UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE-UFS
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
PROMAT/PROFMAT

Aplicação da Teoria dos Grafos no Ensino Médio à Luz das Contribuições do PROFMAT

MARCELO SILVA DE SOUZA

São Cristóvão
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE-UFS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROMAT/PROFMAT

Aplicação da Teoria dos Grafos no Ensino Médio à Luz das Contribuições do PROFMAT

MARCELO SILVA DE SOUZA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROMAT/PROFMAT) da Universidade Federal de Sergipe, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Dr. Fábio dos Santos

São Cristovão
2016

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

	Souza, Marcelo Silva de
S729a	Aplicação da teoria dos grafos no ensino médio à luz das contribuições do PROFMAT / Marcelo Silva de Souza; orientador Fábio dos Santos. - São Cristóvão, 2016.
	97 f.: il.
	Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, 2016.
	1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Teoria dos grafos. 3. Matemática (Ensino médio). I. Santos, Fábio dos orient. II. Título.
	CDU 519.17:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aplicação da Teoria dos Grafos no Ensino Médio à Luz das Contribuições do PROFMAT

por

Marcelo Silva de Souza

Aprovada pela Banca Examinadora:

Fábio Dos Santos

Prof. Dr. Fabio Dos Santos - UFS
Orientador

Marta Élid Amorim Mateus.

Prof.ª Dr.ª Marta Elid Amorim Mateus - UFS
Primeiro Examinador

Gastão Florêncio Miranda Junior

Prof. Dr. Gastão Florencio Miranda Junior - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 29 de Julho de 2016.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma proposta de inserção do tema Percursos, da Teoria dos Grafos, no Ensino Médio. Inicialmente, foram apontadas algumas reformas, ocorridas nos últimos anos, em aspectos legais e curriculares da Educação Brasileira que possibilitam, ainda que seja de caráter introdutório, a inserção da Teoria dos Grafos na Educação Básica, pois tais reformas direcionam para contextualização, modelagem, resolução de problemas, entre outros aspectos naturais à Teoria. Essas características podem ser verificadas nos dois capítulos seguintes, através de seus principais problemas, e por intermédio da análise das dissertações do PROFMAT. Por fim, apresenta-se uma proposta, direcionada aos alunos do Ensino Médio que foi construída realizando-se a conceituação introdutória da Teoria dos Grafos necessária ao entendimento das ideias de percursos e melhor caminho e concluí-se com a apresentação do Algoritmo de Dijkstra, Método da Exaustão e Algoritmo Guloso.

PALAVRAS CHAVE: Grafos, Caminhos, Ensino Médio, PROFMAT.

ABSTRACT

This paper presents an inclusive proposition of the theme routes, in the graph theory, in high school. Initially, we identified some renovations in the last years, in legal and curricular aspects of Brazilian education that allow, even in an introductory way, the insertion of the Graph Theory in Basic Education, as such reforms direct to contextualization, modeling, solving problems, among other natural aspects of the theory. These characteristics can be verified in the following two chapters, through its main problems, and through PROFMAT dissertations analysis. Finally, we present a proposal directed to high school students that was built through the introductory concepts of graph theory necessary to understand the ideas of routes and critical path and concludes with the presentation of Dijkstra Algorithm, Method exhaustion and Greedy Algorithm.

KEY WORDS: Graphs, paths, high school, PROFMAT.

DEDICATÓRIA

Dedico aos meus pais José, Alice (in memorian),

a minha amada esposa Alessandra e meus três filhos Felipe, Rafael e André.

AGRADECIMENTO

A Deus, pelo início de tudo ao me conceder o dom da vida, pelo cuidado na minha caminhada aqui neste mundo através dos pais maravilhosos que me destes, pela minha maior conquista e maior bem: Minha família. E principalmente pela esperança de vida eterna depositada no meu coração.

A meus pai José e minha mãe Alice (in memorian) que com muito esforço e doação pessoal lutaram para que eu tivesse melhores oportunidades através de minha formação não só como pessoa mas também como estudante e consequentemente profissional.

A minha querida esposa Alessandra que nessa caminhada ao seu lado temos feito confirmar a palavra proclamada em nosso casamento: "Já não serão mais dois, mas uma só carne."Assim sendo não posso dizer que é minha conquista mas sim nossa, como é para tudo em nossa vida juntos.

Aos meus três filhos Felipe, Rafael e André que ao chegarem em minha vida deram um novo sentido e fizeram com que eu ampliasse minha noção do que é o amor de um pai por seus filhos. Por juntamente com minha esposa seguiram comigo a batalha diária entre o cuidados de pai, esposo e estudante. Sempre esforçaram-se para compreender porque o papai andava tão stressado e recarregavam minhas forças sempre que o cansaço me abatia.

A todos os professores da educação básica que passaram por minha vida aqui os represento por Nivalda e José Capitulino (professores de História), José Santana e Luiz Aquino (professores de Matemática), obrigado pela dedicação em trabalhar para transformar sonhos em realidade.

Aos meus professores da graduação, por guiarem meus primeiros passos no ensino superior e a inesquecível Dona Albertina sempre muito gentil secretária do Departamento de Matemática, na época considerada por um grande número de alunos como mãe.

Aos professores do PROFMAT pela dedicação e por terem abraçado a proposta da SBM.

À CAPES e à SBM pela bolsa e pela proposta que facilitou a continuidade dos estudos de professores que se não fosse nos moldes do PROFMAT, apesar da competência da maioria, não seria possível cursar um mestrado.

A Secretaria Municipal de Educação de Aracaju na pessoa da Ilustríssima Secretária de Educação Professora Márcia Valéria Lira Santana pela conceção da licença para estudos, que apesar de ser um direito, é preciso contar com o bom senso de administradores comprometidos com o desenvolvimento da educação, como é o seu caso.

Aos coordenadores e diretores da Escola Estadual "José de Alencar Cardoso"e Escola Municipal de Ensino Fundamental "Manoel Bomfim"pela compreensão e adequação de meus horários e também aos colegas professores que compreenderam essa situação substituindo minhas ausências.

Aos responsáveis pela biblioteca do SESC - Siqueira Campus, em especial à funcionária Alessandra que sempre manteve o ambiente propício ao estudo.

Aos colegas de curso que tornaram os sábados mais divertidos e agradáveis, em especial a Tadeu pela consultoria no uso do Latex sempre que surgia alguma dúvida e ainda por juntamente com Cleverton nos presentearem com suas genialidades, ao nobre casal Suely e Ronald que me ajudaram nas dificuldades, aos colegas que encabeçaram o grupo de estudos Pedro e ao amigo Fernando a quem tenho uma grande gratidão pois na graduação foi instrumento de Deus na minha vida, quando me indicou a uma vaga para professor , sem essa vaga não poderia ter continuado o curso, valeu mesmo Fernando.

Ainda aos colegas Adailson ligeirinho, Dermeval e suas pérolas, Josué pela nobreza em seus atos, Marcus pelas suas piadas, Leonardo e Kelpes pelas suas estórias de mergulhos em águas profundas, Moíses, Walisson, Márcio caladinho, Márcio engenheiro,

Aline, Roberto e Rômulo valeu pelos bons momentos, a companhia agradável tornou os sábados menos cansativos.

Ao Amigo Marcone pelas manhãs de estudo preparatório para o exame de qualificação aprendi muito com você valeu mesmo.

Ao meu irmão e sempre companheiro Goes, valeu pela torcida.

A minha comadre Nelma e minha sogra e segunda mãe Alaíde por cuidarem tão bem de meus filhos enquanto estive ausente.

As Amigas Priscila e Angleide que sempre torcem pela sucesso de nossa família.

Ao Professor Fábio, o qual conheci ainda na graduação mas que já apresentava ainda jovem os moldes de um grande matemático que surgia, obrigado por ter acolhido o tema que propus e pela confiança depositada em minha capacidade.

Aos membros da banca por aceitarem contribuir com este trabalho com observações ou críticas.

Por fim a todos os amigos, colegas parentes que torceram por mim nessa longa jornada.

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

Descobrir caminhos ótimos, implantar uma ideia a um grupo, casamentos estáveis, distribuição de pessoal para desempenho de funções, organizar um time para obter melhor desempenho, ligação de serviços(água, luz, telefonia, etc.), verificar qual time tem maior tendência de vencer um campeonato, são apenas alguns exemplos, em relação à amplitude de aplicações que os estudos sobre Teoria dos Grafos têm demonstrado.

De origem um tanto peculiar, baseada em um problema, que até mesmo para seu precursor, foi considerado como simples desafio a Teoria dos Grafos, mostrou no decorrer dos anos sua força e amplitude. Com os avanços computacionais a referida teoria tem elevado ainda mais seu rol de aplicações e apreciadores, tal característica levantou o interesse de alguns professores pesquisadores à estudar a possibilidade de implantar alguns de seus conceitos iniciais ainda no ensino básico.

Sua forma particular de tratar situações problemas auxiliam na contextualização e modelagem de situações e o aprofundamento de seus estudos em níveis mais elevados demonstram também a potencialidade matemática que pode desempenhar. Como uma das funções da escola é a formação dos indivíduos para situações inovadoras, essas características da Teoria dos Grafos somadas a tantas outras confirmam a importância de refletir sobre a possibilidade da implantação de conceitos de Grafos na educação básica.

Oferecer um ensino matemático de qualidade de forma a atender tanto os mais apaixonados por esta ciência quanto àqueles voltados as Ciências Humanas ou Linguagens é o que almeja todo professor de Matemática. Para tanto faz-se necessário entender o contexto que configura-se atualmente a população e sua formação.

A sociedade evoluiu muito nas últimas décadas não só do ponto de vista tecnológico como também, de pensamento, comportamento entre outros, essa evolução permitiu uma velocidade maior de novas conquistas científicas e avanço da tecnologia.

A forma de ver o mundo mudou pois com o advento da *internet* e os avanços na área de comunicação, um número bem maior de pessoas, comparado a décadas atrás, conhecem o que ocorre mundo afora. Esse novo indivíduo precisa de um novo tipo de orientação e sendo a escola, a principal instituição de formação intelectual, cabe a ela adequar-se a esse novo molde de alunos que ela recebe.

Diante de tal situação, no Brasil, um conjunto de ações vem sendo tomadas para oferecer uma escola adequada a nova configuração de aluno que as instituições de ensino tem acolhido. Das ações destacamos a Lei Nº 9.394/96(LDB), as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) e os Parâmetros Curriculares Nacionais(PCNs). Nestes documentos é priorizado um ensino contextualizado com modelos do quotidiano, uma maior participação do aluno no processo de aquisição do conhecimento através da exposição à situações problemas que os levem a pensar e desenvolver o raciocínio lógico. Todos esses anseios originaram diversas discussões, seminários, encontros, debates entre outras estratégias com o propósito de construir propostas curriculares cada vez mais próximas de um modelo que possa atingir tais demandas.

A criação da modalidade de mestrado profissional, que possue a característica de ser direcionada a profissionais em exercício e cujos trabalhos de conclusão podem contemplar a aplicação e desenvolvimento da prática profissional, favoreceu o surgimento do Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, promovido pela SBM e patrocinado pelo Governo Federal: o PROFMAT. Ele é um curso direcionado principalmente a professores de Matemática da escola pública em regência de classe.

O PROFMAT surge como uma das ações que atendem a LDB no que diz respeito a formação continuada e aperfeiçoamento de professores em todo país e tem apresentado resultados satisfatórios que podem ser observados pelo número de profissionais concludentes como também pela qualidade dos trabalhos apresentados.

O presente trabalho tem como objetivo geral a elaboração de uma proposta de implementação da Teoria dos Grafos no ensino básico e baseou-se para tanto, nos documentos e leis supracitados e em dissertações que abordaram o tema da Teoria dos Grafos. Essas dissertações foram apresentadas por professores de todo país ao PROFMAT. A pesquisa apresenta uma proposta de trabalho com tal teoria para o Ensino Básico, mais precisamente o Nível Médio. Apesar de serem apontados por alguns trabalhos sua possibilidade de implementação ainda no ensino fundamental a pesquisa direcionou para o Ensino Médio por fundamentar o estudo dos conhecimentos básicos da teoria com a linguagem de Conjuntos e o estudo do número total de caminhos com a utilização do produto de Matrizes. A escolha do tema se deu tanto pela origem quanto pela evolução das pesquisas, que quanto mais se aprofunda sobre o tema mais eleva-se o número de aplicações e também por apresentar uma base teórica muito simples, de fácil entendimento e aplicabilidade.

As dissertações apresentadas ao PROFMAT foram tomadas como principal fonte teórica por três motivos:

- Tornar conhecido o acervo de trabalhos sobre Teoria dos Grafos produzidos pelos professores concludentes do Mestrado Profissional do PROFMAT;
- Visualizar o direcionamento das pesquisas nas diversas regiões do Brasil sobre a aplicação da teoria à educação básica, pois foi possível consultar trabalhos de todas as regiões do país como pode ser visto na Tabela 1;
- Apresentar um trabalho diferenciado visando uma proposta diferenciada.

Foram realizados vários acessos ao acervo eletrônico das dissertações apresentadas ao PROFMAT entre os anos de 2012 e 2015, através da página de endereço:www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes. Durante tais visitas foram realizados *downloads* de 26 dissertações e 1 trabalho de conclusão de curso que tinham em seu título a palavra Grafos, num total 27 pesquisas. Foram consultados, também, os trabalhos, que apesar de não possuírem a palavra chave Grafo em seus títulos, tratam em seu conteúdo de parte da teoria. Destes foram escolhidos de forma aleatória mais um trabalho de conclusão de curso e três dissertações. A última visita foi realizada no dia 9 de março de 2016 e o número total de trabalhos do PROFMAT consultados para esta pesquisa foi de 30. Um trabalho não foi consultado pois, algum problema com o arquivo na página não permitiu o acesso.

Tabela 1: Distribuição por região, das pesquisas do PROFMAT consultadas.

Região	**Estado**	**Número de Dissertações**
Sul	Santa Catarina	1
	Paraná	1
Sudeste	Espírito Santo	1
	Minas Gerais	5
	Rio de Janeiro	3
	São Paulo	6
Nordeste	Bahia	3
	Ceará	1
	Paraíba	3
	Pernambuco	1
	Piauí	1
	Sergipe	2
Centro-Oeste	Distrito Federal	1
Norte	Amazonas	1

Organização: O autor, 2016.

A leitura foi feita de forma dinâmica priorizando-se, sumário, introdução e quando de relevância para proposta alguns capítulos. Realizou-se anotações e verificou-se um número razoável de trabalhos que, não só tratam da Teoria dos Grafos, mas que também sugerem a sua aplicação ao Ensino Básico, tanto Fundamental quanto Médio, alguns deles com aplicações e comentários. Ficou claro que a intenção de implantar a teoria para Educação Básica não se trata de uma ideia sem fundamentos, mas de uma possibilidade de trabalhar a contextualização, modelagem e raciocínio lógico via aplicação de problemas, isto na visão de professores que possuem experiência com o nível de escolaridade em questão. Todavia, o estudo em questão busca diferenciar-se dos demais por apresentar uma proposta de introdução Teoria dos Grafos através de um material construído buscando, atender a legislação, proposta curricular e adequação ao nível pretendido.

Para direcionar a pesquisa foram elaboradas as seguintes questões norteadoras:

1. Os documentos oficiais da educação respaldam a introdução da Teoria dos Grafos nos currículos de matemática da educação básica?

2. Qual a origem da teoria e quais seus avanços e aplicabilidades?

3. Qual tem sido a contribuição do PROFMAT nos estudos relativos a teoria e sua possível aplicação no Ensino Básico?

4. Que conceitos trabalhar na Ensino Médio? Como trabalhá-los?

Para respondê-las a pesquisa está estruturada da seguinte forma:

No capítulo 1 foi apresentada a evolução dos documentos e discussões sobre currículo. Nele fundamentou-se a possibilidade de introdução dos conceitos da Teoria dos Grafos, baseado em trechos de documentos oficiais. A discussão proposta no capítulo foi baseada na LDB, Parâmetros Curriculares Nacionais, Diretrizes Curriculares, Orientações Curriculares Nacionais e outros documentos que enquadravam-se na resposta aos questionamentos. Todo material encontrado no acervo da biblioteca do portal criado para elaboração do Currículo Básico Nacional conduzida pelo Ministério da Educação(MEC).

No capítulo 2 um histórico com característica de linha do tempo semelhante ao feito por BOAVENTURA NETTO [5] com o intuito de situar, o leitor sobre a evolução histórica ,os pioneiros no trabalho com a teoria e suas primeiras aplicações. O histórico foi tanto colhido nas obras de BOAVENTURA NETTO [5] e [6] quanto nas pesquisas consultadas.

No capítulo 3, apresenta-se discussão da modalidade de mestrado profissional seguido de um breve histórico da criação do PROFMAT. Na sequência do capítulo realiza-se uma análise dos trabalhos apresentados ao PROFMAT. Os resultados das leituras foram utilizados para construir os sub-ítens dos capítulos indicando os trabalhos com a melhor apresentação dos temas verificados. Neste capítulo foi realizada uma revisão da literatura apenas com os trabalhos consultados, visando contribuír com futuros pesquisadores na procura dos temas sobre a teoria, para tanto indica-se o tema e os trabalhos que direcionam para ele.

No capítulo 4 a intenção é apresentar um material direcionado ao Ensino Médio. O rigor matemático foi observado, porém a linguagem e os exemplos foram intencionalmente simplificados para atender o nível no qual se quer aplicar. Vale ressaltar que trabalhos bem conceituados e rigorosos já existem no acervo consultado, até de forma repetitiva, por esse e outros motivos o diferencial deste material está justamente na tentativa de adequação ao Ensino Médio. Por fim, espera-se com este trabalho contribuir para esclarecer os que desejam conhecer a teoria e facilitar o planejamento dàqueles que tiverem a intenção de introduzir tais conceitos na Educação Básica.

Capítulo 1

Fundamentos Educacionais e Base Legal: Possibilidade da inserção da Teoria dos Grafos na Educação Básica

Não basta ensinar ao homem uma especialidade. Porque se tornará assim uma máquina utilizável, mas não uma personalidade. [...] Deve aprender a compreender as motivações dos homens, suas quimeras e suas angústias para determinar com exatidão seu lugar exato em relação a seus próximos e à comunidade. [...] É preciso, enfim, tendo em vista a realização de uma educação perfeita, desenvolver o espírito crítico na inteligência do jovem....(Albert Einstein)

1.1 Transição da Sociedade e Ensino de Matemática

A transição do século vinte para o século vinte e um foi marcada por um avanço tecnológico que proporcionou uma revolução no tratamento e transmissão das informações. Recursos como a internet possibilitaram a veiculação de notícias no mesmo instante que ocorrem, o acesso a elas ampliou-se, e a maioria dos indivíduos tomam conhecimento dos fatos mundiais, na maioria das vezes imediatamente a sua ocorrência, via redes sociais.

Aparelhos como calculadoras, relógios, celulares entre outros, tornaram-se mais populares e a utilização dos mesmos, mais freqüentes. O choque de culturas é constante e a sociedade atual sofre mudanças de paradigmas freqüentemente, valores que até pouco tempo atrás perduravam décadas, sofrem mudanças periódicas. A população tornou-se mais dinâmica e necessita de um novo tipo de orientação.

À escola, responsável pela formação dos indivíduos, cabe a tarefa de adequar seus currículos a essa nova ordem mundial correndo o risco de tornar-se obsoleta e desinteressante. O processo educativo tem que acompanhar tais mudanças realizando uma revisão curricular, metodológica e técnica. Adequar o estudo das disciplinas ao novo, possibilitando um ensino-aprendizagem, sempre que possível, dinâmico, autônomo e participativo são alguns dos seus maiores desafios. As instituições de ensino precisam desenvolver a autonomia, o raciocínio cognitivo e aplicabilidade dos saberes, para tanto se faz necessário, no ponto de vista da matemática, uma maior exploração de conteúdos que possibilitem a modelagem e resolução de problemas. Esse é seu desafio para o novo milênio, buscar uma nova visão, para melhor compreender e adaptar-se as novas exigências emergentes, como pode ser verificado em D'Ambrosio (2001,p.16):

> Estamos, na entrada do novo milênio, de posse de novas visões do cosmos, do planeta, da sociedade e do homem. Se considerarmos que a matemática acadêmica e a educação matemática se fundaram em visões do cosmos [medida de tempo e movimentos celestes, astronomia], da natureza [medições de terra, reconhecimento e delimitação de espaço, cartografia, movimento e velocidade], da sociedade[mercantilismo, estatística e probabilidades] e do homem [cognição, aprendizagem], é óbvio perguntar como a matemática reage às profundas modificações de suas bases, isto é, às novas visões do cosmos, da natureza, da sociedade e do homem.

No contexto da modernização tecnológica a Matemática é uma peça essencial, pois é base para praticamente todas as novas ideias e aplicações relacionadas as novas tecnologias. As devidas adequações dos currículos fazem-se necessárias, pois se por um lado desempenha esse importante papel, por outro é uma das disciplinas que mais retêm e afasta os alunos, como comenta D'Ambrósio (2001, p. 16): *"A matemática é o maior fator de exclusão nos sistemas escolares. O número de reprovações e evasões é intolerável.* Essa ambiguidade se dá por um currículo ultrapassado que não estimula o interesse, suas atividades são mecânicas e descontextualizadas, falta a ele dinamismo, aplicabilidade e liberdade, como afirma Lellis e Imenes (2001,p.42), *"Isso reflete na grande quantidade de exercícios que se resumem a "calcular", "obter"e "efetuar". Quase tudo consiste em aplicar fórmulas adequadas em contextos exclusivamente matemáticos.".* Contudo não tem-se o interesse de excluir o contexto próprio da matemática das escolas, pois mesmo nas orientações curriculares para o ensino médio verifica-se o reconhecimento da matemática com características próprias de desenvolvimento tecnológico ou simplesmente teórico.

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p.69)

Para tanto precisamos de:

> [...] um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.(BRASIL, 2006, p.70)

O problema é que maioria das vezes só se trabalha de forma mecânica sendo que é preciso mostrar a aplicabilidade dos saberes sejam eles no quotidiano ou teórico. O importante é explorar a vasta aplicabilidade que os conceitos matemáticos desempenham despertando a autonomia, o raciocínio lógico, a criatividade entre outras qualidades que um problema matemático bem elaborado pode levar o aluno a desenvolver desenvolver. Desprezar o caráter de aplicabilidade ou o caráter teórico dedutivo representam para o ensino da Matemática um grande prejuízo e um distanciamento das finalidades propostas nos documentos educacionais.

O ensino das quatro operações básicas é enfadonho, descontextualizado e desinteressante, mesmo por que muitos alunos já questionam qual a razão do estudo de tais operações se existem as calculadoras e os programas para computadores, hoje bem mais acessíveis. A utilização desse tipo de tecnologia, possibilitaria a exploração de outros conceitos, tais como os Princípios Aditivo e Multiplicativo em Combinatória e a busca do melhor caminho no trabalho com Grafos utilizando-se do Método da Exaustão. Estes são apenas alguns exemplos de aplicação que poderiam expandir o ensino com a utilização dos mesmos, uma vez que possuem uma característica de fácil contextualização e interdisciplinaridade.

A Combinatória e o estudo de Grafos, estimulam o raciocínio cognitivo através da exploração de situações problemas que, quando bem elaboradas, aplicam-se a realidade. A impossibilidade de usar calculadoras, devido à discussão sobre o tema reduz nossa prática pedagógica e impede o desafio aos alunos como afirma Rocha (2001, p.23)

> Até hoje ainda discutimos se devemos permitir ou não o uso das calculadoras na sala de aula, enquanto muitas escolas privadas já utilizam o computador. Dessa forma, estamos reduzindo nossa prática pedagógica a um mero treinamento baseado na repetição e memorização; deixando de lado a experimentação, o questionamento, a inquietação, a criatividade e a rebeldia.

No Brasil nas últimas duas décadas que antecederam a virada do milênio e a década que a precedeu, foram promovidas importantes reuniões debates e ações em torno da legislação e currículo que direcionaram, ou pelo menos era o que pretendia-se, à um ensino mais autônomo, participativo e eficiente, ofertado pelas instituições de ensino. Uma característica foi a integração de professores, pais, alunos e comunidade, tendo estes três últimos ganhado representação na tomada de algumas das decisões via conselhos de classe, comitês comunitários e portais criados pelo Ministério da Educação. As consequências de tais ações concretizaram-se em Leis e documentos que passaram a regulamentar e direcionar a educação em âmbito nacional.

1.2 LDB e Documentos Curriculares

O primeiro documento, de uma sequência que viriam depois complementá-lo, foi a Lei 9.394/96 ou como é mais conhecida LDB ou ainda Lei Darcy Ribeiro, que regulamenta as diretrizes e bases da educação brasileira. O início de tramitação no ano de 1988 foi plenamente concluída e aprovada no ano de 1996, após apresentação de um substitutivo indicado pelo então senador Darcy Ribeiro no ano de 1993. O mesmo alegou inconstitucionalidade de diversos artigos do projeto inicial que continha 298 artigos, sugerindo um outro projeto com 91 artigos.

Para não fugir o enfoque, nesse trabalho será destacado os pontos que mais influenciam a proposta do mesmo. No texto final da LDB, para fins do trabalho que aqui se apresenta, podemos destacar o fim da exclusividade de ingresso no ensino superior via vestibular, pois aumenta a autonomia do professor do Ensino Médio, que em muitos casos sentia-se quase que obrigado, a apresentar dicas e memorização de fórmulas. Ainda no documento é citado a realização de exames para verificação do ensino, hoje concretizadas através da Prova Brasil, aplicada as turmas de 5º ano e 9º ano, do ensino fundamental, e 3º ano, do Ensino Médio, e ainda para o Ensino Médio tem-se o ENEM, usado atualmente como principal ferramenta de ingresso no ensino superior nas instituições públicas.

Outro ponto destacam-se também a valorização do profissional, e a oferta e condições de continuidade dos estudos. Vários cursos de pós-graduação surgiram em todo país em número mais elevado os de nível de especialização, e em número menor mestrados e doutorados. A procura por esses cursos deu-se principalmente por que muitos planos de carreira do magistério contemplavam avanços de nível consequentemente financeiros, referente ao grau de formação àqueles que obtivessem titulação.

Atualmente, destaca-se, o PROFMAT que assegura ao professor que está em sala de aula a oportunidade de ingressar em um curso de Mestrado Profissional direcionado a professores da área de Matemática. Para grande parte seria quase impossível se fossem cursar um Mestrado Acadêmico devido aos horários de aulas e diversos outros fatores. A criação do mestrado profissional contribui diretamente com o ensino, pois os professores que o concluem oferecem como retorno para sociedade melhorias em suas práticas pelo aperfeiçoamento em conteúdo, como também, na produção de trabalhos direcionados a sala de aula, alguns destes serão destacados nos capítulos seguintes, por profissionais que conhecem na sua vivência as dificuldades diárias da educação. Prepara-os também na posse de conceitos matemáticos mais aprofundados possibilitando uma atuação mais eficiente e eficaz na escolha de livro didático, autonomia de seu trabalho, seleção de atividades, proposta de currículo, entre outras.

Na sequência de documentos que sucederam a LDB estão os Parâmetros Curriculares Nacionais, os primeiros a serem lançados foram os do ensino fundamental que foi subdividido em dois níveis os direcionados 1ª à 4ª séries e o outros 5ª à 8 série. Publicados em 1997 traziam como novidade em cumprimento ao que é proposto na LDB, o estudo de temas transversais. Dentre os objetivos gerais podemos destacar dois que mais se enquadram para o trabalho que aqui é sugerido.

1. Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;

2. Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

O trabalho com Grafos, caso fosse adotado no currículo do Ensino Fundamental, seria uma importante ferramenta no êxito de tais objetivos. No primeiro por traduzir informações diferenciadas para um modelo geométrico, uma tabela ou matriz e no segundo por ser principalmente aplicado em resolução de problemas que estimulam necessariamente as características citadas tais como, os problemas da busca do melhor caminho. Apesar de acreditar na possibilidade de adequação do trabalho com grafos no Ensino Fundamental e a mesma ser apontada pelos trabalhos de BRITO [11], CARDOSO [13], LIMA [26], MORI [34], SILVA [38], SOUZA [41] e SOUZA [43], todos do PROFMAT, o enfoque do trabalho será dado ao Ensino Médio.

Antes dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio foram discutidas e publicadas as Diretrizes Curriculares Nacionais em 1998. A administração da época adotou uma política mais geral de desenvolvimento social, algumas das prioridades foram ações na área de educação, a reforma do Ensino Médio foi uma destas medidas. Tanto no Brasil como em outros países da América Latina, existe uma intenção de superar a extrema desvantagem existente entre os índices de escolarização e nível de conhecimento apresentados por aqui e os dados apresentados por países desenvolvidos. Particularmente, no que se refere ao Ensino Médio, citar-se-á ao menos dois fatores que apontaram a necessidade de tais mudanças: O primeiro por ser a última etapa do Ensino Básico, na qual os conceitos obtidos no Ensino Fundamental ganham caráter de aprimoramento e aplicações, objetivando à preparação para o possível curso superior. O outro fator é a forma de direcionamento dado aos concursos vestibulares na época, ocasionando uma fuga dos principais objetivos do aprendizado da Matemática.

A maioria dos estudantes secundaristas eram "adestrados" a responderem provas, pouco ou nada contextualizadas. Por outro lado, não podemos culpar apenas a disputa pelas vagas em universidades pelo afastamento da realidade, mas aparece como fator preponderante grande parte dos cursos de licenciatura e bacharelado que ainda não haviam adequado seus currículos à formação de professores e pesquisadores que tivessem uma nova visão nessa sociedade de transição com isso tornou-se necessário rever a forma como os profissionais que utilizam a matemática estavam sendo formados nas universidades. A problemática do ensino de matemática também tinha "raízes"no ensino universitário, diante disso também foi necessário levar formas de aplicabilidades de conceitos matemáticos às instituições de ensino superior. Como afirma Adrew e Mclones (1976, apud Bean, 2001,p.51).

> [...] os procedimentos seguidos pelo profissional na aplicação da matemática, foram transferidos ao ambiente matemático universitário como resposta ao baixo desempenho dos matemáticos recém formados em aplicar conceitos matemáticos aos problemas das empresas em que trabalham. [...]

Destacando-se como uma dessas ações, foram lançadas as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) objetivando orientar professores, procedimentos, curriculos em cumprimento a Lei Nº 9.394/96, que estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB). Esta prevê em seu Artigo 9º inciso IV, entre as incumbências da União, estabelecer, em colaboração com os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, competências e diretrizes para a educação infantil, o ensino fundamental e o ensino médio, que nortearão os currículos e seus conteúdos mínimos, de modo a assegurar formação básica comum. Justificando sua elaboração, com a consolidação do Estado democrático, as novas tecnologias e as mudanças na produção de bens, serviços e conhecimentos é que o MEC lança as Diretrizes Curriculares Nacionais.

A elaboração das DCN teve como base os princípios definidos na LDB e contribuições de professores de todo País e experiências, coletadas através do Seminário Internacional de Políticas de Ensino Médio, organizado pelo Conselho Nacional de Secretários Estaduais de Educação (CONSED). Neste Seminário foi possível verificar a problemática do Ensino Médio na visão de quem conhecia a Educação Secundária na Europa, América Latina e Estados Unidos da América do Norte. Dois outros eventos foram importantes para enriquecer ainda mais a proposta com contribuições, críticas e sugestões. Estes foram as duas audiências públicas.

As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) surgem, ao contrário do que vinha acontecendo, para dar significado ao conhecimento, via contextualização, integração de conceitos e disciplinas, via interdisciplinaridade e incentivar o raciocínio e capacidade de aprender.Fica claro em seu artigo primeiro, que elas aparecem como um conjunto de definições doutrinárias sobre princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização pedagógica e curricular em âmbito nacional com finalidade principal de consolidar os pressupostos da nova LDB. Além de deixar claro as intenções de formar no aluno a capacidade de aprender, a interdisciplinaridade e contextualização, em seus artigos iniciais, é no artigo 10, que na perspectiva de facilitar a interdisciplinaridade, organiza os conhecimentos que compartilham dos mesmos objetivos educacionais. Para isso reformula o currículo do Ensino Médio dividindo o conhecimento escolar em áreas do conhecimento. Sendo elas: Linguagens, Códigos e suas Tecnologias, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. (BRASIL [8],2000, p.104-105)

Na sequência destacam-se trechos do artigo, acompanhados de seus respectivos comentários que destacam o enquadramento da Teoria dos Grafos nos mesmos.

> Art. 10 . A base nacional comum dos currículos do ensino médio será organizada em áreas de conhecimento, a saber: [...] II - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, objetivando a constituição de habilidades e competências que permitam ao educando:
>
> a) Compreender as ciências como construções humanas, entendendo como elas se desenvolvem por acumulação, continuidade ou ruptura de paradigmas, relacionando o desenvolvimento científico com a transformação da sociedade.[...] (BRASIL [8] , 2000, p.104)

Comentário 1.2.1 *A trajetória histórica sobre a teoria dos grafos enquadra-se neste item, pois em seu início surgiu de uma situação lúdica baseada em um problema do quotidiano que mesmo após resolvido a teoria parou no tempo durante décadas, até ressurgir com novas aplicações que só aumentaram no decorrer do tempo. Hoje com a modificação para uma sociedade que avança no uso da tecnologia a teoria só tem a evoluir o seu rol de aplicações. Apresentar esse histórico da teoria aos alunos auxilia na compreensão de que o conhecimento matemático pode tanto surgir do quotidiano como também ser puramente teórico e em algum momento sua aplicabilidade pode ser descoberta na vida quotidiana ou para solucionar um entrave teórico.*

> b) Entender e aplicar métodos e procedimentos próprios das ciências naturais. (BRASIL [8] , 2000, p.104)

Comentário 1.2.2 *A matemática tem uma característica própria de construção de conhecimento. Produzir teoremas, demonstrações, corolários, definições etc., fazem parte desse fazer matemático. O contato com a Teoria dos Grafos possibilita esse entendimento, pois suas justificativas e demonstrações mais básicas não são tão abstratas e por se tratar de problemas palpáveis estimulam a curiosidade e raciocínio.*

> e) Identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações e interpretações.
>
> f) Analisar qualitativamente dados quantitativos representados gráfica ou algebricamente relacionados a contextos socio-econômicos, científicos ou quotidiano. (BRASIL [8] , 2000, p.104-105)

Comentário 1.2.3 *Ao representar situações com o auxílio de grafos, cria-se a possibilidade de posteriormente representá-los via matriz de adjacência ou matriz de incidência que são as representações matriciais da estrutura do Grafo. Dessa forma o aluno pode na sequência usá-las para realizar cálculos que podem fornecer informações relevantes sobre o problema estudado, um exemplo é encontrar o número de caminhos entre dois vértices.*

> g) Apropriar-se dos conhecimentos da Física, da Química e da Biologia e aplicar esses conhecimentos para explicar o funcionamento do mundo natural, planejar, executar e avaliar ações de intervenção na realidade natural. (BRASIL [8] , 2000, p.105)

Comentário 1.2.4 *Ao representar o grafo de ligações químicas ou da cadeia alimentar é possível elaborar explicações do funcionamento dos conceitos relativos a cada uma das disciplinas em questão (Química e Biologia) e efetivar o planejamento, execução e avaliação para intervir na realidade natural.*

j) Entender o impacto das tecnologias associadas às ciências naturais na sua vida pessoal, nos processos de produção, no desenvolvimento do conhecimento e na vida social. (BRASIL [8] , 2000, p.105)

Comentário 1.2.5 *No próprio histórico sobre a teoria dos grafos é possível verificar a relação entre a tecnologia e as ciências, uma sempre no seu tempo, auxiliando no desenvolvimento da outra e muitas das vezes determinante neste desenvolvimento, como foi o caso para Teoria dos Grafos que conseguiu um maior avanço graças ao surgimento dos computadores e em outro momento os Grafos contribuem para o sistema de busca na internet.*

l) Aplicar as tecnologias associadas às ciências naturais na escola, no trabalho e em outros contextos relevantes para sua vida.

m) Compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades quotidianas. (BRASIL [8] , 2000, p.105)

Comentário 1.2.6 *Os problemas relacionados a caminhos mínimos, caminhos máximos ou de alocação de pessoal, representam um forte exemplo de situações que com o uso da tecnologia via calculadoras ou computadores e usando a linguagem de matrizes é possível trazer a matemática até problemas que podem ir do quotidiano até níveis mais avançados.*

As DCNS já representaram um grande passo depois da LDB, mas tornou-se necessário que tais diretrizes tornassem mais detalhadas, foi então que a luz da L.D.B. e das DCNEM, os PCNS do Ensino Médio surgem com a apresentação de detalhes de ações a serem aplicadas. Inicialmente, é exposto de forma específica para cada área do conhecimento e em seguida uma exposição específica para cada disciplina, deixando explicito a intenção para cada uma delas.

Direcionando a atenção para as discussões de interesse do presente trabalho, verificou-se na parte três do documento, destinada às orientações para a área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, mais especificamente, na página quarenta e seis, que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática o trabalho com Grafos contempla a maioria dos itens de cada tema. Podem ser verificadas a possibilidade e a aplicabilidade que o trabalho com Grafos pode desempenhar na conquista dos mesmos. Dando sequência apresenta-se os trechos e comentários relacionados as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, tendo como ferramenta a Teoria dos Grafos.

Representação e comunicação

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
- Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Produzir textos matemáticos adequados.
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
- Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

(BRASIL [8], 1999, p. 46)

Comentário 1.2.7 *O trabalho com a Teoria dos Grafos enquadra-se neste tema pois, tem a característica de envolver vários tipos de representação Matemática, Conjuntos, Matrizes, Tabelas e até mesmo textos. O trabalho com matrizes pode ainda no Nível Médio servir de comunicação computacional.*

Investigação e compreensão

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.

- Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
- Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

(BRASIL [8], 1999, p. 46)

Comentário 1.2.8 *A característica dos Grafos em modelar situações contempla este item pois, por intermédio da resolução de problemas e do direcionamento que o professor der a sua resolução, é possível alcançar os itens apresentados.*

Contextualização sócio-cultural

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

(BRASIL [8], 1999, p. 46)

Comentário 1.2.9 *O caráter evolutivo da Teoria dos Grafos, apresenta em sua história a evolução paralela à evolução das tecnologias e sua aplicabilidade em química (ligações químicas), biologia (cadeia alimentar) e ainda outras situações, como por exemplo logística, direcionam o estudo ao cumprimento dos itens.*

Contrária ao que vinha acontecendo na educação brasileira, que promovia um ensino descontextualizado, compartimentado e de acúmulo de informações, para o novo modelo de sociedade, buscou-se dar significado ao conhecimento escolar, contextualizando, evitando a compartimentalização, aplicando a interdisciplinaridade, incentivando o raciocínio e a capacidade de aprender.

Os PCNEM de 1999 (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio), comparando com os do ensino fundamental, estes deixam a desejar no que diz respeito as orientações de atividades com as quais os professores poderiam explorar os conteúdos. Muitas críticas foram feitas a eles nesse ponto, motivado, possivelmente, por essa deficiência é que o MEC lançou em 2002 um texto complementar, os PCNEnsino Médio+, para deixar mais claro suas orientações em relação a proposta do documento apresentado.

As discussões sobre currículos não pararam por aí, continuaram sendo realizados seminários regionais com a participação dos grupos interessados. Os frutos de tais discussões continuaram surgindo e, em 2006, o MEC lança as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, especificamente nas orientações para Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias fica evidente a possibilidade e a abertura dada ao trabalho com Grafos no Ensino Médio, fato que pode ser verificado no trecho a seguir:

> [...]Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema via estrutura de grafo - no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade.
> (BRASIL [7], 2006, p. 94).

O trecho é citado logo após referir-se ao ensino de Análise Combinatória que dentre os conteúdos matemáticos, podemos destacar como estimulante do raciocínio crítico e criativo, mas devido a problemática já apresentada do direcionamento do Ensino Médio aos concursos vestibulares, é na maioria dos casos, como um conjunto de fórmulas e situações que resumem-se a utilização de regras e na resolução de listas de problemas cujo principal objetivo é a descoberta de que fórmula utilizar para chegar ao resultado.

Acreditamos que temas como coloração e emparelhamento desempenhariam um papel fundamental, para mudar essa realidade. Aplicação de modelos de problemas práticos tais como, alocação de recursos e pessoal, caminhos ótimos e distribuições de tarefas seria um caminho possível. É baseado no trecho das orientações curriculares citadas anteriormente que a maioria dos trabalhos, que defendem a utilização de grafos na educação básica, sustentam sua proposta, tendo como respaldo além dos argumentos de quem está em sala de aula, agora um documento oficial.

Outro documento oficial mas só que não a nível nacional que defende a utilização de grafos no ensino, é o Currículo Básico da Rede Estadual do Espírito Santo. Na sequência são apresentadas duas figuras 1.1 e 1.2 que são recortes respetivamente referentes ao segundo ano e o terceiro ano do Ensino Médio, do referido currículo:

Figura 1.1: Trecho do Currículo Básico do Espírito Santo, Matemática, Ensino Médio, Segundo Ano

2º Ano

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	CONTEÚDOS
• Reconhecer os conjuntos dos números reais, suas diferentes representações e operar com eles; • Compreender as propriedades das operações em cada um dos conjuntos numéricos e saber usá-las em situações concretas.	• Utilizar aproximações dos números racionais e irracionais de maneira adequada à situação-problema. • Utilizar a notação científica no trabalho com calculadoras científicas. • Calcular porcentagens, juros, descontos, amortização, etc. e utilizar esses conceitos na resolução de problemas.	**NÚMEROS E OPERAÇÕES** • Análise combinatória: princípio fundamental da contagem. • Chances e possibilidades. • Introdução à teoria dos grafos. • Noções de matrizes: conceitos e representações. • Resolução de sistemas de equações do primeiro grau. • A resolução de problemas, a função exponencial e a progressão geométrica; noções de logaritmo e suas aplicações. • A matemática do comércio e da indústria: matemática financeira.

Fonte: ESPÍRITO SANTO [15] , 2009, p.120.

Figura 1.2: Trecho do Currículo Básico do Espírito Santo, Matemática, Ensino Médio, Terceiro Ano

3º Ano

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	CONTEÚDOS
• Resolver problemas, traçando estratégias e validando soluções.	• Trabalhar com aproximações, estimativas, cálculo mental e calculadora de maneira adequada à situação-problema apresentada. • Trabalhar com porcentagens, juros, descontos, amortização, etc. e utilizar esses conceitos na resolução de problemas.	**NÚMEROS E OPERAÇÕES** • Resolução de problemas utilizando grafos. • Resolução de problemas utilizando o princípio fundamental da contagem. • Resolução de problemas envolvendo números reais, chances e possibilidades. • A resolução de problemas e as diversas funções. • A matemática do comércio e da indústria: matemática financeira.

Fonte: ESPÍRITO SANTO [15] , 2009, p.122.

Como verificado por MAURI [30]:

> O volume 2 do CBC, elaborado para o ensino médio, é destinado à área de Ciências da Natureza, que contempla as disciplinas de biologia, física, matemática e química....Nesse mesmo documento, de forma inédita, foi inserido nas 2ª e 3ª séries do ensino médio o conteúdo “Introdução à Teoria de Grafos” (p.120) e “Resolução de problemas utilizando grafos” (p.122), respectivamente [...]

Observando essa tendência é que um número significativo de trabalhos direcionam sobre a possibilidade do trabalho com grafos ainda na Edução Básica. Como esses dois documentos são os que mais explicitamente tratam da possibilidade do trabalho com Grafos ainda na Educação Básica, a partir deste ponto do trabalho, para evitar o prolongamento do mesmo em questões educacionais, a apresentação fará a exposição da sequência de documentos e ações que os sucederam sem muitos comentários apresentando-se um trecho do documento do Ministério da Educação [10]:

[...]A partir desse realinhamento a Secretaria de Educação Básica realizou:

- 2009 a 2010:Programa Currículo em Movimento do Ministério da Educação que produziu o I Seminário Nacional: Currículo em Movimento e Perspectivas Atuais Relatório de Análise de Propostas Curriculares de Ensino Fundamental e Ensino Médios Relatórios do Projeto de Cooperação Técnica MEC e UFRGS para a construção de Orientações Curriculares para a Educação Infantil subsídios para a construção das Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais e Específicas para a Educação Básicas.
- 2011 a junho de 2012: discussões relativas às expectativas de aprendizagem e consequente mudança de eixo para o Direito à Aprendizagem e ao Desenvolvimento explicitada no documento: A Política Curricular da Educação Básica: as! novas Diretrizes Curriculares e os Direitos à Aprendizagem e ao Desenvolvimento (junho de 2012).
- Junho a dezembro de 2012: discussões e reuniões técnicas sobre os Direitos á Aprendizagem e ao Desenvolvimento para o Ciclo de Alfabetização e elaboração do documento Elementos) Conceituais) e) Metodológicos para Definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento do Ciclo de Alfabetização (1^{o}), 2^{o}) e 3^{o}) anos do Ensino Fundamental como base de sustentação para o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC).
- setembro de 2012: VI Encontro do Grupo de Trabalho Fundamental Brasil – Currículo para o Ciclo de Alfabetização, que contou com a participação de representantes das secretarias estaduais (vinculadas ao CONSED) e representações estaduais das secretarias municipais de educação (vinculadas à UNDIME.
- dezembro de 2012 a junho de 2014: realização de 10 (dez) reuniões do Grupo de Trabalho sobre os Direitos à Aprendizagem e ao Desenvolvimento.
- maio de 2014: VII Encontro do Grupo de Trabalho Fundamental Brasil – Currículos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, que contou com a participação de representantes das secretarias estaduais (vinculadas ao CONSED) e representações estaduais das secretarias municipais de educação (vinculadas

à UNDIME).(BRASIL [10], 2014, p. 7-8.)

Atualmente, o Ministério da Educação tem a proposta da confecção da Base Nacional Comum Curricular e diante dessa intenção estão sendo realizadas desde de 2015 reuniões, seminários, consultas a nível nacional e local por intermédio das Secretarias Municipais e Estaduais. Dos encontros e reuniões locais almeja-se o envio de propostas e sugestões para que o documento possa na medida do possível abranger os anseios da maior quantidade possível de atores da educação. Para tanto, foi criado um portal, lançado desde 30 de julho de 2015 onde pode ser acompanhado por qualquer cidadão que realizar seu cadastro, é possível ter acesso as contribuições, sugestões e ficar atento ao cronograma de programações em todo território nacional. É possível, também, enviar propostas, sejam elas de pais, alunos, professores ou interessados, que serão analisadas pela equipe responsável. Na última visita realizada foi percebido o número de 1 709 065 contribuições para área de matemática, o prazo para conclusão dos trabalhos está prevista para junho de 2016 quando será apresentada a versão final.

São cobrados da educação a interdisciplinaridade e a relação com o quotidiano, os professores terminam fazendo "sacrifícios" para descobrir formas de relacionar a matemática às outras disciplinas e ao quotidiano de seus alunos. Os conhecimentos básicos da Teoria dos Grafos, ou dependendo do nível de ensino, até mesmo temas como coloração e emparelhamento, tornariam o trabalho bem mais simples já que possuí um leque de aplicações.

Diante de toda a exposição espera-se ter situado o leitor em relação as discussões sobre as questões do currículo e a possibilidade do enquadramento da Teoria dos Grafos ainda na Educação Básica. Ao verificar como estão organizados e apresentados os conteúdos observa-se uma certa contradição. Como podemos formar indivíduos preparados para "avalanche" tecnológica se o ensino de temas como Combinatória, que possuí um papel importante no desenvolvimento de algoritmos, é pouco valorizado e visto superficialmente?

Capítulo 2

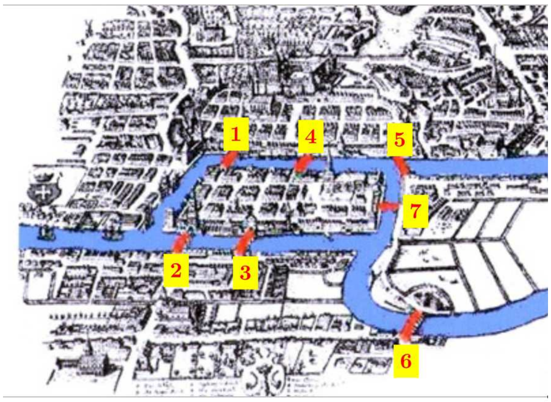
Breve Histórico Sobre Grafos

> *A Matemática sempre proporcionou para humanidade uma inesgotável fonte de desafios aparentemente ingénuos, mas que muitas vezes escondem sofisticadas estruturas, esperando apenas o momento e a pessoa certa para ser descodificada....*(ALVES [1], 2015)

2.1 As Pontes de Konisberg

O primeiro registro unanimemente citado nas bibliografias consultadas, remonta ao ano de 1736. É relatado o fato de que Euler ao visitar a cidade de Konisberg na então Prússia Oriental, atualmente onde está localizada a cidade de Kalinningrad, deparou-se com um fato curioso.

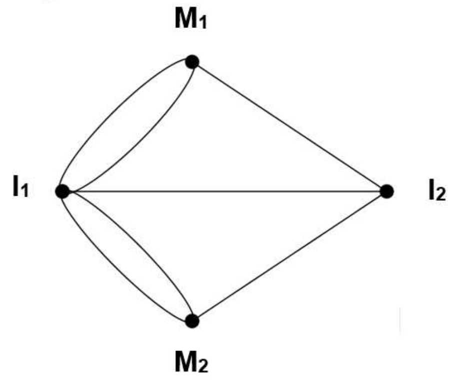
Figura 2.1: Cidade de Konisberg e suas sete pontes



Fonte: MORI [34], 2012.

A cidade era o local de moradia de diversos intelectuais conhecidos da época, durante sua estadia, tomou conhecimento de um problema desafiador para os estudiosos locais. O rio Pregel cortava a cidade, nele haviam duas ilhas que, na época, eram ligadas entre si por uma ponte. As duas ilhas se ligavam as margens por mais seis pontes como pode-se verificar na Figura 2.1. Assim, surgiu o questionamento entre os moradores: partindo-se de uma margem seria possível, passando uma única vez por cada uma das pontes, retornar a margem de partida? Euler criou um modelo geométrico representando cada margem e cada ilha por um ponto e as pontes por linhas, algo parecido com a Figura 2.2.

Figura 2.2: Modelo Semelhante ao de Euler



Euler verificou que a passagem de uma ilha para outra ou de uma margem para uma ilha é sempre ímpar e provou que a situação proposta pelos intelectuais de Konisberg não era possível pois o número deveria ser par. Para um matemático com a produção intelectual dele, o problema das pontes pontes não apresentou um grande desafio, considerado quase uma simples distração. Não deu muita importância, nem procurou desenvolver suas possibilidades de aplicação ou até onde ela poderia se desenvolver.

2.2 Principais Ideias que Estimularam o Estudo de Grafos

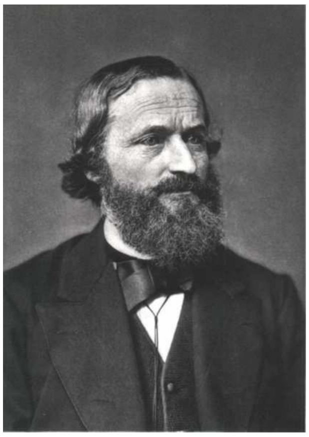
Por mais de 100 anos, mais precisamente 111 anos passaram-se até que alguém encontrasse os resultados de Euler para o problema das pontes e desse devida atenção e o aplicasse. Para teoria dos grafos isso foi uma grande perda.

Outro fator que dificultou o desenvolvimento da Teoria dos Grafos, em sua fase inicial, foi o fato de que apesar do bom número de trabalhos que surgiam, os mesmos, eram de aplicações em diversas áreas e muitas dessas áreas com poucas semelhanças entre as mesmas.

Poderá ser acompanhado na sequência os primeiros estudos que destacam-se pela contribuição ao desenvolvimento da Teoria em sua fase inicial indicando-se os responsáveis por tais contribuições.

2.2.1 Ponte de Wheatstone

Figura 2.3: Gustav Robert Kirchhoff (1824 - 1887)



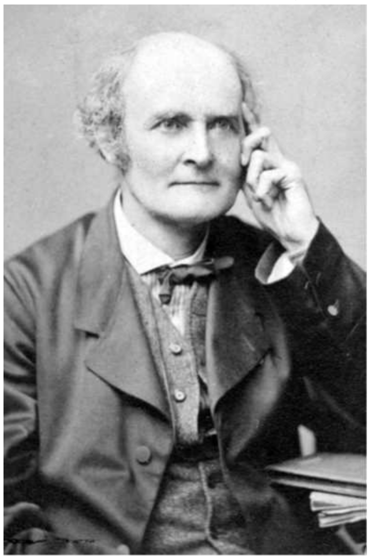
Fonte: Imagens do Google, 2016.

Em 1847, Kirchhoff apresentou resultados de Modelos de Grafos aplicados a circuitos elétricos, tais resultados são importantes e aplicados até hoje e ajudaram no desenvolvimento do estudo da eletricidade. Um exemplo de circuito elétrico que pode ser modelado através de um grafo é conhecido como Ponte de Wheatstone. Com a ajuda das Propriedades da Teoria dos Grafos não só esse, mas diversos outros circuitos foram modelados até hoje.

2.2.2 O Problema dos Isômeros

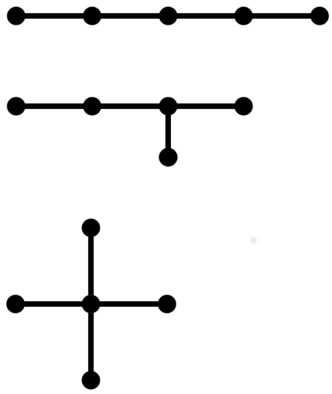
Em 1857, Cayley desempenhou-se na contagem dos Isômeros dos Hidrocarbonetos, modelando tais compostos no formato de grafos desnvolveu uma técnica para determinar o número de diferentes isômeros desses hidrocarbonetos. Observe alguns modelos de Grafos para o C5 H12 na Figura 2.5.

Figura 2.4: Arthur Cayley (1821 - 1895)



Fonte: Imagens do Google, 2016.

Figura 2.5: Configurações do Isômero de Pentano



2.2.3 Problema de Guthrie e De Morgan

Em 1852, surgiu um dos problemas mais desafiadores e importantes para o desenvolvimento da teoria dos grafos, mais conhecido como Teorema das Quatro Cores.

Ele foi proposto por Francis Guthrie a seu irmão Frederick Guthrie em forma de conjectura, pois de forma prática ele, como todo cartógrafo da época, sabia que para colorir qualquer mapa bastariam 4 cores sem que regiões que façam fronteiras tenham cores iguais.

Figura 2.6: Francis Guthrie (1831 - 1899)

Fonte: Imagens do Google, 2016.

Por sua vez, Frederick, apresentou a situação ao seu professor, grande matemático da época, De Morgan, que tratou de expo-lo a comunidade científica da época. Aparentemente simples o problema só foi resolvido consisamente em 1976, mas muitos tentaram antes disso contribuindo bastante com a Teoria dos Grafos e consequentemente aplicados à diversas àreas.

2.2.4 As Cadeias de Kempe

As Cadeias de Kempe foi uma técnica desenvolvida pelo matemático que deu nome a mesma, considerada uma das contribuições a teoria dos grafos assegura a demonstração para o caso das cinco cores. Kempe acreditava, ter achado a solução para o problema das quatro cores em 1879, usando está técnica, no entanto em 1890 Heawood verificou uma falha sútil para prova apresentada por ele.

2.2.5 Resolvendo o Problema das Quatro Cores

Depois de longas tentativas e muitos estudos que ajudaram no desenvolvimento da teoria de grafos, o problema das quatro cores foi enfim resolvido concisamente por Apel, Haken e Koch.

Figura 2.7: Kenneth Appel (1932 - 2013) e Wolfgang Haken(1928 -)

Fonte: Imagens do Google, 2016.

Na época contaram com o auxílio de 1200 horas de trabalho do computador mais rápido. Diante da solução, ainda surgiram críticas devido a utilização da máquina, mas foi graças ao desenvolvimento computacional que a teoria alavancou em pesquisas e aplicações.

2.2.6 O Problema do Caixeiro Viajante

No final do século XIX surgiu um problema que muito tem interessado as empresas que trabalham com transporte em grandes distâncias, o Problema do Caixeiro Viajante. Pode-se dizer que é uma generalização dos problemas estudados por Kirkman que dedicou-se as representações de poliedros de forma plana e Hamilton que concentrou-se na solução do trajeto proposto por um joguinho chamado icosiano que representa a forma planificada o dodecaedro. Essa contribuição rendeu-lhe o nome aos trajetos desse tipo.

Batizados de Caminhos Hamiltonianos, os trajetos que percorrem todos os vértices de um grafo sem repetí-los e voltando ao local de partida, estimularam o surgimento de vários problemas do tipo. Desta forma o problema do Caixeiro Viajante consiste em: *Dada uma localidade na qual deseja-se visitar alguns pontos ligados por estradas uma* *única vez, como fazê-lo com o menor tempo possível?* O problema consiste no seguinte: *Dadas algumas localidades, conectadas por estradas, como se pode fazer um trajeto que passe por todas as cidades apenas uma vez, no menor tempo possível?*

A dificuldade do problema não está em encontrar o caminho, mas encontrar o de menor distância e consequentemente de menor custo. Isso tem deixado pesquisadores ocupados durante mais de um século. Configurações semelhantes do problema são aplicados por empresas no cumprimento de tarefas, determinar qual funcionário deve realizar que tarefa, em que momento, para que tempo final de realização seja mínimo. Esses são os desafios das grandes empresas de hoje que podem encontrar na Teoria dos Grafos soluções para suas melhorias.

2.3 Início no Brasil

No Brasil ainda segundo bibliografia consultada, a chegada da Teoria de forma oficial, ocorreu com a realização do I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional em 1968. Desde de então muitas instituições passaram a ter pesquisadores voltados para seu estudo. Até o ano de 2011, quando publicou uma das versões de sua obra, BOAVENTURA NETTO [5] contabilizou 7 livros nos quais pode-se verificar temas com teorias e aplicações, algoritmos de grafos, aplicações à eletricidade e uma obra de divulgação. Uma grande quantidade de dissertações de mestrado e teses de doutorado nas mais diversas áreas debatem e aplicam conceitos e propriedades de Grafos. Destacar-se-á nesta exposição as dissertações do PROFMAT principalmente as direcionadas ao ensino. Algumas delas serão aqui citadas como referência para proposta de aplicação da teoria ao Ensino Médio.

Capítulo 3

Contribuições do PROFMAT ao Estudo da Teoria dos Grafos

A leitura de todos bons livros é como uma conversa com os melhores espíritos dos séculos passados, que foram seus autores, e é uma conversa estudada, na qual eles nos revelam seus melhores pensamentos....(René Descartes)

3.1 O PROFMAT (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)

Em consulta realizada na *internet* encontrou-se pelo menos um curso de Mestrado Profissional em Matemática com funcionamento iniciado em 2008. O curso é oferecido pela Universidade Estadual Paulista(UNESP)-Campus de Rio Claro. No entanto, só em 29 de dezembro de 2009 foi publicado no Diário Oficial da União de número 248, mais especificamente na sessão 1, página 20 e 21, a portaria de número 17 de 28 de dezembro de 2009 que dispõe sobre o Mestrado Profissional. Nesta portaria verifica-se em seu artigo 5 em seu parágrafo único o seguinte trecho:

> A oferta de cursos com vistas à formação no Mestrado Profissional terá como ênfase os princípios de aplicabilidade técnica, flexibilidade operacional e organicidade do conhecimento técnico-científico, visando o treinamento de pessoal pela exposição dos alunos aos processos da utilização aplicada dos conhecimentos e o exercício da inovação, visando a valorização da experiência profissional.

Do ponto de vista educacional essa regulamentação permitiu o surgimento de mestrados profissionais na área de educação tendo em vista o trecho acima citado. O PROFMAT [1] foi um destes cursos, assumindo o título de Mestrado Profissional em Matemática foi idealizado como curso semipresencial com oferta nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática. Seu principal alvo é atender, professores de Matemática da rede pública que atendam a educação básica e querem buscar ampliar e aprofundar conhecimentos matemáticos necessários a sua atuação profissional.

O reconhecimento do curso pelo CNE foi concebido através da Portaria número 1325, publicada no D.O.U. de 22/9/2011, Seção 1, Pág. 634, e Retificada pela Portaria número 1105, publicada no D.O.U. de 4/9/2012, Seção 1, Pág. 97. Anteriormente o curso já havia recebido a recomendação do Conselho Técnico-Científico da Educação Superior – CTC-ES da CAPES, em uma reunião, realizada nos dias 25 a 29 de outubro de 2010.

No ano de 2013, o curso já apresentava a adesão de 60 instituições associadas com 79 cidades/pólos. Em 2014 esse número aumentou para 67 instituições e um total de 90 cidades/pólos, segundo, respectivamente os ofícios número 138/2013 - DED/CAPES e número 115/2014 - DED/CAPES. Essas adesões renderam ao curso um alcance à todo território nacional, representando para formação dos professores e consequentemente para o ensino da Matemática no Brasil um avanço importante.

A contribuição do PROFMAT pode ser verificada pela quantidade de mestres concludentes e suas pesquisas, que na sua maioria direcionam ao Ensino Básico, pelo menos foi o que verificou-se nas dissertações consultadas para elaboração do presente

[1] As informações e documentos aqui apresentadas referentes ao PROFMAT foram colhidas no portal do programa de endereço: www.profmat-sbm.org.br, acesso 15 de maio de 2016

trabalho. Os trabalhos podem ser consultados no portal do PROFMAT o que representa um alcance incalculável de contribuição para educação brasileira. Na sequência será apresentada a análise das pesquisas relacionadas a Grafos destacando as contribuições e aplicações.

3.2 Análise das Dissertações

No banco de dissertações do portal do PROFMAT verifica-se um número considerável de trabalhos nos quais aparecem no título a palavra Grafos, do total 2208 trabalhos constantes no dia da última consulta realizada, 28 apresentavam tal característica. Destes 28 trabalhos, apenas um não pode ser consultado devido algum erro no arquivo e não estar disponível. Cerca de 1,22 % , do total de trabalhos, isso sem levar em consideração os trabalhos que apesar de não trazer no título, atribuem destaque a eles em seu desenvolvimento.

Na elaboração deste trabalho foram consultadas, a título de exemplo, três dissertações com essa característica, BRITTO [12], FROIS JUNIOR [18] e MELO [32]. Considerou-se que o tema é bem discutido levando em consideração que a matemática apresenta um vasto campo de conceitos e temas e o mesmo não fazer parte do programa do currículo do PROFMAT.

Os estudos apresentam um número modesto, apenas três trabalhos. O primeiro grupo de dissertações apresentadas foi concluído no ano de 2013, são elas SOUZA [40], MAURI [30] e VASCONCELOS [44], apesar de defenderem a possível aplicação na Educação Básica, tanto a nível do Ensino Fundamental, quanto do Ensino Médio, não aplicam nem concretizam como isso pode ser feito.

A segunda remessa de trabalhos sobre a temática sofre um aumento considerável saltam de 3, para 12 trabalhos concluídos em 2014. Nestes trabalhos continuam sendo citadas as possibilidades de apresentação do tema aos alunos da Educação Básica, agora com exemplos mais concretos e baseados em documentos oficiais. Alguns deles não só defendem como propõem caminhos, por meio da Teoria dos Grafos, para auxiliar na interdisciplinaridade, no desenvolvimento do raciocínio, contextualização, modelagem entre outros temas tão destacados na LDB , PCNs e Diretrizes. Alguns destes trabalhos CARDOSO [13], OLIVEIRA [36] e SOUZA [42] chegaram a aplicar em turmas da educação básica mostrando e discutindo os resultados obtidos.

O último grupo de trabalhos consultados foram os de 2015 nestes trabalhos encontram-se não só um vasto repertório de atividades como também embasamento teórico e metodológico verificado com o auxílio de aplicações em escolas, este fato foi verificado nos trabalhos AQUINO [2], GOMES [19], MORI [34], NOGUEIRA [35], SILVA [38], SOUZA [40] e SOUZA [43]. Na sequência destacamos os pontos observados e os principais trabalhos que abordam cada um destes temas para oferecer aos interessados no assunto a seleção de material não só de primeiro contato mas também de aprofundamento e aplicação.

3.2.1 Teoria

A SBM - Sociedade Brasileira de Matemática [2], com a missão estatutária de "Estimular a melhoria do ensino de Matemática em todos os níveis", oferece aos professores de um modo geral mas especialmente aos da escola pública, por intermédio do PROFMAT a oportunidade de buscar e aprimorar sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdos. Verificou-se nas dissertações consultadas essa busca pelo conhecimento e os resultados obtidos, para a Teoria dos Grafos, contribuem com um vasto número de trabalho ricos em definições que podem ser usadas desde o Ensino Fundamental ao superior e ainda aplicações à Educação Básica.

As definições, teoremas, lemas foram apresentados pela maioria dos trabalhos com linguagem e rigor matemático para evitar o simplismo e confusão, destacam-se como fonte de aprofundamento de conceitos os trabalhos AQUINO [2], BEZERRA [4], FERREIRA [16],FROIS JUNIOR [18], GONÇALVES [20], LIMA [26], MELO [31], NOGUEIRA [35], SILVA [38], SOUZA [40],SOUZA [43] e VULCANI [45]. Esses trabalhos representam uma grande contribuição pelo número relativamente reduzido de literatura nacional sobre Grafos e um número considerável de literatura estrangeira citadas como

[2]As informações e documentos aqui apresentadas referentes ao SBM foram colhidas no portal do programa de endereço: www.profmat-sbm.org.br, acesso 15 de maio de 2016

consultas para elaboração de tais dissertações.

3.2.2 Ensino Fundamental

Essa etapa da formação educacional tem a finalidade de fornecer a fundamentação dos conceitos básicos da matemática que serão aprofundados posteriormente no Ensino Médio. Nessa etapa os trabalhos BRITO [12], CARDOSO [13], LIMA [26], MORI [34], SILVA [38], SOUZA [41], SOUZA [43] verificando a possibilidade da inserção da Teoria dos Grafos na educação básica tratam ainda que de forma superficial propor, conceituar e até mesmo aplicar como foi o caso dos trabalhos CARDOSO [14], MORI [34] e SOUZA [41]. Vale ressaltar que com a devida adequação pode-se trabalhar certos conceitos da teoria tais como definição, tipos de grafo e caminhos vislumbrando seu posterior aprofundamento e aplicação no Ensino Médio.

3.2.3 Ensino Médio

Como já comentado no Capítulo I é a etapa responsável pelo aprofundamento e aplicações, dos conceitos fundamentados no Ensino Fundamental e preparatório para o Ensino Superior. Essa modalidade tomou um novo rumo a partir da adesão das Instituições ao substituírem seus antigos exames vestibulares pela pontuação conquistada no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), como seleção para ingresso no ensino superior. O Ensino de Grafos ganha respaldo mais uma vez, pois como suas aplicações proporcionam, através de problemas tratados, o desenvolvimento do raciocínio lógico, contextualização e modelagem, preparando desta forma os alunos para responder questões do ENEM, mesmo porque dentre os trabalhos, AQUINO [2], BRITO [11], BRITTO [12], FERREIRA [16], FONTE [17], GOMES [19], LIMA [26], MONTEIRO [32], MORI [34], NOGUEIRA [35], OLIVEIRA [36], SOUZA [41], SOUZA [42] e SOUZA [43], apresentam e respondem questões usando tal ferramenta. Com isso sua exposição no Ensino Superior, ganharia velocidade e profundidade pois não seria mais necessário perder tanto tempo com a fundamentação teórica básica possível a alunos de níveis de escolaridade anteriores, fato verificado também nos trabalhos já citados.

3.2.4 Adequação a Legislação

A leitura permitiu identificar a preocupação em atender a legislação e orientações educacionais vigentes, até mesmo identificando citações e referencias as mesmas, os itens posteriores identificam as principais pesquisas que destacam as temáticas.

Contextualização

Uma das temáticas mais destacadas nos documentos oficiais tratados no Capítulo 1 deste trabalho, tem seu entendimento superficial levado a confusões no momento das tentativas de contextualizar um conteúdo. Um exemplo disso foi identificado uma tentativa de um livro do sétimo ano do Ensino Fundamental da década de noventa.

Na tentativa de explicar o sinal do produto entre dois números inteiros, o autor atribuía ao sinal negativo o rótulo de inimigo e ao sinal positivo o rótulo de amigo. Apresentava dessa forma a seguinte relação para memorizar os sinais:

Tabela 3.1: Amigo, Inimigo e Sinais Positivo e Negativo

CONTEXTO	**EXPRESSÃO**
O amigo do meu amigo é meu amigo	$(+).(+) = +$
O inimigo do meu inimigo é meu amigo	$(-).(-) = +$
O amigo do meu inimigo é meu inimigo	$(+).(-) = -$
O inimigo do meu amigo é meu inimigo	$(-).(+) = -$

Organização: O autor, 2016.

Nem sempre os relacionamentos são assim e também não existe uma ligação natural entre os pontos analisados: o sinal e a amizade. A contextualização deve ocorrer em situações que possa haver tal ligação sem que haja uma "sacrifício teórico". Os próprios PCN destacam que a contextualização se faz até mesmo diante de situações visualizadas pelos alunos nos noticiários. Assim não se corre o risco de limitar o campo de aprendizagem do aluno e não se atribui a matemática um significado simplista.

Diante do comentário de LIBÂNEO [25], a cerca da contextualização, "Antes, os próprios conteúdos devem incluir elementos da vivência prática dos alunos para torná-los mais significativos, mais vivos, mais vitais, de modo que eles possam assimilá-los ativa e conscientemente".

Pode-se verificar bons exemplos de contextualização apresentados nos trabalhos de AQUINO [2], FERREIRA [16], GOMES [19], LIMA [26], MAGALHÃES [27], MAURI [30], MORI [34], NOGUEIRA [35], SILVA [38], SOUZA [40], SOUZA [41], SOUZA [42], SOUZA [43], VULCANI [45] tais contribuições serão de grande valia aos que desejarem aplicar em suas aulas uma pitada de grafos.

Modelagem

A Modelagem desempenha um importante papel na resolução de problemas segundo BOAVENTURA NETTO [5]. "A Teoria dos Grafos é uma forte ferramenta dessa temática pois torna-se a ponte de aplicação de outros conceitos matemáticos na resolução de uma infinidade de situações aplicadas a diversas áreas". Isso deve ter motivado o maior número de ocorrências em tratar sobre o assunto. Dos temas observados dezesseis trabalhos AQUINO [2], VASCONCELOS [44], BRITO [11], FERREIRA [16], GOMES [19], LIMA [26], MAGALHÃES [27], MAURI [30], NOGUEIRA [35], OLIVEIRA [36], SILVA [38], SOUZA [40], SOUZA [41], SOUZA [42], SOUZA [43] e VULCANI [45] não só comentam e desenvolvem o assunto como para alguns foi ponto de destaque durante todo trabalho.

Interdisciplinaridade

Apesar da teoria permitir o diálogo entre uma diversidade de áreas, foi um dos pontos menos verificados. O relacionamento entre as disciplinas educacionais ainda não é tão satisfatório no quotidiano escolar. Foram destacadas 7 ocorrências de tratar a interdiscipinaridade com o auxílio de Grafos. Os exemplos mais comuns foram: Cadeia Alimentar(Biologia), Modelos de Moléculas (Química), Influência entre pessoas (Sociologia), etc.. Os trabalhos que mais contribuíram com a temática, foram eles GOMES [19], LIMA [26], NOGUEIRA [35], SILVA [38], SOUZA [40], SOUZA [43], e VULCANI [45]. A verificação de mapas através da coloração, distâncias e caminhos foram os mais utilizados.

Problemas de Raciocínio

Para desenvolver o raciocínio nada melhor que um bom problema bem elaborado. As dissertações abusaram do tratamento de problemas com temáticas variadas. Caminhos, distâncias, coloração, logística, xadrez foram alguns dos temas tratados, para verificar o acervo de problemas e resoluções sugere-se a consulta dos trabalhos AQUINO [2], BRITTO [12], FERREIRA [16], GOMES [19], LIMA [26], MAGALHÃES [27], MAURI [30], MORI [34], NOGUEIRA [35], SILVA [38], SOUZA [40], SOUZA [41], SOUZA [42], SOUZA [43] e VULCANI [43]. Com maior destaque para MAURI [30] e MAGALHÃES [27] que apresentam e resolvem um número considerável de problemas.

Avanço sobre o tema

Um dos pontos de preocupação dos documentos atuais é a possibilidae do aluno aprender e possibilitá-lo à continuar de forma autônoma o desenvolvimento de um conceito. Nessa perspectiva analisou-se a forma de abordagem dos trabalhos VASCONCELOS [44], FERREIRA [16], GOMES [19], MONTEIRO [33], MORI [34], NOGUEIRA [35], SILVA [38], SOUZA [40], SOUZA [41], SOUZA [32] e SOUZA [43] e percebeu-se que a exposição possibilita a continuidade uma vez que trabalham conceitos básicos bem estruturados, visando um primeiro contato, porém, possibilitam a compreensão futura a quem desejar aprofundar os estudos referente a Teoria dos Grafos em níveis mais elevados.

Uso das Novas Tecnologias

Uma vez que a sociedade caminha cada vez mais rápido em avanços tecnológicos torna-se necessário que os recursos disponíveis possam cada vez mais serem utlizados como ferramentas na busca de um ensino mais contextualizado. Desenvolver a temática com o auxílio de calculadoras e computadores com acesso as redes sociais possibilitam tal desenvolvimento no trabalho com mapas, distâncias, etc. Verificam-se tais aplicações nos trabalhos AQUINO [2], BRITO [11], GOMES [19], MONTEIRO [33], SILVA [38], SOUZA [41] e os trabalhos SOUZA [43] e VASCONCELOS [44] que sugerem respectivamente um jogo e um aplicativo para Android.

3.2.5 Aplicações em outras áreas

Na introdução, não só da maioria dos estudos, mas também da maioria dos livros são citados a aplicação da teoria as mais diversas áreas do conhecimento e cita-se a expansão de aplicações em novas áreas. Porém não são muitos os exemplos apresentados, neste ítem destacamos como melhor consulta os trabalhos ALVES [1] , OLIVEIRA [36], SILVA [38], SILVA [39], SOUZA [40] e VULCANI [45]. Pode-se também destacar diante do que foi visto que atualmente a aplicação em logística para redução de custo final é uma das mais importantes aplicações.

Capítulo 4

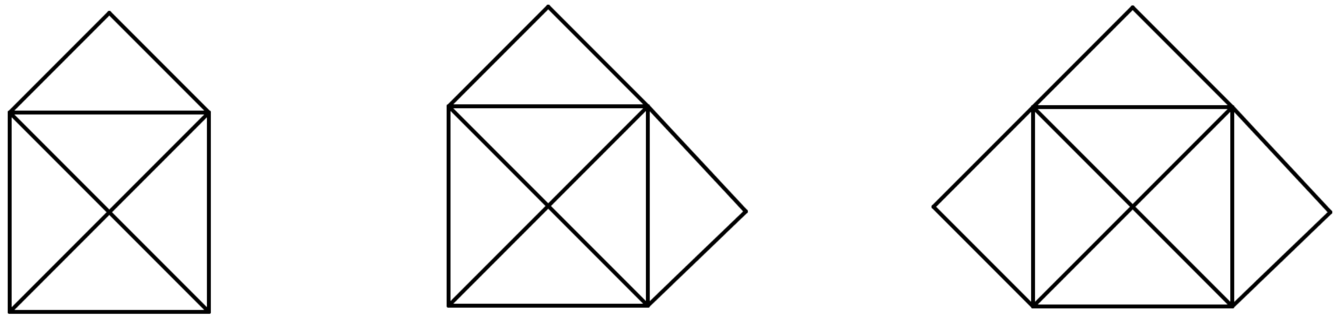
Proposta de Trabalho

A Matemática apresenta invenções tão sutís que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens....(Descartes)

4.1 Introdução aos Grafos

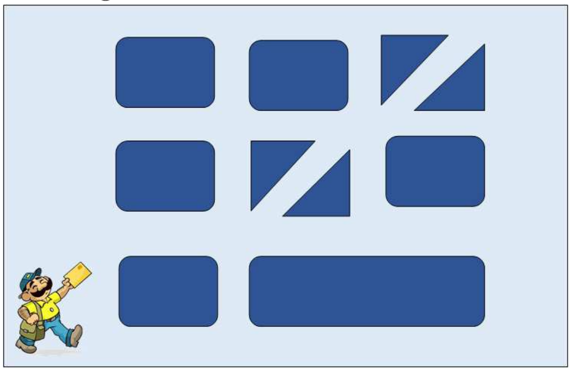
Situação 4.1.1 *Você é capaz de com um lápis percorrer todos os lados de cada figura uma única vez?*

Figura 4.1: Desafios Sem Tirar o Lápis do Papel



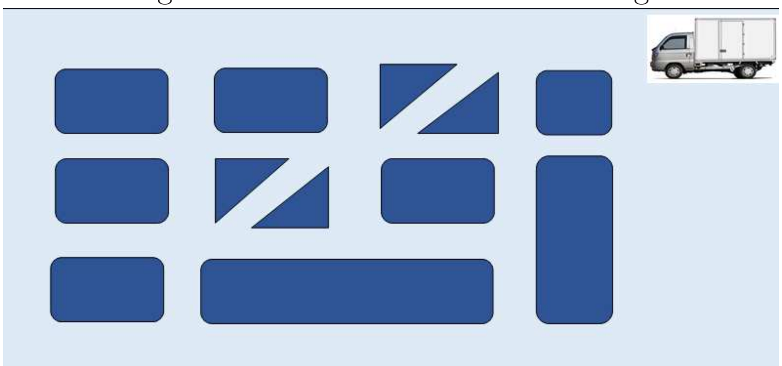
Situação 4.1.2 *Você é capaz de fazer o simpático carteiro passar por todas as ruas dessa localidade, podendo passar pela mesma esquina mas não passar duas vezes pela mesma rua?*

Figura 4.2: Percurso do Carteiro



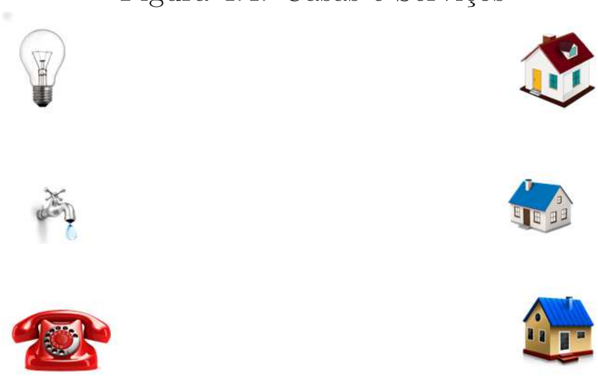
Situação 4.1.3 *Qual o melhor trajeto para que o caminhão possa realizar todas suas entregas com a menor distância?*

Figura 4.3: Menor Percurso de Entrega



Situação 4.1.4 *É possível, na figura a seguir, realizar a ligação de cada casa à cada um dos serviços (água, eletricidade e telefonia), sem que as linhas se cruzem?*

Figura 4.4: Casas e Serviços



Apesar de serem apresentadas como simples desafios, possíveis de serem encontrados em livros de desafios, adivinhas ou de lógica, um problema semelhante a estes foi o embrião de uma das Teorias da Matemática que mais tem chamado a atenção nos últimos séculos. A Teoria dos Grafos como assim é chamada tem uma aparência simples mais quando aprofundado, seus estudos, é possível verificar que possui um grau de aplicação e complexidade que evoluem a medida que são aprofundados seus estudos.

4.2 Origem

Figura 4.5: Gravura das 7 Pontes

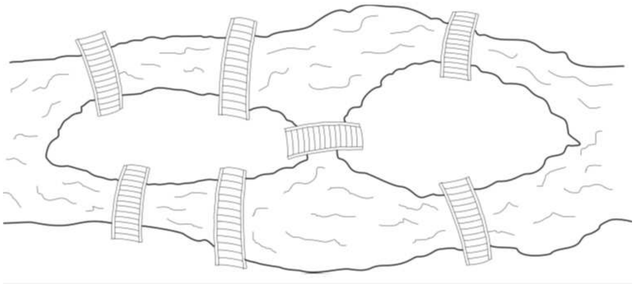
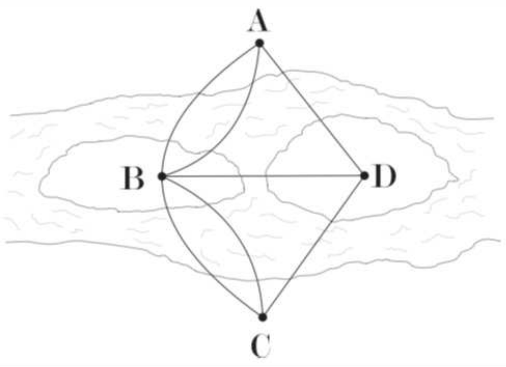


Figura 4.6: Figura do Modelo Proposto por Euler



FONTE: FONTE [17], 2014, p.4.

Conta-se que no passado a atual cidade de Kalingrado na Prússia chamava-se Konisberg e era reduto de diversos cientistas da época. Os moradores distraiam-se com problemas. Um dos problemas de maior sucesso ralacionava-se com as sete pontes que eram elo de ligação entre duas margens e duas ilhas Figura 4.5. Segundo muitos estudiosos o problema era assim anunciado: *Seria possível fazer um trajeto passando por todas as pontes uma única vez?* Muitos tentaram sua solução sem obter sucesso até que o grande Matemático Euler conhecido por suas grandes descobertas, uma delas a fórmula que recebeu seu nome, que relaciona faces, vértices e arestas de um poliedro. Dita a estoria que o chegar a cidade foi apresentado ao desafio das pontes, por intermédio do prefeito. Ao analisar o problema, Euler criou um Modelo Geométrico semelhante ao apresentado na Figura 4.6 para melhor interpretá-lo e resolvê-lo, e o fez. Apresentou para o mesmo uma demonstração clara e precisa do ponto de vista matemático da época. Euler não deu tanta atenção à resolução, talvez pelo vasto repertório de descobertas do mesmo ou para ele o problema não ter passado de uma adivinha. Seja qual for o motivo isso causou um atraso no desenvolvimento da Teoria que hoje multiplica-se cada vez mais seu número de aplicações. Mais adiante veremos como são definidas situações semelhantes aos analisados por Euler para chegar a resposta e logo a seguir a definição precisa do conceito de Grafos.

4.3 Noção Intuitiva de Grafo

Diante do modelo proposto por Euler visualizado na Figura 4.6 pode-se definir tal estrutura, sem muito rigor inicial, como **Grafo**[1] . Os pontos são chamados de **Vértices** e os segmentos são suas **Arestas**. As Arestas podem ser segmentos de retas, arcos ou uma linha curva qualquer o importante é ligar dois Vértices ou um único Vértice. Vale ressaltar que, por sí só, tal ilustração não define o Grafo ela é importante para uma visualização e modelagem inicial, Grafos mais elaborados com um número generoso de propriedades não podem nem mesmo ser visualizados ainda que mentalmente. Na sequência será apresentada uma definição mais concisa para o tema.

4.4 Grafo

Figura 4.7: Grafo G Sem Rótulos

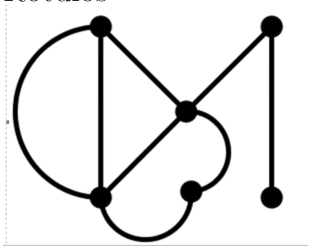


Figura 4.8: Grafo H com Vétices Rotulados

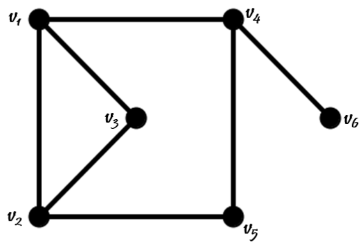
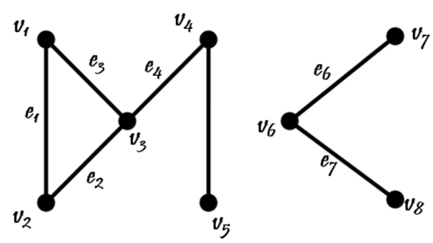


Figura 4.9: Grafo J com Vértices e Arestas Rotulados



Como já foi comentado para uma maior precisão na linguagem o definimos da seguinte forma:

Definição 4.4.1 (Grafo) *Um Grafo é um par de conjuntos* (V, E), *onde* $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4..., v_n\}$

[1]A palavra "Grafo" é um neologismo derivado da palavra graph em inglês e, historicamente, foi utilizada pela primeira vez, no sentido que nos interessa aqui, pelo matemático inglês James Joseph Sylvester que viveu entre 1814 até 1897. ALVES [1]

e $V \neq \emptyset$ é um conjunto de Vértices e $E \subset \{(v_i, v_j)\}$ é um conjunto de Arestas, ou seja cada Aresta é um par (v_i, v_j) que também, a depender do caso, pode ser representada da seguinte forma $v_i v_j$.

Para definição de um Grafo temos então que verificar dois conjuntos:

O conjunto de vértices: $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4..., v_n\} = V(G)$.

O conjunto de arestas: $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4..., e_m\} = E(G)$.

Pode-se verificar com os exemplos a seguir:

Exemplo 4.4.1 *No grafo da Figura 4.8 tem-se:*

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6\} = V(H)$$

$$E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_5, v_4v_5, v_4v_6\} = E(H)$$

Exemplo 4.4.2 *Já no grafo da Figura 4.9 tem-se:*

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6, v_7, v_8\} = V(J)$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_4, e_6, e_7\} = E(J)$$

A título de ilustração é comum associar a cada vértice um ponto e a cada aresta uma linha que os une. As linhas não são necessariamente retas, elas podem também, conforme o caso, ser representadas por linhas curvas, porém é necessário tomar os devidos cuidados com esse tipo de representação para que a noção de grafo não se prenda a visão planar. Na maioria das vezes rotula-se (especifica-se, dá-se um nome) os Vértices e ou Arestas na figura, quando isso ocorre chama-se de **Grafo Rotulado**, como é o caso das Figuras 4.8 e 4.9.

Os número de Vértices e o número de Arestas determinam dois conceitos:

Definição 4.4.2 (Ordem de um Grafo) *A ordem de um Grafo corresponde ao número de vértices e sua notação é feita da seguinte forma: $n(G) = |V(G)|$*

Definição 4.4.3 (Dimensão de um Grafo) *A dimensão de um Grafo corresponde ao número de arestas e sua notação é feita da seguinte forma:* $m(G) = |E(G)|$

Exemplo 4.4.3 *No grafo da Figura 4.7 tem-se:*

$$n(G) = |V(G)| = 6$$

$$m(G) = |E(G)| = 8$$

Exemplo 4.4.4 *No grafo da Figura 4.8 tem-se:*

$$n(H) = |V(H)| = 6$$

$$m(H) = |E(H)| = 7$$

Exemplo 4.4.5 *No grafo da Figura 4.9 tem-se:*

$$n(J) = |V(J)| = 8$$

$$m(J) = |E(J)| = 7$$

Definição 4.4.4 (Grau de um vértice) *Para cada vértice define-se seu grau como sendo o número de arestas a ele incidente.*

Exemplo 4.4.6 *Dessa forma na Figura 4.8 o grau de seus vértices são os seguintes:*

- v_1 *tem grau 3.*
- v_2 *tem grau 3.*
- v_3 *tem grau 2.*
- v_4 *tem grau 3.*
- v_5 *tem grau 2.*

•v_6 *tem grau 1.*

Nas representações acima temos:

Teorema 4.4.1 *Para todo Grafo G a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas.*

$$\sum_{v_i \in V(G)} g(v_i) = 2 \cdot m(G) = 2 \cdot |E(G)| \tag{4.1}$$

Demonstração 4.4.1 *Seja um grafo G que tenha a aresta e_{ij} e os vértices v_i e v_j nos quais ela é incidente. Ao contar o grau dos vértices citados, a aresta em questão é contada duas vezes, uma para cada vértice isso ocorre para cada aresta do grafo e seus pares de vétices logo a soma será o dobro do número de arestas.*

Exemplo 4.4.7 *Do grafo da Figura 4.4.6 obtemos:*

$$\sum_{v_i \in V(H)} h(v_i) = 2 \cdot 7 = 14$$

Esse resultado também pode ser obtido a partir do somatório dos valores no Exemplo 4.4.4 porém para um Grafo com Muitas Arestas e Vértices o uso do Teorema 4.1 é fundamental.

Observação 4.4.1 *Observando os Grafos a seguir, serão definidos quatro definições básicas para entendimento dos conceitos que os sucedem:*

Figura 4.10: Grafo S

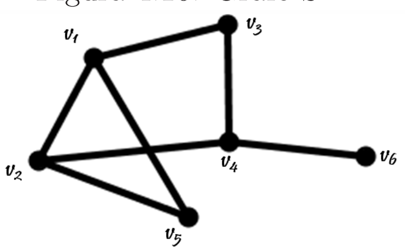


Figura 4.11: Grafo M

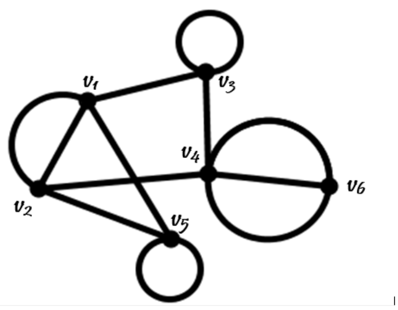
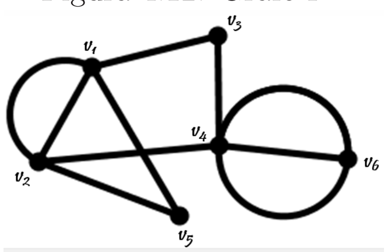


Figura 4.12: Grafo P



Definição 4.4.5 (Adjacência ou Vizinhança) *Adjacência ou vizinhança é uma relação que é definida entre vértices. Diz-se que um vértice é adjacente ou vizinho de outro vértice quando possui uma aresta que os ligue.*

Exemplo 4.4.8 *Na Figura 4.10 os vértices* v_1 *e* v_4 *e* v_5 *são vizinhos ou adjacentes ao vértice* v_2*.*

Definição 4.4.6 (Incidência) *Diz-se que uma aresta é incidente a um vértice* v_k *se dada a aresta* $e_1 = (v_i, v_j)$ *temos* $v_i = v_k$ *ou* $v_j = v_k$*.*

Exemplo 4.4.9 *Na Figura 4.11, tem-se:*

A aresta v_2v_4 *é incidente aos vértices* v_2 *e* v_4*.*

A aresta v_5v_5 *é incidente apenas ao vértice* v_5*.*

Definição 4.4.7 (Laço) *É como chama-se toda aresta que incide sobre um único vértice.*

Exemplo 4.4.10 *Na Figura 4.11 temos laços incidentes nos vértices* v_5 *e* v_3*.*

Definição 4.4.8 (Arestas em Paralelo ou Arestas Múltiplas) *São arestas que incidem sobre o mesmo par de vértices.*

Exemplo 4.4.11 *Na Figura 4.12 pode ser verificado duas arestas incidindo sobre os vértices* v_1 *e* v_2 *e sobre os vértices* v_4 *e* v_6 *tem-se três arestas.*

4.5 Classificação dos Grafos

A classificação mais básica dos grafos pode ser feita observando características como, tipos de arestas, se os vértices estão conectados, o número de conexões entre os vértices, etc.. Existe a possibilidade de, um mesmo Grafo acumular dois ou mais tipos de classificação. Vejamos:

4.5.1 Classificação Segundo a Presença de Laços ou Arestas Múltiplas

- **Grafo Simples:** Não possue nem laços, nem arestas múltiplas. Um exemplo de Grafo desse tipo é o Grafo da Figura 4.10.

- **Multigrafo:** Não possue laços mas pode possuir arestas múltiplas. São exemplos de Grafos desse tipo os Grafos das Figuras 4.11 e 4.10.

- **PseudoGrafo:** Pode possuir laços e Arestas múltiplas.São exemplos de Grafos desse tipo os Grafos das Figuras 4.10, 4.11 e 4.12.

Observação 4.5.1 *Apesar da importância e aplicações de Multigrafos e PseudoGrafos em estudos mais aprofundados sobre o tema, durante esse estudo, sempre que não for especificado o tipo de Grafo o texto estará referindo-se a Grafos Simples, desta forma evitar-se-á repetições desnecessárias.*

4.6 Grafo Completo, Grafo Nulo, Grafo Trivial ou Elementar, Subgrafo e Grafo Complementar

As definições sobre Grafos que serão apresentadas assemelham-se muitos aos conceitos sobre conjuntos, mesmo por que, o Grafo é uma estrutura formada por um conjunto de Vértices e um conjunto de Arestas. Sem causar confusão, essa analogia da nomenclatura pode sempre ser utilizada para uma melhor assimilação das definições. Considere a seguinte situação:

Situação 4.6.1 *Esse ano serão realizados os jogos olímpicos no Rio de Janeiro e um dos esportes em que causam maior expectativa dos brasileiros é o futebol. Isso porque apesar de ser considerado, ou era até bem pouco tempo, o país do futebol, o Brasil ainda não conquistou a tão sonhada medalha de ouro. Talvez o leitor tenha se questionado: mas o que Grafos tem a ver com futebol? A resposta é bem simples devido a versatilidade de Grafos em modelar uma infinidade de situações, é possível modelar um campeonato* *e em um dado momento verificar qual time tem maior possibilidade de ser campeão. Não será feito isso aqui pois demanda conceitos mais aprofundados. Porém será tomada como exemplo a tabela da primeira fase dos jogos de futebol olímpico masculino, Figura 4.13, para melhor entendimento dos conceitos a seguir. Denominamos F o Grafo da Figura 4.15 que representa a situação em que todos os jogos do Grupo A foram realizados. Representando os Vértices pela inicial minúscula de cada país e os jogos realizados pelas Arestas que ligam os vértices, temos os conjuntos que definem o Grafo F:*

Figura 4.13: Tabela de Jogos de Futebol Olímpico Masculino

GRUPOS DO FUTEBOL MASCULINO			
Grupo A	**Grupo B**	**Grupo C**	**Grupo D**
Brasil	Suécia	Fiji	Honduras
África do Sul	Colômbia	Coreia do Sul	Argélia
Iraque	Nigéria	México	Portugal
Dinamarca	Japão	Alemanha	Argentina

Fonte: http://esportes.terra.com.br/brasil/sorteio-define-adversarios-do-brasil-no-futebol-no-rio-2016,d9e430c36ad03b1ccf58622830b8187egflq4on3.html Acesso: 16/05/2016, 9:47

Para os Vértices temos o conjunto:

$$V(F) = \{a, b, d, i\}$$

Para o conjunto com todas as possibilidades de Arestas temos o conjunto:

$$E(F) = \{ab, ai, ad, bi, bd, di\}$$

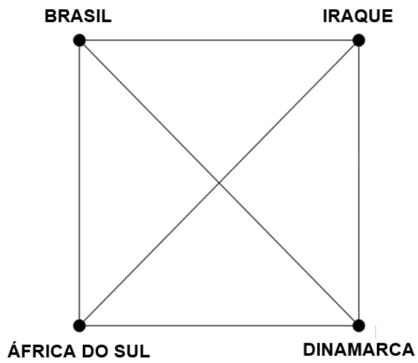
Observe as figuras que modelam a Chave do Brasil nos jogos de futebol olímpico masculino de 2016 em diferentes momentos da primeira fase da competição:

A Figura 4.14 indica o Grafo que representa a situação na qual os jogos ainda não iniciaram os times existem (Vértices) mas não realizou-se nenhuma partida (Arestas).

Figura 4.14: Campeonato não Iniciado

A Figura 4.15 é a representação em Grafo do momento, em que os jogos da primeira fase já foram concluídos. É possível verificar que todas as possíveis Arestas do Grafo Simples estão traçadas.

Figura 4.15: Todos os Jogos Realizados



A Figura 4.16 representa um momento qualquer da competição em que o Brasil já jogou com o Iraque, tem-se então a Aresta *bi* e África do Sul com a Dinamarca, desta vez a Aresta *ad*.

Figura 4.16: Jogos Realizados: Brasil x Iraque e África do Sul x Dinamarca

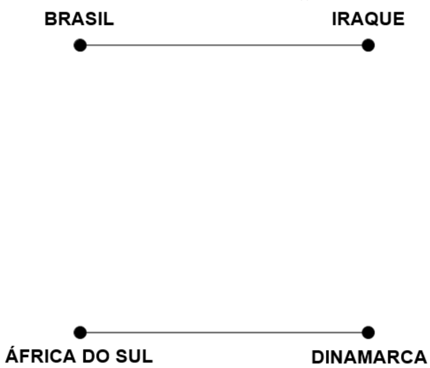
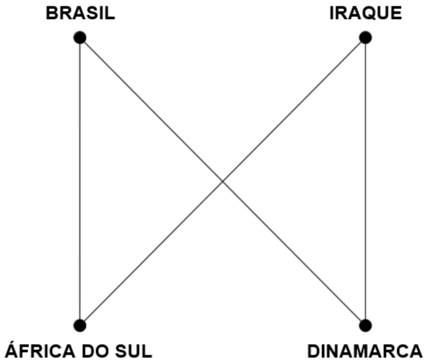


Figura 4.17 representa os jogos que ainda faltam ser realizados após o jogo entre Brasil e Iraque e o jogo entre África do Sul e Dinamarca, no caso o jogos entre Brasil e Dinamarca, África do Sul e Brasil, África do Sul e Iraque e Dinamarca e Iraque e representados respectivamente pelas Arestas bd, ab, ai e di.

Figura 4.17: Jogos que Faltam Segundo Figura 4.4



Note que todos os grafos apresentados são simples, pois nenhum time joga contra si mesmo, o que caracterizaria um laço, nem existe o que se chama de jogo de volta o que caracterizariam arestas em paralelo.

Grafo Completo

É o Grafo, no qual, cada vértice é adjacente a todos os outros vértices do mesmo Grafo, ver Figura 4.15:

Definição 4.6.1 (Grafo Completo) *Um Grafo simples é completo quando para quaisquer v_i e $v_j \in V(G)$ com $i \neq j$ tem-se $(v_i, v_j) \in E(G)$.*

Exemplo 4.6.1 *Para o grafo da Figura 4.15 tem-se:*

$$V(F) = \{a, b, d, i\}$$

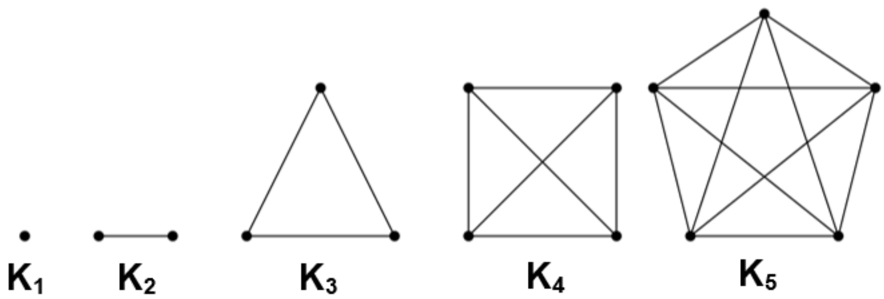
Para as arestas temos:

$$E(F) = \{ab, ai, ad, bi, bd, di\}$$

A Figura 4.18 apresenta os Grafos Completos[2] de $1, 2, 3, 4$ e 5 vértices.

[2]Segundo FERREIRA [16], a notação utilizada para grafos completos é uma homenagem ao matemático polônes Kasemir Kuratowski que foi o primeiro a obter, em 1930, uma caracterização de planaridade por meio deste tipo de grafo, dái a explicação da letra K.

Figura 4.18: Grafos Simples Completos



Grafo Nulo

O grafo nulo é o grafo que não possui arestas, apesar de sua configuração sua definição reforça as definições de Grafos Complementares, ver Figura 4.14.

Definição 4.6.2 (Grafo Nulo) *Um Grafo* K_n *, onde* n *é o número de vértices, é dito nulo quando* $E = \emptyset$*, e o denotamos por* $\bar{K}_n$*.*

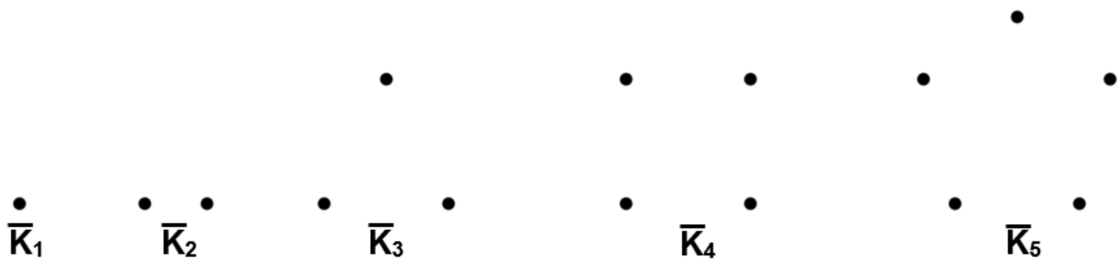
Exemplo 4.6.2 *Para o grafo da Figura 4.14 tem-se:*

$$V(F_1) = \{a, b, d, i\}$$

Para as arestas temos:

$$E(F_1) = \emptyset$$

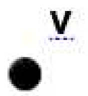
Figura 4.19: Grafos Nulos



Grafo Trivial

É um Grafo que possui apenas um vértice e como estão sendo considerados Grafos Simples o conjunto de arestas é vazio.

Figura 4.20: Grafo Trivial



Definição 4.6.3 (Grafo Trivial) *Um Grafo K_n é dito trivial ou elementar quando $n = 1$ e $E = \emptyset$. Ver Figura 4.20 :*

SubGrafo

Utilizando-se de uma certa flexibilidade pode-se dizer que é um Grafo que está contido em outro, porém para ser mais criterioso temos:

Definição 4.6.4 (Subgrafo) *Dados o Grafo G definido por $V(G)$ e $E(G)$ e o Grafo H definido por $W(G)$ e $F(G)$. Diz -se que H é subgrafo de G se $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$.*

*Dois **exemplos** são os grafos da Figura 4.16 e o grafo da Figura 4.17 em relação a Figura 4.15.*

Exemplo 4.6.3 *Para o grafo da Figura 4.16 tem-se:*

$$V(F_2) \subset V(F)$$

Para as arestas temos:

$$E(F_2) \subset E(F)$$

E ainda;

Exemplo 4.6.4

$$V(F_3) \subset V(F_3)$$

Para as arestas temos:

$$E(F_3) \subset E(F)$$

Observação 4.6.1 *Note que pela definição acima o Grafo Nulo e o Grafo Completo são também subgrafos, algo semelhante ao que ocorre para conjuntos.*

Grafo Complementar

Agora já definido Grafo Completo, tomamos ele como Universo para inserir o conceito de Grafo Complementar. Dizemos que o Grafo G complementar ao Grafo H é aquele que possui o conjunto de vértices igual ao conjunto de Vértices de um Grafo H dado e o conjunto de Arestas formado pelas arestas que faltam em H para que ele torne-se um Grafo Completo.

Definição 4.6.5 (Grafo Complementar) *Dado o Grafo Completo U definido por $V(U)$ e $E(U)$ e seus Subgrafos G definido por $V(G)$ e $E(G)$ e o Grafo H definido por $V(H)$ e $E(H)$. Diz -se que G é complementar de H se $V(U) = V(G) = V(H)$ e $E(G) \cup E(H) = E(U)$ com $E(G) \cap E(H) = \emptyset$.*

Exemplo 4.6.5 *Mais uma vez dois **exemplos** são os grafos da Figura 4.16 e o grafo da Figura 4.17.*

Para o grafo da Figura 4.16 tem-se:

$$V(F_2) = \{a, b, d, i\}$$

Para as arestas temos:

$$E(F_2) = \{ad, bi\}$$

Para o grafo da Figura 4.17 tem-se:

$$V(F_3) = \{a, b, d, i\}$$

Para as arestas temos:

$$E(F_3) = \{ab, ai, bd, di\}$$

Verifique que;

$$E(F_2) \cup E(F_3) = E(F) = \{ab, ai, ad, bi, bd, di\}$$

Observação 4.6.2 *Note que pela definição acima o Grafo Nulo é o complemento do Grafo Completo, algo semelhante ao que ocorre para conjuntos.*

4.7 Matriz de Adjacência e Matriz de Incidência

Duas formas importantes de representação dos Grafos são suas representações matriciais. Essa forma de representá-lo auxilia na resolução de diversas situações pois pode-se contar com o auxílio da Álgebra Linear para um estudo aprofundado de suas estruturas e na resolução de problemas mais avançados com a utilização de tecnologia avançada já que para o computador a representação de um Grafo é, para um bom número de situações, uma matriz, segundo GONÇALVES [20], principalmente quando se trata de Grafos de ordem muito elevada.

Matriz de Adjacência

É a matriz que indica a relação de adjacência entre os vértices de um mesmo Grafo. Para sua construção associa-se para cada linha um vértice e do mesmo modo para cada coluna um vértice, atribuindo-se o número correspondente a quantidade de arestas que os tornam, vértices adjacentes ou zero para o caso contrário. Pela forma de construção ter-se-á uma matriz quadrada de ordem igual ao número de vértices.

Para melhor definir segue:

Definição 4.7.1 (Matriz de Adjacência) *Seja G um Grafo com n vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \cdots v_n$ e m arestas $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \cdots e_m$. A matriz de adjacência $A(G)$ de G é a matriz quadrada*

$n \times n$ na qual cada entrada a_{ij} corresponde ao número de arestas incidindo entre v_i e v_j.

Observe:

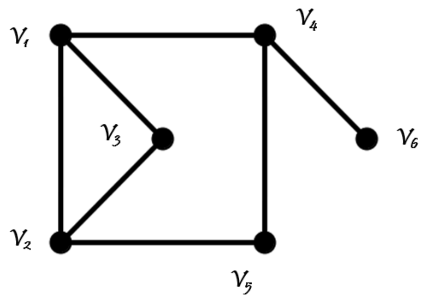
$$MatrizA = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{cases} 0, & \textit{se não existem arestas entre} \quad v_{ij} \\ k_{ij}, & \textit{onde}, k_{ij} \textit{ é o número de arestas ligando os vértices} \quad v_i \textit{ e } v_j \end{cases} \tag{4.2}$$

Veja o exemplo:

Figura 4.21: Matriz de Adjacência do Grafo G

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 4.22: Grafo G da Matriz de Adjacência



Matriz de Incidência

É a matriz que indica a relação de Incidência entre os vértices e as arestas do mesmo Grafo. Para sua construção associa-se para cada linha um vértice e para cada coluna uma aresta, atribuindo-se o número 1 para o caso de incidência ou zero para o caso de não incidência. Pela forma de construção ter-se-á uma matriz que terá o número de linhas igual ao número de vértices e o número de colunas igual ao número de arestas.

Definição 4.7.2 (Matriz de Incidencia) *Seja G um Grafo de n vértices $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \cdots v_n$ e m arestas $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \cdots e_n$. A matriz de incidência $B(G)$ de G é a matriz $n \times m$ na qual cada entrada b_{ij} corresponde a 1 se a aresta for incidente ao vértice e 0 se não for incidente..*

Observe:

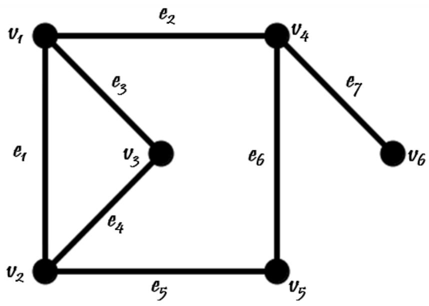
$$MatrizB = (b_{ij})_{n\times m} = \begin{cases} 0, & se\ a\ aresta, e_j\ não\ incide\ sobre\ o\ vértice\ \ v_i \\ 1, & se\ a\ aresta, e_j\ incide\ sobre\ o\ vértice\ \ v_i \end{cases} \tag{4.3}$$

Veja o exemplo:

Figura 4.23: Matriz de Incidência do Grafo G

$$B(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 4.24: Grafo G da Matriz de Incidência



As matrizes de um Grafo serão de fundamental importância no estudo de caminhos entre vértices, mas antes é necessário apresentar mais duas definições de Grafos para melhor entendimento da sequência de conteúdos..

4.8 Digrafo e Grafo Valorado

As duas definições de Grafos que serão apresentadas serão de fundamental importância para melhor entendimento dos conceitos que serão expostos na sequência, pois ajudarão na tomada de decisões.

4.8.1 Grafo Orientado ou Digrafo

Situação 4.8.1 *Em uma determinada localidade as vias possuem a configuração representada pela Figura 4.25, note que vias de mão única e de mão dupla estão representadas por setas e indicam o trajeto possível para o caminhão. Na sequência tem-se na Figura 4.26 o Grafo que representa a situação:*

Figura 4.25: Trajetórias possíveis para o Caminhão

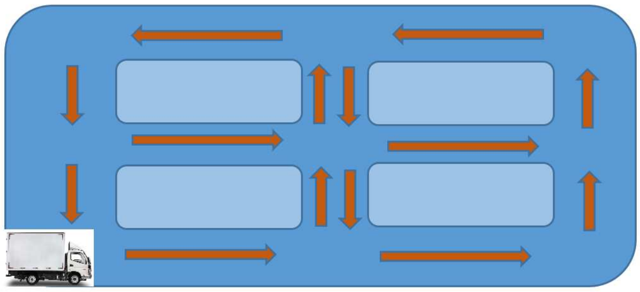
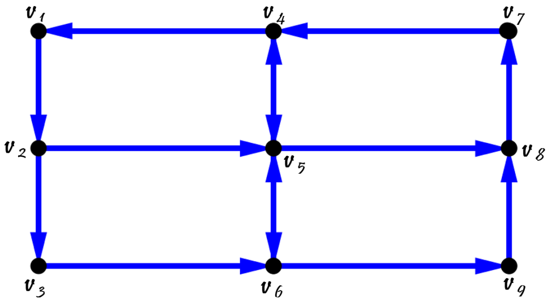


Figura 4.26: Grafo das Trajetórias possíveis para o Caminhão



O Grafo é chamado de Digrafo e agora existe distinção entre as arestas (v_i, v_j) e (v_j, v_i), pois agora elas passam a ser um par ordenado, no qual o primeiro vértice indica o vértice de origem e o segundo vértice a extremidade. As arestas passam a ser chamadas de arcos ou arestas direcionadas.

Definição 4.8.1 (Digrafo) *Um grafo orientado (Digrafo) G = (V;E) é um grafo com uma orientação no seu conjunto de arestas, isto é, cada aresta é um par ordenado de vértices distintos e agora definidas como arcos ou arestas direcionadas.*

Exemplo 4.8.1 *Na situação representada pela Figura 4.26 acima, tem-se o grafo definido pelos conjuntos:*

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\} = V(G)$$

E as arestas

$$E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_5, v_3v_6, v_4v_1, v_4v_5, v_5v_4, v_5v_6, v_5v_8, v_6v_5, v_6v_9, v_7v_4, v_8v_7, v_9v_8\} = E(G)$$

Observação 4.8.1 *Apesar da situação proposta sugerir a aplicação à vias de trânsito*

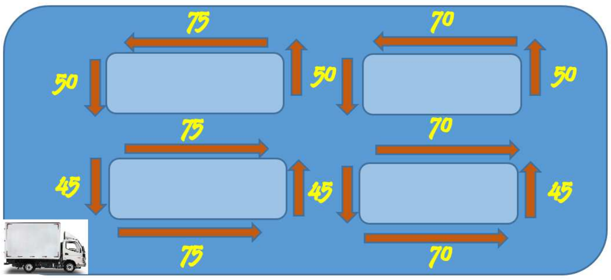
Digrafos são aplicados a diversas situações nas quais torna-se necessário deixar explícito a direção da ação (fluxo, influência, corrente elétrica, etc.), que ocorre entre os vértices. Tais situaçãoes podem ser:

- *Influêcia entre pessoas;*
- *Cadeia alimentar;*
- *Telecomunicações;*
- *Etc.*

4.8.2 Grafo Valorado ou Ponderado

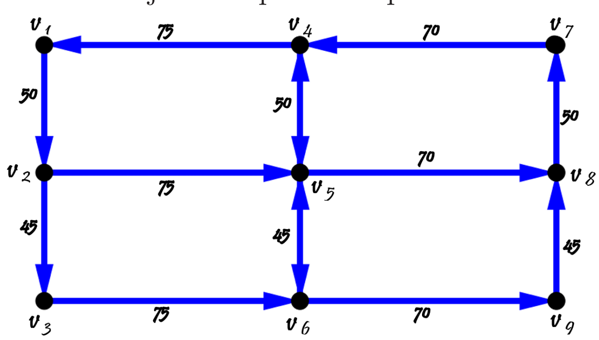
Situação 4.8.2 *Baseando-se na situação 4.8.1, se forem atribuídos valores às vias teremos a Figura 4.27. Está figura dá origem ao Grafo apresentado na Figura 4.28 representado logo a seguir.*

Figura 4.27: Trajetórias possíveis para o Caminhão com Distâncias



O grafo referente a situação pode ser representado pela Figura 4.28 e recebem uma definição especial.

Figura 4.28: Grafo das Trajetórias possíveis para o Caminhão com Distâncias



Definição 4.8.2 (Grafo Valorado) *Um Grafo Valorado ou Ponderado $G = (V, E)$, é um grafo que a cada aresta $e_m = (v_i, v_j)$ atribuí-se um valor k. O grafo em questão pode ainda ser direcionado ou não como pode ser visto nas figuras abaixo:*

Figura 4.29: Grafo Direcionado e Valorado

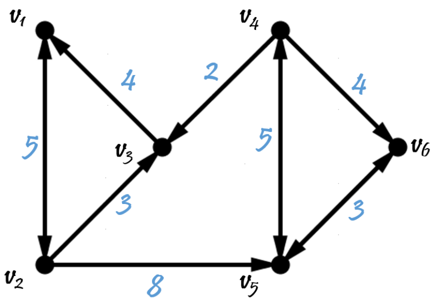
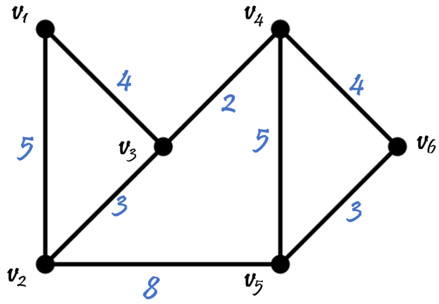


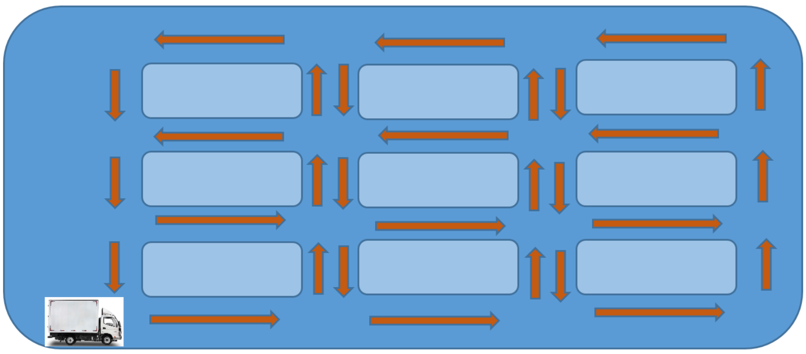
Figura 4.30: Grafo Valorado e Não Direcionado



4.9 Percursos, Caminhos, Circuítos e Conexidade

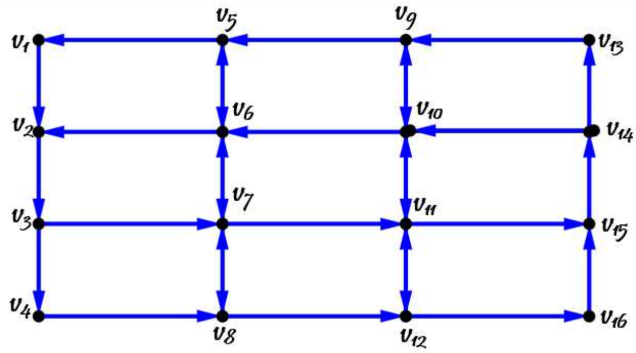
A situação a seguir, representada pela Figura 4.31, ajudará a compreender os próximos conceitos sobre a Teoria dos Grafos que serão apresentados na sequência:

Figura 4.31: Configuração das Vias na Localidade



Situação 4.9.1 *Um caminhão de entregas precisa realizar seus serviços em uma determinada localidade representada pela Figura 4.31. Na sequência a Figura 4.32 ilustra o Grafo que modela a localidade, indicando cada cruzamento de vias por Vértices e as vias por Arestas. Inicialmente, o motorista escolhe um percurso (rota, itinerário, trajeto, etc.), só de ida como mostra na Figura 4.33 e representada pelo Grafo na Figura 4.34.*

Figura 4.32: Grafo da Configuração das Vias na Localidade



O Trajeto feito pelo caminhão que pode ser visualizado na ilustração da Figura 4.34 é um Subgrafo do Grafo da Figura 4.32.É possível verificar que cada Aresta, com exceção da última possui em sua extremidade o Vértice que inicia a aresta seguinte. Mais adiante serão definidos os conceitos presentes em situações como essa que foi apresentada.

Figura 4.33: Ida do Caminhão

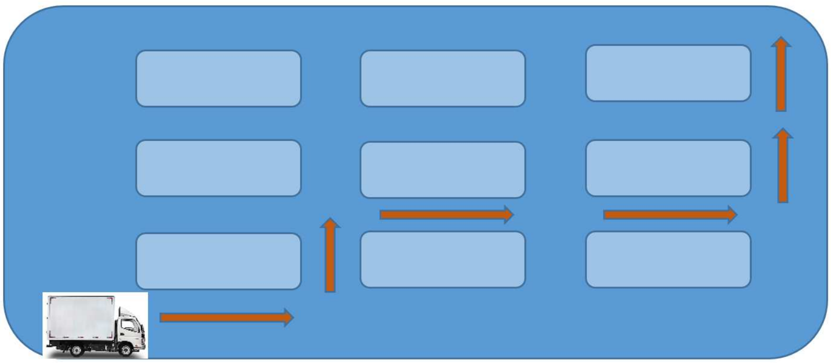
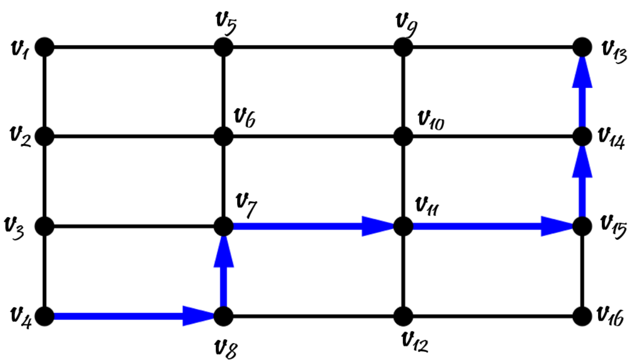


Figura 4.34: Modelo de Grafo da Ida do Caminhão



As idéias de **percurso, caminho e circuitos** estão presente na vida diária ao determinar as idas e vindas ao supermercado, escola, trabalho, outras cidades etc, mas o que para a maioria das pessoas passa despercebido, representam para grandes empresas de transportes, transmissão de informação e até mesmo de circuitos elétricos uma importante decisão. Para estas empresas, quanto mais bem escolhidos esses percursos traduzem em agilidade, eficiência nos serviços, redução de custos entre outros fatores determinantes do sucesso da empresa e dos lucros ou prejuízos das mesmas. Tal característica fez com que este tema da teoria dos Grafos obtivesse destaque nos estudos recentes, principalmente os problemas de logística no transporte. Novamente, a teoria presencia um problema que ganha destaque e aplicabilidade, o Problema do Caixeiro Viajante.[3]

Definição 4.9.1 (Percurso ou Passeio) *Um passeio ou percurso de comprimento $k \geq 1$ em um Grafo G, é uma sequência $P = (u_0, u_1, u_2, ...u_k)$ de Vértices (não necessariamente distintos) de G tal que u_{i-1} é adjacente a u_i para $1 \leq i \leq k$. Se $u_0 = u_k$, dizemos que trata-se de um percurso fechado.*

Exemplo 4.9.1 *No Grafo da Figura 4.34 temos o percurso $P = (v_4, v_8, v_7, v_{11}, v_{15}, v_{14}, v_{13})$ que ao fazer as devidas correspondências temos $P = (u_0, u_1, u_2, u_3, v_4, v_5, v_6)$.*

A repetição ou não de Vértices ou Arestas dão origem à classificação dos percursos:

Definição 4.9.2 (Trilha) *Todo percurso que não possui repetição de Arestas é chamado de Trilha. Ela será **fechada** se $u_0 = u_k$ e será **não simples** se algum dos vértices intermediários repetir-se.*

O percurso representado na Figura 4.34 é um exemplo de Trilha como também os representados pelas Figuras 4.36 e 4.38 das situações que seguem.

Situação 4.9.2 *Considerando ainda, a localidade da Situação 4.9.1.. A Figura4.35 ilustra a situação em que o motorista do caminhão faz um trajeto de ida e outro totalmente diferente para o retorno ao ponto de partida, não repetindo dessa forma nem vias (Arestas) e nem esquinas (Vértices). A Figura 4.36 representa o Grafo referente ao trajeto.*

Observe agora o grafo correspondente a situação:

[3]Os caixeiros viajantes eram vendedores ambulantes que faziam trajetos à pé, montados ou em veículos e provavelmente definiam percursos que cobrissem o maior número de localidades possível com menor percurso, voltando depois ao seu ponto de partida.

Figura 4.35: Trajetória do Caminhão

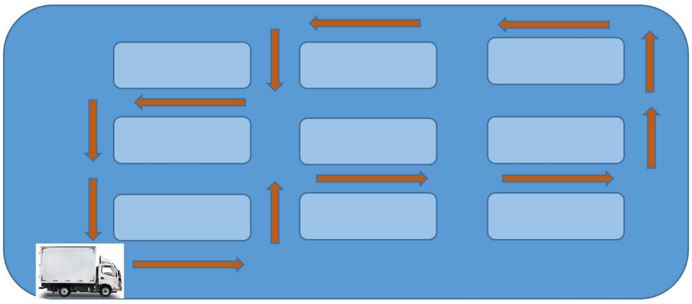
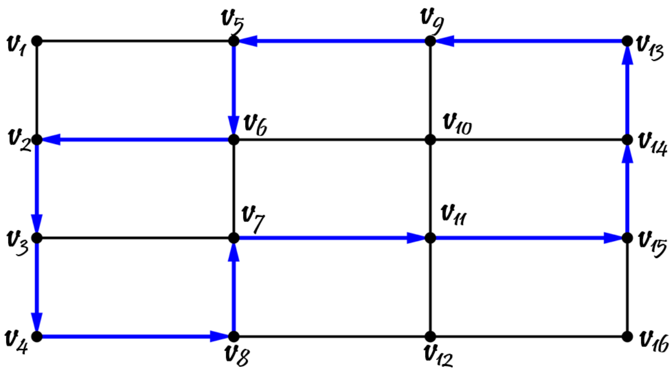


Figura 4.36: Grafo da Trajetória do Caminhão



Definição 4.9.3 (Caminho) *Uma Trilha Simples que não repete Vértices é chamado de Caminho. Se por acaso* $u_0 = u_k$ *tem-se um caminho fechado que é definido como* ***Ciclo ou Circuito****. Os percursos representados pelas Figuras 4.34, 4.36 e 4.38 são respectivamente um Caminho Simples, Um Circuito e uma Trilha que não representa um Caminho.*

Situação 4.9.3 *Novamente, baseado na Situação 4.9.1.. A Figura4.37 ilustra a situação em que o motorista do caminhão faz um trajeto de ida e outro de retorno ao ponto de partida , não repetindo vias (Arestas) mas dessa vez repetindo uma esquina (Vértice). A Figura 4.38 representa o Grafo referente ao trajeto.*

Figura 4.37: Ilustração do Trajeto Fechado não Simples

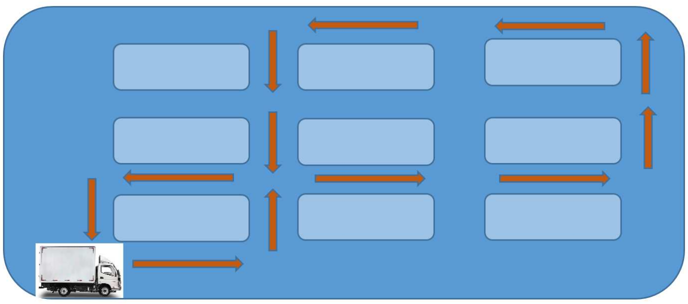
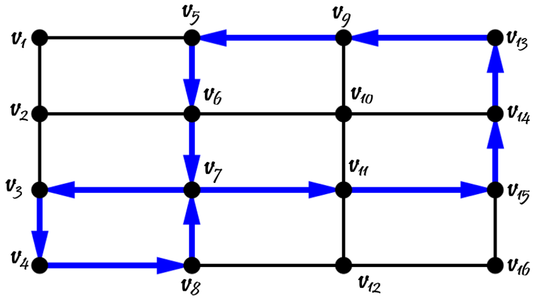


Figura 4.38: Trilha Fechada Não Simples



Definição 4.9.4 (Grafo Conexo) *Seja $G = (V; E)$ um grafo. G diz-se conexo se e somente se, dados quaisquer dois vértices v e w $V(G)$, com $v \neq w$, existe um percurso em G que une u a v. Caso contrário o grafo diz-se desconexo. As figuras a seguir ilustram a definição:*

Figura 4.39: Grafo Conexo

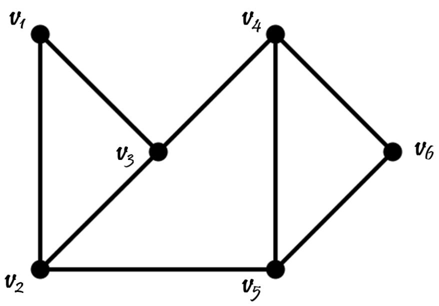
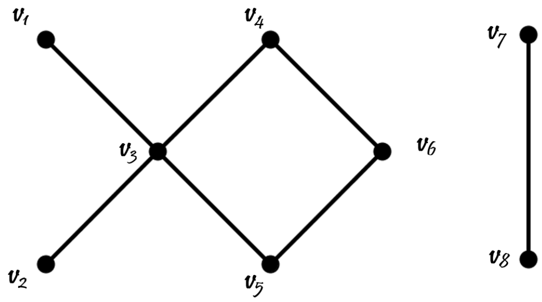


Figura 4.40: Grafo Desconexo



Observação 4.9.1 *Note que na figura 4.40 que representa o grafo desconexo é impossível partir de um dos vértices, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ou v_6 e chegar-se a um dos vértices v_1 ou v_2.*

4.9.1 Percursos Entre Dois Vértices

Em um grafo conexo sempre existe um percurso possível entre dois vértices desta forma será apresentado como determinar a quantidade de caminhos de n passos entre dois vértices através de uma aplicação da matriz de adjacência de um grafo.

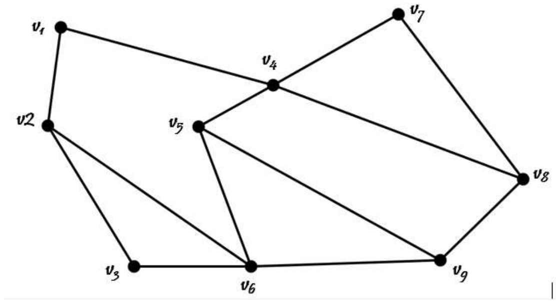
Teorema 4.9.1 *Dado um grafo simples conexo G, com n vértices e sua matriz de adjacência $\boldsymbol{A}$, então a componete c_{ij} de A^k, para algum k inteiro e positivo, é o número de percursos de comprimento k que ligam o vético v_i ao vético v_j.*

Exemplo 4.9.2 *A matriz apresentada abaixo é a matriz de incidência relativa ao grafo G. Para determinar quantos percursos de três passos existem ligando o vértice* v_1 *ao vértice* v_9*, calcula-se* A^3*.:*

Figura 4.41: Matriz de Adjacência do Grafo G, Para Descobrir Percursos

$$A(G) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 4.42: Grafo G: Descobrir Percursos

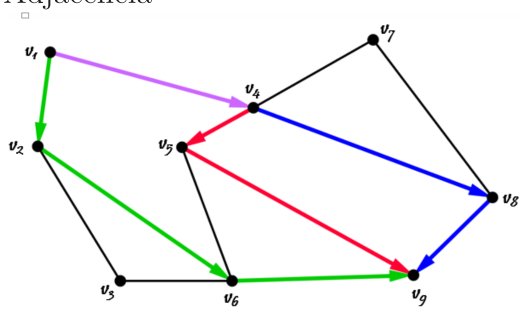


Logo abaixo a matriz $C(G) = A^3$ [4] e na sequência a ilustração do grafo com os percursos possíveis entre os vértices v_1 e v_9, note que na matriz $C(G)$ o termo c_{19} é 3 o mesmo ocorre para o termo c_{91} pois tratra-se de um grafo simples e sem orientação. Justamente o número de percursos de três passos entre v_1 e v_9.

Figura 4.43: Matriz C, Percursos de Três Passos

$$C(G) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 5 & 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 7 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 2 & 6 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 6 & 4 & 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 2 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 4.44: Grafo G da Matriz de Adjacência



[4]A potência foi calculada na página https://matrixcalc.org/pt/, com acesso em 03 de junho de 2016.

4.9.2 Grafos Eurelianos

Ao resolver o problema das pontes de Königsberg, Euler verificou que seria impossível fazer o trajeto nos moldes do problema e da configuração das margens e pontes. Segundo bibliografia consultada, ele argumentou que para que o trajeto proposto fosse possível, seria necessário que todos os vértices, do grafo correspondente, fossem de grau par, pois ao chegar a um vértice (margem ou ilha), seriam necessárias uma aresta (ponte), de chegada e outra de saída. Dessa reflexão defini-se:

Definição 4.9.5 *Grafo Euleriano é todo grafo G de m arestas que admite uma trilha fechada de comprimento m . Ver figura 4.45 :*

Figura 4.45: Grafo Euleriano

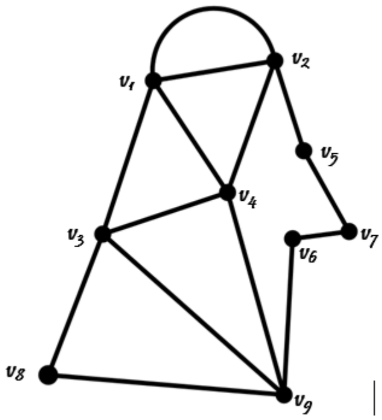
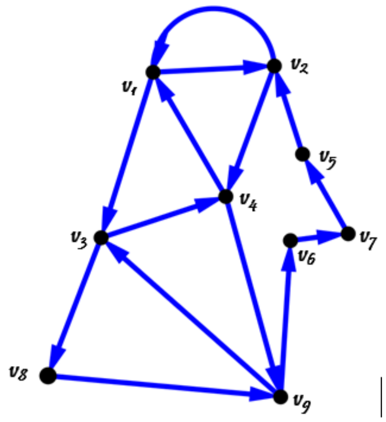


Figura 4.46: Trilha Euleriana



Observando-se os vértices verifica-se que os mesmos são todos de grau par isso não é coincidência pois é verificado pelo teorema a seguir:

Teorema 4.9.2 *Um grafo conexo G (não necessáriamente simples), é euleriano se, e somente se, todos seus vértices tem grau par.*

Para demonstrá-lo será usado o seguinte lema:

Lema 4.9.1 *Se todo vértice de um grafo G (não necessariamente simples) for maior ou igual a 2, então, G contém um ciclo.*

Demonstração 4.9.1 *Se G tem laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois G já contém um ciclo. Considerando um grafo simples, partindo de um vértice inicial* *qualquer, inicia-se uma trilha. Quando chegamos a outro vértice, estamos visitando-o pela primeira vez; continuando o percurso, ao chegar a um vértice já visitado, produzimos um ciclo. Como o número de vétices é finito, o lema está provado, pois como o grau de cada vértice é sempre maior ou igual a dois, sempre será possível sair de um vértice visitado pela primeira vez e na pior das hipóteses repetiremos no final da trilha o vértice de partida.*

Agora já se tem fundamento suficiente para demonstrar o teorema.

Demonstração 4.9.2 ($\Rightarrow$) *Supondo que G tenha uma trilha fechada m. Cada vez que a trilha para por um vértice, utiliza duas novas arestas, um para entrar e otra para sair. Logo, o grau de cada vértice é obrigatoriamente par.* ($\Leftarrow$) *Seja G com todos os vértices de grau par. Usando indução sobre o número de arestas m do grafo. Para $m = 0$ é verdadeiro. Supondo que seja verdadeiro para todos os grafos com menos que m arestas, sendo G conexo, todos os vétices tem grau maior que 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo. Dentre todas as trilhas fechadas de de G escolhe-se uma trilha T com o comprimento máximo. Se T tem comprimento m o teorema está provado. Caso contrário, considere-se o grafo H resultante da retirada das arestas de T. Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T, e todos os vértices tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H em um vértice em comum com T e tem todos os vértices de grau par. Pela hipótese de indução, H tem uma trilha que passa por todos os vértices de H, e pode-se formar uma rilha fechada maior, conectando-se T com a trilha em H. Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T.*

Outra possibilidade apontada na verificação do problema das pontes seria de exatamente dois vétices serem de grau ímpar e necessáriamente um deles o de partida e o outro o de chegada, dessa forma temos uma trilha aberta. Agora defini-se.

Definição 4.9.6 *Um grafo G de m arestas é dito semieuleriano se existir uma trilha aberta de comprimento m em G. Ver figura 4.47:*

Teorema 4.9.3 *Um grafo conexo G (não necessáriamente simples) é semieuleriano se, e somente se, dois vértices tem grau ímpar.*

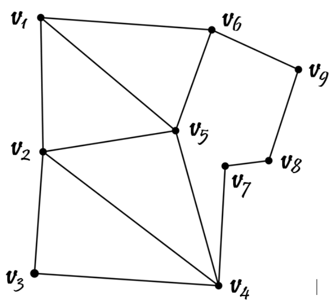


Figura 4.47: Grafo Semi-Euleriano

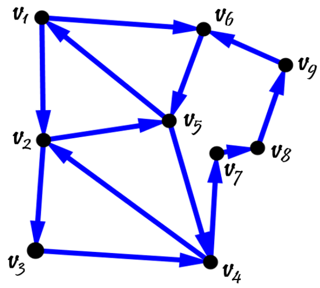


Figura 4.48: Caminho Semi-Euleriano

Demonstração 4.9.3 ($\Rightarrow$) *Supondo que G tenha um caminho semieuleriano E começando em um vértice v e terminando em um vértice w. Como $v \neq w$, v e w têm ambos grau ímpar. Pois cada vez que um dos demais vértices aparecem em E tem duas arestas incidentes. Como cada aresta ocorre uma vez em E, o grau desses vértices é par.* ($\Leftarrow$) *Suponha que G seja conexo e possui dois vértices v (inicial) e w (final) de grau ímpar. Consideremos o grafo H que se obtém de G por junção de uma nova aresta ligando v a w. a este novo grafo pode-se aplicar o Teorema de Euler e concluir que admite um caminho euleriano. Excluindo-se deste caminho a aresta previamente adicionada a G obtemos uma Trilha Semieuleriana ligando v a w, como desejado.*

Atualmente os conceitos de grafos eulerianos são aplicados principalmente em situações onde é necessário fazer um trajeto no qual visite-se todas as ruas de uma determinada localidade e para que isso tenha o menor custo deve-se passar uma única vez por cada rua voltando-se ao local de partida.

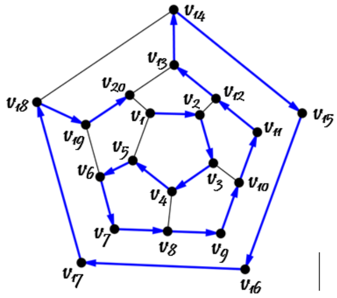
4.9.3 Grafos Hamiltonianos

O matemático, físico e astrônomo irlandês Willian Rowan Hamilton (1805-1865), criou um jogo chamado "Icosian Game". O mesmo concistia em encontrar um caminho que visita-se cada um dos vértices de um dodecaedro regular. Uma configuração comum do jogo era a planificação do dodecaedro como pode ser visto na Figura 4.49. Observe o Icosian Game e a seu lado o Grafo que o representa uma solução Figura 4.50 :

Novamente o Teoria dos grafos traz uma situação dando origem a conceitos importantes sobre a teoria. Os estudos sobre caminhos como esse, avançaram e passaram

Figura 4.49: Icosian Game

Figura 4.50: Caminho Hamiltoniano do Icosian



a ser denominados caminhos hamiltonianos. Como é verificado na definição a seguir:

Definição 4.9.7 *Caminho hamiltoniano em um Grafo G de m vértices é todo caminho que contém exatamente os m vértices.*

Consequentemente defini-se:

Definição 4.9.8 *Todo grafo G que admite um Caminho Hamiltoniano é dito Grafo Hamiltoniano. Verifique as figuras 4.51 e 4.52 .*

Figura 4.51: Grafo Hamiltoniano

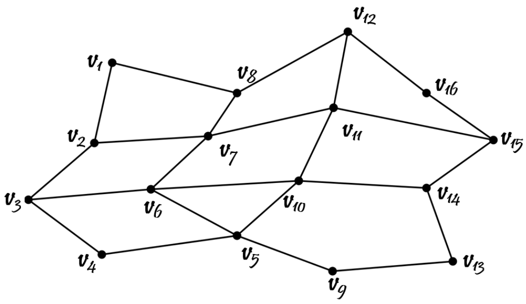
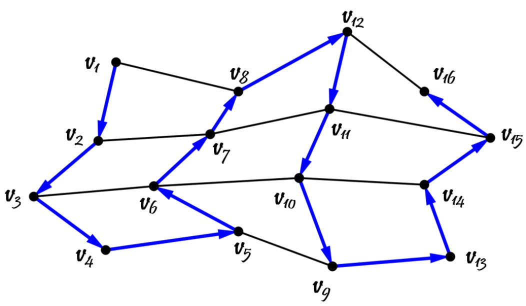


Figura 4.52: Caminho Hamiltoniano



Exemplo 4.9.3

Contrário ao que ocorreu com Grafos Eulerianos, para os Grafos Hamiltonianos ainda não foram determinadas as condições necessárias e suficientes para determinar se um Grafo é Hamiltoniano, tornou-se dessa forma um dos grandes desafios da Teoria e um dos problemas ainda não resolvidos.

4.10 Caminho Mínimo

Como foi discutido na secção anterior, descobrir o melhor caminho, tem sido um dos temas mais abordados e mais discutidos na teoria de grafos. Essa temática é empregada principalmente por empresas de transportes. Com a finalidade de atender essa problemática foram desenvolvidos várias técnicas de determinação do valor mínimo para um caminho entre localidades. Algumas dessas técnicas são algoritmos com aplicações computacionais, pois em alguns casos torna-se inviável a determinação de tal caminho de forma manual. Serão apresentados três dessas técnicas: O **Método da exaustão**, o **Algoritmo guloso** e o **Algorítmo de Dijkstra**.

4.10.1 Método da Exaustão

Uma das formas de determinar o caminho mínimo em um grafo é testar todas as possibilidades, e daí verificar qual o menor valor. A situação a seguir vai exemplificar o processo.

Situação 4.10.1 *Uma transportadora deseja realizar uma entrega partindo da cidade **Alvorada** para a cidade **Esmeralda** de forma a percorrer a menor distância. Na mesma região existem mais três cidades **Constantina**, **Diamante** e **Bonifácio** que apresentam as seguintes configurações em relação a suas vias, todas de mão única, com acesso direto entre elas:*

Alvorada: *Está ligada à cidade de Bonifácio por uma via de 10 Km, à cidade de Constantina por uma via de 6 Km e à cidade de Diamante por uma via de 3 Km.*

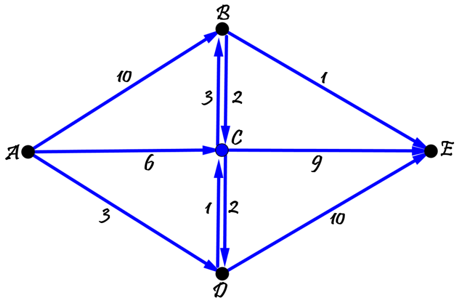
Bonifácio: *Está ligada à cidade de Constantina por uma via de 2 Km e à cidade de Esmeralda por um via de 1 Km.*

Constantina: *Está ligada à cidade de Diamante por um via de 1 Km e à cidade de Esmeralda por uma via de 9 Km.*

Diamante: *Está ligada à cidade de Constantina por uma via de 2 Km e à cidade de Esmeralda por um via de 10 Km.*

Obedecendo as configuraçãoes, um modelo de grafo que obtem-se ao representar cada cidade como um vértice rotulado pela inicial minúscula do nome de cada cidade, uma configuração possível de grafo rotulado, direcionado e valorado é indicado pela figura 4.53. O objetivo é descobrir qual o menor caminho entre os vértices **A** e **E**:

Figura 4.53: Grafo Para Determinar Caminho Mínimo



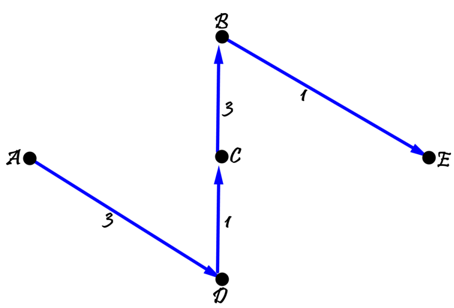
Ao aplicar o método tem-se os resultados apresentados no quadro 4.54:

Figura 4.54: Quadro de Aplicação do Método da Exaustão

Caminho	**Distância Total**
A-B-C-E	$10 + 2 + 9 = 21$
A-B-C-D-E	$10 + 2 + 2 + 10 = 24$
A-B-E	$10 + 1 = 11$
A-C-B-E	$6 + 3 + 1 = 10$
A-C-E	$6 + 9 = 15$
A-C-D-E	$6 + 2 + 10 = 18$
A-D-C-B-E	$3 + 1 + 3 + 1 = 8$
A-D-C-E	$3 + 2 + 9 = 14$
A-D-E	$3 + 10 = 13$

A distância mínima é 8 km, que é encontrada quando feito o caminho **A-D-C-B-E**, como exposto na figura 4.55. Embora eficiente o método torna-se inviável para Grafos com tamanhos ou dimensões muito grandes.

Figura 4.55: Caminho Mínino Encontrado



4.10.2 Algorítimo Guloso

Também conhecido como método do vizinho mais próximo, o processo consiste em partir de um vértice sempre para o vértice imediatamente mais próximo, sem preocupar-se com a análise de passar por outro vértice antes. No grafo da figura 4.53 a sequência do algoritmo seria a seguinte:

1. Partindo do vértice **A** o mais próximo é o vértice **D**.
2. Partindo do vértice **D** o mais próximo é o vértice **C**.
3. Partindo do vértice **C** o mais próximo é o vértice **B**.
4. Finalmente do vértice **B** o mais próximo é o vértice **E**.

Coincidentemente o mesmo caminho encontrado, quando aplicado o método da exaustão, porém este método nem sempre fornece um resultado ótimo.

4.10.3 Algoritmo de Dijkstra

O algoritmo Dijkstra[5] de é mais eficiente que o Algoritmo guloso, pois permite que um vértice já visitado seja reavaliado para uma possível mudança da sequência do caminho a ser escolhido. Levando em consideração o grafo da figura 4.53, o processo é descrito por Boaventura e jurkier da seguinte forma:

1. Procura-se a cidade mais próxima de **A**.
2. Depois sucessivamente, procura-se entre as cidades não visitadas aquela que tem a menor distância desde **A**, diretamente ou passando por alguma cidade já visitada, anotando sempre o percurso escolhido.

Aplicando o processo à situação *4.9.3* apresentada na subseção *4.9.1*, com as orientações apresentadas em BOAVENTURA NETTO [6] e JURKIEWICZ [23], tem-se a seguinte sequência de ações:

[5]Edsger Wybe Dijkstra(1930-2002), foi um cientista de computação que recebeu o prêmio Turing Award, de 1972, por suas contribuições fundamentais na área de linguagens de programação, segundo Rone Mauri

Inicialmente constroí-se o quadro visto na figura 4.56 indicando as distâncias entre as cidades, àquelas que não possuírem ligação direta são preenchidas de forma geral pelo símbolo de infinito, porém no caso aqui apresentado preencheremos com o valor **1000**, está além da maior distância possível e facilitará a compreensão.

Figura 4.56: Quadro Inicial Para Aplicação do Algoritmo de Dijkstra

	A	B	C	D	E
A	0	10	6	3	10000
B	1000	0	2	1000	1
C	1000	3	0	1	9
D	1000	10000	2	0	10
E	1000	10000	10000	10000	0

Passo 1: Inicia-se em **A**, como a distância até ela mesma não pode ser melhorada por tratar-se de zero, fecha-se **A** e as demais distâncias são todas preenchidas com 1000. A partir de agora seguem-se uma sequência de passos e questionamentos.

Figura 4.57: Quadro de Inicialização

	A^1	B	C	D	E
Distância	0	1000	1000	1000	10000
Anterior	-	-	-	-	-

Passo 2: Partindo de **A**.

Questionamento: A quais cidades pode-se chegar a partir de **A**?

Pode chegar-se à:

B: De distância 10, sendo ele menor que 1000 substituí-se no quadro 1000 por 10.

C: De distância 6, sendo ele menor que 1000 substituí-se no quadro 1000 por 6.

D: De distância 3, sendo ele menor que 1000 substituí-se no quadro 1000 por 3. Essa distância não pode ser melhorada, fecha-se se **D** e parte-se o passo seguinte.

Figura 4.58: Quadro Distância de A

	A^1	B	C	D^2	E
Distância	**0**	10	6	**3**	10000
Anterior	-	**A**	**A**	**A**	-

Passo 3: Partindo de **D**.

Questionamento: A quais cidades pode-se chegar diretamente de **D**? Passando por **D** qual a distância de **A** até elas?

Pode chegar-se à:

C: De distância $3 + 1 = 4$, sendo ele menor que 6 substituí-se no quadro 6 por 5. Essa distância não pode ser melhorada, fecha-se **C**.

E: De distância $3 + 10 = 13$, sendo ele menor que 1000 substituí-se no quadro 1000 por 13.

A menor distância foi até **C**, parte-se daí, para o próximo passo.

Figura 4.59: Quadro Distância de D

	A^1	B	C^3	D^2	E
Distância	**0**	10	**4**	**3**	13
Anterior	-	**A**	**D**	**A**	**D**

Passo 4: Partindo de **C**.

Questionamento: A quais cidades pode-se chegar diretamente de **C**? Passando por **C** qual a distância de **A** até elas?

Pode chegar-se à:

B: De distância $3 + 1 + 3 = 7$, sendo ele menor que 10 substituí-se no quadro 10 por 7. Essa distância não pode ser melhorada, fecha-se **C**.

E: De distância $3 + 1 + 9 = 13$, sendo ele igual ao que já se tinha mantém-se 13.

A menor distância foi até **B**, parte-se daí, para o próximo passo.

Figura 4.60: Quadro Distância de C

	A^1	B^4	C^3	D^2	E
Distância	**0**	**7**	**4**	**3**	13
Anterior	-	**A**	**D**	**A**	**D**

Passo 5: Partindo de **B**.

Resta agora chegar a cidade E:

E: De distância $3+1+3+1 = 8$, sendo ela menor que 13 substituí-se 13 por 8. Chegando-se ao último vértice.

Figura 4.61: Quadro Distância de B

	A^1	B^4	C^3	D^2	E^5
Distância	**0**	**7**	4	**3**	**8**
Anterior	-	**C**	**D**	**A**	**B**

A sequência das cidades para que tenha-se o caminho mínimo é o mesmo encontrado anteriormente **A-D-C-B-E** e a distância consequentemente também 8 km.

Observação 4.10.1 *O algoritmo de **Dijkstra** não aceita valores negativos, mas existem outros algoritmos muito eficientes que não foram tratados aqui como é o caso do algoritmo de **Floyd**.*

Capítulo 5

Considerações Finais

Talvez não tenhamos conseguido fazer o melhor, mas lutamos para que o melhor fosse feito. Não somos o que deveríamos ser, não somos o que iremos ser.. mas Graças a Deus, não somos o que éramos....(Marthin Luther King)

Durante a realização da pesquisa foi possível verificar que do ponto de vista legal e dos documentos referentes ao currículo da Educação Brasileira é aplicável a introdução da Teoria dos Grafos na Educação Básica, pois ela apresenta como característica natural, desde o seu surgimento, a modelagem, resolução de problemas, interdisciplinaridade, entre outros ítens que passaram a reger á Educação Nacional.

No ponto de vista da aplicabilidade do Estudo da Teoria dos Grafos na educação básica, como também referência para estudos, o PROFMAT tem desempenhado um importante papel no desenvolvimento de pesquisas que podem ser facilmente consultadas na biblioteca online no portal do programa. Os temas dos trabalhos são variados e podem atender àqueles que procuram aprofundamento de conceitos, orientações e aplicações para Educação Básica, problemas resolvidos, planos de aula, até mesmo descrição de resultados obtidos através de aplicações entre outras. As contribuições amenizam em parte a deficiência existente em relação ao número de livros nacionais sobre a Teoria.

Na construção da proposta após a conceituação introdutória necessária ao entendimento básico sobre a Teoria dos Grafos verificou-se uma vasta possibilidade de conceitos possíveis de aplicação na Educação Básica, no entanto foi necessário restringir a abordagem a um único tema. A escassez de tempo foi responsável por essa restrição e tornou-se o único entrave, pois se dependesse da "paixão"do autor adquirida pelo tema, o material encontrado e o gosto pela pesquisa o trabalho tornaria-se muito mais robusto.

O tema abordado na proposta foi caminhos. A escolha baseou-se na percepção de ter sido o tema mais recorrente nas dissertações analisadas, estar mais familiar à vivência dos alunos e possibilitar a aplicação de matrizes. O fechamento da proposta foi feito com apresentação de três processos de determinação do melhor caminho o Algoritmo de Dijkstra, O Algoritimo Guloso e o Método da Exaustão, pois os mesmos são de fácil aplicação e entendimento.

Por fim o trabalho contribui para àqueles que desejarem enveredar-se na Teoria dos Grafos, descobrir sua diversidade de aplicações e a utilidade de seus conceitos e ainda quem sabe, como ocorre a maioria dos que a conhecem, ser contaminado com o que costuma-se se definir como "Graphical Desease"ou melhor dizendo "Febre dos Grafos"como citado por JURKIEWICZ [23].

Bibliografia

[1] ALVES, Robson Piacente.**Coloração de Grafos e Aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis,2015.

[2] AQUINO, Andréia Araújo de Farias.**Atividades de Modelagem Matemática Envolvendo a Teoria dos Grafos no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Maringá, Maringá, 2014.

[3] BEAN, Dale.O que é modelagem matemática?**Educação Matemática em Revista**. São Paulo, ano 8 número:9/10.2001.p.49-57.

[4] BEZERRA, Francisco Adriano Gomes.**Um Convite aos Grafos: Uma Possibilidade de Estudo no Ensino Médio**Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2015.

[5] BOAVENTURA NETTO, Paulo Osvaldo. **Grafos: Teoria, modelos,algoritmos**. São Paulo. Ed. Blucher, 2011.

[6] BOAVENTURA NETTO, Paulo Osvaldo; JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos: Introdução e prática**. São Paulo. Ed. Blucher, 2009.

[7] BRASIL.**Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza,Matemática e suas tecnologias**, vol.2.Ministério da Educação (MEC), Secretaria da Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de ensino Médio. Brasília, 2006.

[8] BRASIL.**Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Ministério da Educaçã-MEC, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Brasília, 1999.

[9] BRASIL. **PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais Complementares aos parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC, 2002.

[10] BRASIL. **Por uma política curricular para educação básica: contribuição ao debate da base nacional comum a partir do direito à aprendizagem e ao desenvolvimento**. Versão Preliminar. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2014.

[11] BRITO, Adriana Priscila de. **Grafos, a Fórmula de Euler e os Poliedros Regulares**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2014.

[12] BRITTO, Marta Aparecida Ferreira de Oliveira.**Matrizes: Propostas de Aplicação no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014.

[13] CARDOSO, Célio da Silva. **Grafos e Aplicações, em sala de aula**. Trabalho de Conclusão de curso (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal de Saõ João del-Rei, São João del-Rei,2014.

[14] D'AMBROSIO, Ubiratan.Desafios da Educação Matemática no novo milênio.**Educação Matemática em Revista**. São Paulo, ano 8 número:11.2001.p.14-17.

[15] ESPRITO SANTO(Estado).**Currículo Básico Escola Estadual**, vol. 2 . Secretaria da Educação Ensino médio : área de Ciências da Natureza / Secretaria da Educação, Vitória, 2009.

[16] FERREIRA, Verônica Craveiro de Santana. **De Grafos a Emparelhamentos: Uma Possibilidade Viável de Encantar-se com a Matemática**. Dissertação

(Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2014.

[17] FONTE, Carla Cristina.**Introdução aos Grafos no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

[18] FROIS JUNIOR, Divalde Luiz.**O Teorema das Cinco Cores**. Trabalho de Conclusão de curso (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal de Saõ João del-Rei, São João del-Rei,2014.

[19] GOMES, Alessandro de Araújo.**Grafos: Uma Experiência no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.Seropédica, 2015.

[20] GONÇALVES, Diego Rodrigues. **Um Estudo Introdutório da Teoria de Grafos Através de Matrizes**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

[21] GONÇALVES, Horetência de Abreu. **Manual de monografia, dissertação e tese**. São Paulo. Ed. Avercamp.2004.124 p.

[22] GUEDES, Victor Emanuel Pinto. **Uma Abordagem Para o Ensino de Teoria dos Grafos no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2014.

[23] JURKIEWICZ, S. **Grafos: uma introdução**. Apostila 5 do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), 2009. Disponível em: ¡http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf ¿. Acesso em: 28 abril 2016.

[24] LELLIS, Marcelo; IMENES, Luiz Márcio. A Matemática e o novo ensino médio.**Educação Matemática em Revista**. São Paulo, ano 8 número:9/10.2001.p.40-48.

[25] LIBÂNEO, José Carlos.**Didática.**(Coleção magistério. Série formação do professor)- São Paulo, Editora Cortez, 1994.

[26] LIMA, José Fábio de Araújo.**Modelagem e Resolução de Problemas por meio de Grafos: Aplicações no Ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2014.

[27] MAGALHÃES, Tiago Miranda de.**Grafos como Ferramenta de Ensino de Matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2014.

[28] MALTA, G. H. S. **Grafos no Ensino Médio: Uma Inserção Possível**. 2008.Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) -Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008.

[29] MARTINS, Gizele Justino Diniz.**Grafos: Definições Elementos e Método Probabilísticos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

[30] MAURI, Rone.**Uma Abordagem da Teoria de Grafos no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Espírito, Vitória, 2013.

[31] MELO, Gildson Soares de.**Introdução à Teoria dos Grafos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

[32] MELO, Henrique Alves de. **Fórmula de Euler no Plano e Para Poliedros**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

[33] MONTEIRO, Silvia Helena da Gama. **Modelagem Matemática e Recursos Computacionais: Uma Proposta Para A Teoria de Grafos no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2015.

[34] MORI,Ricardo de Almeida.**GRAFOS: Planaridade e Projeto de Ensino**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015.

[35] NOGUEIRA, Daniel Klug.**Introdução a Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Brasília, Brasília, 2015.

[36] OLIVEIRA, Maxsuel Gonçalves de. **Grafos e Aplicações para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

[37] ROCHA, Iara Cristina Bazan da.Formação para Exclusão ou para Cidadânia?.**Educação Matemática em Revista**. São Paulo, ano 8 número:9/10.2001.p.22-31.

[38] SILVA, Alan Marcelo Oliveira da Silva.**Grafos: Uma Experiência no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ,2015.

[39] SILVA, Alison Quiroz. **Grafos: Uma Ferramenta Possível e Necessária na Educação Básica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2015.

[40] SOUZA, Audemir Lima de **Teoria dos Grafos e Aplicações**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2013.

[41] SOUZA,Marcelo Alves. **Grafos no Ensino Básico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015.

[42] SOUZA, Michel Guerra de.**Possibilidades em Grafos Hamiltonianos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) -Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

[43] SOUZA, Renato Ferreira.**Resolução de Problemas via Teoria de Grafos**. Dissertação(Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de São Carlos, São Carlos, 2014.

[44] VASCONCELOS, Luis Anselmo dos Santos.**Teorema de Euler para Grafos Planares**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, SE, 2013.

[45] VULCANI, Renata de Lacerda Martins.**Grafos Eulerianos e aplicações**. - Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015.