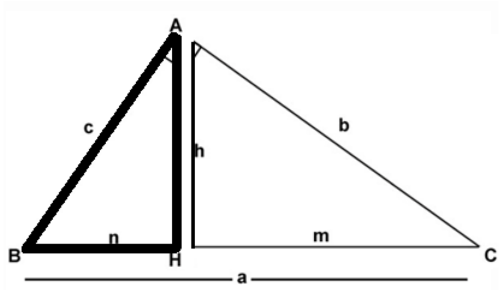

Fonte: Autoria Própria

O lado $\overline{BC}$ é a hipotenusa; $\overline{AC}$ é um cateto e a sua medida é indicada por b; $\overline{AB}$ é o outro cateto e a sua medida é indicada por c; $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa e a sua medida é indicada por h; $\overline{BH}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa e a sua medida é indicada por n e $\overline{CH}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa e a sua medida é indicada por m.

Com essas informações, pode-se estabelecer relações entre essas medidas, apresentadas na figura 32, a partir da semelhança de triângulos e baseadas na seguinte propriedade:

Em qualquer triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa divide o triângulo em dois outros triângulos retângulos, semelhantes ao triângulo dado e semelhantes entre si.

Figura 33 – Três Triângulos em Um




Fonte: Autoria Própria

Da figura 33, pode-se perceber três triângulos: ABC, HBA e HAC.

$\triangle$HBA $\sim$ $\triangle$ABC

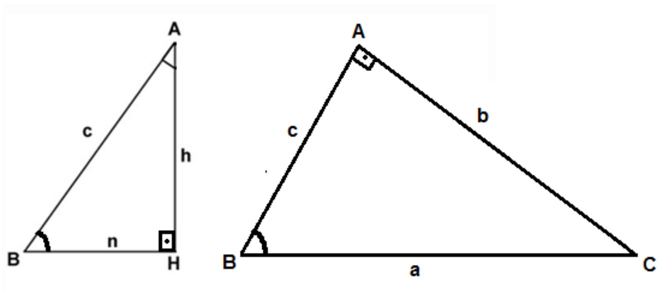
$\triangle$HAC $\sim$ $\triangle$ABC

$\triangle$HBA $\sim$ $\triangle$HAC

Agora, segue as seguintes relações:

1ª relação:

Figura 34 – 1ª Relação




Fonte: Autoria Própria

Considerando os triângulos HBA e ABC, com $\triangle$HBA $\sim$ $\triangle$ABC, tem-se:

$\widehat{H} \cong \widehat{A}$, pois ambos são ângulos retos.

$\widehat{B} \cong \widehat{B}$, pois é ângulo comum.

Daí, tem-se:

$\frac{c}{a} = \frac{n}{c}$.

Dessa proporção chegamos a c . c = a . n $\Longrightarrow$ c$^2$ = an.

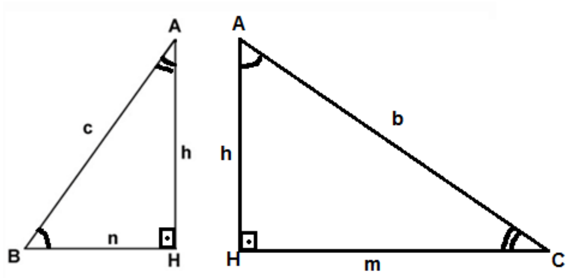
Analogamente, pode-se chegar a b$^2$ = am.

$$\boxed{c^2 = an} \quad \boxed{b^2 = am}$$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

2ª relação:

Figura 35 – 2ª Relação




Fonte: Autoria Própria

Considerando os triângulos HBA e HAC, com $\triangle$HBA $\cong$ $\triangle$HAC, tem-se:

A$\widehat{H}$B $\cong$ A$\widehat{H}$C, pois ambos são ângulos retos.

B$\widehat{A}$H $\cong$ A$\widehat{C}$H, pois ambos são complementos do ângulo $\widehat{B}$.

Daí, tem-se:

$\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$.

Dessa proporção chegamos a h . h = m . n $\Longrightarrow$ h$^2$ = mn.

$$\boxed{h^2 = mn}$$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que essa altura determina sobre a hipotenusa (que são as projeções dos dois catetos sobre a hipotenusa).

3ª relação:

Da 1ª relação métrica, tem-se que b$^2$ = am e c$^2$ = an.

Multiplicando membro a membro essas duas igualdades, tem-se:

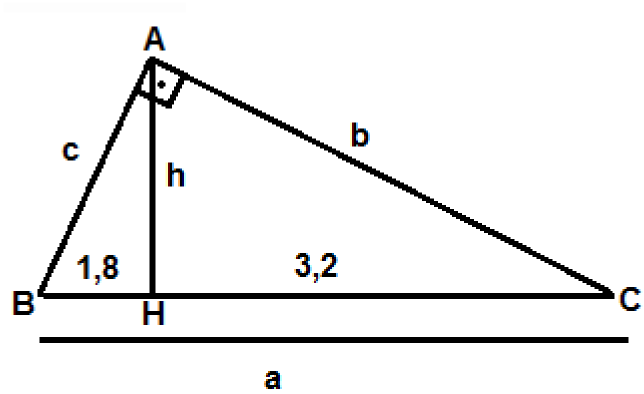
b$^2$ . c$^2$ = am . an $\Longrightarrow$ b$^2$ . c$^2$ = a$^2$ . m . n $\Longrightarrow$ b$^2$c$^2$ = a$^2$h$^2$ $\Longrightarrow$ bc = ah.

$$\boxed{bc = ah}$$

Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.

Vejamos um exemplo de aplicação dessas relações:

Figura 36 – Exemplo das Relações Métricas




Fonte: Autoria Própria

Dado o triângulo ABC (figura 36), determinar as medidas a, h, b e c indicadas, considerando que as medidas da figura são dadas em centímetros.

a = m + n

a = 3,2 + 1,8

a = 5 cm

$h^2$ = mn

$h^2$ = 3,2 . 1,8

$h^2$ = 5,76, com h > 0.

h = $\sqrt{5,76}$

h = 2,4 cm.

$b^2$ = am

$b^2$ = 5 . 3,2

$b^2$ = 16, com b > 0.

$b^2$ = $\sqrt{16}$

b = 4 cm.

$c^2$ = an

$c^2$ = 5 . 1,8

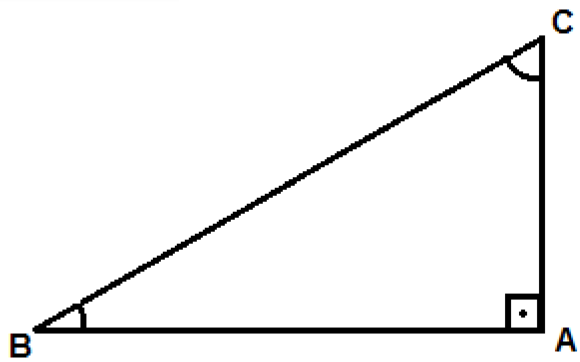
$c^2 = 9$, com $c > 0$.

$c^2 = \sqrt{9}$

c = 3 cm.

## 3.10 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Figura 37 – Razões Trigonométricas




Fonte: Autoria Própria

No triângulo ABC (figura 37), ao observar a hipotenusa $\overline{BC}$ e os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, pode-se usar como referência o ângulo $\widehat{B}$ e escrever:

$\overline{AC}$ é o cateto oposto ao ângulo $\widehat{B}$ e $\overline{AB}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\widehat{B}$.

Ao usar como ponto de referência o ângulo $\widehat{C}$, pode-se escrever:

$\overline{AB}$ é o cateto oposto ao ângulo $\widehat{C}$ e $\overline{AC}$ é o cateto adjacente ao ângulo $\widehat{C}$.

Na hipotenusa $\overline{BC}$, colocamos três pontos M, N e O e, sobre esses pontos, traçamos perpendiculares ao cateto $\overline{AB}$, formando os segmentos $\overline{MP}$, $\overline{NQ}$ e $\overline{OR}$ (figura 37).

O segmento $\overline{MP}$, formou o triângulo BMP, o segmento $\overline{NQ}$, formou o triângulo NQB e o segmento OR, o triângulo ORB.

Observando esses triângulos formados, tem-se que:

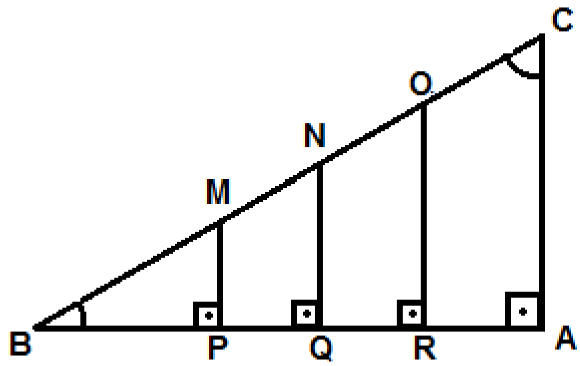
$\triangle$BMP $\sim$ $\triangle$BNQ $\sim$ $\triangle$BOP

Pode-se, então, estabelecer as seguintes razões:

$\dfrac{MP}{BM} = \dfrac{NQ}{BN} = \dfrac{OR}{BO}$ = número $k_1$

$\dfrac{BP}{BM} = \dfrac{BQ}{BN} = \dfrac{BR}{BO}$ = número $k_2$

Figura 38 – Razões pela Semelhança de Triângulos




Fonte: Autoria Própria

$\frac{MP}{BP} = \frac{NQ}{BQ} = \frac{OR}{BR}$ = número $k_3$

O número $k_1$ é chamado seno do ângulo agudo M$\widehat{B}$P, representando a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa em qualquer triângulo retângulo.

Assim, pode-se obter uma razão:

$$\sin\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$$

O número $k_2$ é chamado cosseno do ângulo agudo M$\widehat{B}$P, representando a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa em qualquer triângulo retângulo.

Assim, pode-se obter uma razão:

$$\cos\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$$

O número $k_3$ é chamado tangente do ângulo agudo M$\widehat{B}$P, representando a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente em qualquer triângulo retângulo.

Assim, pode-se obter uma razão:

$$\tan\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ do\ cateto\ adjacente}$$

Os números $k_1$, $k_2$ e $k_3$, que expressam, respectivamente, o seno, o cosseno e a tangente do ângulo agudo $\alpha$, são denominados razões trigonométricas relativas ao ângulo

$\alpha$.

Além do conhecimento das relações acima, há uma tabela com os ângulos conhecidos como notáveis, que são 30°, 45° e 60°. Nesta tabela estão os senos, cossenos e tangentes deste ângulos na forma fracionária.

Tabela 1 – Ângulos Notáveis

| | sen | cos | tg |
|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |

Fonte: Autoria Própria

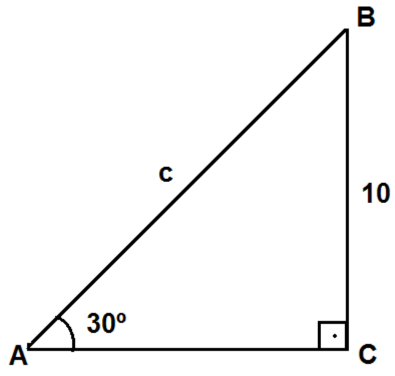
No entanto, este trabalho tem como objetivo o experimento, então, os números usados serão os decimais, para melhor compreensão. Isso porque, na prática, não usamos $2\sqrt{2}$ metros, mas 2,82 metros, aproximadamente.

Segue exemplos de seno, cosseno e tangente:

Considere o triângulo ABC (figura 39) e calcule a medida da hipotenusa c, dado seno 30° = 0,5.

]

Figura 39 – Exemplo de Seno




Fonte: Autoria Própria

Ao conhecer a medida do cateto oposto, deseja-se a medida da hipotenusa. Para isso, vale a relação:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$$

Tem-se:

cateto oposto = 10,

hipotensa = c,

seno de 30º = 0,5.

Seno $\alpha$ = $\dfrac{cateto\ oposto\ \alpha}{hipotenusa}$

Seno 30º = $\dfrac{10}{c}$

0,5 = $\dfrac{10}{c}$

0,5c = 10

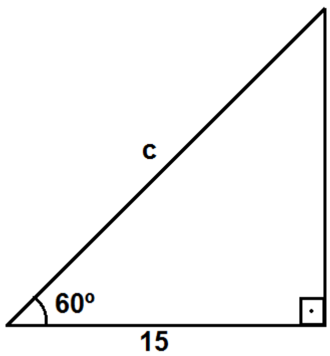
c = 10/0,5

c = 20.

A medida da hipotenusa é 20.

Seja o triângulo a seguir, calcular a medida da hipotenusa c, dado cosseno 60º = 0,5.

Figura 40 – Exemplo de Cosseno




Fonte: Autoria Própria

Ao conhecer a medida do cateto adjacente, obtém-se a medida da hipotenusa, usando a relação:

$\cos\alpha = \dfrac{cateto\ adjacente\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$

Tem-se:

cateto adjacente = 15,

hipotensa = c,

cosseno de 60º = 0,5.

$$\cos\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$$

Cosseno 60º = $\frac{15}{c}$

0,5 = $\frac{15}{c}$

0,5c = 15

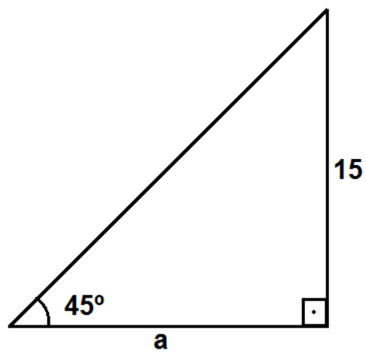
c = 15/0,5

c = 30.

A medida da hipotenusa é 30.

Seja o triângulo a seguir, calcular a medida do cateto a, dado tangente 45º = 1.

Figura 41 – Exemplo de Tangente




Fonte: Autoria Própria

Conhecendo a medida do cateto oposto, pode-se calcular a medida do cateto adjacente, usando a relação:

$$\tan\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ do\ cateto\ adjacente}$$

Tem-se:

cateto oposto = 15

cateto adjacente = a,

tangente de 45º = 1.

$$\tan\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ do\ cateto\ adjacente}$$

Tangente 45° = $\dfrac{15}{a}$

1 = $\dfrac{15}{a}$

c = 15

A medida do cateto adjacente é 15.

Neste capítulo foram apresentados apenas os conteúdos que foram usados nas aulas com os alunos do 1° ano. Daí a ausência das demais razões, como cotangente, cossecante e secante.

# Capítulo 4

# A Aplicação das Aulas Teóricas

A Trigonometria, do grego trigon + metron, ou seja, triângulo + medida, é um ramo da matemática que, basicamente, estuda as medidas nos triângulos.

Além da matemática pura e da matemática aplicada, a Trigonometria aparece em diversos campos, aqui mencionados sem pretensão alguma de explorá-los, mas tão somente de enfatizar sua diversidade. São elas: astronomia, agrimensura, navegação, teoria musical, acústica, óptica, análise de mercado, eletrônica, biologia, equipamentos médicos, como tomografia computadorizada e ultrassom, farmácia, química, sismologia, meteorologia, oceanografia, arquitetura, engenharia, cartografia, cristalografia entre outros.

Apesar da vasta aplicabilidade da Trigonometria, restringe-se às que são abordadas no primeiro ano do Ensino Médio, objeto de estudo deste trabalho, ou no 9º ano do Ensino Fundamental, para que sirva como revisão ou nivelamento.

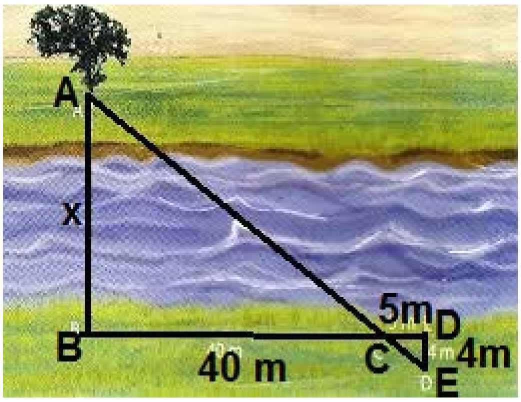
Este capítulo mostra algumas situações em que os conhecimentos teóricos poderão ser aplicados. Tais situações foram escolhidas propositalmente, por serem as que mais aparecem nas avaliações externas, nos concursos e nos livros didáticos.

Não é a intenção do capítulo a resolução das atividades propostas. A explicação e resolução passo a passo está no capítulo seguinte, quando cada atividade será retomada.

## 4.1 Largura do Rio

Utilizando os conceitos de semelhança de triângulos, calcule a medida da largura do rio, de acordo com as medidas dadas:

Figura 42 – Largura do Rio

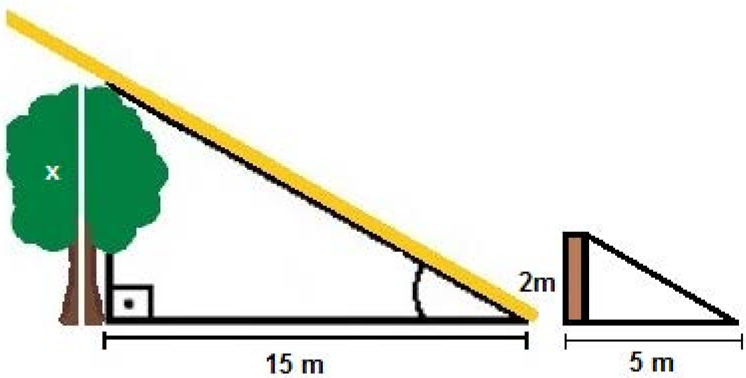



Fonte: http://www.amma.com.pt/wp-content/uploads/2011/04/8Pag133-8.jpg

## 4.2 Tamanho da Árvore pela Sombra

Em certo momento do dia, uma árvore projetou uma sombra com 15 metros. Ao lado foi colocado uma madeira, de tal forma que ficasse paralela à arvore. Esta madeira projetou uma sombra de 5 metros. Com base nestas medidas, calcule a altura da árvore.

Figura 43 – Tamanho da Sombra

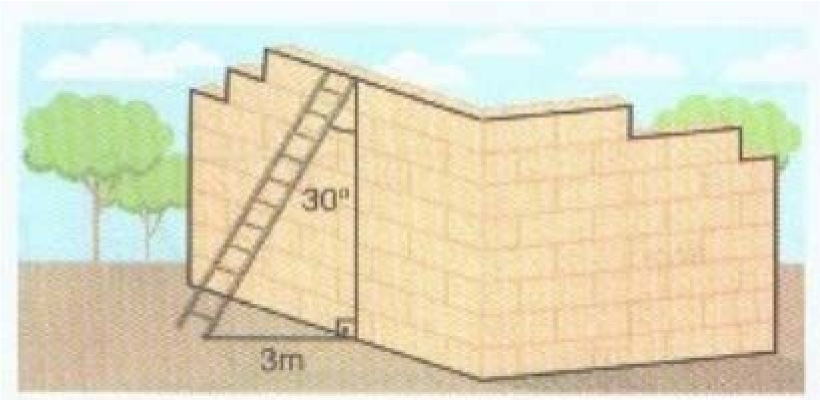



Fonte: Autoria Própria

## 4.3 Escada Encostada no muro

Carlos desejava medir a altura de um muro. Colocou o topo da escada no final do muro, conforme a figura 44. Ele poderia subir no muro pela escada, e jogar a fita métrica, mas como ele tem medo de altura, preferiu usar os seus conhecimentos de Trigonometria. Sabendo-se a distância do pé da escada até o muro é de 3 m e que o ângulo formado com o topo da escada é de 30°, calcule a altura desse muro.

Figura 44 – Escada Encostada no Muro

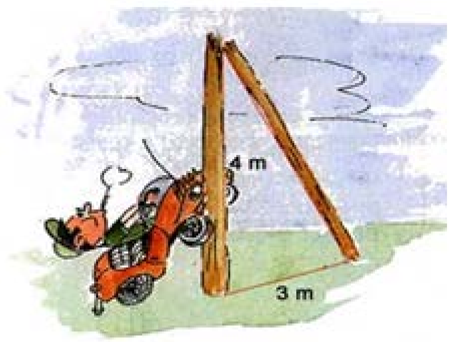



Fonte: Autoria Própria

## 4.4 Famoso Problema do Bambu Quebrado

O livro chinês "Chiu Chang Suan Shu"ou "Nove capítulos sobre a arte da Matemática", de autor desconhecido, contém 246 problemas.A maioria deles envolvendo situações práticas, como exemplo: Um carro bateu na árvore, quebrando-a conforme a figura. De acordo com as medidas dadas, calcule o tamanho da árvore.

Figura 45 – Bambu Quebrado



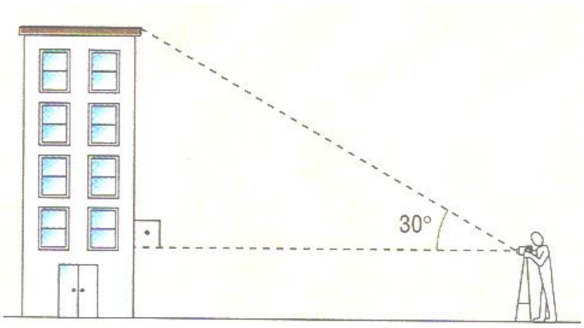

Fonte: matematicarlos.com.br/sabermais

## 4.5 Altura do Prédio e Altura do Medidor

Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento para medir ângulos) a 200 m do edifício e mediu o ângulo de 30°, como indicado na figura a seguir:

É dada a informação de que o teodolito está a uma altura de 1,5 m do solo. Com base nessas informações, pode-se concluir que, dentre os valores a seguir, o que melhor

Figura 46 – Altura do Prédio e do Medidor




Fonte: Autoria Própria

aproxima da altura do edifício, em metros, é:

(A) 112

(B) 115

(C) 117

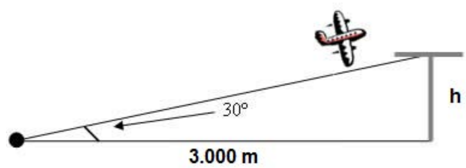
(D) 120

(E) 124

## 4.6 Altura do Avião

Um avião, ao levantar voo, sobe formando um ângulo de 30º com a pista (horizontal). 3 quilômetros do ponto de subida do avião está uma torre a 150 m. (figura 47). Verifique se, mantendo o trajeto, o avião pode colidir com a torre.

Figura 47 – Altura do Avião

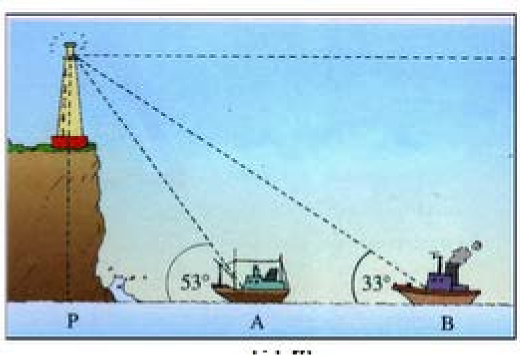



Fonte: http://3.bp.blogspot.com/-1oZfC7uLoy8/U8Lxv0P8yHI/AAAAAAAAAAw/V7uN0pp6Xt8/s1600/trigonometria(1).jpg

## 4.7 Distância entre Navios

Os tripulantes dos navios A e B avistam o topo do farol segundo ângulos de 53° e 33°, respectivamente. Sabendo que o farol se encontra a 125 metros de altura, determine a distância entre os dois navios.

Figura 48 – Distância entre Navios

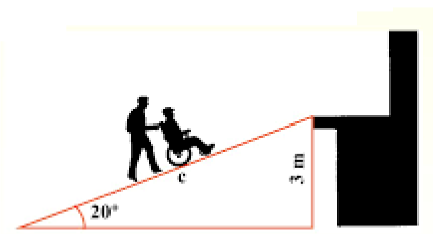



Fonte: matematicarlos.com.br/sabermais

## 4.8 Comprimento da Rampa

Deseja-se construir uma rampa para acesso dos cadeirantes a uma loja. Sabe-se que a altura da calçada é de 3 metros e o ângulo de inclinação deverá ser 20°. Calcule o comprimento que essa rampa deverá medir.

Figura 49 – Comprimento da Rampa

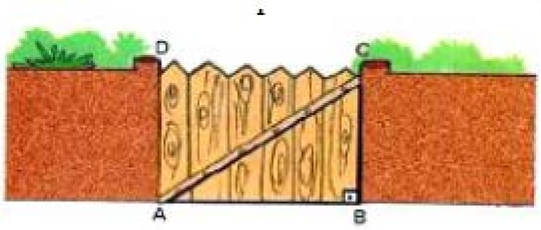



Fonte: matematicarlos.com.br/sabermais

## 4.9 Tamanhos no Portão

O portão de entrada de uma casa tem 4 m de comprimento e 3 m de altura. Que comprimento teria a trave de madeira que se estende do ponto A ao ponto C?

Figura 50 – Tamanhos no Portão

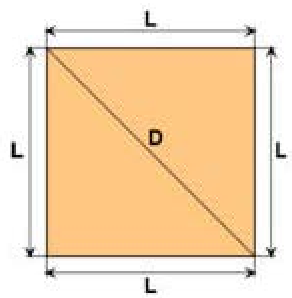



Fonte: matematicarlos.com.br/sabermais

## 4.10 Diagonal do quadrado

Seja um quadrado de lado L = 10 cm. Calcule a medida de sua diagonal D.

Figura 51 – Diagonal do Quadrado

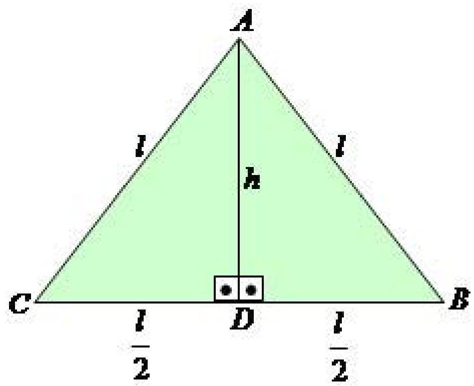



Fonte: matematicarlos.com.br/sabermais

## 4.11 Altura no Triângulo Equilátero

A medida de cada lado de um triângulo equilátero ABC é 10 cm. Calcule a altura AD.

Figura 52 – Altura no Triângulo Equilátero




Fonte: matematicarlos.com.br/sabermais

# Capítulo 5

# As Aulas Práticas para Revisão

Neste capítulo é relatado como as aulas práticas foram trabalhadas no 1º ano matutino da Escola Professor José Veiga da Silva.

As aulas práticas foram divididas em dois capítulos. Neste, são relatadas as aulas práticas de conceitos e propriedades de resumo, conforme o capítulo 3. No próximo, as aulas práticas conforme as atividades contidas no capítulo 4.

## 5.1 Condição de Existência dos Triângulos

Conforme visto no capítulo 3.4, para que se possa existir um triângulo, é necessário que a medida de qualquer um de seus lados seja menor do que a soma das medidas dos outros dois lados, bem como maior que o valor absoluto (módulo) da diferença entre essas medidas.

Este experimento foi realizado antes das aulas teóricas.

Para a execução, foram necessários palitos de churrasco com os tamanhos variados, que vão de 2 cm a 15 cm.

Como forma de segurança, os palitos foram cortados pelos alunos em suas próprias casas, evitando a manipulação de objetos cortantes em sala de aula. Com o mesmo intuito de segurança, os palitos levados para a sala de aula não poderiam ter ponta.

A turma de 42 alunos foi dividida em 14 grupos com 3 componentes cada, com os palitos na cadeira central, porém, manipulados por todos.

Foram dados comandos para serem executados, e os resultados anotados. Seguem os comandos:

1) Com os palitos de tamanho 3, 4 e 5 cm, formem um triângulo.

Todos conseguiram formar, sem nenhuma dificuldade.

2) Com os palitos de tamanho 6, 8 e 10 cm, formem um triângulo.

Da mesma forma, todos conseguiram.

3) Com os palitos de tamanho 4, 6 e 8 cm forme um triângulo.

Alguns alunos não tiveram tanta facilidade neste comando. Isso porque eles tentaram construir um triângulo retângulo, conforme os dois comandos anteriores. Em seguida, tentaram um triângulo equilátero. Não conseguindo, alguns pediram ajuda externa. Daí, entenderam que o triângulo pode ter várias formas diferentes.

4) Com os palitos de tamanho 3, 6 e 15 cm, formem um triângulo.

Alguns perceberam de imediato que seria impossível. A maioria fez várias tentativas para chegar a esta conclusão.

5) Com os palitos de tamanho 4, 8 e 18 cm, forme um triângulo.

Desta vez, todos concluíram de imediato que não seria possível formar um triângulo com tais medidas.

6) Com as anotações das medidas dos palitos utilizados, separe os experimentos em dois grupos: os triângulos possíveis e os impossíveis.

Grupo possível

3, 4 e 5

6, 8 e 10

4, 6 e 8

Grupo impossível:

3, 6 e 15

4, 8 e 18

7) Por que nem sempre conseguimos construir triângulos com três palitos?

Após os alunos emitirem várias sugestões, era o momento de iniciar a aula teórica.

Foi dada a seguinte relação de condição de existência dos triângulos:

$|b - c| < a < b + c$

O primeiro momento foi saber interpretar.

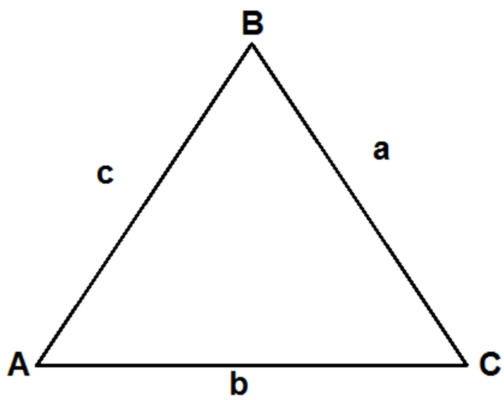
Segue os comandos dados:

8) Quantas letras diferentes há nesta relação?

Resposta: 3 letras diferentes.

Em seguida foi apresentado o triângulo ABC para os alunos.

Figura 53 – Triângulo ABC




Fonte: Autoria Própria

9) Quais são os nomes dos lados desse triângulo?

a, b e c.

10) O que significa a relação, baseado nos nomes dos lados do triângulo?

O lado b deve ser subtraído pelo lado c. Ignora o sinal do resultado, pois se trata do módulo. Esse resultado deverá ser menor que o tamanho do terceiro lado.

Depois o lado b deve ser somado com o lado c. Essa soma deve ser maior que o terceiro lado.

11) Resumo:

Lado MENOS lado, o tamanho é MENOR que o terceiro lado.

Lado MAIS lado, o tamanho é MAIOR que o terceiro lado.

12) O que significa condição de existência dos triângulos?

Que para o triângulo existir, tem uma condição.

13) Qual é a condição para um triângulo cujos lados a,b e c existir?

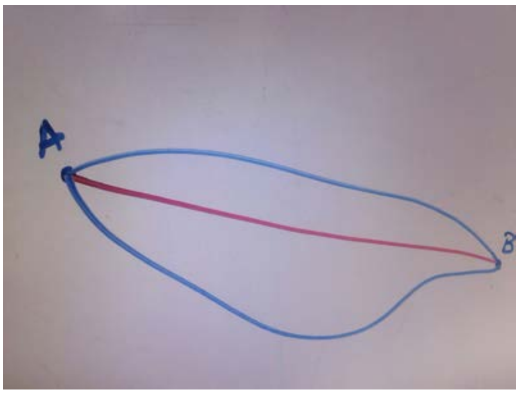
|b - c| < a < b + c

Antes de voltar para as anotações dos triângulos, foi passado um pouco mais de teoria, a fim de explicar a relação acima, para que não ficasse apenas na memória.

Foi, então, falado de um axioma - uma vez que eles já sabem que axioma é uma sentença que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como consenso inicial necessário para aceitação de uma teoria - que diz que a menor distância entre dois pontos será uma reta.

Para ilustrar, foram marcados dois pontos no quadro. Pedi para que um aluno ligasse os dois pontos. Imediatamente, ele fez um segmento de reta. Desafiei outro aluno a ligar de modo diferente. Ele fez uma volta. O terceiro aluno fez uma volta do lado contrário. Havia no quadro três trajetórias. Pedi para que um quarto aluno medisse com o seu palmo a distância de cada trajetória para descobrirmos qual é a menor. Não houve necessidade de fazer, pois todos responderam que era o segmento de reta.

Figura 54 – Menor Distância entre Dois Pontos




Fonte: Autoria Própria

Continuando, desenhei um triângulo simulando um mapa de ruas. Perguntei se, estando eles com pressa, qual o caminho que escolheriam para ir do ponto A ao ponto B: se o caminho $\overline{AB}$ (rua 2 da figura 54) ou o caminho $\overline{AC}$ e depois $\overline{CB}$. Responderam sem dificuldade que seria o caminho $\overline{AB}$. Concluímos que, num triângulo, um segmento de reta será sempre menor que os outros dois somados.

Fui ao quadro para "matematizar", expressão usada na sala para transformar frases

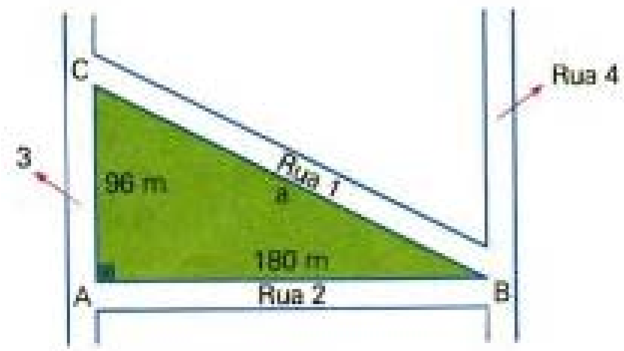



Figura 55 – Ruas em Triângulos
Fonte: matematicarlos.com.br/sabermais

da língua portuguesa em expressões matemáticas. Escrevi:

caminho $\overline{AB}$ < caminho $\overline{AC}$ + caminho $\overline{CB}$

Substitui a expressão a fim de diminuir mais ainda a quantidade de caracteres utilizados:

c < b + a

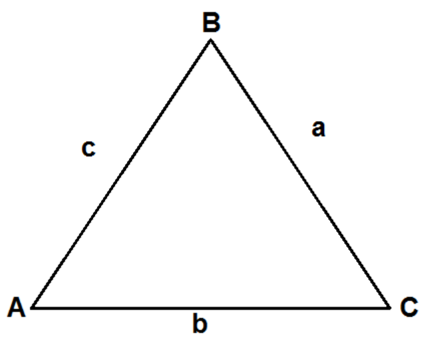



Figura 56 – Lados de Triângulos
Fonte: Autoria Própria

Os lados de um triângulo (figura 55) podem ser representados como duas letras maiúsculas, que são os pontos de suas extremidades. Observe que no triângulo ABC, tem-se os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.

Mas, os lados triângulos também podem ser representados como o nome de seus segmentos de reta, ou seja, letras minúsculas.Observe que o lado $\overline{AB}$ é representado pela outra letra latina minúscula, ou seja a letra c. Se o lado tem as letras maiúsculas B e C, representa-se com a letra minúscula a. E o lado que tem as letras maiúsculas A e C representa-se com a letra minúscula b.

Observe, ainda, que a letra latina minúscula b está no segmento oposto ao ângulo $\widehat{B}$. Assim, o lado oposto ao ângulo $\widehat{A}$ será a letra minúscula a e o lado oposto ao ângulo $\widehat{c}$, será a letra minúscula c.

Retomei a relação c < b + a.

14) Verifique se a relação a < b + c satisfação aos três experimentos dos grupos possível e impossível.

No grupo possível:

3 < 4 + 5 é verdadeira;

10 < 4 + 8 é verdadeira;

4 < 6 + 8 é verdadeira.

No grupo impossível:

3 < 6 + 15 é verdadeira;

4 < 8 + 18 é verdadeira

Algo parecia estar errado, pois a relação satisfazia, inclusive, o grupo impossível.

Foi então que chegamos à conclusão de que a relação deveria ser ampliada. Voltamos para a condição de existência do triângulo anterior.

|b - c| < a < b + c

Além da soma de dois lados ser maior do que o terceiro, há a necessidade de que o valor absoluto (módulo) da diferença entre eles seja menor.

15) Verifique a condição de existência dos triângulos no grupo possível e no impossível.

|b - c| < a < b + c

Para os palitos de tamanho 3, 4 e 5,

seja $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$.

Substituindo,

$|b - c| < a < b + c$

$|4 - 5| < 3 < 4 + 5$

$|-1| < 3 < 9$

$1 < 3 < 9$ é verdadeira;

Agora, seja $a = 4$, $b = 3$ e $c = 5$.

$|b - c| < a < b + c$

$|3 - 5| < 4 < 3 + 5$

$|-2| < 4 < 8$

$2 < 4 < 8$ é verdadera;

Seja $a = 3$, $b = 5$ e $c = 4$.

$|5 - 4| < 3 < 5 + 4$

$| 1 | < 3 < 9$

$1 < 3 < 9$ é verdadeira;

Seja $a = 4$, $b = 5$ e $c = 3$.

$|5 - 3| < 4 < 5 + 3$

$|2| < 4 < 8$

$2 < 4 < 8$ é verdadeira;

Seja $a = 5$, $b = 4$ e $c = 3$.

$|4 - 3| < 5 < 4 + 3$

$| 1 | < 5 < 7$

$1 < 5 < 7$ é verdadeira;

E, por fim, Seja $a = 5$, $b = 3$ e $c = 4$.

$|b - c| < a < b + c$

|3 - 4| < 5 < 3 + 4

|-1 | < 5 < 7

1 < 5 < 7 é verdadeira.

Figura 57 – Triângulo Possível

Fonte: Autoria Própria

Analogamente, foram verificados, ainda no grupo possível, os palitos 6, 4 e 10 e 4, 6 e 8 e concluíram que eles satisfazem à condição de existência dos triângulos, por isso estão no grupo dos triângulos possíveis.

O momento da verificação do grupo impossível gerou expectativa. Percebi que alguns grupos não respeitaram a ordem e foram direto para verificá-los. Houve riso e gargalhadas quando perceberam que a condição não foi satisfeita, como segue apenas uma das contas:

Para os palitos 4, 8 e 15, seja:

a = 4, b = 8 e c = 15.

|8 - 15| < 4 < 8 + 15

|-7| < 4 < 23

7 < 5 < 23 não é verdadeira, pois 7 não é menor que 5.

Logo, com os palitos 4, 8 e 15 não é possível construir um triângulo. Esta informação foi contatada por meio dos cálculos e por meio do experimento, da manipulação, da prática.

Figura 58 – Triângulo Impossível

Fonte: Autoria Própria

## 5.2 Rigidez do Triângulo

Um conhecimento que foi acrescido ao planejamento é o da rigidez do triângulo.

Certa aula, quando era falado a História da Matemática (cap.3.1), um aluno perguntou porque tanto interesse em triângulos naquela época. Após ele saber que o interesse não ficou àquela época, mas nos tempos atuais, ele descobriu duas importâncias do triângulo:

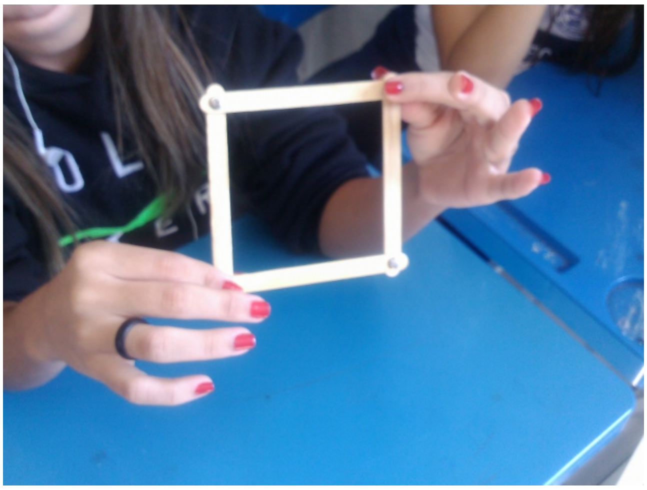
Com um triângulo, é possível medir distâncias inacessíveis, o que será feito nas aulas práticas das atividades de aplicação da Trigonometria.

Apesar disso, a rigidez do triângulo o faz ser muito importante para as construções.

Para experimentar a rigidez do triângulo, foi pedido para que os alunos trouxesse 7 palitos de picolé.

Ao chegarem foi usado um arrebite para prender as pontas dos palitos, formando um quadrado.

Figura 59 – Quadrado com Palitos



Fonte: Autoria Própria

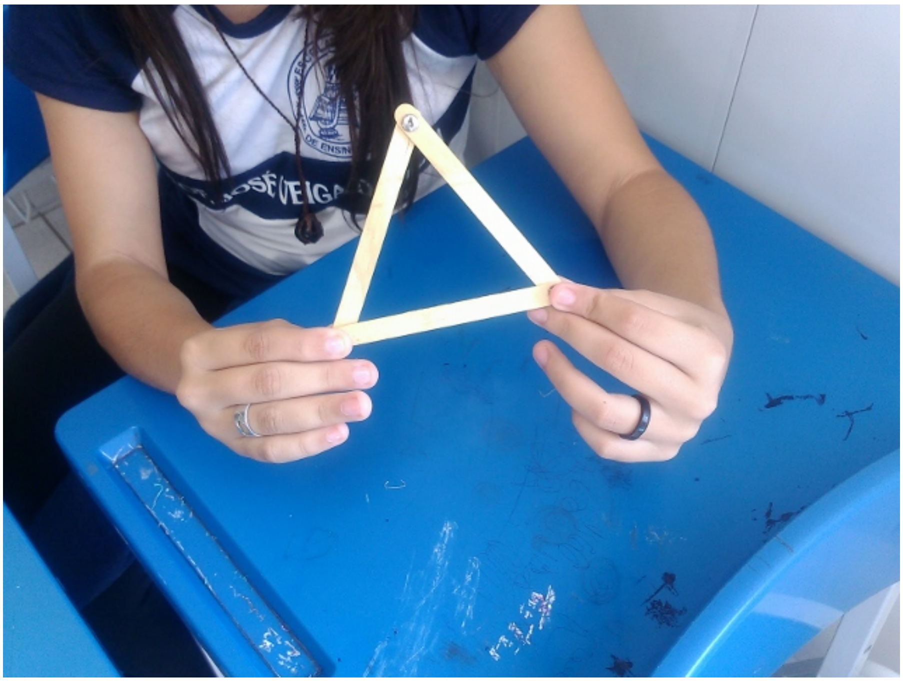
Com os dedos nas pontas, eles deveriam fazer pequena força para lados opostos. Perceberam que o quadrado deformou, deixando de ser retângulo para ser apenas paralelogramo.

Figura 60 – Quadrado com Palitos


Fonte: Autoria Própria

Em seguida, usaram o arrebite para prenderem as pontas formando um triângulo. Da mesma maneira, tentaram deformar o triângulo, e não conseguiram. Daí o nome rigidez.

Figura 61 – Rigidez do Triângulo



Fonte: Autoria Própria

## 5.3 Teorema de Pitágoras

Esse experimento foi realizado após a aula teórica, citada no capítulo 3.8.

Uma vez lembrada a relação que diz que o quadrado da hipotenusa equivale à soma dos quadrados dos catetos, coube aos alunos verificar.

Foi solicitado que eles levassem para a aula quadrados feitos em cartolinas com medidas 6, 8, 10, 12, 16 e 20 cm.

Cada quadrado deveria ter quadradinhos em seu interior com 2 cm cada.

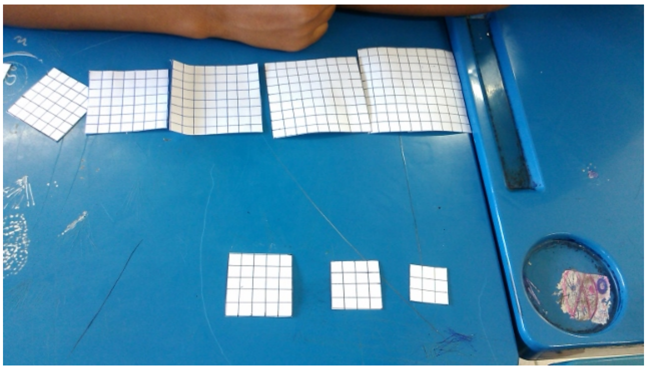
Sentados em dupla, eles deveriam ouvir os comandos e executá-los.

Segue os comandos;

1) una os quadrados, de tal forma que no meio forme um triângulo retângulo.

Após várias combinações, chegaram nos quadrados 6,8 e 10, que chamamos de grupo menor e 12, 16 e 20, que chamamos de grupo maior.

Figura 62 – Quadrados Quadriculados



Fonte: Autoria Própria

2) Anote as quantidades de quadradinhos que tem cada quadrado do grupo menor. Faça o mesmo com os quadrados do grupo maior.

imediatamente eles concluíram que a quantidade dos quadradinhos no interior dos quadrados menores era a mesma quantidade no interior do quadrado maior.

3) Qual é o nome do expoente no teorema de Pitágoras?

Quadrado.

4) Qual é o nome do polígono que vocês estão manuseando?

Quadrado.

5) Escreva o nome no quadrado menor: "cateto".

6) Escreva o nome no quadrado do meio: "cateto".

7) Escreva o nome do quadrado maior: "hipotenusa".

A partir dali, era solicitado para que eles levantassem os quadrados, perguntando "de quem é esse quadrado". Eles respondiam "do cateto"ou "da hipotenusa".

Acabou virando um pequeno coro, quando eles repetiam quadrado do cateto, quadrado do cateto e quadrado da hipotenusa.

Pedi para eles deixarem os quadrados e olharem para o quadro, em que estava escrito o teorema de Pitágoras. Eles acabaram concluindo que hipotenusa ao quadrado na álgebra era o mesmo que quadrado da hipotenusa da Trigonometria.

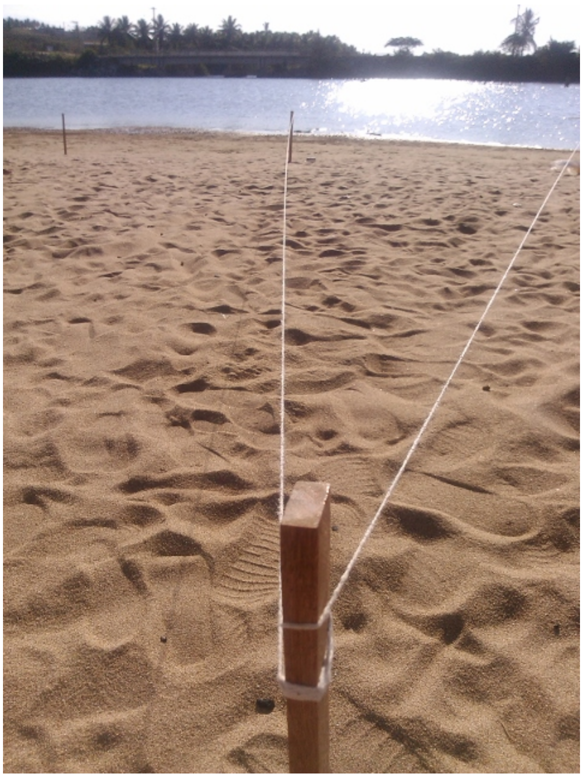
# Capítulo 6

# As Aulas Práticas

Este capítulo relata a execução das aulas práticas das atividades de aplicabilidade da Trigonometria do 1° ano do Ensino Médio, conforme o capítulo 4.

## 6.1 Largura do Rio

Figura 63 – Largura do Rio



Fonte: Autoria Própria

Esta aula foi realizada após a aula teórica sobre semelhança de triângulo, e teve como objetivo medir a distância do rio por meio da Trigonometria, conforme modelo de atividade do capítulo 4.1.

A aula aconteceu na localidade de Lagoa do Siri, em Marataízes-ES, distante 6 km da escola. Dos 42 alunos, 3 não puderam comparecer por ter acontecido num sábado.

Para essa aula foram necessários:

- 4 madeiras;

- 1 rolo e barbante;

- 2 pregos;

- 1 martelo;

- 1 esquadro;

- 1 trena ou fita métrica e

- 1 rio.

Passos:

1) Escolheu-se um ponto de referência do outro lado do rio: uma placa em cima da ponte.

Figura 64 – Ponto de Referência

Fonte: Autoria Própria

2) Fincou-se uma madeira numa posição que julgou-se estar de frente para o ponto

de referência.

Figura 65 – Madeira I Fincada

Fonte: Autoria Própria

3) Pregou-se um esquadro sobre a ponta da madeira com uma ponta em direção ao ponto de referência.

Figura 66 – Esquadro na Madeira

Fonte: Autoria Própria

4) Amarrou-se uma ponta do barbante na madeira e a outra esticamos na linha com o esquadro, de tal forma que a ponta em direção ao ponto de referência e a linha formaram

90°. Amarrou-se a outra ponta esticada numa segunda maneira que foi fincada a 15 metros da primeira.

Figura 67 – Madeira II Fincada

Fonte: Autoria Própria

5) Seguiu-se com o barbante em linha reta por mais 2 metros, e amarrou-se na terceira madeira fincada. Pregou-se o esquadro nesta terceira madeira, de tal forma que um lado dele estava rente a linha que chegava, e o outro apontando para direção contrária ao rio, formando um ângulo de 90°.

Figura 68 – Madeira III Fincada

Fonte: Autoria Própria

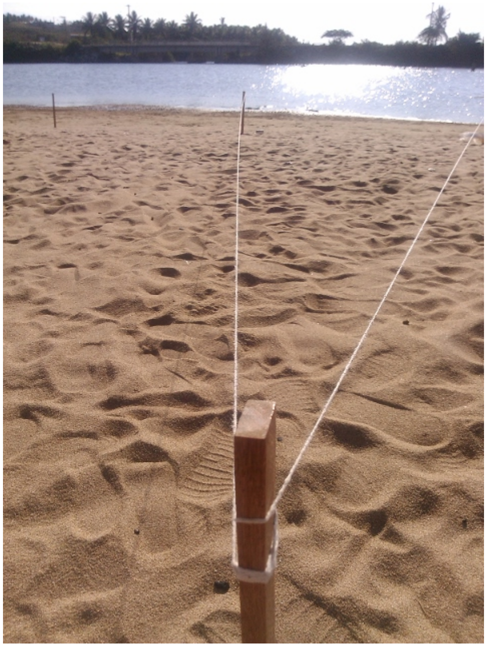
6) Esticou-se o barbante em linha reta, formando 90° com a outra linha que saiu da 1ª madeira passando pela segunda. Parou-se de esticar quando a 2° madeira ficou na mesma direção do o ponto de referência, do outro lado do rio. Ali, fincou-se a quarta e última madeira, na qual foi amarrado o barbante. A distância entre a 3ª e 4° madeiras fi de 7,2 m.

Figura 69 – Madeira IV Fincada

Fonte: Autoria Própria

7) Ligou-se com barbante a quarta e segunda madeiras, formando um triângulo retângulo.

Figura 70 – Triângulo Formado com Barbante



Fonte: Autoria Própria

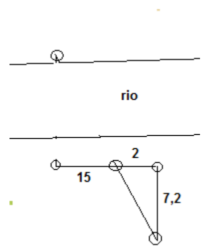
8) O desenho formado com barbante:

9) O desenho projetado no papel:

10) Observa-se que no papel, conseguiu-se formar dois triângulos semelhantes. Daí, conseguiu-se calcular a largura do rio com a seguinte relação:

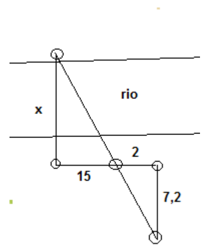
$$\frac{x}{7,2} = \frac{15}{2}$$

Figura 71 – Desenho com Barbante




Fonte: Autoria Própria

Figura 72 – Desenho no Papel




Fonte: Autoria Própria

2x = 108

$x = \frac{108}{2}$

x = 54.

Estima-se que a largura do rio seja de 54 metros.

Não foi possível verificar precisamente, mas ao andar em um caminho paralelo, chegou-se a 58 passos, o que julgamos ser bem perto dos 54 metros.

Assim, finalizou-se a aula prática em que a largura do rio foi calculada.

## 6.2 Tamanho Árvore pela Sombra

Esta aula foi realizada após a aula teórica sobre teorema de Tales e semelhança de triângulo, e teve como objetivo medir o tamanho da árvore por meio da Trigonometria, conforme modelo de atividade do capítulo 4.2.

A aula aconteceu na localidade de Jacarandá, próximo à escola e teve a participação dos 42 alunos.

Para essa aula foram necessários:

Figura 73 – Tamanho da Árvore pela Sombra

Fonte: Autoria Própria

- Uma madeira;

- 1 trena;

- 1 árvore e

- sombra.

Os alunos mediram o tamanho da sombra da árvore projetada, encontrando 5,2 m.

Em seguida, fincaram uma madeira cuja altura ficou com 1 metro.

Essa madeira projetou uma sombra de 1,3 m.

Figura 74 – Sombra da Árvore e da Madeira

Fonte: Autoria Própria

Observe que na foto, conseguiu-se montar dois triângulos semelhantes. Dai, foi conseguido calcular o tamanho da árvore com a seguinte relação:

$\frac{x}{1} = \frac{5,2}{1,3}$

1,3x = 5,2

x = $\frac{5,2}{1,3}$

x = 4.

Estima-se que a altura da árvore seja de 4 metros.

## 6.3 Escada Encostada no Muro

Esta aula foi realizada após a aula teórica sobre teorema de Pitágoras e teve como objetivo medir o tamanho do muro, conforme modelo de atividade do capítulo 4.3.

A aula aconteceu na localidade de Jacarandá, na casa de uma aluna, ao lado da escola e teve a participação dos 42 alunos.

Para essa aula foram necessários:

- Uma escada;

- 1 trena e

- 1

Os alunos mediram o tamanho da escada, encontrando 3 metros.

Em seguida, puseram a escada encostada no muro na diagonal. A distância entre o pé da escada até o muro foi de 1,30 m.

Usando o Teorema de Pitágoras, em que a escada é a hipotenusa e os catetos são o chão e o muro, conseguiu-se calcular a altura do muro usando:

$c^2 = a^2 + b^2$

$3^2 = 1,3^2 + x^2$

$9 - 1,69 = x^2$

$7,31 = x^2$

x = $\sqrt{7,31}$

Estima-se que a altura do muro seja de 2,7

Figura 75 – Tamanho do Muro

Fonte: Autoria Própria

## 6.4 Famoso Problema do Bambu Quebrado

Esta aula foi realizada após a aula teórica sobre teorema de Pitágoras e teve como objetivo medir o tamanho do bambu inteiro por meio da Trigonometria, conforme modelo de atividade do capítulo 4.4.

A aula aconteceu na localidade de Jacarandá, na rua em frente à escola e teve a participação de 41 alunos dos 42.

Para essa aula foram necessários:

- Uma trena e

- 1 bambu.

Os alunos mediram a altura do bambu, encontrando 1,10 m e a distância entre o bambu vertical e a ponta diagonal, encontrando 1,40 m.

Usando o Teorema de Pitágoras, em que o bambu na diagonal é a hipotenusa e os catetos são o chão e o bambu na vertical, conseguimos calcular a altura do bambu usando:

$c^2 = a^2 + b^2$

$x^2 = 1{,}40^2 + 1{,}10^2$

$x^2 = 1{,}96 + 1{,}21$

$x^2 = 3{,}17$

$x = \sqrt{3,17}$

Estima-se que o tamanho da diagonal do bambu seja de 3,17m. Porém, o que se pede é a altura de todo o bambu. Neste caso, 3,17 + 1,10 = 4,27 metros de altura.

Figura 76 – Bambu Quebrado

Fonte: Autoria Própria

## 6.5 Altura do Prédio e Altura do Medidor

Esta aula foi realizada após a aula teórica sobre Razões Trigonométricas e teve como objetivo medir o tamanho do prédio por meio da Trigonometria, conforme modelo de atividade do capítulo 4.5.

A aula aconteceu na localidade de Jacarandá, numa rua próximo à escola e teve a participação dos 42 alunos.

Para essa aula foram necessários:

- 1 teodolito caseiro;

- 1 trena e

- 1 prédio

Construção do teodolito caseiro:

Material necessário:

1 cano,

1 transferidor,

fita adesiva,

pedaço de linha (40 cm) e

1 "peso"para pesca.

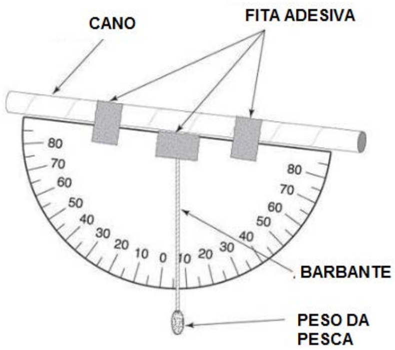
Modo de fazer:

Cole o transferidor ao cano,

amarre a linha ao cano de tal forma que ele fique no meio do transferidor,

amarre a outra ponta ao chumbo.

Figura 77 – Teodolito Caseiro




Fonte: Autoria Própria

Com o teodolito aos seus olhos, uma aluna afastou-se 8 metros de um prédio.

Figura 78 – Distância do Prédio

Fonte: Autoria Própria

Olhando pelo cano do teodolito, uma aluna apontou para o prédio, de tal forma que a linha sobre o transferidor ficasse em 90°, garantindo que estivesse na horizontal paralela ao chão.

Sem alterar a altura do teodolito aos olhos, a aluna apontou para o final do prédio, alterando o ângulo marcado pela linha no transferidor para 145°.

Figura 79 – Teodolito Apontado para o Prédio

Fonte: Autoria Própria

Figura 80 – Teodolito Apontado para o Topo do Prédio

Fonte: Autoria Própria

Com a alteração do ângulo de 90° para 145°, obtém-se um ângulo de 55° num triângulo retângulo imaginário, cujo cateto adjacente é 8 m (distância da aluna ao prédio) e o cateto oposto é o valor desejado, representado por x. Ao medir a distância entre teodolito caseiro aos olhos ao chão, obteve-se 1,66 m.

Usando uma das fórmulas das razões trigonométricas, conseguiu-se calcular a altura do prédio.

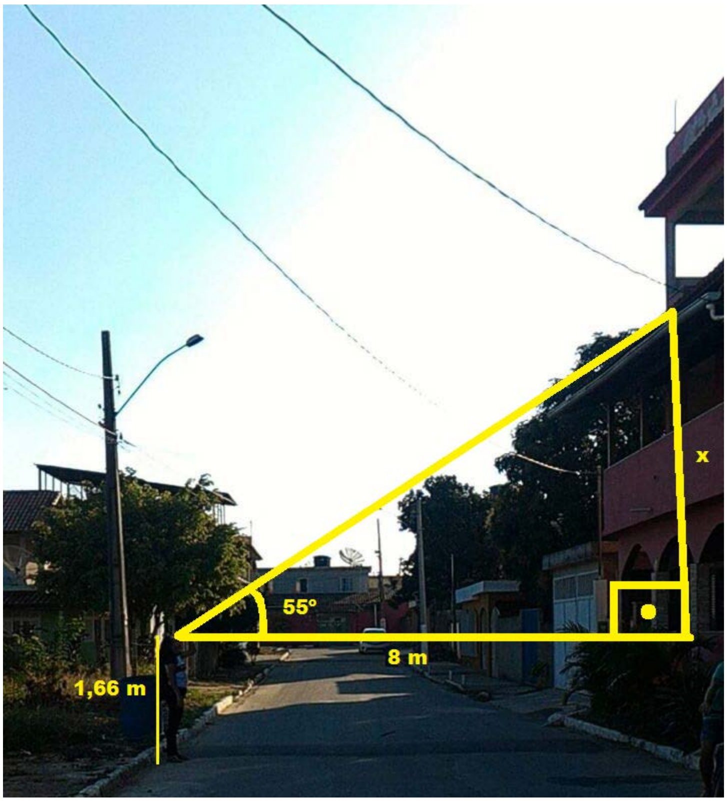
Conforme cap.3.10, as fórmulas das razões trigonométricas usadas no 1° ano do Ensino Médio são:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$\cos\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ da\ hipotenusa}$$

$$\tan\alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ angulo\ \alpha}{medida\ do\ cateto\ adjacente}$$

Figura 81 – Triângulo Retângulo Imaginário




Fonte: Autoria Própria

Para descobrir a fórmula necessária para este cálculo, foram feitas duas perguntas:

-No triângulo retângulo imaginário, conhece-se a medida de que lado?

Resposta: cateto adjacente = 8 m.

-Qual é o lado cuja medida se deseja descobrir?

Resposta: cateto oposto = x.

Ao conhecer o cateto adjacente, ao desejar conhecer o cateto oposto, a fórmula é aquela que tem esses dois lados: tangente.

$$\text{Tan } 55^\circ = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

Ao consultar a tabela das razões trigonométrica (anexo 1), encontra-se tangente de 55° a, aproximadamente, 1,42.

Tem-se, então:

1,42 = $\frac{x}{8}$

x = 11,36.

Para saber a altura do prédio todo, basta somar com a medida de onde começa o triângulo imaginário até o chão. Essa medida é 1,66 m, que é a mesma medida entre o teodolito aos olhos da aluna ao chão.

Somando 11,36 com 1,66 da menina, encontramos 13,02 m.

Estima-se, então, que a altura do prédio seja de 13,02.

## 6.6 Altura do Avião

Esta aula foi realizada após a aula teórica sobre Razões Trigonométricas com os 42 alunos e teve como objetivo medir a altura do avião num certo tempo após levantar voo, por meio da Trigonometria, conforme modelo de atividade do capítulo 4.6.

Para essa aula foram necessários:

- Um objeto simulando um prédio;

- 1 objeto simulando o avião e

- 1 régua.

Os alunos colocaram o avião a 46 cm de distância do prédio e marcaram esse ponto, que será o de levantar voo.

Em seguida, com a ajuda de uma linha na diagonal formando 45º com esse ponto, penduraram o avião sobre o prédio com outra linha.

Com os pontos de levantar voo, início do prédio e altura do avião, formou-se um triângulo retângulo imaginário, com cateto adjacente 46 cm, cateto oposto a calcular e um ângulo de 45º.

Com esse triângulo retângulo, consegue-se calcular a altura do avião no momento em que estava sobre o prédio, utilizando uma fórmula das razões trigonométricas.

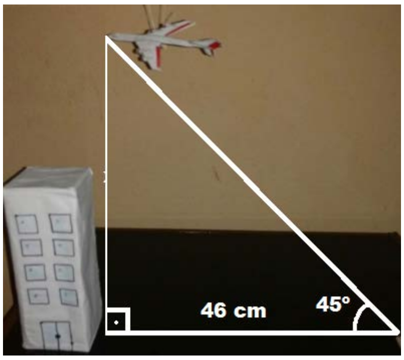
Figura 82 – Distância do Avião

Fonte: Autoria Própria

Figura 83 – Altura do Avião

Fonte: Autoria Própria

Figura 84 – Triângulo Imaginário




Fonte: Autoria Própria

Para descobrir a fórmula necessária para este cálculo, foram feitas duas perguntas:

-No triângulo retângulo imaginário, conhece-se a medida de que lado?

Resposta: cateto adjacente = 46 cm.

-Qual é o lado cuja medida desejamos descobrir?

Resposta: cateto oposto = x.

Se conhecem-se o cateto adjacente e deseja-se conhecer o cateto oposto, a fórmula é aquela que tem esses dois lados: tangente.

Tan 45° = $\dfrac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$

Ao consultar a tabela das razões trigonométrica (Anexo 1), encontra-se tangente de 45° = 1. Fato é que os alunos não precisaram da tabela, por já terem memorizado, uma vez que é ângulo notável.

Tem-se, então:

1 = $\dfrac{x}{46}$

x = 46.

Alguns alunos acharam desnecessário fazer tal conta, uma vez que já sabiam que o triângulo retângulo com ângulo 45° é a metade de um quadrado. Assim, se um lado é 46, o outro também será. Outros alunos apenas memorizaram que um triângulo retângulo com ângulo 45° tem catetos de mesma medida.

Assim, estima-se que a altura do avião naquele momento foi de 2,7, ou seja, não colidiria com o prédio, cuja altura era de 24 cm.

## 6.7 Distância entre Navios

Figura 85 – Distância entre Dois Navios

Fonte: Autoria Própria

Esta aula foi realizada após a aula teórica sobre razões trigonométricas com os 42 alunos e teve como objetivo medir a distância entre dois navios,conforme modelo de atividade do capítulo 4.7.

Para essa aula foram necessários:

- Dois objetos simulando os navios;

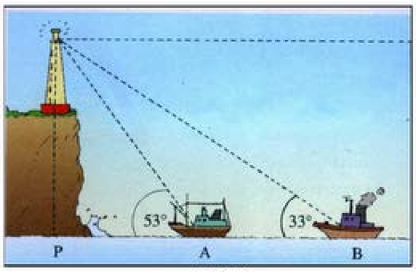
- 1 objeto simulando uma torre e

- 1 régua

Para este exercício, usamos o enunciado da atividade do capítulo 4.7, que dizia:

Os tripulantes dos navios A e B avistam o topo do farol segundo ângulos de 53º e 33º, respectivamente. Sabendo que o farol se encontra a 125 metros de altura, determine a distância entre os dois navios.

Figura 86 – Distância entre Dois Navios




Fonte: Autoria Própria

Observa-se, na figura, a formação de dois triângulos imaginários. O triângulo TPA e o triângulo TPB.

Uma vez conhecida a medida de um dos lados e um dos ângulos, conseguimos calcular outra medida utilizando uma fórmula de razões trigonométricas.

Para descobrir a fórmula necessária para este cálculo, foram feitas duas perguntas:

-No triângulo retângulo imaginário, qual é a medida de que lado conhecida?

Resposta: cateto oposto = 125 m.

-Qual é o lado cuja medida desejamos descobrir? Resposta: cateto adjacente = $\overline{PA}$ para o triângulo TPA e $\overline{PB}$ para o triângulo TPB

Ao conhecer o cateto oposto, deseja-se conhecer o cateto adjacente, a fórmula é aquela que tem esses dois lados: tangente.

Para o triângulo TPA, tem-se:

Tan 53º = $\dfrac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$

Ao consultar a tabela das razões trigonométrica (anexo 1), encontramos tangente de 53º a, aproximadamente, 1,32.

Tem-se, então:

1,32 = $\frac{125}{x}$

1,32x = 125.

x = 94,7 m, aproximadamente.

Para o triângulo TPB, tem-se
Tan 33° = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$

Ao consultar a tabela das razões trigonométrica (anexo 1), encontra-se tangente de 33° a, aproximadamente, 0,65.

Tem-se, então:

0,65 = $\frac{125}{x}$

0,65x = 125.

x = 192,3 m, aproximadamente.

Ao ter um navio a 94,7 e o outro a 192,3, a distância entre eles é de 97,6 m.

Estima-se, então, que a distância entre os navios era de 97,06 m.

## 6.8 Comprimento da Rampa

Esta aula foi realizada após a aula teórica com os 42 alunos sobre razões trigonométricas e teve como objetivo medir o comprimento de uma rampa para acesso aos cadeirantes, respeitado o ângulo de 20°, conforme a atividade 4.8.

Para essa aula foram necessários:

- 1 trena;

- 1 transferidor;

-Barbante e

- 1 treina

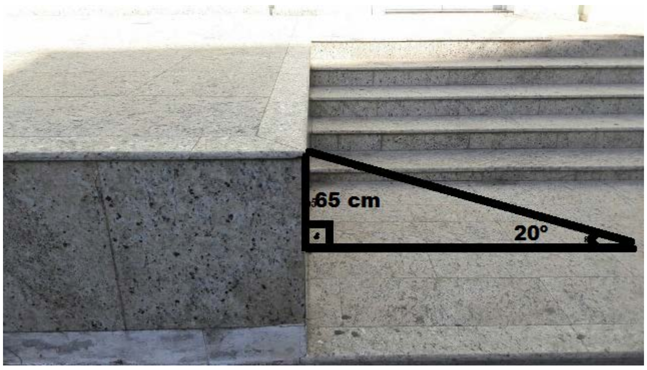
Os alunos mediram a altura da calçada: 65 cm.

Figura 87 – Altura da Calçada


Fonte: Autoria Própria

Formaram um triângulo retângulo imaginário, com cateto oposto medindo 65 cm e o ângulo exigido de 20°.

Figura 88 – Triângulo Imaginário




Fonte: Autoria Própria

Usando as razões trigonométricas, é possível calcular o comprimento que a rampa deverá medir.

Para descobrir a fórmula necessária para este cálculo, foram feitas duas perguntas:

-No triângulo retângulo imaginário, conhecem-se a medida de que lado?

Resposta: cateto oposto = 65 cm.

-Qual é o lado cuja medida desejamos descobrir?

Resposta: hipotenusa = x.

Ao conhecer o cateto oposto, deseja-se conhecer a hipotenusa, a fórmula é aquela que tem esses dois lados: seno.

Sen 20º = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ hipotenusa}$

Ao consultar a tabela das razões trigonométricas (anexo 1), encontramos seno de 20º = 0,34.

Tem-se, então:

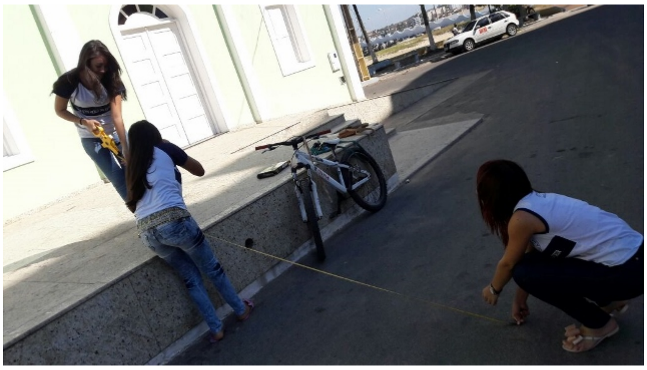
0,34 = $\frac{65}{x}$

0,34x = 65.

x = 191,1 cm.

Os alunos conferiram medindo essa distância, encontram um valor bem próximo: 189,8 cm.

Figura 89 – Tamanho da Futura Rampa



Fonte: Autoria Própria

## 6.9 Tamanhos no Portão

Esta aula foi realizada após a aula teórica sobre teorema de Pitágoras com os 42 alunos e teve como objetivo medir o tamanho de uma madeira para colocar na diagonal do portal, afim de reforçá-lo para não ceder, conforme modelo de atividade do capítulo 4.9.

Para essa aula foram necessários:

- Um portão e;

- 1 trena.

Os alunos mediram o tamanho na vertical do espaço que a madeira diagonal usará.

Figura 90 – Espaço Vertical

Fonte: Autoria Própria

Depois mediram o espaço horizontal:

Figura 91 – Espaço Horizontal

Fonte: Autoria Própria

Usando o Teorema de Pitágoras, em que as medidas vertical e horizontal são os catetos, conseguimos calcular o tamanho da hipotenusa, que será a madeira na diagonal.

$c^2 = a^2 + b^2$

$x^2 = 1,34^2 + 1,07^2$

$x^2 = 1,79 + 1,15$

$x^2 = 2,94$

$x = \sqrt{2,94}$

A madeira na diagonal deveria ter 1,71 m, segundo os cálculos. Ao medir, encontrou-se um valor próximo: 1,67 m.

## 6.10 Diagonal do Quadrado

Esta aula foi realizada após a aula teórica sobre teorema de Pitágoras com os 42 alunos e teve como objetivo medir o tamanho da diagonal de um quadrado conforme modelo de atividade do capítulo 4.10.

Para essa aula foram necessários:

- 1 quadrado de cartolina;

- 1 régua e

- caneta

Os alunos mediram o tamanho do lado do quadrado. Na verdade, eles propositalmente cortaram-no com 50 cm de lado.

Figura 92 – Quadrado de Cartolina

Fonte: Autoria Própria

Depois, traçaram uma diagonal:

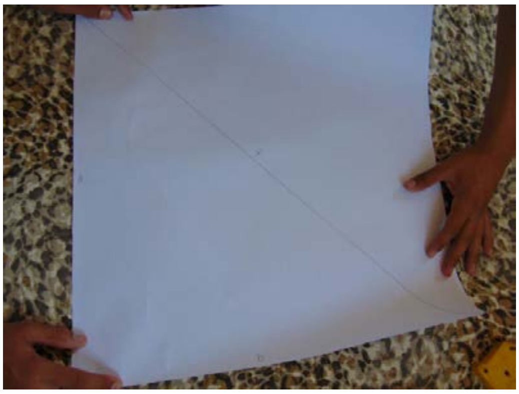
Usando o Teorema de Pitágoras, em que as medidas dos lados são os catetos, consegue-se calcular o tamanho da hipotenusa, que será a diagonal.

$c^2 = a^2 + b^2$

$x^2 = 50^2 + 50^2$

$x^2 = 2.500 + 2.500$

Figura 93 – Diagonal do Quadrado



Fonte: Autoria Própria

$x^2$ = 5.000

x = $\sqrt{5.000}$

A medida da diagonal simplificada será 50$\sqrt{2}$.

Muitos alunos não fizeram o cálculo, porque já sabiam que a diagonal do quadrado será sempre o tamanho do lado seguido da raiz de 2. Neste caso, como o lado é 50, a sua diagonal vai medir 50$\sqrt{2}$. Porém, para medidas no mundo real, usamos em decimal, que é, aproximadamente, 70,7 cm.

Figura 94 – Diagonal do Quadrado

Fonte: Autoria Própria

Ao conferir o tamanho da diagonal, houve um erro mínimo: 0,1 cm.

## 6.11 Altura do Triângulo Equilátero

Nossa última aula prática foi realizada após a aula teórica sobre o teorema de Pitágoras e teve como objetivo medir o tamanho da altura no triângulo equilátero, conforme modelo de atividade do capítulo 4.11.

Para essa aula foram necessários:

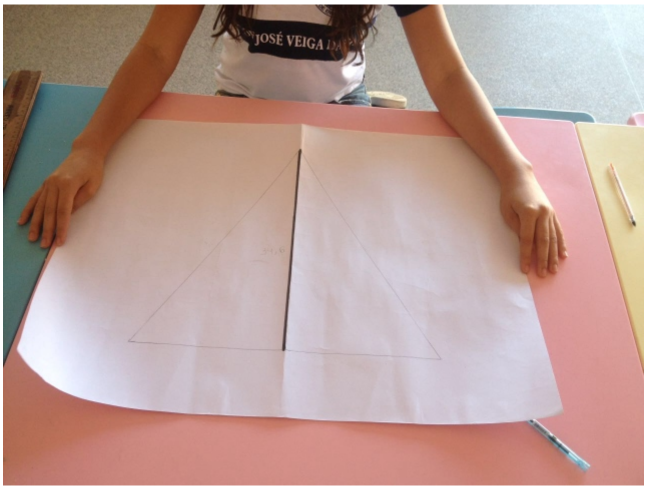
- 1 triângulo com os três lados de mesma medida de cartolina;

- 1 régua e

- caneta

Os alunos mediram o tamanho do lado do triângulo. Na verdade, eles propositalmente cortaram-no com 40 cm de lado. Em seguida, traçaram a sua altura.

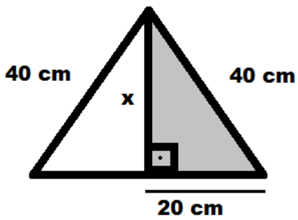
Figura 95 – Triângulo Equilátero de Cartolina




Fonte: Autoria Própria

A Trigonometria usada no 1° ano do Ensino Médio é calculada a partir de triângulos retângulos. Neste caso, como tem-se um triângulo equilátero, vamos considerar apenas a sua metade na vertical.

Figura 96 – Metade do Triângulo Equilátero




Fonte: Autoria Própria

Usando o Teorema de Pitágoras, conseguimos calcular o tamanho da altura, que é um dos catetos do novo triângulo formado.

$c^2 = a^2 + b^2$

$40^2 = 20^2 + x^2$

$1600 = 400 + x^2$

1600 - 400 = $x^2$

$x^2$ = 1.200

x = $\sqrt{1.200}$

A medida da altura simplificada será $20\sqrt{3}$.

Muitos alunos não fizeram o cálculo, porque já sabiam qe a altura no triângulo equilátero será sempre $\frac{l}{2}\sqrt{3}$, ou seja, é a metade do tamanho do lado com a raiz de três. Neste caso, como o lado é 40, a metade é 20 e a sua altura vai medir $20\sqrt{3}$

Porém, para medidas no mundo real, usamos em decimal, que é, aproximadamente, 34,6 cm.

Ao conferir o tamanho da altura na cartolina, houve um erro mínimo: 0,2 cm.

Com este experimento, encerramos as aulas práticas propostas para o 1° ano do Ensino Médio da Trigonometria.

# Capítulo 7

# Conclusões

Este trabalho foi desenvolvido com o propósito de fornecer informações que poderão contribuir para que as aulas sejam mais interessantes, resultando em melhoria no desempenho por parte dos alunos.

Espero que minha contribuição tenha, de algum modo, deixado o legado de mais uma opção no vasto mundo de tentativas pedagógicas para melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

Longe de minha proposta tornar essas informações como verdades absolutas. O que se verificou é que, com a aplicação destas na minha turma do 1° ano do Ensino Médio matutino da Escola Professor José Veiga, foi válida.

Ao revisar os conteúdos antes de introduzir o novo, descobri que para muitos alunos não se tratava de revisão, pois nunca haviam visto tal coisa. Para aqueles que já haviam estudado, mas não lembravam, foi válido para recuperar os conhecimentos prévios que cada nova informação necessita. Para aqueles que já conheciam, foi-lhes dado a oportunidade de iniciar por um ponto de partida mais avançado, alcançando conceitos e propriedades mais complexas, ou seja, puderam aprofundar.

A ideia de revisão dos conteúdos prévios não foi uma perda de tempo, conforme analisado no capítulo 1.6, mas um investimento. De fato, constatou-se que nas aulas expositivas, a turma passou a participar mais, fazendo perguntas que antes não faziam. As dúvidas emanam daqueles que estão produzindo. O aluno fora do contexto não consegue fazer perguntas por não saber o que está acontecendo. A arte de formular perguntas é para aqueles que buscam a resposta.

Separar as atividades mais exigidas nas avaliações externas e livros, resultaram em menos dúvidas nas execuções dos exercícios na sala de aula e, considero ter sido um dos motivos do bom desempenho que aquela turma obteve na avaliação do Governo do Estado de Espírito Santo, numa prova conhecida como PAEBES (Programa de Avaliação da Educação Básica do Estado do Espírito Santo). A matemática teve a melhor nota dentre as outras disciplinas na escola, sendo esta a melhor nota dentre as escolas vizinhas, como Itapemirim, Presidente Kennedy, Iconha, Piúma e Anchieta. Tal suspeita se dá pelos comentários dos alunos, sujeitos do trabalho, dizendo que "tudo o que caiu o professor passou". A identificação com o contexto resultou na familiarização e velocidade para a compreensão do que se pedia, analiso.

Considero, ainda, que executar essas atividades na prática, quer seja na própria sala de aula, na rua, na casa do vizinho ou no rio, auxiliaram na abstração dos conceitos e até mesmo na memorização destes. Neste ano, aquela turma, agora no segundo, passou por um período de diagnóstico no início do ano letivo. O comentário feito pelo atual professor deles foi que ao falar de um conhecimento, os alunos lembravam da aula prática e citavam alguns fatos, ora pedagógico, ora engraçado ocasionado no momento. Voltando ao ano passado, alguns meses depois das aulas práticas, era comum surgirem perguntas em outro campo da matemática, como geometria, e toda uma explicação e demonstração para sanar aquela dúvida era substituído por poucas palavras, como "os dois navios", "o avião", "os palitos". As palavras tinham função de link. Uma vez dita, acessava uma complexidade de informações.

Além de melhor compreensão e memorização, considero que as aulas práticas alcançaram minha expectativa no que se refere à motivação dos alunos, causa principal do mal desempenho dos alunos, segundo a pesquisa com os professores (capítulo 1.1). Houve maior participação nas aulas teóricas, como se esperava. Tal percepção foi notória pelas perguntas insistentes dos alunos como "professor vai ter experimento para isso?"e "quando vai ter a próxima aula prática?".

Vale lembrar que tais sugestões tiveram embasamento teórico de David Ausubel, como está escrito no capítulo 1.11. Sobretudo, na ideia de que o aluno sem conhecimento prévio, em vão aprende o novo, por não ter onde ancorá-lo. Além disso, ele insistia na afirmação de que o aluno precisava relacionar o material com o abstrato de maneira consistente, e não arbitrária. As aulas práticas foram verificadas e confirmadas nas teorias de Ausubel.

Ao concluir este trabalho, ratifico minhas informações iniciais, que antes eram apenas ideias, agora, experimentada, tem base teórica suficiente para ser verificada em outras turmas do 1° ano do Ensino Médio.

Por fim, as avaliações feitas para verificar a eficiência das propostas estão no apêndice e anexo, assim como os resultados obtidos. Todavia, insisto em afirmar o que foi dito na introdução: "Apesar da avaliação do desempenho ter caráter sistematizado, interesse de alunos nas aulas não é traduzido pelos resultados nas avaliações, mas nos brilhos de seus olhos que pouco piscam enquanto estão prestando atenção nas aulas teóricas, ou nas gargalhadas e euforia ao verificarem um conceito ou uma propriedade, na prática.

# Referências

AUSUBEL, D. 5-aprendizagem significativa. 2011. Citado na página 28.

BAZIN, M. et al. Three years of living science: Learning from experience. *Science Literacy Papers, Oxford, Summer*, p. 67–74, 1987. Citado na página 23.

BORGES, A. T. Novos rumos para o laboratório escolar de ciências. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), v. 19, n. 3, p. 291–313, 2002. Citado na página 25.

CANDAU, V. *Maria. Rumo a uma nova Didática*. [S.l.]: Petrópolis: Vozes, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

CUNHA, M. I. D. *O bom professor e sua prática*. [S.l.]: Papirus Editora, 1989. Citado na página 23.

D'AMBRÓSIO, U. *Da realidade à ação*. [S.l.]: Grupo Editorial Summus, 1986. Citado na página 23.

FILHO, A. P. Aula teórica: quando utilizar? *Medicina (Ribeirao Preto. Online)*, v. 40, n. 1, p. 3–6, 2007. Citado na página 21.

FREIRE, P. Pedagogia da autonomia. rio de janeiro: Paz e terra, 1997. _. *A importância do ato de ler*, v. 29, 1997. Citado na página 22.

PESSOA, F. Palavras iniciais. *Revista de Comércio e Contabilidade*, v. 1, 1926. Citado na página 23.

SERAFIM, M. C. *A falácia da dicotomia Teoria-Prática*. [S.l.]: Nº, 2001. Citado na página 23.

VALENTE, J. A. Liberando a mente: computadores na educao especial. UNICAMP. Campiñas. BR, 1991. Citado na página 27.

YAMAMOTO, K. *Professor Brasileiro gasta 20 por cento do tempo de aula com indisciplina.* 2014. Disponível em: <http://educacao.uol.com.br/noticias/2014/06/25/professor-brasileiro-gasta-20-do-tempo-de-aula-com-indisciplina-segundo-estudo-da-ocde.htm>. Citado na página 24.

# Apêndices

# APÊNDICE A

# Pesquisa Inicial

# PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO
# DE MESTRADO DE CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

Responda as perguntas a seguir. Não há necessidade de assinar este questionário, para que sua identidade seja preservada.

1 – QUANTO AO DESEMPENHO DOS ALUNOS, DE MODO GERAL, NA TRIGONOMETRIA, VOCÊ JULGA:

( ) SATISFATÓRIO NENHUM PROFESSOR
( ) INSATISFATÓRIO 8 PROFESSORES

2 – QUE PROBLEMA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA TRIGONOMETRIA, VOCÊ JULGA SER: (PODE MARCAR MAIS E UMA OPÇÃO)

( ) FALTA DE CONHECIMENTOS BÁSICOS 8 PROFESSORES
( ) FALTA DE INTERESSE DOS ALUNOS 8 PROFESSORES
( ) FALTA DE RECURSOS PEDAGÓGICOS 6 PROFESSORES
( ) FALTA DE TEMPO PARA PLANEJAMENTO DAS AULAS 4 PROFESSORES
( ) FALTA DE CURSOS DE CAPACITAÇÃO PARA PROFESSORES 2 PROFESSORES

3 – CASO TENHA MARCADO MAIS DE UMA OPÇÃO ACIMA, ESCOLHA A QUE VOCÊ JULGA SER A MAIS COMPROMETEDORA.

OS 8 PROFESSORES RESPONDERAM FALTA DE INTERESSE DOS ALUNOS

___________________________________________________________________________

4 – QUAL A SUA SUGESTÃO PARA MELHOR ESSA REALIDADE?

MELHORAR O INVESTIMENTO NA EDUCAÇÃO (1); COBRAR MAIS DOS ALUNOS (2); TRAZER A FAMÍLIA PARA A ESCOLA (2); VALORIZAR O PROFESSOR (1); NÃO RESPONDERAM (2).

___________________________________________________________________________

___________________________________________________________________________

# APÊNDICE B

# Questionário 1

PESQUISA PARA TRABALHO DE MESTRADO

DE CARLOS EDUARDO MORAES PIRES

Responda as perguntas a seguir. Não há necessidade de assinar este questionário, para que sua identidade seja preservada.

1 – QUAL TIPO DE AULA VOCÊ JULGA SER MAIS IMPORTANTE?
( ) PRÁTICA
( ) TEÓRICA 4 PROFESSORES
( ) AMBAS 16 PROFESSORES

2 – VOCÊ TRABALHA COM AULAS PRÁTICAS COM QUE FREQUÊNCIA?

( ) TODOS OS CONTEÚDOS
( ) NENHUM CONTEÚDO 16 PROFESSORES
( ) POUCOS CONTEÚDOS 3 PROFESSORES
( ) MUITOS CONTEÚDOS 1 PROFESSOR

3 – CITE VANTAGENS DE SE TRABALHAR COM AULAS PRÁTICAS.
É MAIS INTERESSANTE (20 PROFESSORES), MARCA O ALUNO E NÃO DEIXA ESQUECER (16 PROFESSORES), DÁ SIGNIFICADO PARA A TEORIA (2 PROFESSORES), MOSTRA QUE HÁ APLICABILIDADE (1 PROFESSOR), MOSTRA QUE O PROFESSOR NÃO É TRADICONAL (1 PROFESSOR).

4 – E VANTAGENS DE TRABALHAR COM AULA TEÓRICAS.
DÁ MENOS TRABALHO (20 PROFESSORES), GANHA TEMPO (18 PROFESSORES), PREPARA OS ALUNOS PARA PROVAS EXTERNAS, QUE SÃO TEÓRICAS (12 PROFESSORES), NÃO GASTA DINHEIRO (4 PROFESSORES), NÃO DÁ DOR DE CABEÇA/ESTRESSE/ABORRECIMENTO (3 PROFESSORES), MANTEM A DISCIPLINA (2 PROFESSORES), O ALUNO APRENDE MELHOR (1 PROFESSOR).

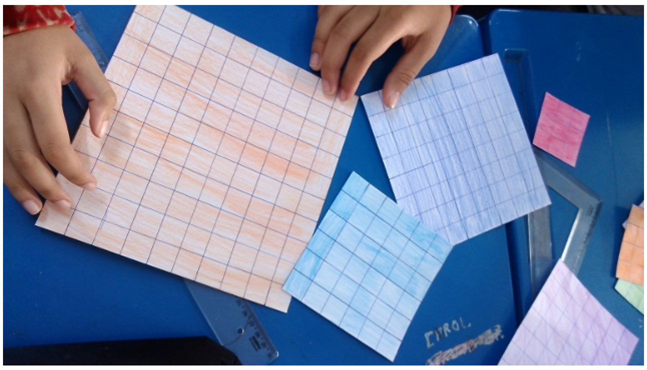
5 – CITE DESVANTAGENS DAS AULAS PRÁTICAS.
GASTA TEMPO (20 PROFESSORES), DÁ TRABALHO (20 PROFESSORES), GASTA DINHEIRO (4 PROFESSORES), OS ALUNOS FICAM DISPERSOS/INCONTROLÁVEIS/BAGUNCEIROS (4 PROFESSORES), PRECISA DE OUTROS PROFISSIONAIS PARA PROPICIAR O AMBIENTE (2 PROFESSORES), O AMBIENTE FICA DESSARUMADO E SUJO (1 PROFESSOR), O ALUNO FICA CONFUSO (1 PROFESSOR).

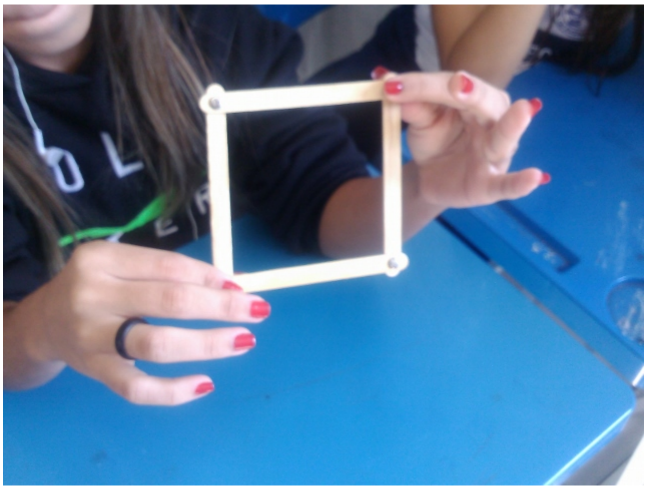
6 – CITE AS DESVANTAGENS DAS AULAS TEÓRICAS.
O ALUNO NÃO SE INTERESSA/NÃO PRESTA ATENÇÃO/FICA DISPERSO (19 PROFESSORES), NÃO VEJO DESVANTAGEM NA AULA TEÓRICA (1 PROFESSOR).

7 – NA SUA FORMAÇÃO DOCENTE, VOCÊ RECEBEU ORIENTAÇÕES DE COMO TRABALHAR OS CONTEÚDOS NA PRÁTICA?
NÃO (19 PROFESSORES), SIM (1 PROFESSOR).

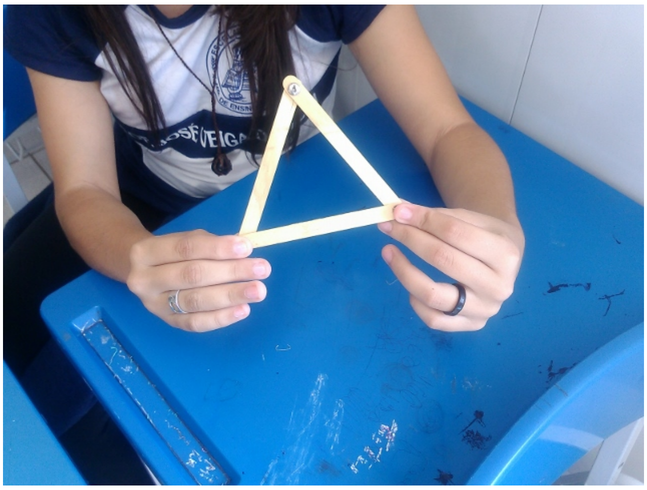
# APÊNDICE C

## Fotos

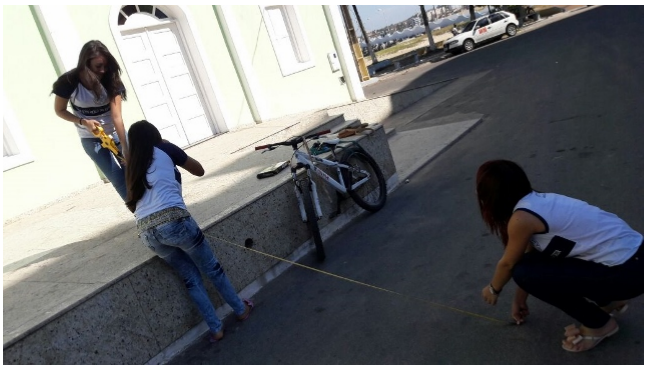





PROF. JOSÉ VEIGA DA




vonder



# Anexos

# ANEXO A

# Tabela das Razões Trigonométricas

## TABELA TRIGONOMÉTRICA

| ° | Seno | Cosseno | tangente |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,017452 | 0,999848 | 0,017455 |
| 2 | 0,034899 | 0,999391 | 0,034921 |
| 3 | 0,052336 | 0,99863 | 0,052408 |
| 4 | 0,069756 | 0,997564 | 0,069927 |
| 5 | 0,087156 | 0,996195 | 0,087489 |
| 6 | 0,104528 | 0,994522 | 0,105104 |
| 7 | 0,121869 | 0,992546 | 0,122785 |
| 8 | 0,139173 | 0,990268 | 0,140541 |
| 9 | 0,156434 | 0,987688 | 0,158384 |
| 10 | 0,173648 | 0,984808 | 0,176327 |
| 11 | 0,190809 | 0,981627 | 0,19438 |
| 12 | 0,207912 | 0,978148 | 0,212557 |
| 13 | 0,224951 | 0,97437 | 0,230868 |
| 14 | 0,241922 | 0,970296 | 0,249328 |
| 15 | 0,258819 | 0,965926 | 0,267949 |
| 16 | 0,275637 | 0,961262 | 0,286745 |
| 17 | 0,292372 | 0,956305 | 0,305731 |
| 18 | 0,309017 | 0,951057 | 0,32492 |
| 19 | 0,325568 | 0,945519 | 0,344328 |
| 20 | 0,34202 | 0,939693 | 0,36397 |
| 21 | 0,358368 | 0,93358 | 0,383864 |
| 22 | 0,374607 | 0,927184 | 0,404026 |
| 23 | 0,390731 | 0,920505 | 0,424475 |
| 24 | 0,406737 | 0,913545 | 0,445229 |
| 25 | 0,422618 | 0,906308 | 0,466308 |
| 26 | 0,438371 | 0,898794 | 0,487733 |
| 27 | 0,45399 | 0,891007 | 0,509525 |
| 28 | 0,469472 | 0,882948 | 0,531709 |
| 29 | 0,48481 | 0,87462 | 0,554309 |
| 30 | 0,5 | 0,866025 | 0,57735 |
| 31 | 0,515038 | 0,857167 | 0,600861 |
| 32 | 0,529919 | 0,848048 | 0,624869 |
| 33 | 0,544639 | 0,838671 | 0,649408 |
| 34 | 0,559193 | 0,829038 | 0,674509 |
| 35 | 0,573576 | 0,819152 | 0,700208 |
| 36 | 0,587785 | 0,809017 | 0,726543 |
| 37 | 0,601815 | 0,798636 | 0,753554 |
| 38 | 0,615661 | 0,788011 | 0,781286 |
| 39 | 0,62932 | 0,777146 | 0,809784 |
| 40 | 0,642788 | 0,766044 | 0,8391 |
| 41 | 0,656059 | 0,75471 | 0,869287 |
| 42 | 0,669131 | 0,743145 | 0,900404 |
| 43 | 0,681998 | 0,731354 | 0,932515 |
| 44 | 0,694658 | 0,71934 | 0,965689 |
| 45 | 0,707107 | 0,707107 | 1 |
| 46 | 0,71934 | 0,694658 | 1,03553 |
| 47 | 0,731354 | 0,681998 | 1,072369 |
| 48 | 0,743145 | 0,669131 | 1,110613 |
| 49 | 0,75471 | 0,656059 | 1,150368 |
| 50 | 0,766044 | 0,642788 | 1,191754 |
| 51 | 0,777146 | 0,62932 | 1,234897 |
| 52 | 0,788011 | 0,615661 | 1,279942 |
| 53 | 0,798636 | 0,601815 | 1,327045 |
| 54 | 0,809017 | 0,587785 | 1,376382 |
| 55 | 0,819152 | 0,573576 | 1,428148 |
| 56 | 0,829038 | 0,559193 | 1,482561 |
| 57 | 0,838671 | 0,544639 | 1,539865 |
| 58 | 0,848048 | 0,529919 | 1,600335 |
| 59 | 0,857167 | 0,515038 | 1,664279 |
| 60 | 0,866025 | 0,5 | 1,732051 |
| 61 | 0,87462 | 0,48481 | 1,804048 |
| 62 | 0,882948 | 0,469472 | 1,880726 |
| 63 | 0,891007 | 0,45399 | 1,962611 |
| 64 | 0,898794 | 0,438371 | 2,050304 |
| 65 | 0,906308 | 0,422618 | 2,144507 |
| 66 | 0,913545 | 0,406737 | 2,246037 |
| 67 | 0,920505 | 0,390731 | 2,355852 |
| 68 | 0,927184 | 0,374607 | 2,475087 |
| 69 | 0,93358 | 0,358368 | 2,605089 |
| 70 | 0,939693 | 0,34202 | 2,747477 |
| 71 | 0,945519 | 0,325568 | 2,904211 |
| 72 | 0,951057 | 0,309017 | 3,077684 |
| 73 | 0,956305 | 0,292372 | 3,270853 |
| 74 | 0,961262 | 0,275637 | 3,487414 |
| 75 | 0,965926 | 0,258819 | 3,732051 |
| 76 | 0,970296 | 0,241922 | 4,010781 |
| 77 | 0,97437 | 0,224951 | 4,331476 |
| 78 | 0,978148 | 0,207912 | 4,70463 |
| 79 | 0,981627 | 0,190809 | 5,144554 |
| 80 | 0,984808 | 0,173648 | 5,671282 |
| 81 | 0,987688 | 0,156434 | 6,313752 |
| 82 | 0,990268 | 0,139173 | 7,11537 |
| 83 | 0,992546 | 0,121869 | 8,144346 |
| 84 | 0,994522 | 0,104528 | 9,514364 |
| 85 | 0,996195 | 0,087156 | 11,43005 |
| 86 | 0,997564 | 0,069756 | 14,30067 |
| 87 | 0,99863 | 0,052336 | 19,08114 |
| 88 | 0,999391 | 0,034899 | 28,63625 |
| 89 | 0,999848 | 0,017452 | 57,28996 |
| 90 | 1 | 0 | - |

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| **SENO** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| **COSSENO** | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| **TANGENTE** | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |